ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2

Generalized beauty: the sum of the square of the numbers that every digit is 3 and the numbers that every digit is 2

ณัฏฐณิชา ถือแก้ว[1], จารุวัฒน์ ซ้อมจันทา[2], อัยเรศ เอี่ยมพันธ์[3]

Natthanicha Theukaew[1], Jaruwat Somjanta[2], Aiyared Iampan[3]

Received: 31 October 2013 ; Accepted: 31 January 2014

บทคัดย่อ

จุดประสงค์หลักของบทความนี้เพื่อนำเสนอรูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลบวกดังกล่าว ดังนี้

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot n}$$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

คำสำคัญ: ผลบวก กำลังสอง จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2

Abstract

The main aim of this article is to present a general form of the sum of the square of the numbers that every digit is 3 and the numbers that every digit is 2 . The results show that a general form of this sum is

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot n}$$ for all positive integer n.

Keyword: sum, square, number that every digit as 3, number that every digit as 2

บทนำ

การหาผลลัพธ์ทางพีชคณิตของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ นั้น นับว่าเป็นเรื่องที่มีความยุ่งยากเป็นอย่างมาก แม้ว่าจะมีเครื่องคิดเลข แต่บางครั้งเครื่องคิดเลขก็ไม่สามารถคำนวณค่าที่ถูกต้องได้ ด้วยเหตุนี้ หากเรามีสูตรในการคำนวณก็จะช่วยให้การหาผลลัพธ์ทางพีชคณิตสะดวกยิ่งขึ้น จากการสังเกตเห็นรูปแบบของผลลัพธ์ทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนหลายหลัก ที่ทุกหลักเป็นเลข 2 และเลข 3 ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป ดังนั้นบทความนี้ผู้เขียนจะแสดงความสัมพันธ์และนำเสนอรูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 เช่น $(333333)^2 + 222222$

สำหรับการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตบางอย่างของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขเดียวกันนั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ดังนี้ สำหรับการศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่ากำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n})^2=123\ldots(n-1)n(n-1)\ldots321$$

[1,2] นิสิตปริญญาตรี, [3]ผู้ช่วยศาสตราจารย์, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

[1,2] Bachelors degree [3]Assist. Prof Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

[3] Corresponding author: E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

ธีระยุทธ และ อัยเรศ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+n\leq 9$ จะได้ว่า

$$mn\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}=m\underbrace{(m+n)(m+n)\ldots(m+n)}_{\#(m+n)=k-1}n$$

กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+1=t, m+n={}_{r}s$ และ $10\leq m+n\leq 18$ จะได้ว่า

$$mn\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=k}=(m+1)\underbrace{(r+s)(r+s)\ldots(r+s)}_{\#(r+s)=k-2}sn$$

แสงประทีป และ อัยเรศ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด 3, 9) กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 6 (เลขโดด 3, 9) โดยได้พบว่าผลบวกของกำลังสองนี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n})^2+\underbrace{666\ldots6}_{\#(6)=n}=\underbrace{444\ldots4}_{\#(4)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n},$$

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}$$

และ $$(\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n})^2+\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}=\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$$

นิคม และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของของผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน โดยในกรณีเฉพาะเป็นจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n และ p เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=p}\times n=\underbrace{nnn\ldots n}_{\#(n)=p}$$

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=p}\times(-n)=\underbrace{(-n)(-n)(-n)\ldots(-n)}_{\#(-n)=p}$$

ธีระยุทธ และ อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ q,p,q และ r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qpsr={}_{q}p\|sr$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n\geq 2$ จะได้ว่า

$${}_{q}p\|{}_{s}r\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}={}_{q}p\,{}_{q}p\underbrace{({}_{q}p(\;\;{}_{s}r)({}_{q}p(\;\;{}_{s}r)({}_{q}p(\;\;{}_{s}r)\ldots({}_{q}p(\;\;{}_{s}r)}_{\#({}_{q}p(\;\;{}_{s}r)=n-2}{}_{s}r\,{}_{s}r$$

อัยเรศ (2556) ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่าความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n\geq 2$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=n}=9\times\left[123\ldots(n-3)(n-2)(n-1)\right]+n$$

กรกนก และ อัยเรศ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$n\times 9\times\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=m}=(n-1)\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=m-1}(10-n)$$

