

บทที่ 3

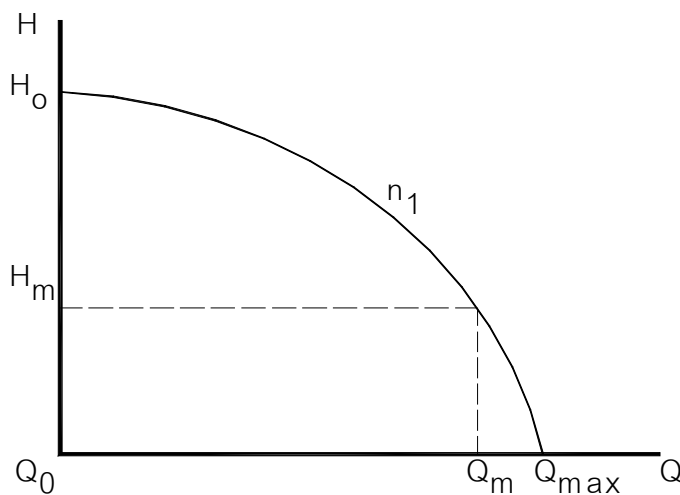
วิธีการวิจัย

วิธีการวิจัยจะเริ่มจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเส้นโค้งของเฮดปั๊ม และประสิทธิภาพของปั๊มจากค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการทดสอบปั๊ม จากนั้นจะทำการสร้างสมการของเส้นโค้งของระบบ (System Curve) และนำสมการของปั๊มและระบบที่ได้ไปแก้สมการก็จะทราบค่าของอัตราการไหลและพลังงานของปั๊มที่จุดทำงาน

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปั๊ม

ขั้นตอนแรกทำการหาค่าพารามิเตอร์นำไปใช้งานร่วมกับแบบจำลองที่ความเร็วรอบคงที่เท่ากับ n_1 มีดังต่อไปนี้

ก. ค่าเฮดสูงสุดสมมุติกำหนดให้เป็น H_0 และอัตราการไหลที่จุดนี้สมมุติเป็น Q_0 และค่าเป็นศูนย์ตามรูปที่ 5



รูปที่ 5 เส้นโค้งการทำงานของปั๊ม

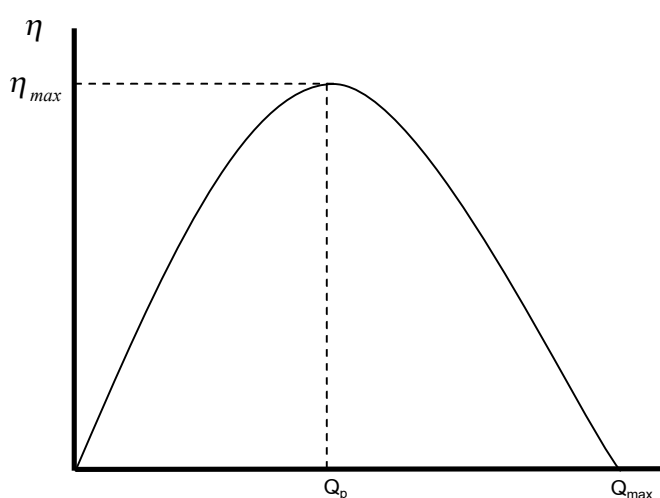
ข. ค่าอัตราการไหลสูงสุด โดยที่จุดนี้ค่าเฮดจะมีค่าเท่ากับศูนย์และอัตราการไหลจะมีค่าสูงสุดกำหนดให้เป็น Q_{max} หรือในทางปฏิบัติการวัดค่า Q_{max} ทำได้ยากอาจวัดค่า Q_m ดังแสดงในรูปที่ 5 โดยพยายามทำให้ H_m มีค่าต่ำที่สุดทำได้โดยเปิดวาล์วในระบบให้เต็มที่

