วิทยานิพนธ์

การแยกตัวประกอบแบบมุขสำคัญบูลีนในพีชคณิตบูลีน

BOOLEAN PRINCIPAL FACTORIZATIONS IN

BOOLEAN ALGEBRAS

นายวิทวัส พันธวิมล

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พ.ศ. 2549

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

ปริญญา

คณิตศาสตร์	คณิตศาสตร์
สาขา	**ภาควิชา**

เรื่อง การแยกตัวประกอบแบบมุขสำคัญบูลีนในพีชคณิตบูลีน

Boolean Principal Factorizations in Boolean Algebras

นามผู้วิจัย นายวิทวัส พันธวิมล

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์อุษณีย์ ลีรวัฒน์, วท.ด.)

กรรมการ

(อาจารย์กนกรัตน์ เศวตเศรนี, Ph.D.)

กรรมการ

(รองศาสตราจารย์เปรมใจ ตรีสรานุวัฒนา, M.Stat)

หัวหน้าภาควิชา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์อุษณีย์ ลีรวัฒน์, วท.ด.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์วินัย อาจคงหาญ, M.A.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ 15 **เดือน** พ.ค. **พ.ศ.** 2549

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การแยกตัวประกอบแบบมุขสำคัญบูลีนในพีชคณิตบูลีน

Boolean Principal Factorizations in Boolean Algebras

โดย

นายวิทวัส พันธวิมล

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
พ.ศ. 2549

ISBN 974-16-1749-6

วิทวัส พันธวิมล 2549: การแยกตัวประกอบแบบมุขสำคัญบูลีนในพีชคณิตบูลีน ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ประธานกรรมการที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์อุษณีย์ ลีรวัฒน์, วท.ด. 119 หน้า
ISBN 974-16-1749-6

จุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้ เพื่อสร้างการแยกตัวประกอบในพีชคณิตบูลีนอีกแบบหนึ่ง โดยอาศัยอุดมคติมุขสำคัญบูลีนกับตัวกรองมุขสำคัญบูลีน

งานวิจัยค้นพบ

(1) เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการมีกลุ่มตัวประกอบที่จำเป็นและตัวประกอบที่ไม่จำเป็น

(2) เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการสลับที่ตัวประกอบที่จำเป็นกับตัวประกอบที่ไม่จำเป็น

วิทวัส พันธวิมล

ลายมือชื่อนิสิต

ลายมือชื่อประธานกรรมการ

8 / พ.ค. / 2549

Witthawas Phanthawimol 2006: Boolean Principal Factorizations in Boolean Algebras. Master of Science (Mathematics), Major Field: Mathematics, Department of Mathematics. Thesis Advisor: Assistant Professor Utsanee Leerawat, Ph.D.
119 pages.
ISBN 974-16-1749-6

The purpose of this research are to establish a factorization in Boolean Algebra by using Boolean principal ideal and Boolean principal filter.

The research finds:

(1) A necessary and a sufficient condition for the existence of essential factors and inessential factors.

(2) A necessary and a sufficient condition for the commutative of factors.

Witthawas Phanthawimol   May / 8 / 2006

Student's signature   Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.อุษณีย์ ลีรวัฒน์ ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้ให้การดูแลเอาใจใส่ ให้คำแนะนำ ให้คำปรึกษา ในการเรียน และการค้นคว้าวิจัย ตลอดจนการตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์ และขอกราบขอบพระคุณ ดร.กนกรัตน์ เศวตเศรนี กรรมการที่ปรึกษาวิชาเอก รศ.เปรมใจ ตรีสรานุวัฒนา กรรมการที่ปรึกษาวิชารอง และ รศ.ดร. อนงค์นาฏ ศรีวิหค ผู้แทนบัณฑิตวิทยาลัย ที่ให้ความกรุณาตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณครอบครัว ที่คอยช่วยเหลือ สนับสนุน และให้กำลังใจข้าพเจ้าตลอดมาในการศึกษา

ประโยชน์อันเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ จะพึงมีเพียงใด ขอมอบแด่ คุณพ่อ คุณแม่ และคณาจารย์ทุกท่านที่ให้ความเมตตาอบรมสั่งสอนให้ความรู้จนถึงปัจจุบัน

วิทวัส พันธวิมล

เมษายน 2549

สารบัญ

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$\mathbb{P}$	แทน	เซตกำลัง
$\mathbb{R}$	แทน	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{N}$	แทน	เซตของจำนวนนับ
∞	แทน	อนันต์
$\varnothing$	แทน	เซตว่าง
$\subseteq$	แทน	เซตย่อย
$\subset$	แทน	เซตย่อยแท้
$\cap$	แทน	อินเตอร์เซกชัน
$\cup$	แทน	ยูเนียน
gcd	แทน	ตัวหารร่วมมาก
lcm	แทน	ตัวคูณร่วมน้อย

การแยกตัวประกอบแบบมุขสำคัญบูลีนในพีชคณิตบูลีน

Boolean Principal Factorizations in Boolean Algebras

คำนำ

การแยกตัวประกอบในระบบจำนวน ทฤษฎีบทที่เป็นพื้นฐานสำคัญเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบในระบบจำนวน กล่าวว่าสำหรับจำนวนเต็มแต่ละจำนวนที่ไม่เท่ากับหนึ่งสามารถเขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ การศึกษาทางคณิตศาสตร์ระดับสูงนั้น ได้ศึกษาในระบบที่เป็นนามธรรม และได้มีการนิยามโครงสร้างของระบบที่เรียกว่า วง (ring) กล่าวคือเป็นระบบที่ประกอบด้วยเซต R กับตัวดำเนินการ 2 ตัวดำเนินการ เรียกว่า การบวก (a + b) และการคูณ (ab) โดยมีสมบัติคล้ายคลึงกับจำนวนเต็มที่ทราบกันดี เช่น การเปลี่ยนหมู่การบวกและการคูณ การสลับที่การบวก และการแจกแจงการคูณ นอกจากนี้ในวงยังมีนิยามการหารลงตัว และการแยกตัวประกอบด้วย โดยที่การหารลงตัวในวงนี้ จะนิยามบนอินทิกรัลโดเมน เมื่ออินทิกรัลโดเมน คือวงที่มีเอกลักษณ์การคูณ มีสมบัติสลับที่การคูณ และไม่มีตัวหารของศูนย์ การแยกตัวประกอบบนอินทิกรัลโดเมน ทฤษฎีบทที่เป็นหลักสำคัญคือ ทฤษฎีบทที่ว่าด้วยการแยกตัวประกอบได้แบบเดียวบนอินทิกรัลโดเมน กล่าวว่าสำหรับสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์และไม่เป็นสมาชิกหน่วยสามารถเขียนในรูปผลคูณของสมาชิกที่ลดทอนไม่ได้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น อินทิกรัลโดเมนที่มีสมบัติดังกล่าว เรียกว่าโดเมนที่มีการแยกตัวประกอบได้อย่างเดียว (unique factorization domain, UFD) ในงานวิจัยนี้ ได้ศึกษาการแยกตัวประกอบในพีชคณิตบูลีน (Boolean algebra) กล่าวคือเป็นระบบที่ประกอบด้วยเซต B กับตัวดำเนินการ 2 ตัวดำเนินการ เรียกว่า meet ($\wedge$) กับ join ($\vee$) ที่เป็นแลตทิซซึ่งมีสมบัติการกระจาย และสมาชิกแต่ละตัวมีส่วนเติมเต็ม (complement) ถ้าสมาชิกใดๆในพีชคณิตบูลีน เขียนได้อยู่ในรูปสมาชิกตัวอื่นตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป โดยมี join เป็นตัวเชื่อม จะกล่าวว่าเป็นการแยกตัวประกอบแบบ join และถ้าสมาชิกใดๆในพีชคณิตบูลีน เขียนได้อยู่ในรูปสมาชิกตัวอื่นตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป โดยมี meet เป็นตัวเชื่อม จะกล่าวว่าเป็นการแยกตัวประกอบแบบ meet

Roersma (1991) ได้ศึกษาการแยกตัวประกอบในวงที่มีเอกลักษณ์การคูณและมีสมบัติสลับที่การคูณ และได้นิยามการแยกตัวประกอบแบบใหม่ขึ้นมาที่เรียกว่า U – factorization กล่าวคือเป็นการแยกตัวประกอบภายใต้การคูณตามปกติ แต่ได้มีการนำอุดมคติมุขสำคัญ (principal ideal)

มาช่วยในการแบ่งกลุ่มตัวประกอบ ออกเป็นตัวประกอบที่จำเป็น (essential factors) และตัวประกอบที่ไม่จำเป็น (inessential factors) แล้วได้วิเคราะห์ถึงการลดจำนวนตัวประกอบหรือการแยกตัวประกอบเพิ่มขึ้นให้จำนวนตัวประกอบมากขึ้น และเงื่อนไขที่ทำให้สามารถสลับตัวประกอบที่จำเป็นกับตัวประกอบที่ไม่จำเป็นได้

ในงานวิจัยนี้ ได้อาศัยแนวความคิดการแยกตัวประกอบแบบ U – factorization ช่วยในการแยกตัวประกอบในพีชคณิตบูลีนทั้ง 2 แบบ นั่นคือทั้งแบบ join และแบบ meet

วัตถุประสงค์

1. ศึกษาการแยกตัวประกอบในพีชคณิตบูลีน
2. หาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการจัดกลุ่มตัวประกอบที่จำเป็นและตัวประกอบที่ไม่จำเป็น
3. หาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการสลับที่ตัวประกอบที่จำเป็นกับตัวประกอบที่ไม่จำเป็น

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้การแยกตัวประกอบในพีชคณิตบูลีนอีกวิธีหนึ่ง
2. ได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการจัดกลุ่มตัวประกอบที่จำเป็นและตัวประกอบที่ไม่จำเป็น
3. ได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการสลับที่ตัวประกอบที่จำเป็นกับตัวประกอบที่ไม่จำเป็น

การตรวจเอกสาร

การวิจัยนี้มีบทนิยาม ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย
2. ผลงานวิจัยของ Roersma

1. <u>บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย</u>

บทนิยาม 1.1 จำนวนเต็ม m หารลงตัว โดยจำนวนเต็ม n ถ้ามีจำนวนเต็ม q ที่ทำให้ $m = qn$ เขียนแทนด้วย $n|m$

บทนิยาม 1.2 ถ้า $n|m$ จะกล่าวว่า n เป็นตัวประกอบ (factor) ของ m

บทนิยาม 1.3 จำนวนเต็ม $p > 1$ จะเรียกว่า จำนวนเฉพาะ ถ้าไม่มีตัวประกอบ d ของ p ที่สอดคล้อง $1 < d < p$ ถ้าจำนวนเต็มใดๆที่มากกว่า 1 แต่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เรียกว่า จำนวนประกอบ

ทฤษฎีบท 1.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต
จำนวนเต็มที่มากกว่า 1 สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ และสามารถเขียนได้แบบเดียวโดยไม่ขึ้นกับลำดับ

บทนิยาม 1.5 ring เป็นระบบที่ประกอบด้วยเซต R กับตัวดำเนินการ 2 ตัวดำเนินการ เรียกว่า การบวก และการคูณ โดยที่มีสมบัติสอดคล้องดังนี้
1. R กับ การบวก เป็น abelian group กล่าวคือ

   1.1 $a + b \in R$

   1.2 $a + (b + c) = (a + b) + c$

   1.3 มี $0 \in R$ ที่ทำให้ $a + 0 = 0 + a = a$

   1.4 แต่ละ $a \in R$ จะมี $-a \in R$ ที่ทำให้ $a + (-a) = (-a) + a = 0$

1.5 $a + b = b + a$

สำหรับทุก $a, b, c \in R$

2. R กับ การคูณ เป็น semigroup กล่าวคือ

2.1 $ab \in R$

2.2 $a(bc) = (ab)c$

สำหรับทุก $a, b, c \in R$

3. มีสมบัติการแจกแจง กล่าวคือ

$a(b + c) = ab + ac$ และ

$(a + b)c = ac + bc$

สำหรับทุก $a, b, c \in R$

บทนิยาม 1.6 R เป็น ring ที่มีเอกลักษณ์การคูณ ถ้ามี $e \in R$ ที่ทำให้ $ae = ea = a$ สำหรับทุก $a \in R$

บทนิยาม 1.7 R เป็น ring ที่มีสมบัติสลับที่การคูณ ถ้า $ab = ba$ สำหรับทุก $a, b \in R$

บทนิยาม 1.8 ให้ R เป็น ring ที่มีสมบัติสลับที่การคูณและให้ $0 \neq a \in R$ เรียก a ว่า ตัวหารของศูนย์ ถ้ามี $0 \neq b \in R$ ที่ทำให้ $ab = 0$

บทนิยาม 1.9 ring ที่มีเอกลักษณ์การคูณ มีสมบัติสลับที่การคูณ และไม่มีตัวหารของศูนย์ จะเรียกว่า integral domain

บทนิยาม 1.10 สมมติให้ D เป็น integral domain ถ้า $a, b \in D$ โดยที่ $b \neq 0$ แล้ว a หารลงตัว โดย b ถ้า $a = bc$ สำหรับบาง $c \in D$

บทนิยาม 1.11 สมมติให้ D เป็น integral domain ถ้า a หารลงตัวโดย b จะกล่าวว่า b หาร a หรือ b เป็นตัวประกอบ ของ a เขียนแทนด้วย $b|a$

บทนิยาม 1.12 สมมติให้ D เป็น integral domain และ $a \in D$ เรียก a ว่า unit ถ้ามี $b \in D$ ที่ $ab = 1$

บทนิยาม 1.13 สมมติให้ D เป็น integral domain และ $a, b \in D$ เรียก a กับ b associates กัน ถ้า $a = bu$ สำหรับบาง unit $u \in D$

บทนิยาม 1.14 สมมติให้ D เป็น integral domain และ $a \in D$ เรียก a ว่า ลดทอนไม่ได้ ถ้า a ไม่เป็น unit และตัวที่หาร a ลงตัว มีแค่ associates ของ a กับสมาชิกที่เป็น unit ใน D

บทนิยาม 1.15 ให้ D เป็น integral domain จะเรียกว่า การแยกตัวประกอบได้อย่างเดียว (Unique factorization domains) ถ้าสอดคล้องสมบัติดังนี้

1. ถ้า $0 \neq a \in D$ และไม่เป็น unit แล้ว a สามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของสมาชิกที่ลดทอนไม่ได้ของ D
2. ถ้า $a \in D$ และ $a = p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_t$ เมื่อแต่ละ p_i และแต่ละ q_j ลดทอนไม่ได้ แล้ว $s = t$ และจะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน π ของ $\{1, 2, \ldots, s\}$ ที่ทำให้ p_i และ $q_{\pi(i)}$ เป็น associates กัน สำหรับ $1 \leq i \leq s$

บทนิยาม 1.16 ให้ R เป็น ring แล้ว $e \in R$ จะเรียกว่า idempotent ถ้า $e = e^2$

บทนิยาม 1.17 ให้ S เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของ ring R แล้ว จะเรียกว่า ideal ของ R ถ้า

1. $a, b \in S$ แล้ว $a + (-b) \in S$
2. $a \in S$ และ $r \in R$ แล้ว $ar \in S$ และ $ra \in S$