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b\neq 0$ แล้ว มีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a=b\cdot q+r \text{ และ } 0\leq r<|b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้ (1) $P(n_0)$ เป็นจริง (2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร (อัยเรศ, 2554) และ (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10\cdot q+r$ และ $0\leq r<10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม $a={}_{q}r$ (1) เช่น

$0={}_{0}0$	$20={}_{2}0$	$60={}_{6}0$	$180={}_{18}0$	$200={}_{20}0$
$1={}_{0}1$	$21={}_{2}1$	$61={}_{6}1$	$181={}_{18}1$	$201={}_{20}1$
$2={}_{0}2$	$22={}_{2}2$	$62={}_{6}2$	$182={}_{18}2$	$202={}_{20}2$
$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$
$9={}_{0}9$	$29={}_{2}9$	$69={}_{6}9$	$189={}_{18}9$	$209={}_{20}9$

และ

$0={}_{0}0$	$-20={}_{-2}0$	$-60={}_{-6}0$	$-180={}_{-18}0$	$-200={}_{-20}0$
$-1={}_{-1}9$	$-21={}_{-3}9$	$-61={}_{-7}9$	$-181={}_{-19}9$	$-201={}_{-21}9$
$-2={}_{-1}8$	$-22={}_{-3}8$	$-62={}_{-7}8$	$-182={}_{-19}8$	$-202={}_{-21}8$
$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$
$-9={}_{-1}1$	$-29={}_{-3}1$	$-69={}_{-7}1$	$-189={}_{-19}1$	$-209={}_{-21}1$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_{0}r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0\leq r<10$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ ${}_{\mathrm{z}}\mathrm{R}$ แทนเซตของจำนวนใน ทั้งหมด นั่นคือ

$$ {}_{\mathrm{z}}\mathrm{R}=\{{}_{q}r \mid r,q\in \mathrm{z} \text{ และ } 0\leq r<10\} \qquad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_{\mathrm{z}}\mathrm{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ (remainder number) จากการแปลงเลขฐานสิบใน นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_{q}r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $189_{15}721_{9}3_{35}584_{64}02$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
189_{15}721_{9}3_{35}584_{64}02 &= 18(9+15)72(1+9)(3+35)58(4+64) \\
&= 18(24)72(10)(38)58(68)02 \\
&= 18_{2}472_{1}0_{3}858_{6}802 \\
&= 1(8+2)47(2+1)(0+3)85(8+6)802 \\
&= 1(10)473385(14)802 \\
&= 1_{1}0473385_{1}4802 \\
&= (1+1)047338(5+1)4802 \\
&= 204733864802
\end{aligned}
$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก ดังนั้นบทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน ${}_{\mathbf{z}}\mathrm{R}$ โดย

$$
{}_{q}r \,(\; {}_{t}s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \le r+s \le 9 \\ {}_{(q+t)+b}a \;; & r+s \ge 10, r+s = {}_{b}a \end{cases}
$$

สำหรับทุก ${}_{q}r, {}_{t}s \in {}_{\mathbf{z}}\mathrm{R}$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $n = {}_{q}r$ แล้ว

$$
-n = \begin{cases} {}_{-q}0 & ; \; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; \; r \ne 0 \end{cases} \qquad (3)
$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับบทความนี้ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ และ อัยเรศ, 2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, m \in \mathbf{Z}$ ซึ่ง $0 \le s_i \le 9$ จะได้ว่า

$$
{}_{m}s_1 s_2 s_3 \ldots s_n = m \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \ldots s_n
$$

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตเราพบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ดังนี้

$$
\begin{array}{lccccccl}
\#(3)=\#(2)=1: & 3^2 & + & 2 & = & 11 & :\#(1)=2 & \\
\#(3)=\#(2)=2: & (33)^2 & + & 22 & = & 1111 & :\#(1)=4 & \\
\#(3)=\#(2)=3: & (333)^2 & + & 222 & = & 111111 & :\#(1)=6 & \\
\#(3)=\#(2)=4: & (3333)^2 & + & 2222 & = & 11111111 & :\#(1)=8 & \\
\#(3)=\#(2)=5: & (33333)^2 & + & 22222 & = & 1111111111 & :\#(1)=10 & (5) \\
\#(3)=\#(2)=6: & (333333)^2 & + & 222222 & = & 111111111111 & :\#(1)=12 & \\
\#(3)=\#(2)=7: & (3333333)^2 & + & 2222222 & = & 11111111111111 & :\#(1)=14 & \\
\#(3)=\#(2)=8: & (33333333)^2 & + & 22222222 & = & 1111111111111111 & :\#(1)=16 & \\
\#(3)=\#(2)=9: & (333333333)^2 & + & 222222222 & = & 111111111111111111 & :\#(1)=18 &
\end{array}
$$