ค. ประสิทธิภาพสูงสุด η_{max} หาได้โดยการวัดค่าอัตราการไหล Q ค่าเฮดของปั๊ม H และค่าพลังงานไฟฟ้าที่จ่ายให้ปั๊ม P ดังนั้นประสิทธิภาพของปั๊มหาได้จาก

$$\eta_{pump} = \frac{QH_f}{P} \quad (13)$$

โดยที่ γ คือน้ำหนักจำเพาะของน้ำ

รูปที่ 6 แสดงให้เห็นจุด η_{max} จะอยู่ที่ตำแหน่งประมาณต่ำกว่าค่าเฮดสูงสุด 10-20% (สุมาลี ไชยิตาพันธ์ 2544, น.20)



รูปที่ 6 เส้นโค้งประสิทธิภาพของปั๊ม

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปั๊ม

ต่อไปนี้จะเป็นการหาแบบจำลองของเฮดของปั๊มและประสิทธิภาพที่ความเร็วรอบต่างๆดังต่อไปนี้

3.1.1 สมการเฮดที่ความเร็วรอบ n_1

รูปที่ 5 แสดงเส้นโค้งสมรรถนะของปั๊มที่ความเร็วรอบหนึ่งสมมุติเป็น n_1 เป็นกราฟพาราโบลา ที่ค่าเฮดสูงสุดอยู่ที่จุด H_o และที่จุดนี้อัตราการไหลจะมีค่าเป็นศูนย์ อัตราการไหลมีค่าสูงสุด Q_{max} และเฮดที่จุดนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยสมมุติสมการ H ของปั๊มเป็นดังนี้

$$H = aQ^2 + bQ + c \quad (14)$$

เนื่องจาก $H = H_o$ ที่ $Q = 0$ ดังนั้น

$$c = H_o \quad (15)$$

ที่ $Q = 0$ ความชันของเส้นโค้งจึงมีค่าเป็นศูนย์ดังนั้น

$$b = 0 \quad (16)$$

และที่อัตราการไหลมีค่าสูงสุด $H = 0$ แทนค่าในสมการ (14) เป็น

$$aQ_{\max}^2 + c = 0 \quad (17)$$

แทนค่า c จากสมการ (12) ลงในสมการ (14) และแก้สมการหาค่า a

$$a = -\frac{H_o}{Q_{\max}^2} \quad (18)$$

รูปที่ 5 เมื่อทราบค่า Q_m , H_m โดยที่ H_m คือค่าเฮดของปั๊มโดยวัดค่าจากจุดใด ๆ บนความเร็วรอบ n_1 โดยค่าอัตราการไหลที่จุดนี้มีค่าอัตราการไหลเท่ากับ Q_m ดังนั้นที่จุดนี้จะเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} H_m &= a Q_m^2 + b Q_m + c \\ H_m &= a Q_m^2 + H_o \\ a &= \frac{H_m - H_o}{Q_m^2} \end{aligned} \quad (19)$$

สำหรับ c และ b ยังคงมีค่าเท่ากับสมการ (15) และ (16) ตามลำดับ

3.1.2 สมการประสิทธิภาพของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_1

ต่อไปนี้เป็น การหาสมการของประสิทธิภาพของปั๊ม รูปที่ 6 จะเห็นว่าประสิทธิภาพจะมีค่าเป็นศูนย์ที่อัตราการไหลมีค่าเท่ากับศูนย์ และที่จุดที่ค่าของอัตราการไหลมีค่าสูงสุด $Q_{\max}$ นอกจากนี้ประสิทธิภาพมีค่าสูงสุดเท่ากับ $\eta_{\max}$ ณ จุดที่มีอัตราการไหลเท่ากับ Q_P และที่จุดนี้ความชันของเส้นโค้งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจึงมีเงื่อนไขทั้งหมด 4 เงื่อนไขจึงสมมุติประสิทธิภาพเป็นสมการกำลัง 3 ดังนี้

$$\eta = fQ^3 + gQ^2 + hQ \quad (20)$$

สัมประสิทธิ์ f, g, h ได้จากการแก้สมการต่อไปนี้

$$fQ_{\max}^3 + gQ_{\max}^2 + hQ_{\max} = 0 \quad (21)$$

$$fQ_P^3 + gQ_P^2 + hQ_P = \eta_{\max} \quad (22)$$

$$3fQ_P^2 + 2gQ_P + h = 0 \quad (23)$$

ผลเฉลยของสมการ (21) ถึง (23) คือ

$$h = \frac{\eta_{\max} (2Q_{\max}^3 - 3Q_P Q_{\max}^2)}{(Q_P Q_{\max}^3 - 2Q_P^2 Q_{\max}^2 + Q_P^3 Q_{\max})} \quad (24)$$