2. <u>ผลงานวิจัยของ Roersma</u>

กำหนดให้ R เป็น commutative ring with unity

บทนิยาม 2.1 ให้ $a \in R$ แล้ว $(a) = \{ar \mid r \in R\}$ เรียกว่า อุดมคติมุขสำคัญ ก่อกำเนิดโดย a (principal ideal generated by a)

บทนิยาม 2.2 ให้เซตของ units ของ R เขียนแทนด้วย U(R)

บทนิยาม 2.3 ถ้า $a \in R$ ไม่เป็น unit แล้ว การแยกตัวประกอบ (factorization) ของ a คือ $a = a_1 a_2 \ldots a_s$ เมื่อแต่ละ a_i ไม่เป็น unit ของ R

บทนิยาม 2.4 $a, b \in R$ จะกล่าวว่าเป็น associates กัน ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$
ดังนั้น $(a) = (b)$ ซึ่งเขียนแทนโดย $a \sim b$

บทนิยาม 2.5 $a \in R$ ที่ไม่เป็น unit จะกล่าวว่า a ลดทอนไม่ได้ (irreducible หรือ atom) ถ้า $a = bc$ แล้ว $a \sim b$ หรือ $a \sim c$

บทนิยาม 2.6 สำหรับ $r \in R$ โดยที่ r ไม่เป็น unit
ถ้า $r = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$ เมื่อ $a_i, b_j \in R$ และไม่เป็น unit
แล้ว $r = a_1 a_2 \ldots a_n \lceil b_1 b_2 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization ถ้า
1. $a_i (b_1 b_2 \ldots b_m) = (b_1 b_2 \ldots b_m)$ สำหรับ $1 \leq i \leq n$ และ
2. $b_j (b_1 b_2 \ldots b_{j-1} b_{j+1} \ldots b_m) \neq (b_1 b_2 \ldots b_{j-1} b_{j+1} \ldots b_m)$ สำหรับ $1 \leq j \leq m$

แต่ละ a_i เรียกว่า inessential divisors ของ U – factorization ของ r และแต่ละ b_j เรียกว่า essential divisors ของ U – factorization ของ r

ทฤษฎีบทประกอบ 2.7 ถ้า $r = \lceil b_1 b_2 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization แล้ว
ไม่มี U – factorization แบบอื่นที่จะได้จากการจัดเรียงใหม่ของ U – factorization ที่ให้มานี้ (นั่นคือ ในที่นี้ไม่สามารถจะเปลี่ยน essential divisors ตัวไหนก็ตาม
ให้เป็น inessential divisors)

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน (Roersma, 1991)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.8 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับ commutative ring R

1. $r = a_1 a_2 \ldots a_n \lceil b_1 b_2 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization ก็ต่อเมื่อ $r = (a_1 a_2)a_3 \ldots a_n \lceil b_1 b_2 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization นั่นคือสามารถรวม inessentials หลายตัว เป็นตัวเดียวได้

2. ถ้า $r = a \lceil b_1 b_2 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization

แล้ว $r = a \lceil (b_1 b_2)b_3 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization

3. ถ้า $r = a \lceil (b_1 b_2)b_3 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization

แล้ว $r = a \lceil b_1 b_2 \ldots b_m \rceil$, $r = ab_1 \lceil b_2 b_3 \ldots b_m \rceil$ หรือ $r = ab_2 \lceil b_1 b_3 \ldots b_m \rceil$ เป็น U – factorization

ทฤษฎีบทประกอบ 2.9 ให้ $0 \neq r = a \lceil b \rceil$ ใน R แล้ว $r = b \lceil a \rceil$ ก็ต่อเมื่อ มี $e \in R$ เป็น idempotent ที่ทำให้ $(a) = (b) = (r) = (e)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน (Roersma, 1991)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.10 ถ้า $r = a \lceil bc \rceil$ และ $a \in (b)$ แล้ว $r = b \lceil ac \rceil$ หรือ $r = bc \lceil a \rceil$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน (Roersma, 1991)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.11 ถ้า $r = a \lceil bc \rceil = b \lceil ac \rceil$ แล้ว จะมี proper nontrivial ideal I ซึ่ง $a, b \in I$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน (Roersma, 1991)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.12 ให้ $r = ab \lceil c \rceil$ แล้ว $r = ac \lceil b \rceil$ ก็ต่อเมื่อ มี $e \in R$ เป็น idempotent ที่ทำให้ $(b) = (c) = (r) = (e)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน (Roersma, 1991)

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

หนังสือและสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับการแยกตัวประกอบใน ring และนิยามกับทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับพีชคณิตบูลีน (Boolean algebra)

วิธีการ

1. สมบัติพื้นฐานของ Lattice

บทนิยาม 1.1 ความสัมพันธ์ R บนเซต A จะเรียกว่า partial order ถ้า R สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้คือ

1. R เป็น reflexive ถ้า aRa สำหรับทุก $a \in A$

2. R เป็น antisymmetric ถ้า aRb และ bRa แล้ว $a = b$ สำหรับทุก $a,b \in A$

3. R เป็น transitive ถ้า aRb และ bRc แล้ว aRc สำหรับทุก $a,b,c \in A$

ในที่นี้เรียก (A,R) ว่า partially ordered set หรือ poset

ตัวอย่าง 1.2 $(\mathbb{P}\{a,b,c\}, \subseteq)$ เป็น partially ordered set เพราะว่า

1. เนื่องจาก $A = A$ สำหรับทุก $A \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$ ดังนั้น $A \subseteq A$ สำหรับทุก $A \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$ นั่นคือ $\subseteq$ เป็น reflexive

2. ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แล้ว $A = B$ สำหรับทุก $A,B \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$

นั่นคือ $\subseteq$ เป็น antisymmetric

3. ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$ สำหรับทุก $A,B,C \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$

นั่นคือ $\subseteq$ เป็น transitive

จาก 1. ถึง 3. สรุปได้ว่า $\subseteq$ เป็น partial order

เพราะฉะนั้น $(\mathbb{P}\{a,b,c\}, \subseteq)$ เป็น partially ordered set

ตัวอย่าง 1.3 $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$ เป็น partially ordered set (เมื่อ $\leq$ หมายถึง น้อยกว่าหรือเท่ากับในระบบจำนวน กล่าวคือ $x \leq y$ หมายถึง x น้อยกว่าหรือเท่ากับ y) เพราะว่า

1. เนื่องจาก $x = x$ สำหรับทุก $x \in \{1,2,3,4,5\}$ ดังนั้น $x \leq x$ สำหรับทุก $x \in \{1,2,3,4,5\}$ นั่นคือ $\leq$ เป็น reflexive

2. ในระบบจำนวนนับ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq x$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x,y \in \{1,2,3,4,5\}$ นั่นคือ $\leq$ เป็น antisymmetric

3. ในระบบจำนวนนับ ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$ สำหรับทุก $x,y,z \in \{1,2,3,4,5\}$ นั่นคือ $\leq$ เป็น transitive

จาก 1. ถึง 3. สรุปได้ว่า $\leq$ เป็น partial order

เพราะฉะนั้น $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$ เป็น partially ordered set

ตัวอย่าง 1.4 $(\mathbb{N}, |)$ เป็น partially ordered set (เมื่อ $|$ หมายถึง การหารลงตัว กล่าวคือ $x \mid y$ หมายถึง มีจำนวนนับ k ที่ว่า $y = kx$) เพราะว่า

1. เนื่องจาก $x = x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $x \mid x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $|$ เป็น reflexive

2. ในระบบจำนวนนับ ถ้า $x \mid y$ และ $y \mid x$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x,y \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $|$ เป็น antisymmetric

3. ในระบบจำนวนนับ ถ้า $x \mid y$ และ $y \mid z$ แล้ว $x \mid z$ สำหรับทุก $x,y,z \in \mathbb{N}$ นั่นคือ $|$ เป็น transitive

จาก 1. ถึง 3. สรุปได้ว่า $|$ เป็น partial order

เพราะฉะนั้น $(\mathbb{N}, |)$ เป็น partially ordered set

ตัวอย่าง 1.5 $(B_{30}, |)$ เมื่อ $B_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ เป็น partially ordered set

$(B_{210}, |)$ เมื่อ $B_{210} = \{1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}$ เป็น partially ordered set

$(B_{2310}, |)$ เมื่อ

$B_{2310} = \{1,2,3,5,6,7,10,11,14,15,21,22,30,33,35,42,55,66,70,77,105,110,154,165,210,231,330,$

385,462,770,1155,2310} เป็น partially ordered set

บทนิยาม 1.6 ให้ $\leq$ เป็น partial order บนเซต A และให้ $a,b \in A$
จะเรียก a,b ว่าเปรียบเทียบกันได้ ถ้า $a \leq b$ หรือ $b \leq a$ แทนด้วย $a \sim b$
และ เรียก $(A,\leq)$ ว่า chain หรือ totally ordered set ถ้าแต่ละ $a,b \in A$ ได้ว่า $a \sim b$
ถ้า $a,b \in A$ ที่ a และ b เปรียบเทียบกันไม่ได้ แล้ว แทนด้วย $a >< b$

ข้อตกลง เขียน $a \leq b$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $b \geq a$
และเขียน $a < b$ หมายถึง $a \leq b$ แต่ $a \neq b$

ตัวอย่าง 1.7 $(\mathbb{P}\{a,b,c\}, \subseteq)$ ไม่เป็น totally ordered set
เพราะว่า $\{a\} >< \{b,c\}$

ตัวอย่าง 1.8 $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$ เป็น totally ordered set
เนื่องจากในระบบจำนวน $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก $x,y \in \mathbb{N}$
ดังนั้น $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$ เป็น totally ordered set

ตัวอย่าง 1.9 $(\mathbb{N}, |)$ ไม่เป็น totally ordered set
เพราะว่า $2 >< 3$

ตัวอย่าง 1.10 $(B_{30}, |)$ ไม่เป็น totally ordered set เพราะว่า $2 >< 5$
$(B_{210}, |)$ ไม่เป็น totally ordered set เพราะว่า $3 >< 7$
$(B_{2310}, |)$ ไม่เป็น totally ordered set เพราะว่า $5 >< 11$

บทนิยาม 1.11 ให้ $(A,\leq)$ เป็น partially ordered set และ $B \subseteq A$
1. $a \in A$ จะเรียกว่า upper bound ของ B ก็ต่อเมื่อ $b \leq a$ สำหรับทุก $b \in B$

2. $a \in A$ จะเรียกว่า lower bound ของ B ก็ต่อเมื่อ $a \leq b$ สำหรับทุก $b \in B$

ให้ U(B) แทนเซตของ upper bound ทั้งหมดบน B

L(B) แทนเซตของ lower bound ทั้งหมดบน B

นั่นคือ $U(B) = \{ a \in A \mid b \leq a$ สำหรับทุก $b \in B \}$

$L(B) = \{ a \in A \mid a \leq b$ สำหรับทุก $b \in B \}$

3. ถ้า $a \in L(B)$ และ $b \leq a$ สำหรับทุก $b \in L(B)$ แล้ว เรียก a ว่า infimum ของ B และเขียนแทนด้วย $\inf B = a$

4. ถ้า $a \in U(B)$ และ $a \leq b$ สำหรับทุก $b \in U(B)$ แล้ว เรียก a ว่า supremum ของ B และเขียนแทนด้วย $\sup B = a$

ตัวอย่าง 1.12 ให้ $(A,\leq) = (\mathbb{R},\leq)$ และ $B = [0,3)$

จะได้ว่า $L(B) = (-\infty,0]$, $\inf B = 0$ และ $U(B) = [3,\infty)$, $\sup B = 3$ แต่ $3 \notin B$

ดังนั้นไม่จำเป็นที่ $\sup B \in B$

ตัวอย่าง 1.13 ให้ $(A,\leq) = (\mathbb{R},\leq)$ และ $B = (0,5]$

จะได้ว่า $U(B) = [5,\infty)$, $\sup B = 5$ และ $L(B) = (-\infty,0]$, $\inf B = 0$ แต่ $0 \notin B$

ดังนั้นไม่จำเป็นที่ $\inf B \in B$

บทนิยาม 1.14 ให้ L เป็นเซตไม่ว่าง และ $(L,\leq)$ เป็น partially ordered set เรียก $(L,\leq)$ ว่า lattice ordered set ถ้าสำหรับทุกคู่ $x,y \in L$ แล้ว $\sup(x,y)$ และ $\inf(x,y)$ เป็นสมาชิกของ L

ตัวอย่าง 1.15 พิจารณา partially ordered set $(\mathbb{P}\{a,b,c\}, \subseteq)$

ให้ $A,B \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $\inf(A,B) = A \cap B$ และ $\sup(A,B) = A \cup B$

เห็นได้ชัดว่า $\inf(A,B) \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$ และ $\sup(A,B) \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$

ดังนั้น $(\mathbb{P}\{a,b,c\},\subseteq)$ เป็น lattice ordered set

ตัวอย่าง 1.16 พิจารณา partially ordered set $(\{1,2,3,4,5\},\leq)$
เนื่องจากในระบบจำนวน $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ สำหรับทุก $x,y \in \{1,2,3,4,5\}$
เพราะฉะนั้น $\inf(x,y) \in \{1,2,3,4,5\}$ และ $\sup(x,y) \in \{1,2,3,4,5\}$ สำหรับทุก $x,y \in \{1,2,3,4,5\}$
นั่นคือ $(\{1,2,3,4,5\},\leq)$ เป็น lattice ordered set

ตัวอย่าง 1.17 พิจารณา partially ordered set $(\mathbb{N},|)$
ให้ $x,y \in \mathbb{N}$
จะได้ว่า $\inf(x,y) = \gcd(x,y)$ และ $\sup(x,y) = \operatorname{lcm}(x,y)$
เห็นได้ชัดว่า $\inf(x,y) \in \mathbb{N}$ และ $\sup(x,y) \in \mathbb{N}$
ดังนั้น $(\mathbb{N},|)$ เป็น lattice ordered set

ตัวอย่าง 1.18 พิจารณา partially ordered set $(B_{30},|)$
เนื่องจาก $1|x$ และ $x|30$ สำหรับทุก $x \in B_{30}$
ดังนั้น $\inf(x,y) \in B_{30}$ และ $\sup(x,y) \in B_{30}$ สำหรับทุก $x,y \in B_{30}$
นั่นคือ $(B_{30},|)$ เป็น lattice ordered set
ในทำนองเดียวกัน $(B_{210},|)$ เป็น lattice ordered set
ในทำนองเดียวกัน $(B_{2310},|)$ เป็น lattice ordered set

ตัวอย่าง 1.19 ให้ $(L,\leq)$ เป็น partially ordered set เมื่อ $L = \{a,b,c,d\}$ โดยที่มีความสัมพันธ์กันดังนี้ 1. $a \leq b$, 2. $a \leq c$, 3. $c \leq d$
ดังนั้น $b >< d$
เพราะฉะนั้น $\inf(b,d) = a$ แต่ $\sup(b,d)$ ไม่มี
นั่นคือ $(L,\leq)$ ไม่เป็น lattice ordered set