จากความสัมพันธ์ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

$$
(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2 + \underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n} = \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\times n}
$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ ซึ่งเราได้สังเกตพบว่าผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ที่ได้จะเป็นจำนวน 2 x n หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลบวกที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ ที่เราพบหรือไม่

บทตั้งต่อไปนี้มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 2 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})^2 = 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot n}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})^2 &= (3\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})^2 \\ &= 3^2\cdot(1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})^2 \\ &= 9\cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot n} \\ &= 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot n}\end{aligned}$$

ดังนั้น $(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})^2 = 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 1 จงหาผลลัพธ์ของ $(3\underbrace{000\ldots0})^2$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 2 จะได้ว่า $(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=15})^2 = 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=30}$

ตรวจคำตอบ

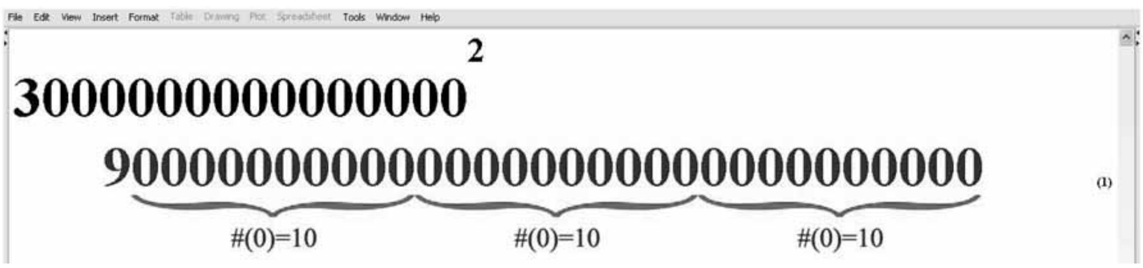

Figure 1 $(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=15})^2$

บทตั้ง 3 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $2\cdot(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}) = 1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&2\cdot(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}) \\ &= 6\cdot(1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}) \\ &= 6\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}) \\ &= \underbrace{(18)(18)(18)\ldots(18)}_{\#(18)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} \\ &= \underbrace{{}_18{}_18{}_18\ldots{}_18}_{\#({}_18)=n}\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n} \\ &= 1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$2\cdot(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n}) = 1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=n-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ

$$2\cdot(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=15})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=15})$$

วิธีทำ โดยบทตั้ง 3 จะได้ว่า

$$2\cdot(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=15})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=15}) = 1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=14}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=15}$$

ตรวจคำตอบ

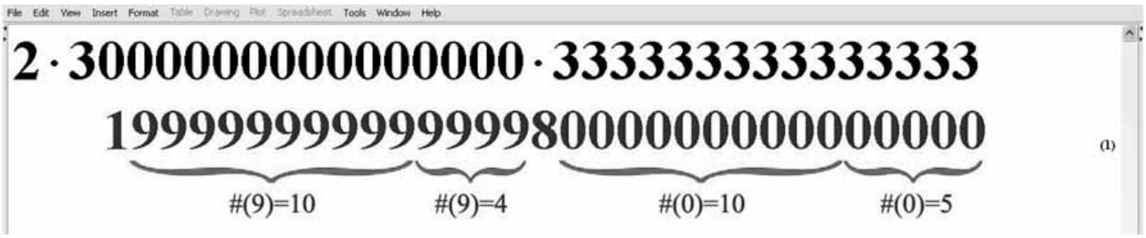

Figure 2 $2\cdot(3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=15})\cdot(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=15})$

จากบทตั้ง 2 และ 3 นำไปสู่ทฤษฎีบทหลักของบทความนี้ ซึ่งจะตอบข้อสงสัยข้างต้นของเราได้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot n} \qquad (6)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n
เนื่องจาก $\underbrace{3}_{\#(3)=1}{}^2+\underbrace{2}_{\#(2)=1}=\underbrace{11}_{\#(1)=2\cdot1=2}$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง กำหนดให้ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=k})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=k+1})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k+1} &= (3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=k})^2+2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k} \\
&= (3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k})^2+2\cdot3\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}\cdot\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=k}+2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=k})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=k} \\
&= 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}8\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} && \text{(บทตั้ง 2 และ 3)} \\
&= 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}(10)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} && \text{(สมมติฐาน)} \\
&= 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+1\underbrace{999\ldots9}_{\#(9)=k-1}({}_1 0)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k-1}0\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= 9\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+2\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= (11)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= {}_1 1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= 11\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=2\cdot k}+\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= 11\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k} \\
&= \underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot k+2=2\cdot(k+1)}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างที่ 3 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 จงหาผลลัพธ์ของ