$$g = \frac{3\eta_{\max}}{Q_P^2} - 2 \left(\frac{\eta_{\max} (2Q_{\max}^2 - 3Q_P Q_{\max})}{Q_P^2 Q_{\max}^2 - 2Q_P^3 Q_{\max} + Q_P^4} \right) \quad (25)$$

$$f = - \frac{(gQ_{\max} + h)}{Q_{\max}^2} \quad (26)$$

3.1.3 สมการเฮดที่ความเร็วรอบ n_2

ที่ผ่านมามีที่พิจารณาอยู่ ทำงานที่ความเร็วรอบ n_1 ขั้นตอนต่อไปเป็นการหาสมการเมื่อต้องการปรับลดความเร็วรอบของปั๊มสมมุติเป็น n_2 ซึ่งในขั้นตอนนี้สมการตามกฎของปั๊ม ยังคงใช้ได้อย่างถูกต้องอยู่เพราะเรากำลังหาสมการของตัวเอง ซึ่งสมการเฮดของปั๊มจะลดลงตามอัตราส่วนความเร็วที่ลดลงยกกำลังสองดังนี้

$$\frac{H'}{H} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \quad (27)$$

โดยที่ H คือเฮดที่ความเร็วรอบ n_1 และ H' คือเฮดที่ความเร็วรอบ n_2 ส่วน Q เป็นอัตราการไหลที่ความเร็วรอบ n_1 การลดอัตราการไหลโดยปรับลดความเร็วรอบลงเป็น n_2 ตามสมการกฎของปั๊ม จะทำให้ได้สมการดังนี้

$$\frac{Q'}{Q} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (28)$$

โดยที่ Q' เป็นค่าอัตราการไหลที่ความเร็ว n_2 และพลังงานจะมีค่าลดลงตามอัตราส่วนของอัตราการไหลยกกำลัง 3 ดังนี้

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^3 \quad (29)$$

โดยที่ P' เป็นพลังงานที่ความเร็วรอบ n_2 นำสมการ (27) และ (28) แทนในสมการ (14) และให้

$$n = \frac{n_2}{n_1} \quad (30)$$

จะได้

$$\frac{H'}{n^2} = a \left(\frac{Q'}{n} \right)^2 + b \left(\frac{Q'}{n} \right) + c \quad (31)$$

แต่เนื่องจาก $b = 0$ จากสมการ (16) สมการเฮดของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_2 จึงกลายเป็น

$$H' = aQ'^2 + c' \quad (32)$$

โดยที่ $c' = c . n^2$

สมการ (32) คือสมการแบบจำลองของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_2 และใช้ได้กับความเร็วใดๆตลอดช่วงของอัตราการไหลมีค่าระหว่าง $Q = 0$ ถึง $Q = Q_{max}$ สังเกตว่าถ้า $n_2 = n_1$ แล้วสมการ (32) จะเท่ากับสมการ (14)

3.1.4 สมการประสิทธิภาพของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_2

ด้วยหลักการเดียวกันสามารถหาสมการประสิทธิภาพที่ความเร็วรอบใดๆเทียบกับความเร็วรอบ n_1 โดยแทนสมการ (28) ในสมการ (20) จะได้

$$\eta' = f\left(\frac{Q'}{n}\right)^3 + g\left(\frac{Q'}{n}\right)^2 + h\left(\frac{Q'}{n}\right)$$