ข้อสังเกต 1.20 1. ทุก totally ordered set เป็น lattice ordered set

2. ให้ $(L,\leq)$ เป็น lattice ordered set

2.1 ถ้า $x \leq y$ แล้ว $\sup(x,y) = y$ และ $\inf(x,y) = x$

2.2 ถ้า $\sup(x,y) = y$ หรือ $\inf(x,y) = x$ แล้ว $x \leq y$

บทนิยาม 1.21 ถ้า $(L,\leq)$ เป็น lattice ordered set และ $\inf L \in L$ แล้ว $\inf L$ มีเพียงหนึ่งเดียว เรียกว่า zero element เขียนแทนด้วย 0_L และถ้า $\sup L \in L$ แล้ว $\sup L$ มีเพียงหนึ่งเดียวเรียกว่า one element เขียนแทนด้วย 1_L ทั้ง 0_L และ 1_L จะเรียกว่า universal bounds

ตัวอย่าง 1.22 ใน lattice ordered set $(\mathbb{P}\{a,b,c\}, \subseteq)$

จะได้ว่า $\varnothing$ เป็น zero element ของ $\mathbb{P}\{a,b,c\}$ หรือ $\varnothing = 0_{\mathbb{P}\{a,b,c\}}$

และ $\{a,b,c\}$ เป็น one element ของ $\mathbb{P}\{a,b,c\}$ หรือ $\{a,b,c\} = 1_{\mathbb{P}\{a,b,c\}}$

ตัวอย่าง 1.23 ใน lattice ordered set $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$

จะได้ว่า 1 เป็น zero element ของ $\{1,2,3,4,5\}$ หรือ $1 = 0_{\{1,2,3,4,5\}}$

และ 5 เป็น one element ของ $\{1,2,3,4,5\}$ หรือ $5 = 1_{\{1,2,3,4,5\}}$

ตัวอย่าง 1.24 ใน lattice ordered set $(B_{30}, |)$

จะได้ว่า 1 เป็น zero element ของ B_{30} หรือ $1 = 0_{B30}$

และ 30 เป็น one element ของ B_{30} หรือ $30 = 1_{B30}$

ใน lattice ordered set $(B_{210}, |)$

จะได้ว่า 1 เป็น zero element ของ B_{210} หรือ $1 = 0_{B210}$

และ 210 เป็น one element ของ B_{210} หรือ $210 = 1_{B210}$

ใน lattice ordered set $(B_{2310}, |)$

จะได้ว่า 1 เป็น zero element ของ B_{2310} หรือ $1 = 0_{B2310}$

และ 2310 เป็น one element ของ B_{2310} หรือ $2310 = 1_{B2310}$

บทนิยาม 1.25 algebraic lattice $(L,\wedge,\vee)$ คือโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตที่ไม่ว่าง L กับการดำเนินการทวิภาค $\wedge$(meet) และ $\vee$(join) ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

สำหรับทุก $x,y,z \in L$

(L1) commutative law	$x\wedge y = y\wedge x$,	$x\vee y = y\vee x$
(L2) associative law	$x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$,	$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$
(L3) absorption law	$x\wedge(x\vee y) = x$,	$x\vee(x\wedge y) = x$
(L4) idempotent law	$x\wedge x = x$,	$x\vee x = x$

ตัวอย่าง 1.26 นิยามการดำเนินการทวิภาค $\wedge$ และ $\vee$ บน $\mathbb{N}$ ดังนี้

$x\wedge y = \gcd(x,y)$ และ $x\vee y = \mathrm{lcm}(x,y)$ สำหรับทุก $x,y \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $(\mathbb{N},\wedge(\gcd),\vee(\mathrm{lcm}))$ เป็น algebraic lattice

ตัวอย่าง 1.27 นิยามการดำเนินการทวิภาค $\wedge$ และ $\vee$ เช่นเดียวกับตัวอย่าง 1.26 จะได้ว่า

$(B_{30},\wedge(\gcd),\vee(\mathrm{lcm}))$

$(B_{210},\wedge(\gcd),\vee(\mathrm{lcm}))$

$(B_{2310},\wedge(\gcd),\vee(\mathrm{lcm}))$

ต่างก็เป็น algebraic lattice

ตัวอย่าง 1.28 นิยามการดำเนินการทวิภาค $\wedge$ และ $\vee$ บนเซต $\mathbb{P}\{a,b,c\}$ ดังนี้

$A\wedge B = A\cap B$ และ $A\vee B = A\cup B$ สำหรับทุก $A,B \in \mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $(\mathbb{P}\{a,b,c\},\wedge(\cap),\vee(\cup))$ เป็น algebraic lattice

การเชื่อมโยงระหว่าง lattice ordered set และ algebraic lattice เป็นไปตามทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.29 1. ให้ $(L,\leq)$ เป็น lattice ordered set และนิยามการดำเนินการทวิภาค $\wedge$ และ $\vee$ ดังนี้

$x\wedge y = \inf(x,y), \quad x\vee y = \sup(x,y)$

แล้ว $(L,\wedge,\vee)$ เป็น algebraic lattice

2. ให้ $(L,\wedge,\vee)$ เป็น algebraic lattice และนิยาม $\leq$ บน L ดังนี้

$x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x\wedge y = x$ (หรือ $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x\vee y = y$)

แล้ว $(L,\leq)$ เป็น lattice ordered set

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 5-6)

ตัวอย่าง 1.30 พิจารณา lattice ordered set $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$ และนิยามการดำเนินการทวิภาค $\wedge$ และ $\vee$ ดังนี้ $x\wedge y = \inf(x,y)$, $x\vee y = \sup(x,y)$

จะได้ว่า $(\{1,2,3,4,5\},\wedge,\vee)$ เป็น algebraic lattice

ตัวอย่าง 1.31 พิจารณา algebraic lattice $(\mathbb{N},\wedge(\gcd),\vee(\text{lcm}))$ และนิยาม $\leq$ บน $\mathbb{N}$ ดังนี้ $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x\wedge y = x$ (หรือ $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x\vee y = y$)

ดังนั้น $(\mathbb{N},\leq)$ เป็น lattice ordered set

ข้อสังเกต 1.32 จากทฤษฎีบท 1.29 ได้ให้ความสัมพันธ์ที่สมมูลกันระหว่าง lattice ordered set และ algebraic lattice ดังนั้นจะใช้ lattice แทนทั้งสองคำนี้

ข้อตกลง เขียน L เป็น lattice หมายถึง $(L,\wedge,\vee)$ เป็น lattice

บทนิยาม 1.33 ถ้า L เป็น lattice ที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด จะเรียก L ว่า finite lattice

ข้อสังเกต 1.34 ถ้า L เป็น lattice ที่มี 0_L และ 1_L แล้ว สำหรับทุก $x \in L$ ที่ $0_L \leq x \leq 1_L$ จะได้ว่า $0_L \wedge x = 0_L$, $0_L \vee x = x$, $1_L \wedge x = x$, $1_L \vee x = 1_L$

ข้อสังเกต 1.35 ถ้า L เป็น finite lattice จะมี 0_L และ 1_L

ทฤษฎีบทประกอบ 1.36 ให้ L เป็น lattice และ $x,y,z \in L$
ถ้า $y \leq z$ แล้ว $x \wedge y \leq x \wedge z$ และ $x \vee y \leq x \vee z$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 10)

บทนิยาม 1.37 ให้ L เป็น lattice ถ้า $S \neq \varnothing$ และ $S \subseteq L$ แล้ว S จะเรียกว่า sublattice ของ L ถ้า S เป็น lattice ภายใต้การดำเนินการทวิภาค $\wedge$ และ $\vee$ เช่นเดียวกับบน L

ตัวอย่าง 1.38 $\{1,2,3,4,5\}$ เป็น sublattice ของ $(\mathbb{N}, \wedge(\text{inf}), \vee(\text{sup}))$

ตัวอย่าง 1.39 B_{30} และ B_{210} และ B_{2310} เป็น sublattice ของ $(\mathbb{N}, \wedge(\text{gcd}), \vee(\text{lcm}))$

บทนิยาม 1.40 ให้ L เป็น lattice
L จะเรียกว่า distributive
ถ้า $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ หรือ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ สำหรับทุก $x,y,z \in L$

ทฤษฎีบท 1.41 ให้ L เป็น distributive lattice ถ้า $x \wedge y = x \wedge z$ และ $x \vee y = x \vee z$ แล้ว $y = z$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 415)

ทฤษฎีบท 1.42 ถ้า L เป็น distributive lattice แล้ว แต่ละ $x \in L$ จะมี $y \in L$ อย่างมากที่สุดเพียงหนึ่งตัวที่ $x \wedge y = 0_L$ และ $x \vee y = 1_L$ ในที่นี้เรียก y ว่า complement ของ x เขียนแทนด้วย x' นั่นคือ $y = x'$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 20)

2. <u>สมบัติพื้นฐานของ Boolean algebra</u>

บทนิยาม 2.1 ให้ B เป็นเซตไม่ว่าง และ $(B,\leq)$ เป็น lattice ordered set เรียก B ว่า Boolean algebra (หรือ Boolean lattice) ถ้า B มีสมบัติดังต่อไปนี้

(B1) $x \wedge y = y \wedge x$ และ $x \vee y = y \vee x$

(B2) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ และ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(B3) $x \wedge (x \vee y) = x$ และ $x \vee (x \wedge y) = x$

(B4) $x \wedge x = x$ และ $x \vee x = x$

(B5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ หรือ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ สำหรับทุก $x,y,z \in B$

(B6) $0_B \in B$ และ $1_B \in B$

(B7) แต่ละ $x \in B$ มีสมาชิก $y \in B$ ซึ่ง $x \wedge y = 0_B$ และ $x \vee y = 1_B$

ตัวอย่าง 2.2 B_{30} และ B_{210} และ B_{2310} เป็น Boolean algebra

ตัวอย่าง 2.3 $\mathbb{P}\{a,b,c\}$ เป็น Boolean algebra

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า B เป็น Boolean algebra
แล้ว $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ และ $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ สำหรับทุก $x,y \in B$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 24)

บทแทรก 2.5 ถ้า B เป็น Boolean algebra
แล้ว $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x' \geq y'$ สำหรับทุก $x,y \in B$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 24)

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า B เป็น Boolean algebra ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $x \leq y$
2. $x \wedge y' = 0_B$
3. $x' \vee y = 1_B$
4. $x \wedge y = x$
5. $x \vee y = y$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Lidl and Pilz, 1984: 417-418)

บทนิยาม 2.7 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$
จะเรียก a ว่า atom ของ B ถ้า $0_B < a$ และไม่มี $x \in B$ ที่ว่า $0_B < x < a$
นั่นคือ a เป็น atom ก็ต่อเมื่อ $a \neq 0_B$ และ $x \wedge a = a$ หรือ $x \wedge a = 0_B$ สำหรับแต่ละ $x \in B$

ตัวอย่าง 2.8 atom ทั้งหมดของ B_{30} คือ 2, 3, 5
atom ทั้งหมดของ B_{210} คือ 2, 3, 5, 7
atom ทั้งหมดของ B_{2310} คือ 2, 3, 5, 7, 11

บทนิยาม 2.9 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a_1,a_2,\ldots,a_m$ เป็น atom ทั้งหมดของ B และ $d(a_i) = a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_m$ เมื่อ $1 \leq i \leq m$ แล้ว $d(a_i)$ จะเรียกว่า dual atom ของ a_i

ตัวอย่าง 2.10 พิจารณา Boolean algebra B_{30}
เนื่องจาก atom ทั้งหมดของ B_{30} คือ 2, 3, 5

ดังนั้น $d(2) = 3 \vee 5 = 15$ และ $d(3) = 2 \vee 5 = 10$ และ $d(5) = 2 \vee 3 = 6$

ข้อสังเกต 2.11 $2 = 10 \wedge 6 = d(3) \wedge d(5)$ และ $3 = 15 \wedge 6 = d(2) \wedge d(5)$ และ $5 = 15 \wedge 10 = d(2) \wedge d(3)$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.12 ให้ B เป็น finite Boolean algebra ถ้า $b \in B$ และ $b \neq 0_B$ แล้ว จะมี $a \in B$ โดยที่ a เป็น atom ซึ่ง $a \leq b$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Durbin, 1979: 296)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.13 ให้ B เป็น finite Boolean algebra ถ้า a_1 และ a_2 เป็น atom ใน B และ $a_1 \wedge a_2 \neq 0_B$ แล้ว $a_1 = a_2$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Durbin, 1979: 296)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.14 ให้ B เป็น finite Boolean algebra ถ้า $b,c \in B$ และ $b >< c$ แล้ว จะมี $a \in B$ โดยที่ a เป็น atom ซึ่ง $a \leq b$ และ $a >< c$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Durbin, 1979: 297)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.15 ให้ B เป็น finite Boolean algebra ถ้า $b \in B$ และ $a_1, a_2, ..., a_m$ เป็น atom ทั้งหมด ซึ่ง $a_i \leq b$ สำหรับทุก $i = 1,2,\ldots,m$ แล้ว $b = a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_m$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Durbin, 1979: 297)

ทฤษฎีบทประกอบ 2.16 ให้ B เป็น finite Boolean algebra ถ้า $b \in B$ และ $a, a_1, a_2, ..., a_m$ เป็น atom ของ B ซึ่ง $a \leq b$ และ $b = a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_m$ แล้ว $a = a_i$ สำหรับบาง $i \in \{1,2,\ldots,m\}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดได้จาก (Durbin, 1979: 297)

บทนิยาม 2.17 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $I \subseteq B$ ถ้า $I \neq \varnothing$ และ $x \wedge b \in I$ และ $x \vee y \in I$ สำหรับทุก $x,y \in I$ ทุก $b \in B$ แล้ว เรียก I ว่า ideal ใน B

ตัวอย่าง 2.18 $I = \{1,2,3,6\}$ เป็น ideal ใน B_{30}
$I = \{1,2,5,10\}$ เป็น ideal ใน B_{30}
$I = \{1,3,5,15\}$ เป็น ideal ใน B_{30}

ข้อสังเกต 2.19 ถ้าแทน $b = x'$ ในบทนิยาม 2.17 จะได้ว่า $0_B \in I$

ข้อสังเกต 2.20 ถ้า $1_B \in I$ แล้ว $I = B$

ทฤษฎีบท 2.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$
$\langle b \rangle_I = \{x \wedge b \mid x \in B\}$ เป็น ideal และเรียก $\langle b \rangle_I$ ว่า Boolean principal ideal

พิสูจน์ ให้ $b \in B$

จะแสดงว่า $\langle b \rangle_I$ เป็น ideal

ให้ $x,y \in \langle b \rangle_I$ และ $a \in B$

จะมี $i \in B$ และ $j \in B$ ที่ทำให้ $x = i \wedge b$ และ $y = j \wedge b$

เพราะฉะนั้น $x \vee y = (i \wedge b) \vee (j \wedge b) = (i \vee j) \wedge b$

เพราะว่า $i \vee j \in B$

ดังนั้น $x \vee y \in \langle b \rangle_I$ ______(1)

เนื่องจาก $x \wedge a = (i \wedge b) \wedge a = i \wedge (b \wedge a) = i \wedge (a \wedge b) = (i \wedge a) \wedge b$

เพราะว่า $i \wedge a \in B$

ดังนั้น $x \wedge a \in \langle b \rangle_I$ ______(2)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $\langle b \rangle_I$ เป็น ideal