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=9})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=9}$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=9})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=9}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=18}$$

ตรวจคำตอบ

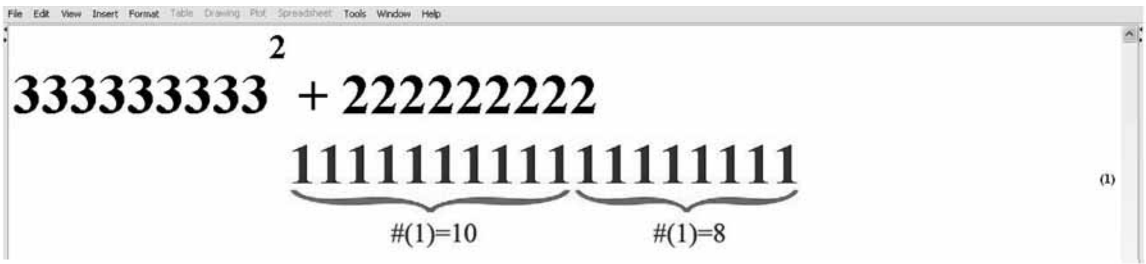

Figure 3 $(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=9})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=9}$

ตัวอย่าง 4 จงหาผลลัพธ์ของ

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=50})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=50}$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=50})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=50}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=100}$$

ตรวจคำตอบ

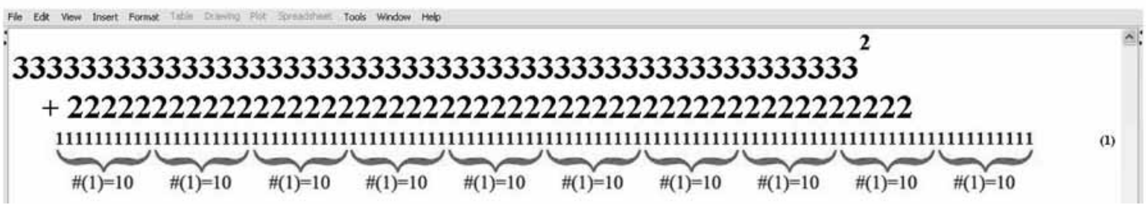

Figure 4 $(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=50})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=50}$

บทสรุป

จากการศึกษาผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$(\underbrace{333\ldots3}_{\#(3)=n})^2+\underbrace{222\ldots2}_{\#(2)=n}=\underbrace{111\ldots1}_{\#(1)=2\cdot n}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) รูปทั่วไปของผลบวกของกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 2 ที่ได้นั้นมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ ที่เราสังเกตพบ

จากการสังเกตผลบวกของกำลังสองของจำนวน n หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 3 กับจำนวน n หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 2 เมื่อ $n=1,2,3,\ldots,9$ จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ตามทฤษฎีบท 4 ซึ่งนับได้ว่ารูปทั่วไปนี้เป็นการวางนัยทั่วไป (generalization) จากการสังเกตของเรา จากผลการศึกษาของบทความนี้และบทความอื่นๆ ที่ได้กล่าวถึง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่างๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจ

ของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าน่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่างๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่านสำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

1. กรกนก ชุมภูรัตน์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา 2557;7(1). อยู่ระหว่างการตีพิมพ์.
2. ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. วารสารนเรศวรพะเยา 2556;6(1):25-30.
3. ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม 2555;8(15-16):1-10.
4. ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร 2556;5(10):61-71.
5. นิคม หวลอารมณ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนเต็มใดๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน. วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ 2556;16(1):51-58.
6. แสงประทีป นนกระโทก และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลบวกของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6 กับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 6. วารสารวิทยาศาสตร์แห่งมหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี 2555;9(1):80-90.
7. อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์ 2556;8(2):48-58.
8. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา 2554;4(2):29-35.
9. อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 2556;41(4):919-927.
10. Clark, W. E. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida; 2002.