โดยให้
$$h' = \frac{h}{n} \quad (33)$$

$$g' = \frac{g}{n^2} \quad (34)$$

$$f' = \frac{f}{n^3} \quad (35)$$

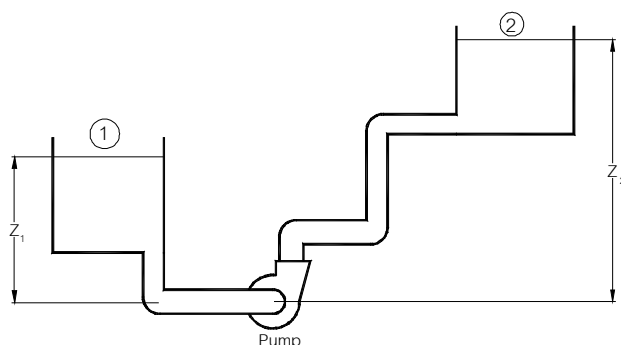
ดังนั้นสมการประสิทธิภาพที่ความเร็วรอบใดๆคือ

$$\eta' = f'Q'^3 + g'Q'^2 + h'Q' \quad (36)$$

3.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ

ต่อไปนี้เป็น การหาสมการเฮดรวมของระบบ (Total System Head) เฮดรวมของระบบคือพลังงานของระบบท่อที่ต้องการจากปั๊มเพื่อให้ของไหลเคลื่อนที่ตามอัตราการไหลที่ต้องการ ของไหลที่เคลื่อนที่ในระบบท่อจะมีทั้งพลังงานความดัน พลังงานศักย์ พลังงานจลน์ และพลังงานสูญเสียเนื่องจากความเสียดทาน โดยพลังงานทั้ง 4 สามารถ เปลี่ยนรูปไปมาได้ตามกฎการทรงพลังงานหรือตามสมการของเบอร์นูลลีมีหน่วยเป็นระยะความสูงดังแสดงในรูปที่ 7 ซึ่งมีสมการเป็น

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L \quad (37)$$



รูปที่ 7 รูปจำลองของระบบปั๊มที่มีค่าความเสียดทานและเฮดสถิต

$P/\rho g$ คือเฮดความดันที่ผิวหน้าของของเหลว $V^2/2g$ คือเฮดความเร็วที่ผิวหน้าของของเหลว z คือเฮดสถิตวัดจากระยะอ้างอิง ρ คือความหนาแน่นของของเหลว g คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก โดยตัวเลข 1 และ 2 คือทิศทางเข้าและออกของปั๊มตามลำดับ h_L เป็นเฮดสูญเสียเนื่องจากความเสียดทานในระบบท่อและ H เป็นเฮดรวมของระบบ (Total System Head) เป็นพลังงานที่ระบบต้องการดังนั้นผลรวมของพลังงานของระบบที่ทางเข้าและออกก็คือค่าเฮดรวมของระบบเขียนสมการได้ดังนี้

$$H_{sys} = \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} + \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2g} + (z_2 - z_1) + h_L \quad (38)$$

h_L เป็นเฮดเนื่องจากความเสียดทานทำให้เกิดความดันตกในระบบมีค่าเท่ากับ $\Delta p/\rho g$ โดยเกิดจากสาเหตุต่างๆดังนี้

(1) การสูญเสียความดันจากความเสียดทานของท่อสมการคือ

$$\Delta p = \rho \left(\frac{fL}{D} \right) \frac{V^2}{2} \quad (39)$$

f เป็นแฟกเตอร์เนื่องจากความเสียดทานขึ้นอยู่กับสภาพผิวท่อ L คือความยาวของท่อ V คือความเร็ว และ D คือเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ

(2) การสูญเสียความดันจากทางเข้า, ทางออก, วาล์วและข้อต่อ มีสมการดังนี้

$$\Delta p = \rho k \frac{V^2}{2} \quad (40)$$

k คือแฟกเตอร์เนื่องจากการสูญเสียความดันจากทางเข้า, ทางออก, วาล์วและข้อต่อหาข้อมูลได้จากผู้ผลิต ผลรวมของสมการ (39) และ (40) คือ h_L ในสมการ (38)