ทฤษฎีบท 2.22 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$ จะได้ว่า

$$\langle b \rangle_I = \{x \in B \mid x \leq b\}$$

พิสูจน์ ให้ $b \in B$

จะแสดงว่า $\langle b \rangle_I \subseteq \{x \in B \mid x \leq b\}$

ให้ $a \in \langle b \rangle_I$ แล้ว $a = i \wedge b$ สำหรับบาง $i \in B$

จะได้ว่า $a \leq b$

ดังนั้น $a \in \{x \in B \mid x \leq b\}$

เพราะฉะนั้น $\langle b \rangle_I \subseteq \{x \in B \mid x \leq b\}$

จะแสดงว่า $\{x \in B \mid x \leq b\} \subseteq \langle b \rangle_I$

ให้ $a \in \{x \in B \mid x \leq b\}$

จะได้ว่า $a \leq b$

ดังนั้น $a \wedge b = a$

นั่นคือ $a \in \langle b \rangle_I$

เพราะฉะนั้น $\{x \in B \mid x \leq b\} \subseteq \langle b \rangle_I$

สรุปได้ว่า $\langle b \rangle_I = \{x \in B \mid x \leq b\}$

บทนิยาม 2.23 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $F \subseteq B$ ถ้า $F \neq \varnothing$ และ $x \vee b \in F$ และ $x \wedge y \in F$ สำหรับทุก $x,y \in F$ ทุก $b \in B$ แล้ว เรียก F ว่า filter ใน B

ตัวอย่าง 2.24 $F = \{2,6,10,30\}$ เป็น filter ใน B_{30}

$F = \{3,6,15,30\}$ เป็น filter ใน B_{30}

$F = \{5,10,15,30\}$ เป็น filter ใน B_{30}

ข้อสังเกต 2.25 ถ้าแทน $b = x'$ ในบทนิยาม 2.23 จะได้ว่า $1_B \in F$

ข้อสังเกต 2.26 ถ้า $0_B \in F$ แล้ว $F = B$

ทฤษฎีบท 2.27 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$

$\langle b \rangle_F = \{x \vee b \mid x \in B\}$ เป็น filter และเรียก $\langle b \rangle_F$ ว่า Boolean principal filter

พิสูจน์ ให้ $b \in B$

จะแสดงว่า $\langle b \rangle_F$ เป็น filter

ให้ $x,y \in \langle b \rangle_F$ และ $a \in B$

จะมี $i \in B$ และ $j \in B$ ที่ทำให้ $x = i \vee b$ และ $y = j \vee b$

เพราะฉะนั้น $x \wedge y = (i \vee b) \wedge (j \vee b) = (i \wedge j) \vee b$

เพราะว่า $i \wedge j \in B$

ดังนั้น $x \wedge y \in \langle b \rangle_F$ ______(3)

เนื่องจาก $x \vee a = (i \vee b) \vee a = i \vee (b \vee a) = i \vee (a \vee b) = (i \vee a) \vee b$

เพราะว่า $i \vee a \in B$

ดังนั้น $x \vee a \in \langle b \rangle_F$ ______(4)

จาก (3) และ (4) สรุปได้ว่า $\langle b \rangle_F$ เป็น filter

ทฤษฎีบท 2.28 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$ จะได้ว่า

$$\langle b \rangle_F = \{x \in B \mid x \geq b\}$$

พิสูจน์ ให้ $b \in B$

จะแสดงว่า $<b>_F \subseteq \{x \in B \mid x \geq b\}$

ให้ $a \in <b>_F$ แล้ว $a = i \vee b$ สำหรับบาง $i \in B$

จะได้ว่า $a \geq b$

ดังนั้น $a \in \{x \in B \mid x \geq b\}$

เพราะฉะนั้น $<b>_F \subseteq \{x \in B \mid x \geq b\}$

จะแสดงว่า $\{x \in B \mid x \geq B\} \subseteq <b>_F$

ให้ $a \in \{x \in B \mid x \geq b\}$

จะได้ว่า $a \geq b$

ดังนั้น $a \vee b = a$

นั่นคือ $a \in <b>_F$

เพราะฉะนั้น $\{x \in B \mid x \geq b\} \subseteq <b>_F$

สรุปได้ว่า $<b>_F = \{x \in B \mid x \geq b\}$

ทฤษฎีบท 2.29 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$ จะได้ว่า

1. $b = 1_B$ ก็ต่อเมื่อ $<b>_I$ เป็น filter และ $<b>_I = B$
2. $b = 0_B$ ก็ต่อเมื่อ $<b>_I = \{b\}$
3. $b = 0_B$ ก็ต่อเมื่อ $<b>_F$ เป็น ideal และ $<b>_F = B$
4. $b = 1_B$ ก็ต่อเมื่อ $<b>_F = \{b\}$

พิสูจน์ 1. ให้ $b = 1_B$

จะแสดงว่า $<b>_I$ เป็น filter

ให้ $x, y \in <b>_I$ และ $a \in B$

จะได้ว่า $x \leq b$ และ $y \leq b$

เพราะฉะนั้น $x \wedge y \leq b$

ดังนั้น $x \wedge y \in \langle b \rangle_I$ ______(5)

เนื่องจาก $b = 1_B$

เพราะฉะนั้น $x \vee a \leq b$

ดังนั้น $x \vee a \in \langle b \rangle_I$ ______(6)

จาก (5) และ (6) สรุปได้ว่า $\langle b \rangle_I$ เป็น filter

จะแสดงว่า $\langle b \rangle_I = B$

เนื่องจาก $\langle b \rangle_I \subseteq B$

เพียงพอที่จะแสดงว่า $B \subseteq \langle b \rangle_I$

ให้ $x \in B$

เนื่องจาก $c \leq 1_B$ สำหรับทุก $c \in B$

ดังนั้น $x \leq 1_B = b$

นั่นคือ $x \in \langle b \rangle_I$

เพราะฉะนั้น $B \subseteq \langle b \rangle_I$

สรุปได้ว่า $\langle b \rangle_I = B$

ในทางกลับกันสมมติให้ $\langle b \rangle_I$ เป็น filter และ $\langle b \rangle_I = B$

จะแสดงว่า $b = 1_B$

เนื่องจาก $\langle b \rangle_I = B$ และ $1_B \in B$

ดังนั้น $1_B \leq b$

เห็นได้ชัดว่า $b \leq 1_B$

เพราะฉะนั้น $b = 1_B$

พิสูจน์ 2. ให้ $b = 0_B$

จะแสดงว่า $\langle b \rangle_I = \{b\}$

ให้ $x \in \langle b \rangle_I$

จะได้ว่า $x \leq b$

แต่เนื่องจาก $b = 0_B$

ดังนั้น $x = b$

เพราะฉะนั้น $\langle b \rangle_I = \{b\}$

ในทางกลับกันสมมติให้ $\langle b \rangle_I = \{b\}$

จะแสดงว่า $b = 0_B$

เนื่องจาก $\langle b \rangle_I = \{b\}$ และ $0_B \in \langle b \rangle_I$

ดังนั้น $0_B \in \{b\}$

เพราะฉะนั้น $b = 0_B$

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 1.

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 2.

บทแทรก 2.30 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $b \in B$

1. ถ้า $a = b'$ แล้ว $\langle a \vee b \rangle_I = B$ และ $\langle a \wedge b \rangle_I = \{0_B\}$
2. ถ้า $a = b'$ แล้ว $\langle a \vee b \rangle_F = \{1_B\}$ และ $\langle a \wedge b \rangle_F = B$

พิสูจน์ 1. โดยทฤษฎีบท 2.29.1 และ 2.29.2 ตามลำดับ

พิสูจน์ 2. โดยทฤษฎีบท 2.29.4 และ 2.29.3 ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2.31 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a, b \in B$

ถ้า a เป็น atom แล้ว $b = a'$ ก็ต่อเมื่อ $\langle a \rangle_F \cup \langle b \rangle_I = B$ และ $\langle a \rangle_F \cap \langle b \rangle_I = \varnothing$

พิสูจน์ ให้ $a,b \in B$ โดยที่ a เป็น atom

สมมติให้ $b = a'$

จะแสดงว่า $\langle a \rangle_F \cup \langle b \rangle_I = B$

เนื่องจาก $<a>_F \cup <b>_I \subseteq B$

เพียงพอที่จะแสดงว่า $B \subseteq <a>_F \cup <b>_I$

ให้ $x \in B$

เนื่องจาก $x \leq 1_B$ และ $a \vee b = 1_B$

ดังนั้น $x \leq a \vee b$

กรณี $x \sim a$

ถ้า $x < a$ ขัดแย้งกับ a เป็น atom

เพราะฉะนั้น $x \geq a$

นั่นคือ $x \in <a>_F$

กรณี $x >< a$

กำหนดให้ a_i เป็น atom ทั้งหมดที่แตกต่างกันของ B เมื่อ $1 \leq i \leq n$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า $1_B = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$

และโดยทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า $a = a_i$ สำหรับบาง i

เมื่อ $1 \leq i \leq n$

เนื่องจาก $a \vee b = 1_B$ และ $a \wedge b = 0_B$

เพราะฉะนั้น $b = a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n$

เนื่องจาก $x >< a$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า $a_j \leq x$ สำหรับบาง $1 \leq j \leq n$

และ $j \neq i$

ดังนั้น $x \leq a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n = b$

นั่นคือ $x \in <b>_I$

เพราะฉะนั้น $B \subseteq <a>_F \cup <b>_I$

สรุปได้ว่า $<a>_F \cup <b>_I = B$

จะแสดงว่า $<a>_F \cap <b>_I = \varnothing$

สมมติว่า $<a>_F \cap <b>_I \neq \varnothing$

จะมี $x \in <a>_F \cap <b>_I$

จะได้ว่า $x \geq a$ และ $x \leq b$

เพราะฉะนั้น $a \wedge x = a$

เนื่องจาก $x \leq b$ และ $b = a'$

ดังนั้น $a \wedge x \leq a \wedge b = 0_B$

นั่นคือ $a \wedge x = 0_B$ ขัดแย้งกับ $a \wedge x = a$

สรุปได้ว่า $<a>_F \cap <b>_I = \varnothing$

ในทางกลับกันสมมติให้ $<a>_F \cup <b>_I = B$ และ $<a>_F \cap <b>_I = \varnothing$

จะแสดงว่า $a \vee b = 1_B$

กำหนดให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็น atom ทั้งหมดที่แตกต่างกันของ B

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า $1_B = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$

และโดยทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า $a = a_i$ สำหรับบาง $i \in \{ 1,2,\ldots,n \}$

ดังนั้น $1_B = a \vee x$ เมื่อ $x = a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n$

เนื่องจาก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็น atom ทั้งหมดที่แตกต่างกันของ B

เพราะฉะนั้น $x \notin <a>_F$

เนื่องจาก $<a>_F \cup <b>_I = B$ และ $<a>_F \cap <b>_I = \varnothing$

ดังนั้น $x \in <b>_I$

เพราะฉะนั้น $a \vee b \geq a \vee x = 1_B$

นั่นคือ $a \vee b = 1_B$

จะแสดงว่า $a \wedge b = 0_B$

เนื่องจาก $<a>_F \cap <b>_I = \varnothing$ และ $<a>_F \cup <b>_I = B$

ดังนั้น $a \wedge b = 0_B$ สรุปได้ว่า $b = a'$

ผลการวิจัย

การแยกตัวประกอบของสมาชิกใดๆใน Boolean algebra สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น 2 ลักษณะ กล่าวคือ แยกแบบมีตัวเชื่อมเป็น join ดังต่อไปนี้ ถ้า B เป็น finite Boolean algebra สำหรับสมาชิก b ใน B ใดๆ สามารถเขียนการแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$ โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ เป็น atom ใน B ซึ่ง $a_i \leq b$ สำหรับทุก $i = 1,2,\ldots,m$

สำหรับการแยกตัวประกอบแบบมีตัวเชื่อมเป็น meet คือ $b = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_m$ โดยที่ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ เป็น dual atom ใน B ซึ่ง $a_i \geq b$ สำหรับทุก $i = 1,2,\ldots,m$

ในงานวิจัยนี้ได้นำ Boolean principal ideal และ Boolean principal filter มาใช้ในการแยกตัวประกอบออกเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มตัวประกอบที่จำเป็น กล่าวคือ กลุ่มตัวประกอบที่ไม่สามารถตัดทิ้งได้ กับกลุ่มตัวประกอบที่ไม่จำเป็น กล่าวคือ กลุ่มตัวประกอบที่สามารถตัดทิ้งได้ แบ่งผลวิจัยได้เป็น 4 แบบ ดังนี้

1. การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal filter
2. การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal ideal
3. การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal ideal
4. การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal filter

1. การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal filter

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์การแยกตัวประกอบบน Boolean algebra ซึ่งแยกในรูปแบบที่มีตัวดำเนินการ join เป็นตัวเชื่อม และได้ใช้ Boolean principal filter มาใช้แบ่งกลุ่มของตัวประกอบ และลดทอนให้เหลือน้อยที่สุด และใช้เป็นเกณฑ์ในการเปลี่ยนชุดตัวประกอบที่ยังทำให้ได้ผลลัพธ์เดิมเท่ากัน

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $\langle a \vee b \rangle_F = \langle a \rangle_F \cap \langle b \rangle_F$

พิสูจน์ ให้ $a,b \in B$

จะแสดงว่า $<a \vee b>_F \subseteq <a>_F \cap <b>_F$

ให้ $x \in <a \vee b>_F$

จะได้ว่า $a \vee b \leq x$

ดังนั้น $a \leq x$ และ $b \leq x$

เพราะฉะนั้น $x \in <a>_F$ และ $x \in <b>_F$

นั่นคือ $x \in <a>_F \cap <b>_F$

สรุปได้ว่า $<a \vee b>_F \subseteq <a>_F \cap <b>_F$

ต่อไปจะแสดงว่า $<a>_F \cap <b>_F \subseteq <a \vee b>_F$

ให้ $x \in <a>_F \cap <b>_F$

จะได้ว่า $x \in <a>_F$ และ $x \in <b>_F$

ดังนั้น $a \leq x$ และ $b \leq x$

เพราะฉะนั้น $a \vee b \leq x$

นั่นคือ $x \in <a \vee b>_F$

สรุปได้ว่า $<a>_F \cap <b>_F \subseteq <a \vee b>_F$

เพราะฉะนั้น $<a \vee b>_F = <a>_F \cap <b>_F$

ตัวอย่าง 1.2 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

จะได้ว่า $<2 \vee 3>_F = <6>_F = \{6,30\}$, $<2>_F = \{2,6,10,30\}$, $<3>_F = \{3,6,15,30\}$

ดังนั้น $<2>_F \cap <3>_F = \{6,30\}$

นั่นคือ $<2 \vee 3>_F = <2>_F \cap <3>_F$

ตัวอย่าง 1.3 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $<\{a\} \vee \{b\}>_F = <\{a,b\}>_F = \{\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,

$<\{a\}>_F = \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ และ $<\{b\}>_F = \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

ดังนั้น $<\{a\}>_F \cap <\{b\}>_F = \{\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

นั่นคือ $<\{a\}\vee\{b\}>_F = <\{a\}>_F \cap <\{b\}>_F$

บทนิยาม 1.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

กำหนดให้ $a\vee<b>_F = \{\, a\vee c \mid c \in B$ และ $b \leq c \,\}$

ตัวอย่าง 1.5 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

จะได้ว่า $2\vee<3>_F = \{\, 2\vee3, 2\vee6, 2\vee15, 2\vee30 \,\} = \{6,30\}$

ตัวอย่าง 1.6 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $\{a\}\vee<\{b\}>_F = \{\{a\}\vee\{b\}, \{a\}\vee\{a,b\}, \{a\}\vee\{b,c\}, \{a\}\vee\{a,b,c\}\}$

$= \{\{a,b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,c\}\} = \{\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

ทฤษฎีบท 1.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

$$a\vee<b>_F = <a\vee b>_F$$

พิสูจน์ ให้ $a,b \in B$

จะแสดงว่า $a\vee<b>_F \subseteq <a\vee b>_F$

ให้ $x \in a\vee<b>_F$

จะมี $c \in B$ ซึ่ง $b \leq c$ ที่ทำให้ $x = a\vee c$

เนื่องจาก $b \leq c$

ดังนั้น $a\vee b \leq a\vee c$

เพราะฉะนั้น $a\vee b \leq x$

นั่นคือ $x \in <a\vee b>_F$

สรุปได้ว่า $a\vee<b>_F \subseteq <a\vee b>_F$

ต่อไปจะแสดงว่า $<a\vee b>_F \subseteq a\vee<b>_F$

ให้ $x \in \langle a \vee b \rangle_F$

จะได้ว่า $a \vee b \leq x$

ดังนั้น $x = x \vee (a \vee b) = (x \vee a) \vee b = (a \vee x) \vee b = a \vee (x \vee b)$

เนื่องจาก $b \leq x \vee b$ และ $x = a \vee (x \vee b)$

เพราะฉะนั้น $x \in a \vee \langle b \rangle_F$

สรุปได้ว่า $\langle a \vee b \rangle_F \subseteq a \vee \langle b \rangle_F$

เพราะฉะนั้น $a \vee \langle b \rangle_F = \langle a \vee b \rangle_F$

ตัวอย่าง 1.8 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

จะได้ว่า $2 \vee \langle 5 \rangle_F = \{ 2 \vee 5, 2 \vee 10, 2 \vee 15, 2 \vee 30 \} = \{10,30\}$

และ $\langle 2 \vee 5 \rangle_F = \langle 10 \rangle_F = \{10,30\}$

ดังนั้น $2 \vee \langle 5 \rangle_F = \langle 2 \vee 5 \rangle_F$

ตัวอย่าง 1.9 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $\{a\} \vee \langle \{c\} \rangle_F = \{\{a\} \vee \{c\}, \{a\} \vee \{a,c\}, \{a\} \vee \{b,c\}, \{a\} \vee \{a,b,c\}\}$

$= \{\{a,c\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,b,c\}\} = \{\{a,c\},\{a,b,c\}\}$

และ $\langle \{a\} \vee \{c\} \rangle_F = \langle \{a,c\} \rangle_F = \{\{a,c\},\{a,b,c\}\}$

ดังนั้น $\{a\} \vee \langle \{c\} \rangle_F = \langle \{a\} \vee \{c\} \rangle_F$

ข้อสังเกต 1.10 จากทฤษฎีบท 1.1 และ 1.7 จะได้ว่า $a \vee \langle b \rangle_F = \langle a \rangle_F \cap \langle b \rangle_F$

ทฤษฎีบท 1.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a \vee \langle b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

พิสูจน์ สมมติให้ $a \leq b$

จะแสดงว่า $a \vee \langle b \rangle_F \subseteq \langle b \rangle_F$

ให้ $x \in a \vee \langle b \rangle_F$

จะมี $c \in B$ ซึ่ง $b \leq c$ ที่ทำให้ $x = a \vee c$

เนื่องจาก $b \leq c \leq a \vee c$

ดังนั้น $b \leq x$

นั่นคือ $x \in \langle b \rangle_F$

สรุปได้ว่า $a \vee \langle b \rangle_F \subseteq \langle b \rangle_F$

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle b \rangle_F \subseteq a \vee \langle b \rangle_F$

ให้ $x \in \langle b \rangle_F$

จะได้ว่า $b \leq x$

เนื่องจาก $a \leq b$

ดังนั้น $a \leq x$

เพราะฉะนั้น $x = a \vee x$

นั่นคือ $x \in a \vee \langle b \rangle_F$

สรุปได้ว่า $\langle b \rangle_F \subseteq a \vee \langle b \rangle_F$

เพราะฉะนั้น $a \vee \langle b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a \vee \langle b \rangle_F = \langle b \rangle_F$ นั่นคือ $b \in a \vee \langle b \rangle_F$

จะมี $c \in B$ ซึ่ง $b \leq c$ ที่ทำให้ $b = a \vee c$

ดังนั้น $a \vee b = a \vee (a \vee c) = (a \vee a) \vee c = a \vee c = b$

เพราะฉะนั้น $a \leq b$

ตัวอย่าง 1.12 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

เพราะว่า $2 < 6$

จะเห็นว่า $2 \vee \langle 6 \rangle_F = \{ 2 \vee 6, 2 \vee 30 \} = \{6,30\} = \langle 6 \rangle_F$

นั่นคือ $2 \vee \langle 6 \rangle_F = \langle 6 \rangle_F$

เพราะว่า $3 \vee \langle 15 \rangle_F = \{ 3 \vee 15, 3 \vee 30 \} = \{15,30\} = \langle 15 \rangle_F$

จะเห็นว่า $3 < 15$

ตัวอย่าง 1.13 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

เพราะว่า $\{a\} \subset \{a,b\}$

จะเห็นว่า $\{a\} \vee \langle\{a,b\}\rangle_F = \{\{a\} \vee \{a,b\}, \{a\} \vee \{a,b,c\}\} = \{\{a,b\},\{a,b,c\}\} = \langle\{a,b\}\rangle_F$

เพราะว่า $\{b\} \vee \langle\{b,c\}\rangle_F = \{\{b\} \vee \{b,c\}, \{b\} \vee \{a,b,c\}\} = \{\{b,c\},\{a,b,c\}\} = \langle\{b,c\}\rangle_F$

จะเห็นว่า $\{b\} \subset \{b,c\}$

บทแทรก 1.14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a > b$ หรือ $a >< b$ ก็ต่อเมื่อ $a \vee \langle b\rangle_F \neq \langle b\rangle_F$

พิสูจน์ ถ้า $a > b$ หรือ $a >< b$ จะเห็นได้ชัดว่า $a \vee \langle b\rangle_F \neq \langle b\rangle_F$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a \vee \langle b\rangle_F \neq \langle b\rangle_F$

จะแสดงว่า ถ้า $a \sim b$ แล้ว $a > b$

สมมติให้ $a \leq b$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $a \vee \langle b\rangle_F = \langle b\rangle_F$

ขัดแย้งกับ $a \vee \langle b\rangle_F \neq \langle b\rangle_F$

ดังนั้น ถ้า $a \sim b$ แล้ว $a > b$

นั่นคือ ถ้า $a \vee \langle b\rangle_F \neq \langle b\rangle_F$ แล้ว $a > b$ หรือ $a >< b$

ตัวอย่าง 1.15 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

เพราะว่า $6 > 2$

จะเห็นว่า $6 \vee \langle 2\rangle_F = \{6 \vee 2, 6 \vee 6, 6 \vee 10, 6 \vee 30\} = \{6,30\} \neq \{2,6,10,30\} = \langle 2\rangle_F$

นั่นคือ $6 \vee \langle 2\rangle_F \neq \langle 2\rangle_F$

เพราะว่า $6 >< 5$

จะเห็นว่า $6 \vee \langle 5 \rangle_F = \{ 6 \vee 5, 6 \vee 10, 6 \vee 15, 6 \vee 30 \} = \{30\} \neq \{5,10,15,30\} = \langle 5 \rangle_F$

นั่นคือ $6 \vee \langle 5 \rangle_F \neq \langle 5 \rangle_F$

เพราะว่า $2 \vee \langle 15 \rangle_F = \{ 2 \vee 15, 2 \vee 30 \} = \{30\} \neq \{15,30\} = \langle 15 \rangle_F$

จะเห็นว่า $2 > < 15$

เพราะว่า $10 \vee \langle 5 \rangle_F = \{ 10 \vee 5, 10 \vee 10, 10 \vee 15, 10 \vee 30 \} = \{10,30\}$

$\neq \{5,10,15,30\} = \langle 5 \rangle_F$

จะเห็นว่า $10 > 5$

ตัวอย่าง 1.16 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

เพราะว่า $\{a,b\} \supset \{b\}$

จะเห็นว่า $\{a,b\} \vee \langle \{b\} \rangle_F = \{\{a,b\} \vee \{b\}, \{a,b\} \vee \{a,b\}, \{a,b\} \vee \{b,c\}, \{a,b\} \vee \{a,b,c\}\}$

$= \{\{a,b\},\{a,b,c\}\} \neq \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} = \langle \{b\} \rangle_F$

นั่นคือ $\{a,b\} \vee \langle \{b\} \rangle_F \neq \langle \{b\} \rangle_F$

เพราะว่า $\{a,b\} > < \{c\}$

จะเห็นว่า $\{a,b\} \vee \langle \{c\} \rangle_F = \{\{a,b\} \vee \{c\}, \{a,b\} \vee \{a,c\}, \{a,b\} \vee \{b,c\}, \{a,b\} \vee \{a,b,c\}\}$

$= \{\{a,b,c\}\} \neq \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} = \langle \{c\} \rangle_F$

นั่นคือ $\{a,b\} \vee \langle \{c\} \rangle_F \neq \langle \{c\} \rangle_F$

เพราะว่า $\{b,c\} \vee \langle \{b\} \rangle_F = \{\{b,c\} \vee \{b\}, \{b,c\} \vee \{a,b\}, \{b,c\} \vee \{b,c\}, \{b,c\} \vee \{a,b,c\}\}$

$= \{\{b,c\},\{a,b,c\}\} \neq \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} = \langle \{b\} \rangle_F$

จะเห็นว่า $\{b,c\} \supset \{b\}$

เพราะว่า $\{b,c\} \vee \langle \{a\} \rangle_F = \{\{b,c\} \vee \{a\}, \{b,c\} \vee \{a,b\}, \{b,c\} \vee \{a,c\}, \{b,c\} \vee \{a,b,c\}\}$

$= \{\{a,b,c\}\} \neq \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\} = \langle \{a\} \rangle_F$

จะเห็นว่า $\{b,c\} > < \{a\}$

บทนิยาม 1.17 ให้ B เป็น Boolean algebra ให้ $a \in B$ และ $a \neq 0_B$ จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPF (Boolean principal filter) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 0_B$, $c_j \neq 0_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \leq a$ และ $c_j \leq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$

2. $b_i \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

3. $c_j \vee < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก
แทนการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPF ของ a
ด้วย $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$
และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPF ของ a

ตัวอย่าง 1.18 พิจารณา Boolean algebra B_{30} จะได้ว่า $30 = 2 \vee 5 \vee \lfloor 6 \vee 10 \rfloor$
เพราะว่า 1. $30 = 2 \vee 5 \vee 6 \vee 10$ และ

2. $2 \vee < 6 \vee 10 >_F = 2 \vee < 30 >_F = \{2 \vee 30\} = \{30\} = < 30 >_F = < 6 \vee 10 >_F$

$5 \vee < 6 \vee 10 >_F = 5 \vee < 30 >_F = \{5 \vee 30\} = \{30\} = < 30 >_F = < 6 \vee 10 >_F$

3. $6 \vee < 10 >_F = \{ 6 \vee 10, 6 \vee 30 \} = \{30\} \neq \{10,30\} = < 10 >_F$

$10 \vee < 6 >_F = \{ 10 \vee 6, 10 \vee 30 \} = \{30\} \neq \{6,30\} = < 6 >_F$

ดังนั้น $30 = 2 \vee 5 \vee \lfloor 6 \vee 10 \rfloor$

ทฤษฎีบท 1.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor$ แล้ว $c >< d$

พิสูจน์ สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor$
จะได้ว่า $c \vee < d >_F \neq < d >_F$ และ $d \vee < c >_F \neq < c >_F$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c > d$ หรือ $c >< d$

สมมติว่า $c > d$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $d \vee \langle c \rangle_F = \langle c \rangle_F$

ขัดแย้งกับ $d \vee \langle c \rangle_F \neq \langle c \rangle_F$

ดังนั้น $c >< d$

ตัวอย่าง 1.20 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $30 = 3 \vee \lfloor 6 \vee 15 \rfloor$ จะเห็นว่า $6 >< 15$

เพราะว่า $42 = 3 \vee \lfloor 6 \vee 21 \rfloor$ จะเห็นว่า $6 >< 21$

เพราะว่า $70 = 2 \vee \lfloor 10 \vee 35 \rfloor$ จะเห็นว่า $10 >< 35$

เพราะว่า $105 = 5 \vee \lfloor 15 \vee 35 \rfloor$ จะเห็นว่า $15 >< 35$

ทฤษฎีบท 1.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $c_i >< c_j$ สำหรับทุก $i \neq j$

พิสูจน์ สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.19 จะได้ว่า $c_k >< (c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_k \vee \ldots \vee c_m)$ ทุก $1 \leq k \leq m$

สมมติให้ $c_i \sim c_j$ สำหรับบาง $i \neq j$

กรณี $c_i < c_j$

จะได้ $c_i < c_j \leq c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_i \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_i < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_i \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $c_i \sim (c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_i \vee \ldots \vee c_m)$

ขัดแย้งกับ $c_i >< c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_i \vee \ldots \vee c_m$

กรณี $c_i > c_j$

จะได้ $c_j < c_i \leq c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_j < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $c_j \sim c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

ขัดแย้งกับ $c_j >< (c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m)$

สรุปได้ว่า $c_i >< c_j$ สำหรับทุก $i \neq j$

ตัวอย่าง 1.22 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $210 = 5 \vee \lfloor 6 \vee 10 \vee 14 \rfloor$ จะเห็นว่า $6 >< 10$ และ $6 >< 14$ และ $10 >< 14$

เพราะว่า $30 = 10 \vee \lfloor 2 \vee 3 \vee 5 \rfloor$ จะเห็นว่า $2 >< 3$ และ $2 >< 5$ และ $3 >< 5$

ทฤษฎีบท 1.23 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1. $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $a = (b_1 \vee b_2) \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2. ถ้า $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

3. ถ้า $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

หรือ $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ หรือ $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 1. สมมติให้ $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

จะได้ว่า $b_i \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

และ $c_j \vee < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

จะแสดงว่า $a = (b_1 \vee b_2) \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

เพียงพอที่จะแสดงว่า $(b_1 \vee b_2) \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

เนื่องจาก $b_1 \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $b_2 \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b_1 \leq c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$ และ $b_2 \leq c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $b_1 \vee b_2 \leq c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $(b_1 \vee b_2) \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

นั่นคือ $a = (b_1 \vee b_2) \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a = (b_1 \vee b_2) \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

จะได้ว่า $b_i \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $3 \leq i \leq n$

และ $(b_1 \vee b_2) \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $c_j \vee < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

จะแสดงว่า $b_1 \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $b_2 \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

เนื่องจาก $(b_1 \vee b_2) \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b_1 \vee b_2 \leq c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $b_1 \leq c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$ และ $b_2 \leq c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b_1 \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $b_2 \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

นั่นคือ $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 2. สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

จะได้ว่า $b \vee < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $c_j \vee < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

จะแสดงว่า $(c_1 \vee c_2) \vee < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F$

สมมติให้ $(c_1 \vee c_2) \vee < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 \leq c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_1 \vee c_2 \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $c_1 \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$

ขัดแย้งกับ $c_1 \vee < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$

ดังนั้น $(c_1 \vee c_2) \vee <c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m>_F \neq <c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m>_F$

สรุปได้ว่า $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 3. สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.23.2 จะได้ว่า $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee (c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$