สมการ (38) ทำให้อยู่ในรูปตัวแปรของอัตราการไหลได้ดังนี้

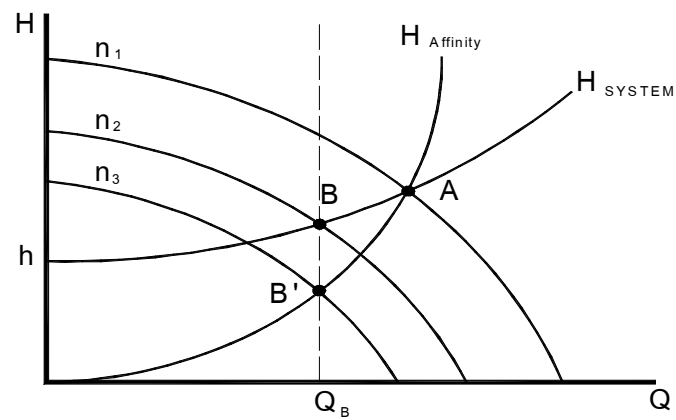
$$H_{sys} = \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} + (z_2 - z_1) + \left(\frac{1}{2gA_2^2} - \frac{1}{2gA_1^2} \right) Q^2 + kQ^2 \quad (41)$$

จะสังเกตได้ว่าสมการ (41) เป็นสมการกำลังสองจุดทำงานของระบบคือค่า H และ Q ที่ได้จากการแก้สมการ (41) ร่วมกับ (14) หรือ (32) เทอมผลต่างของ $Q^2/2gA^2$ มีผลน้อยมากและไม่นำมาพิจารณา ค่า k เป็นพารามิเตอร์ของความเสียดทานนอกจากประเมินจากข้อมูลของบริษัทผู้ผลิตแล้วยังสามารถหาได้จากการวัดค่าการทำงานของระบบสูบที่จุดใดจุดหนึ่ง จากสมการ (41) ถ้าเราทราบค่าผลต่างของ P และ z ซึ่งเป็นค่าคงที่ของระบบ โดยสมมุติผลรวมของ P และ z คือ h ดังนั้นสมการ (41) จะเป็น

$$H_{sys} = h + kQ^2 \quad (42)$$

โดยที่ H_{sys} เป็นค่าผลต่างความดันของปั๊มที่ทางเข้า-ออกของปั๊ม

สมมุติว่าจุด A ในรูปที่ 8 คือจุดทำงานซึ่งเป็นจุดที่เส้นโค้งระบบตัดกับเส้นโค้งสมรรถนะของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_1 ซึ่งต้องการลดอัตราการไหลไปยัง Q_B จุดที่เส้นโค้งระบบตัดกับเส้นโค้งของปั๊มที่จุดใหม่ต้องเป็นจุด B และมีความเร็วรอบเท่ากับ n_2 แต่ถ้าใช้สมการ Affinity Law คำนวณหาค่าอัตราการไหล Q_B จุดทำงานจุดใหม่จะเป็นจุด B' ซึ่งพบว่าความเร็วรอบที่จุด B' นี้คือ n_3 ซึ่งน้อยกว่าความเร็วรอบ n_2 ที่จุด B ซึ่งแสดงให้เห็นว่าถ้าคำนวณค่าการใช้พลังงานที่จุดนี้ ด้วยสมการ Affinity Law จะให้ค่าน้อยกว่าความเป็นจริง การหาจุดทำงาน B จะหาได้ต้องอาศัยเส้นโค้งการทำงานของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_2 แต่ถ้าไม่มีเส้นโค้งของปั๊มที่ความเร็วรอบ n_2 ที่ผ่านมาจะไม่สามารถคำนวณค่าที่จุดทำงานนี้ได้โดยตรง แต่ขณะนี้เรามีสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 3.1 สามารถนำมาใช้คำนวณค่าที่จุดทำงานได้โดยตรง ค่า H' ในสมการ (32) เท่ากับ H_{sys} ในสมการ (42) ดังนั้น



รูปที่ 8 จุดทำงานของเส้นโค้งสมรรถนะและเส้นโค้งระบบ

$$(a - k)Q'^2 + (c' - h) = 0 \quad (43)$$

เมื่อแก้สมการ (43) แล้วจะได้ Q' ที่จุดทำงานของระบบปั๊ม และสามารถนำค่านี้ไปใช้แทนค่าในสมการ (20) หรือ (36) ก็จะทราบค่าประสิทธิภาพของปั๊มต่อไป