และโดย ทฤษฎีบท 1.19 จะได้ว่า $(c_1 \vee c_2) >< (c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m)$

ถ้า $c_1 \sim c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \sim c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ถ้า $c_1 \leq c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \leq c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 \leq c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ ขัดแย้งกับ $c_1 \vee c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ถ้า $c_1 > c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ หรือ $c_2 > c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 > c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ ขัดแย้งกับ $c_1 \vee c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

สรุปว่า $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ หรือ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ถ้า $c_1 \sim c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แต่ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

สมมติว่า $c_1 > c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 > c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ ขัดแย้งกับ $c_1 \vee c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_1 \leq c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee <c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m>_F = <c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m>_F$ ___(1)

เนื่องจาก $b \vee <(c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m>_F = <(c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $b \leq c_1 \vee (c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m) = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $b \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \vee <c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m>_F = <c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m>_F$ ___(2)

เนื่องจาก $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

โดยบทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c_2 \vee < c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m >_F$ ___(3)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F = < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_j \leq c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m$

ดังนั้น $c_j \leq (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า

$c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

ขัดแย้งกับ $c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

$\neq < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

ดังนั้น $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ _______(4)

ดังนั้น จาก (1) ถึง (4)

สรุปได้ว่า $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m \rfloor$

ถ้า $c_2 \sim c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ แต่ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณี $c_1 \sim c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ แต่ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$

จะได้ว่า $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m \rfloor$

ถ้า $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$

ถ้า $c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m = c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$ และ $c_2 < c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F$

และ $c_2 \vee < c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F$ _______(5)

เนื่องจาก $b \vee < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m$

เนื่องจาก $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m = c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $b \leq c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$ และ $b \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \vee < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $b \vee < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$ _______(6)

เนื่องจาก $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c_1 \vee < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F$

และ $c_2 \vee < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F$ _______(7)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \vee < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \vee < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_j \leq c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_j \leq (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า

$c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

ขัดแย้งกับ $c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

$\neq < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

เพราะฉะนั้น $c_j \vee < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ______(8)

ดังนั้น จาก (5) ถึง (8)

สรุปได้ว่า $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$c_j \vee < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ _______(9)

ดังนั้น จาก (5), (6), (7) และ (9)

สรุปได้ว่า $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ถ้า $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \neq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

สมมติว่า $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_1 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ส่วนที่เหลือพิสูจน์เหมือนกับกรณี

$c_1 \sim c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แต่ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

สมมติว่า $c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_2 < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ส่วนที่เหลือพิสูจน์เหมือนกับกรณี

$c_2 \sim c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แต่ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

สมมติว่า $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >< c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

จะแสดงว่า $c_1 \vee \langle c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F \neq \langle c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F$

สมมติให้ $c_1 \vee \langle c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F = \langle c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ขัดแย้งกับ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >< c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

นั่นคือ $c_1 \vee \langle c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F \neq \langle c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F$

จะแสดงว่า $c_2 \vee \langle c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F \neq \langle c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F$

สมมติให้ $c_2 \vee \langle c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F = \langle c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_2 \leq c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

เพราะฉะนั้น $c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \leq c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

ขัดแย้งกับ $c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >< c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

นั่นคือ $c_2 \vee < c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F$

ดังนั้น $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rfloor$

ตัวอย่าง 1.24 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $210 = 2 \vee 7 \vee 10 \vee \lfloor 6 \vee 15 \vee 21 \rfloor$

$210 = 2 \vee 7 \vee 10 \vee 6 \vee 15 \vee 21 = (2 \vee 7) \vee (10 \vee 6 \vee 15 \vee 21) = 14 \vee 10 \vee 6 \vee 15 \vee 21$

เนื่องจาก $2 | 6 \vee 15 \vee 21$ และ $7 | 6 \vee 15 \vee 21$ ดังนั้น $14 | 6 \vee 15 \vee 21$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $14 \vee < 6 \vee 15 \vee 21 >_F = < 6 \vee 15 \vee 21 >_F$

ดังนั้น $210 = 14 \vee 10 \vee \lfloor 6 \vee 15 \vee 21 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.25 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $210 = 21 \vee \lfloor 6 \vee 10 \vee 14 \rfloor$

$210 = 21 \vee 6 \vee 10 \vee 14 = (6 \vee 10) \vee (14 \vee 21) = 14 \vee 21 \vee 30$

เนื่องจาก $21 | 6 \vee 10 \vee 14 = 21 | 14 \vee 30$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $21 \vee < 14 \vee 30 >_F = < 14 \vee 30 >_F$

และเนื่องจาก $14 >< 30$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $14 \vee < 30 >_F \neq < 30 >_F$ และ $30 \vee < 14 >_F \neq < 14 >_F$

ดังนั้น $210 = 21 \vee \lfloor 14 \vee 30 \rfloor$

บทแทรก 1.26 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $c_1 < c_2$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m \rfloor$
2. ถ้า $c_1 < c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m \rfloor$
3. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m \rfloor$

4. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 1. ให้ $c_1 < c_2$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$ ______(10)

เนื่องจาก $b \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m$

เนื่องจาก $c_1 < c_2$ จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 = c_2$

ดังนั้น $b \leq c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \vee < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$ ______(11)

เนื่องจาก $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c_2 \vee < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F$ ______(12)

และเนื่องจาก $c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

ดังนั้น $c_j \vee < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ____(13)

เพราะฉะนั้น จาก (10) ถึง (13)

สรุปได้ว่า $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 2. ให้ $c_1 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >_F$ ______(14)

เนื่องจาก $b \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $b \leq c_1 \vee (c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m) = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \vee < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F$ ______(15)

เนื่องจาก $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c_2 \vee < c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m >_F$ ______(16)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F = < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_j \leq c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m$

ดังนั้น $c_j \leq (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า

$c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

ขัดแย้งกับ $c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

เพราะฉะนั้น $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ______(17)

เพราะฉะนั้น จาก (14) ถึง (17)

สรุปได้ว่า $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 3. ให้ $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee ... \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_1 \vee < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F$ ______(18)

เนื่องจาก $b \vee < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq (c_1 \vee c_2) \vee ... \vee c_m$

ดังนั้น $b \leq c_1 \vee (c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m) = c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \vee < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F = < c_2 \vee c_3 \vee ... \vee c_m >_F$ ______(19)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \vee < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \vee < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F = < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c_j \leq c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_j \leq (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า

$c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F = < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

ขัดแย้งกับ $c_j \vee < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

เพราะฉะนั้น $c_j \vee < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_2 \vee \ldots \vee \hat{c}_j \vee \ldots \vee c_m >_F$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ______(20)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

สมมติให้ $c_2 \sim c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ถ้า $c_2 \leq c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

เนื่องจาก $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m = c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ดังนั้น $c_1 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ขัดแย้งกับ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

ถ้า $c_2 > c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

เนื่องจาก $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

จะได้ว่า $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m = c_2$

ดังนั้น $c_1 < c_2$

ขัดแย้งกับ $c_1 >< c_2$

เพราะฉะนั้น $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c_2 \vee < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F \neq < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m >_F$ ______(21)

เพราะฉะนั้น จาก (18) ถึง (21)

สรุปได้ว่า $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 4. ให้ $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$
และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ 3.
ดังนั้น $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ตัวอย่าง 1.27 พิจารณา Boolean algebra B_{210}
เพราะว่า $210 = 7 \vee \lfloor (5 \vee 35) \vee 14 \vee 21 \rfloor$
เนื่องจาก $5 \vee 35 = 35$
จะได้ว่า $7 \vee < 35 \vee 14 \vee 21 >_F = < 35 \vee 14 \vee 21 >_F$
เนื่องจาก $5 | 35$ จะได้ว่า $5 | 35 \vee 14 \vee 21$
โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $5 \vee < 35 \vee 14 \vee 21 >_F = < 35 \vee 14 \vee 21 >_F$
เนื่องจาก $35 >< 14 \vee 21$
โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $35 \vee < 14 \vee 21 >_F \neq < 14 \vee 21 >_F$
ดังนั้น $210 = 7 \vee 5 \vee \lfloor 35 \vee 14 \vee 21 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.28 พิจารณา Boolean algebra B_{210}
เพราะว่า $210 = 3 \vee \lfloor (7 \vee 5) \vee 14 \vee 21 \rfloor$
จะได้ว่า $3 \vee < (7 \vee 5) \vee 14 \vee 21 >_F = < (7 \vee 5) \vee 14 \vee 21 >_F$
โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $3 | (7 \vee 5) \vee 14 \vee 21$
ดังนั้น $3 | 7 \vee (5 \vee 14 \vee 21)$
เนื่องจาก $7 | 14 \vee 21$ จะได้ว่า $7 | 5 \vee 14 \vee 21$
เพราะฉะนั้น $3 | 5 \vee 14 \vee 21$
โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $3 \vee < 5 \vee 14 \vee 21 >_F = < 5 \vee 14 \vee 21 >_F$

เนื่องจาก $7 \mid 5 \vee 14 \vee 21$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $7 \vee \langle 5 \vee 14 \vee 21 \rangle_F = \langle 5 \vee 14 \vee 21 \rangle_F$

เนื่องจาก $5 >< 14 \vee 21$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $5 \vee \langle 14 \vee 21 \rangle_F \neq \langle 14 \vee 21 \rangle_F$

เนื่องจาก $14 >< 5 \vee 21$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $14 \vee \langle 5 \vee 21 \rangle_F \neq \langle 5 \vee 21 \rangle_F$

เนื่องจาก $21 >< 14 \vee 5$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $21 \vee \langle 14 \vee 5 \rangle_F \neq \langle 14 \vee 5 \rangle_F$

ดังนั้น $210 = 3 \vee 7 \vee \lfloor 5 \vee 14 \vee 21 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.29 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 2 \vee \lfloor (6 \vee 10) \vee 105 \vee 165 \rfloor$

จะได้ว่า $2 \vee \langle (6 \vee 10) \vee 105 \vee 165 \rangle_F = \langle (6 \vee 10) \vee 105 \vee 165 \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \mid (6 \vee 10) \vee 105 \vee 165$

ดังนั้น $2 \mid 6 \vee (10 \vee 105 \vee 165)$

เนื่องจาก $6 \vee 10 \mid 10 \vee 105 \vee 165$ จะได้ว่า $6 \mid 10 \vee 105 \vee 165$

เพราะฉะนั้น $2 \mid 10 \vee 105 \vee 165$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \vee \langle 10 \vee 105 \vee 165 \rangle_F = \langle 10 \vee 105 \vee 165 \rangle_F$

เนื่องจาก $6 \mid 10 \vee 105 \vee 165$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $6 \vee \langle 10 \vee 105 \vee 165 \rangle_F = \langle 10 \vee 105 \vee 165 \rangle_F$

เนื่องจาก $10 >< 105 \vee 165$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $10 \vee \langle 105 \vee 165 \rangle_F \neq \langle 105 \vee 165 \rangle_F$

เนื่องจาก $105 >< 10 \vee 165$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $105 \vee \langle 10 \vee 165 \rangle_F \neq \langle 10 \vee 165 \rangle_F$

เนื่องจาก $165 >< 10 \vee 105$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $165 \vee < 10 \vee 105 >_F \neq < 10 \vee 105 >_F$

ดังนั้น $210 = 2 \vee 6 \vee \lfloor 10 \vee 105 \vee 165 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.30 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 2 \vee \lfloor (15 \vee 10) \vee 21 \vee 33 \rfloor$

จะได้ว่า $2 \vee < (15 \vee 10) \vee 21 \vee 33 >_F = < (15 \vee 10) \vee 21 \vee 33 >_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \mid (15 \vee 10) \vee 21 \vee 33$

ดังนั้น $2 \mid 15 \vee (10 \vee 21 \vee 33)$

เนื่องจาก $15 \vee 21 \vee 33 \mid 10 \vee 21 \vee 33$ จะได้ว่า $15 \mid 10 \vee 21 \vee 33$

เพราะฉะนั้น $2 \mid 10 \vee 21 \vee 33$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \vee < 10 \vee 21 \vee 33 >_F = < 10 \vee 21 \vee 33 >_F$

เนื่องจาก $15 \mid 10 \vee 21 \vee 33$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $15 \vee < 10 \vee 21 \vee 33 >_F = < 10 \vee 21 \vee 33 >_F$

เนื่องจาก $10 >< 21 \vee 33$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $10 \vee < 21 \vee 33 >_F \neq < 21 \vee 33 >_F$

เนื่องจาก $21 >< 10 \vee 33$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $21 \vee < 10 \vee 33 >_F \neq < 10 \vee 33 >_F$

เนื่องจาก $33 >< 10 \vee 21$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $33 \vee < 10 \vee 21 >_F \neq < 10 \vee 21 >_F$

ดังนั้น $2310 = 2 \vee 15 \vee \lfloor 10 \vee 21 \vee 33 \rfloor$

บทแทรก 1.31 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $c_2 < c_1$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$
2. ถ้า $c_2 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

3. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \vee c_1 < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

4. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.1

ดังนั้น $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.2

ดังนั้น $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.3

ดังนั้น $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.4

ดังนั้น $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ตัวอย่าง 1.32 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $210 = 7 \vee \lfloor (15 \vee 3) \vee 10 \vee 35 \rfloor$

เนื่องจาก $15 \vee 3 = 15$

จะได้ว่า $7 \vee <15 \vee 10 \vee 35>_F = <15 \vee 10 \vee 35>_F$

เนื่องจาก $3 | 15$ จะได้ว่า $3 | 15 \vee 10 \vee 35$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $3 \vee <15 \vee 10 \vee 35>_F = <15 \vee 10 \vee 35>_F$

เนื่องจาก $15 >< 10 \vee 35$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $15 \vee <10 \vee 35>_F \neq <10 \vee 35>_F$

ดังนั้น $210 = 7 \vee 3 \vee \lfloor 15 \vee 10 \vee 35 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.33 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $210 = 3 \vee \lfloor (7 \vee 5) \vee 10 \vee 15 \rfloor$

จะได้ว่า $3 \vee \langle (7 \vee 5) \vee 10 \vee 15 \rangle_F = \langle (7 \vee 5) \vee 10 \vee 15 \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $3 \mid (7 \vee 5) \vee 10 \vee 15$

ดังนั้น $3 \mid 5 \vee (7 \vee 10 \vee 15)$

เนื่องจาก $5 \mid 10 \vee 15$ จะได้ว่า $5 \mid 7 \vee 10 \vee 15$

เพราะฉะนั้น $3 \mid 7 \vee 10 \vee 15$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $3 \vee \langle 7 \vee 10 \vee 15 \rangle_F = \langle 7 \vee 10 \vee 15 \rangle_F$

เนื่องจาก $5 \mid 7 \vee 10 \vee 15$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $5 \vee \langle 7 \vee 10 \vee 15 \rangle_F = \langle 7 \vee 10 \vee 15 \rangle_F$

เนื่องจาก $7 >< 10 \vee 15$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $7 \vee \langle 10 \vee 15 \rangle_F \neq \langle 10 \vee 15 \rangle_F$

เนื่องจาก $10 >< 7 \vee 15$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $10 \vee \langle 7 \vee 15 \rangle_F \neq \langle 7 \vee 15 \rangle_F$

เนื่องจาก $15 >< 10 \vee 7$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $15 \vee \langle 10 \vee 7 \rangle_F \neq \langle 10 \vee 7 \rangle_F$

ดังนั้น $210 = 3 \vee 5 \vee \lfloor 7 \vee 10 \vee 15 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.34 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 2 \vee \lfloor (6 \vee 15) \vee 70 \vee 110 \rfloor$

จะได้ว่า $2 \vee \langle (6 \vee 15) \vee 70 \vee 110 \rangle_F = \langle (6 \vee 15) \vee 70 \vee 110 \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \mid (6 \vee 15) \vee 70 \vee 110$

ดังนั้น $2 \mid 15 \vee (6 \vee 70 \vee 110)$

เนื่องจาก $6 \vee 15 \mid 6 \vee 70 \vee 110$ จะได้ว่า $15 \mid 6 \vee 70 \vee 110$

เพราะฉะนั้น $2 \mid 6 \vee 70 \vee 110$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \vee \langle 6 \vee 70 \vee 110 \rangle_F = \langle 6 \vee 70 \vee 110 \rangle_F$

เนื่องจาก $15 \mid 6 \vee 70 \vee 110$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $15 \vee \langle 6 \vee 70 \vee 110 \rangle_F = \langle 6 \vee 70 \vee 110 \rangle_F$

เนื่องจาก $6 >< 70 \vee 110$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $6 \vee \langle 70 \vee 110 \rangle_F \neq \langle 70 \vee 110 \rangle_F$

เนื่องจาก $70 >< 6 \vee 110$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $70 \vee \langle 6 \vee 110 \rangle_F \neq \langle 6 \vee 110 \rangle_F$

เนื่องจาก $110 >< 6 \vee 70$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $110 \vee \langle 6 \vee 70 \rangle_F \neq \langle 6 \vee 70 \rangle_F$

ดังนั้น $2310 = 2 \vee 15 \vee \lfloor 6 \vee 70 \vee 110 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.35 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 2 \vee \lfloor (6 \vee 15) \vee 35 \vee 55 \rfloor$

จะได้ว่า $2 \vee \langle (6 \vee 15) \vee 35 \vee 55 \rangle_F = \langle (6 \vee 15) \vee 35 \vee 55 \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \mid (6 \vee 15) \vee 35 \vee 55$

ดังนั้น $2 \mid 15 \vee (6 \vee 35 \vee 55)$

เนื่องจาก $15 \vee 35 \vee 55 \mid 6 \vee 35 \vee 55$ จะได้ว่า $15 \mid 6 \vee 35 \vee 55$

เพราะฉะนั้น $2 \mid 6 \vee 35 \vee 55$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \vee \langle 6 \vee 35 \vee 55 \rangle_F = \langle 6 \vee 35 \vee 55 \rangle_F$

เนื่องจาก $15 \mid 6 \vee 35 \vee 55$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $15 \vee \langle 6 \vee 35 \vee 55 \rangle_F = \langle 6 \vee 35 \vee 55 \rangle_F$

เนื่องจาก $6 >< 35 \vee 55$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $6 \vee \langle 35 \vee 55 \rangle_F \neq \langle 35 \vee 55 \rangle_F$

เนื่องจาก $35 >< 6 \vee 55$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $35 \vee \langle 6 \vee 55 \rangle_F \neq \langle 6 \vee 55 \rangle_F$

เนื่องจาก $55 >< 6 \vee 35$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $55 \vee \langle 6 \vee 35 \rangle_F \neq \langle 6 \vee 35 \rangle_F$

ดังนั้น $2310 = 2 \vee 15 \vee \lfloor 6 \vee 35 \vee 55 \rfloor$

บทแทรก 1.36 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ ถ้า $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ และ $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ พิสูจน์เหมือนกับทฤษฎีบท 1.23.3

ดังนั้น $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ และ $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ตัวอย่าง 1.37 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 2 \vee \lfloor (10 \vee 15) \vee 42 \vee 66 \rfloor$

จะได้ว่า $2 \vee \langle (10 \vee 15) \vee 42 \vee 66 \rangle_F = \langle (10 \vee 15) \vee 42 \vee 66 \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \mid (10 \vee 15) \vee 42 \vee 66$

ดังนั้น $2 \mid 10 \vee (15 \vee 42 \vee 66)$ และ $2 \mid 15 \vee (10 \vee 42 \vee 66)$

เนื่องจาก $10 \vee 42 \vee 66 = 15 \vee 42 \vee 66$

จะได้ว่า $10 \mid 15 \vee 42 \vee 66$ และ $15 \mid 10 \vee 42 \vee 66$

เพราะฉะนั้น $2 \mid 15 \vee 42 \vee 66$ และ $2 \mid 10 \vee 42 \vee 66$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $2 \vee \langle 15 \vee 42 \vee 66 \rangle_F = \langle 15 \vee 42 \vee 66 \rangle_F$

และ $2 \vee \langle 10 \vee 42 \vee 66 \rangle_F = \langle 10 \vee 42 \vee 66 \rangle_F$

เนื่องจาก $10 \mid 15 \vee 42 \vee 66$ และ $15 \mid 10 \vee 42 \vee 66$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $10 \vee \langle 15 \vee 42 \vee 66 \rangle_F = \langle 15 \vee 42 \vee 66 \rangle_F$

และ $15 \vee \langle 10 \vee 42 \vee 66 \rangle_F = \langle 10 \vee 42 \vee 66 \rangle_F$

เนื่องจาก $10 >< 42\vee 66$ และ $15 >< 42\vee 66$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $10\vee <42\vee 66>_F \neq <42\vee 66>_F$

และ $15\vee <42\vee 66>_F \neq <42\vee 66>_F$

เนื่องจาก $42 >< 10\vee 66$ และ $42 >< 15\vee 66$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $42\vee <10\vee 66>_F \neq <10\vee 66>_F$

และ $42\vee <15\vee 66>_F \neq <15\vee 66>_F$

เนื่องจาก $66 >< 10\vee 42$ และ $66 >< 15\vee 42$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $66\vee <10\vee 42>_F \neq <10\vee 42>_F$

และ $66\vee <15\vee 42>_F \neq <15\vee 42>_F$

ดังนั้น $2310 = 2\vee 10\vee \lfloor 15\vee 42\vee 66\rfloor$ และ $2310 = 2\vee 15\vee \lfloor 10\vee 42\vee 66\rfloor$

บทแทรก 1.38 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b\vee \lfloor (c_1\vee c_2)\vee ...\vee c_m\rfloor$ ถ้า $c_1\vee c_3\vee ...\vee c_m >< c_2\vee c_3\vee ...\vee c_m$
แล้ว $a = b\vee \lfloor c_1\vee c_2\vee ...\vee c_m\rfloor$

พิสูจน์ พิสูจน์เหมือนกับทฤษฎีบท 1.23.3
ดังนั้น $a = b\vee \lfloor c_1\vee c_2\vee ...\vee c_m\rfloor$

ตัวอย่าง 1.39 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 2\vee \lfloor (6\vee 10)\vee 14\vee 22)\rfloor$

ถ้าสมมติให้ $6\vee <10\vee 14\vee 22>_F = <10\vee 14\vee 22>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $6 \mid 10\vee 14\vee 22$

ดังนั้น $6\vee 14\vee 22 \mid 10\vee 14\vee 22$ ขัดแย้งกับ $6\vee 14\vee 22 >< 10\vee 14\vee 22$

เพราะฉะนั้น $6\vee <10\vee 14\vee 22>_F \neq <10\vee 14\vee 22>_F$

ถ้าสมมติให้ $10\vee <6\vee 14\vee 22>_F = <6\vee 14\vee 22>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $10 | 6 \vee 14 \vee 22$

ดังนั้น $10 \vee 14 \vee 22 | 6 \vee 14 \vee 22$ ขัดแย้งกับ $10 \vee 14 \vee 22 >< 6 \vee 14 \vee 22$

เพราะฉะนั้น $10 \vee <6 \vee 14 \vee 22>_F \neq <6 \vee 14 \vee 22>_F$

ดังนั้น $2310 = 2 \vee \lfloor 6 \vee 10 \vee 14 \vee 22 \rfloor$

บทแทรก 1.40 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1. $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \ldots \vee c_m \rfloor$

ก็ต่อเมื่อ $a = (\ldots((b_1 \vee b_2) \vee b_3) \vee \ldots \vee b_n) \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2. ถ้า $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$

3. ถ้า $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

หรือ $a = b \vee c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j} \vee \lfloor \overline{c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j}} \rfloor$

สำหรับบาง $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ เมื่อ $1 \leq j < m$

โดยที่ $\overline{c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j}} = c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_1} \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_2} \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_j} \vee \ldots \vee c_m$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 1.23.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 1.23.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 1.23.3

บทแทรก 1.41 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$

ถ้า $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$ และ $c_1, \ldots, c_m$ เป็น atom ที่แตกต่างกัน

แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

พิสูจน์ ให้ $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$

เนื่องจาก $b \vee <(\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m)>_F = <(\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m)>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq (...((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee ... \vee c_m)$

เพราะฉะนั้น $b \leq (c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-1}) \vee c_m$

เนื่องจาก $c_1,...,c_m$ เป็น atom ที่แตกต่างกัน

ดังนั้น $(c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-1}) >< c_m$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $c_m \vee <(c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-1})>_F \neq <(c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-1})>_F$

และ $(c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-1}) \vee <c_m>_F \neq <c_m>_F$

นั่นคือ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-1}) \vee c_m \rfloor$

เนื่องจาก $c_1,...,c_m$ เป็น atom ที่แตกต่างกัน

ดังนั้น $(c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-2}) \vee c_m >< c_{m-1} \vee c_m$

โดยบทแทรก 1.38 จะได้ว่า $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_{m-2}) \vee c_{m-1} \vee c_m \rfloor$

ในทำนองเดียวกัน ดำเนินการไปจนกระทั่งได้

$a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rfloor$

ตัวอย่าง 1.42 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $2310 = 10 \vee \lfloor ((((2 \vee 3) \vee 5) \vee 7) \vee 11) \rfloor$

จะได้ว่า $10 \vee <((((2 \vee 3) \vee 5) \vee 7) \vee 11)>_F = <((((2 \vee 3) \vee 5) \vee 7) \vee 11)>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $10 \mid ((((2 \vee 3) \vee 5) \vee 7) \vee 11)$

ดังนั้น $10 \mid 2 \vee 3 \vee 5 \vee 7 \vee 11$

เนื่องจาก 2,3,5,7,11 เป็น atom ที่แตกต่างกัน

ดังนั้น $2 \vee <3 \vee 5 \vee 7 \vee 11>_F \neq <3 \vee 5 \vee 7 \vee 11>_F$

และ $3 \vee <2 \vee 5 \vee 7 \vee 11>_F \neq <2 \vee 5 \vee 7 \vee 11>_F$

และ $5 \vee <2 \vee 3 \vee 7 \vee 11>_F \neq <2 \vee 3 \vee 7 \vee 11>_F$

และ $7 \vee <2 \vee 3 \vee 5 \vee 11>_F \neq <2 \vee 3 \vee 5 \vee 11>_F$

และ $11 \vee <2 \vee 3 \vee 5 \vee 7>_F \neq <2 \vee 3 \vee 5 \vee 7>_F$

นั่นคือ $2310 = 10 \vee \lfloor 2 \vee 3 \vee 5 \vee 7 \vee 11 \rfloor$

ทฤษฎีบท 1.43 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c \rfloor$ จะได้ว่า $a = c \vee \lfloor b \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $b = c$

พิสูจน์ ให้ $a = b \vee \lfloor c \rfloor$ จะได้ว่า $b \vee \langle c \rangle_F = \langle c \rangle_F$
โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq c$
สมมติให้ $a = c \vee \lfloor b \rfloor$ จะได้ว่า $c \vee \langle b \rangle_F = \langle b \rangle_F$
โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c \leq b$
ดังนั้น $b = c$
ในทางกลับกัน สมมติให้ $b = c$ จะได้ $c \leq b$
ดังนั้น $a = c \vee \lfloor b \rfloor$

ตัวอย่าง 1.44 พิจารณา Boolean algebra B_{210}
เพราะว่า $\langle 6 \vee 14 \rangle_F = \langle 42 \rangle_F = \{42,210\}$ และ $\langle 6 \vee 21 \rangle_F = \langle 42 \rangle_F = \{42,210\}$
ดังนั้น $(6 \vee 14) \vee \langle 6 \vee 21 \rangle_F = \{42 \vee 42, 42 \vee 210\} = \{42,210\} = \langle 42 \rangle_F = \langle 6 \vee 21 \rangle_F$
และ $(6 \vee 21) \vee \langle 6 \vee 14 \rangle_F = \{42 \vee 42, 42 \vee 210\} = \{42,210\} = \langle 42 \rangle_F = \langle 6 \vee 14 \rangle_F$
เพราะฉะนั้น $42 = (6 \vee 14) \vee \lfloor 6 \vee 21 \rfloor$ และ $42 = (6 \vee 21) \vee \lfloor 6 \vee 14 \rfloor$

ทฤษฎีบท 1.45 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $b > d$ และ $b \vee d = c \vee d$ แล้ว $a = c \vee d \vee \lfloor b \rfloor$
2. ถ้า $b >< d$ และ $b \vee d = c \vee d$ ก็ต่อเมื่อ $a = c \vee \lfloor b \vee d \rfloor$

พิสูจน์ 1. ให้ $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor$
สมมติให้ $b > d$ และ $b \vee d = c \vee d$
จะได้ว่า $b = b \vee d$

เนื่องจาก $b \vee d = c \vee d$

ดังนั้น $b = c \vee d$

โดย ทฤษฎีบท 1.43 จะได้ว่า $a = c \vee d \vee \lfloor b \rfloor$

พิสูจน์ 2. ให้ $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor$

สมมติให้ $b >< d$ และ $b \vee d = c \vee d$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $b \vee \langle d \rangle_F \neq \langle d \rangle_F$ และ $d \vee \langle b \rangle_F \neq \langle b \rangle_F$

เนื่องจาก $c \leq c \vee d$ และ $b \vee d = c \vee d$

ดังนั้น $c \leq b \vee d$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $c \vee \langle b \vee d \rangle_F = \langle b \vee d \rangle_F$

นั่นคือ $a = c \vee \lfloor b \vee d \rfloor$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor = c \vee \lfloor b \vee d \rfloor$

จะได้ว่า $b \vee \langle c \vee d \rangle_F = \langle c \vee d \rangle_F$ และ $c \vee \langle b \vee d \rangle_F = \langle b \vee d \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq c \vee d$ และ $c \leq b \vee d$

ดังนั้น $b \vee d \leq c \vee d$ และ $c \vee d \leq b \vee d$

นั่นคือ $b \vee d = c \vee d$

เนื่องจาก $a = c \vee \lfloor b \vee d \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.19 จะได้ว่า $b >< d$

ตัวอย่าง 1.46 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $42 = 2 \vee 21 \vee \lfloor 6 \vee 14 \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.23.1 จะได้ว่า $2 \vee 21 \vee \lfloor 6 \vee 14 \rfloor = 42 \vee \lfloor 6 \vee 14 \rfloor$

เนื่องจาก $42 = 42 \vee 14$ และ $42 \vee 14 = 6 \vee 14$

ดังนั้น $42 = 6 \vee 14$

โดย ทฤษฎีบท 1.43 จะได้ว่า $42 = 6 \vee 14 \vee \lfloor 42 \rfloor$

ดังนั้น $42 = 6 \vee 14 \vee \lfloor 2 \vee 21 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.47 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $42 = 6 \vee \lfloor 14 \vee 21 \rfloor$

เนื่องจาก $14 \vee 21 = 6 \vee 21$ ดังนั้น $14 \mid 6 \vee 21$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $14 \vee \langle 6 \vee 21 \rangle_F = \langle 6 \vee 21 \rangle_F$

เนื่องจาก $6 >< 21$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $6 \vee \langle 21 \rangle_F \neq \langle 21 \rangle_F$ และ $21 \vee \langle 6 \rangle_F \neq \langle 6 \rangle_F$

ดังนั้น $42 = 14 \vee \lfloor 6 \vee 21 \rfloor$

ทฤษฎีบท 1.48 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee c \vee \lfloor d \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. $a = b \vee d \vee \lfloor c \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $c = d$

2. ถ้า $b >< c$ และ $b \vee c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a = d \vee \lfloor b \vee c \rfloor$

พิสูจน์ 1. ให้ $a = b \vee c \vee \lfloor d \rfloor$

จะได้ว่า $b \vee \langle d \rangle_F = \langle d \rangle_F$ และ $c \vee \langle d \rangle_F = \langle d \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq d$ และ $c \leq d$

สมมติให้ $a = b \vee d \vee \lfloor c \rfloor$

จะได้ว่า $b \vee \langle c \rangle_F = \langle c \rangle_F$ และ $d \vee \langle c \rangle_F = \langle c \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq c$ และ $d \leq c$

เพราะฉะนั้น $c = d$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $c = d$

เนื่องจาก $b \leq d$ ดังนั้น $b \leq c$

นั่นคือ $a = b \vee d \vee \lfloor c \rfloor$

พิสูจน์ 2. สมมติให้ $b >< c$ และ $b \vee c = d$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $b \vee <c>_F \neq <c>_F$ และ $c \vee <b>_F \neq <b>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $d \vee <b \vee c>_F = <b \vee c>_F$

ดังนั้น $a = d \vee \lfloor b \vee c \rfloor$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a = b \vee c \vee \lfloor d \rfloor = d \vee \lfloor b \vee c \rfloor$

จะได้ว่า $b \vee <d>_F = <d>_F$ และ $c \vee <d>_F = <d>_F$ และ $d \vee <b \vee c>_F = <b \vee c>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $b \leq d$ และ $c \leq d$ และ $d \leq b \vee c$

ดังนั้น $b \vee c \leq d$ และ $d \leq b \vee c$

นั่นคือ $b \vee c = d$

เนื่องจาก $a = d \vee \lfloor b \vee c \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.19 จะได้ว่า $b >< c$

ตัวอย่าง 1.49 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $70 = 5 \vee 10 \vee 7 \vee \lfloor 14 \vee 35 \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.23.1 จะได้ว่า $5 \vee 10 \vee 7 \vee \lfloor 14 \vee 35 \rfloor = 5 \vee 70 \vee \lfloor 14 \vee 35 \rfloor$

เนื่องจาก $5 \vee <14 \vee 35>_F = <14 \vee 35>_F$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $5 \mid 14 \vee 35$

เนื่องจาก $70 = 14 \vee 35$ ดังนั้น $5 \mid 70$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $5 \vee <70>_F = <70>_F$

นั่นคือ $70 = 5 \vee (14 \vee 35) \vee \lfloor 70 \rfloor = 5 \vee (14 \vee 35) \vee \lfloor 10 \vee 7 \rfloor$

ตัวอย่าง 1.50 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $70 = 5 \vee 14 \vee \lfloor 2 \vee 35 \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.23.2 จะได้ว่า $5 \vee 14 \vee \lfloor 2 \vee 35 \rfloor = 5 \vee 14 \vee \lfloor 70 \rfloor$

เนื่องจาก $5 \vee 14 = 70$

โดย ทฤษฎีบท 1.11 จะได้ว่า $70 \vee \langle 5 \vee 14 \rangle_F = \langle 5 \vee 14 \rangle_F$

เนื่องจาก $5 >< 14$

โดย บทแทรก 1.14 จะได้ว่า $5 \vee \langle 14 \rangle_F \neq \langle 14 \rangle_F$ และ $14 \vee \langle 5 \rangle_F \neq \langle 5 \rangle_F$

ดังนั้น $70 = 70 \vee \lfloor 5 \vee 14 \rfloor$

โดย ทฤษฎีบท 1.23.1 จะได้ว่า $70 = 2 \vee 35 \vee \lfloor 5 \vee 14 \rfloor$

2. <u>การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal ideal</u>

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์การแยกตัวประกอบบน Boolean algebra ซึ่งแยกในรูปแบบที่มีตัวดำเนินการ join เป็นตัวเชื่อม และได้ใช้ Boolean principal ideal มาใช้แบ่งกลุ่มของตัวประกอบ และลดทอนให้เหลือน้อยที่สุด และใช้เป็นเกณฑ์ในการเปลี่ยนชุดตัวประกอบที่ยังทำให้ได้ผลลัพธ์เดิมเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $\langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I \subseteq \langle a \vee b \rangle_I$

พิสูจน์ ให้ $x \in \langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I$

จะได้ว่า $x \leq a$ หรือ $x \leq b$

ดังนั้น $x \leq a \vee b$

นั่นคือ $x \in \langle a \vee b \rangle_I$

บทแทรก 2.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

ถ้า $a \sim b$ แล้ว $\langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I = \langle a \vee b \rangle_I$

พิสูจน์ สมมติให้ $a \sim b$

ถ้า $a \leq b$

ให้ $x \in \langle a \vee b \rangle_I$

จะได้ว่า $x \leq a \vee b = b$

ดังนั้น $x \in \langle b \rangle_I \subseteq \langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I$

นั่นคือ $\langle a \vee b \rangle_I \subseteq \langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $\langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I = \langle a \vee b \rangle_I$

ถ้า $b < a$

ให้ $x \in \langle a \vee b \rangle_I$

จะได้ว่า $x \leq a \vee b = a$

ดังนั้น $x \in \langle a \rangle_I \subseteq \langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I$

นั่นคือ $\langle a \vee b \rangle_I \subseteq \langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $\langle a \rangle_I \cup \langle b \rangle_I = \langle a \vee b \rangle_I$

บทนิยาม 2.3 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$
กำหนดให้ $a \vee \langle b \rangle_I = \{ a \vee c \mid c \in B \text{ และ } c \leq b \}$

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$ โดยที่ $a \neq 0_B$

$$a \vee \langle b \rangle_I \subset \langle a \vee b \rangle_I$$

พิสูจน์ ให้ $x \in a \vee \langle b \rangle_I$
จะมี $c \leq b$ ที่ทำให้ $x = a \vee c$
เนื่องจาก $c \leq b$
ดังนั้น $x = a \vee c \leq a \vee b$
นั่นคือ $x \in \langle a \vee b \rangle_I$
เพราะฉะนั้น $a \vee \langle b \rangle_I \subset \langle a \vee b \rangle_I$

ข้อสังเกต 2.5 $a \vee \langle b \rangle_I \neq \langle a \vee b \rangle_I$ เพราะว่า $0_B \notin a \vee \langle b \rangle_I$

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $<a \vee b>_I = <b>_I$

พิสูจน์ ให้ $a \leq b$

เนื่องจาก $<b>_I \subseteq <a>_I \cup <b>_I$

โดย ทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $<b>_I \subseteq <a \vee b>_I$

จะแสดงว่า $<a \vee b>_I = <b>_I$

เพียงพอที่จะแสดงว่า $<a \vee b>_I \subseteq <b>_I$

ให้ $x \in <a \vee b>_I$

จะได้ $x \leq a \vee b$

ดังนั้น $x \leq a \vee b = b$

นั่นคือ $x \in <b>_I$

สรุปได้ว่า $<a \vee b>_I = <b>_I$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $<a \vee b>_I = <b>_I$

จะได้ว่า $a \vee b = b$

ดังนั้น $a \leq b$

บทแทรก 2.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a \vee <b>_I \subset <b>_I$

พิสูจน์ ให้ $a \leq b$

โดย ทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า $<a \vee b>_I = <b>_I$

โดย ทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า $a \vee <b>_I \subset <b>_I$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a \vee <b>_I \subset <b>_I$

เนื่องจาก $a = a \vee 0_B$ และ $0_B \leq b$

ดังนั้น $a \in a \vee \langle b \rangle_I$

เพราะฉะนั้น $a \in \langle b \rangle_I$

นั่นคือ $a \leq b$

บทแทรก 2.8 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$
จะได้ว่า $a > b$ หรือ $a >< b$ ก็ต่อเมื่อ $\langle a \vee b \rangle_I \neq \langle b \rangle_I$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.14

บทนิยาม 2.9 ให้ B เป็น Boolean algebra ให้ $a \in B$ และ $a \neq 0_B$
จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPI (Boolean principal ideal) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 0_B$, $c_j \neq 0_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \leq a$ และ $c_j \leq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n \vee c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m$
2. $\langle b_i \vee c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rangle_I = \langle c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rangle_I$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$
3. $\langle c_1 \vee ... \vee c_j \vee ... \vee c_m \rangle_I \neq \langle c_1 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m \rangle_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก
แทนการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPI ของ a
ด้วย $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rceil$
และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPI ของ a

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \vee \lceil c \vee d \rceil$ แล้ว $c >< d$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.19

ทฤษฎีบท 2.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$ แล้ว $c_i >< c_j$ สำหรับทุก $i \neq j$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.21

ทฤษฎีบท 2.12 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
1. $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $a = (b_1 \vee b_2) \vee \ldots \vee b_n \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
2. ถ้า $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$ แล้ว $a = b \vee \lceil (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rceil$
3. ถ้า $a = b \vee \lceil (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rceil$ แล้ว $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
หรือ $a = b \vee c_1 \vee \lceil c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$ หรือ $a = b \vee c_2 \vee \lceil c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.23.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.23.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.23.3

บทแทรก 2.13 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lceil (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rceil$ จะได้ดังนี้
1. ถ้า $c_1 < c_2$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lceil c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
2. ถ้า $c_1 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lceil c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
3. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lceil c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
4. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lceil c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.3

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.26.4

บทแทรก 2.14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lceil (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rceil$ จะได้ดังนี้
1. ถ้า $c_2 < c_1$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lceil c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
2. ถ้า $c_2 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lceil c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
3. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \vee c_1 < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lceil c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$
4. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lceil c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.31.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.31.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.31.3

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.31.4

บทแทรก 2.15 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lceil (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rceil$ ถ้า $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$
และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lceil c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$ และ $a = b \vee c_2 \vee \lceil c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.36

บทแทรก 2.16 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lceil (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rceil$ ถ้า $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >< c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.38

บทแทรก 2.17 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1. $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

ก็ต่อเมื่อ $a = (\ldots((b_1 \vee b_2) \vee b_3) \vee \ldots \vee b_n) \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

2. ถ้า $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$ แล้ว $a = b \vee \lceil (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rceil$

3. ถ้า $a = b \vee \lceil (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rceil$ แล้ว $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

หรือ $a = b \vee c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j} \vee \lceil \overline{c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j}} \rceil$

สำหรับบาง $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ เมื่อ $1 \leq j < m$

โดยที่ $\overline{c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j}} = c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_1} \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_2} \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_j} \vee \ldots \vee c_m$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.40.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.40.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.40.3

บทแทรก 2.18 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$

ถ้า $a = b \vee \lceil (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rceil$ และ $c_1, \ldots, c_m$ เป็น atom ที่แตกต่างกัน

แล้ว $a = b \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rceil$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 1.41

ทฤษฎีบท 2.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ สมมติให้ $a = b \vee \lceil c \rceil$ แล้ว $a = c \vee \lceil b \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $b = c$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.43

ทฤษฎีบท 2.20 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ สมมติให้ $a = b \vee \lceil c \vee d \rceil$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $b > d$ และ $b \vee d = c \vee d$ แล้ว $a = c \vee d \vee \lceil b \rceil$
2. ถ้า $b >< d$ และ $b \vee d = c \vee d$ ก็ต่อเมื่อ $a = c \vee \lceil b \vee d \rceil$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.45.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.45.2

ทฤษฎีบท 2.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ สมมติให้ $a = b \vee c \vee \lceil d \rceil$ จะได้ดังนี้

1. $a = b \vee d \vee \lceil c \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $c = d$
2. ถ้า $b >< c$ และ $b \vee c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a = d \vee \lceil b \vee c \rceil$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.48.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.48.2

3. <u>การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal ideal</u>

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์การแยกตัวประกอบบน Boolean algebra ซึ่งแยกในรูปแบบที่มีตัวดำเนินการ meet เป็นตัวเชื่อม และได้ใช้ Boolean principal ideal มาใช้แบ่งกลุ่มของตัวประกอบ และลดทอนให้เหลือน้อยที่สุด และใช้เป็นเกณฑ์ในการเปลี่ยนชุดตัวประกอบที่ยังทำให้ได้ผลลัพธ์เดิมเท่ากัน

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $\langle a \wedge b \rangle_I = \langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I$

พิสูจน์ ให้ $a,b \in B$

จะแสดงว่า $\langle a \wedge b \rangle_I \subseteq \langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I$

ให้ $x \in \langle a \wedge b \rangle_I$

จะได้ว่า $a \wedge b \geq x$

ดังนั้น $a \geq x$ และ $b \geq x$

เพราะฉะนั้น $x \in \langle a \rangle_I$ และ $x \in \langle b \rangle_I$

นั่นคือ $x \in \langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I$

สรุปได้ว่า $\langle a \wedge b \rangle_I \subseteq \langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I$

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I \subseteq \langle a \wedge b \rangle_I$

ให้ $x \in \langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I$

จะได้ว่า $x \in \langle a \rangle_I$ และ $x \in \langle b \rangle_I$

ดังนั้น $a \geq x$ และ $b \geq x$

เพราะฉะนั้น $a \wedge b \geq x$

นั่นคือ $x \in \langle a \wedge b \rangle_I$

สรุปได้ว่า $\langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I \subseteq \langle a \wedge b \rangle_I$

เพราะฉะนั้น $\langle a \wedge b \rangle_I = \langle a \rangle_I \cap \langle b \rangle_I$

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

จะได้ว่า $\langle 15\wedge 10\rangle_I = \langle 5\rangle_I = \{5,1\}$, $\langle 15\rangle_I = \{15,5,3,1\}$, $\langle 10\rangle_I = \{10,5,2,1\}$

ดังนั้น $\langle 15\rangle_I \cap \langle 10\rangle_I = \{5,1\}$

นั่นคือ $\langle 15\wedge 10\rangle_I = \langle 15\rangle_I \cap \langle 10\rangle_I$

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $\langle \{b,c\}\wedge\{a,c\}\rangle_I = \langle \{c\}\rangle_I = \{\{c\},\varnothing\}$,

$\langle \{b,c\}\rangle_I = \{\{b,c\},\{b\},\{c\},\varnothing\}$ และ $\langle \{a,c\}\rangle_I = \{\{a,c\},\{a\},\{c\},\varnothing\}$

ดังนั้น $\langle \{b,c\}\rangle_I \cap \langle \{a,c\}\rangle_I = \{\{c\},\varnothing\}$

นั่นคือ $\langle \{b,c\}\wedge\{a,c\}\rangle_I = \langle \{b,c\}\rangle_I \cap \langle \{a,c\}\rangle_I$

บทนิยาม 3.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

กำหนดให้ $a\wedge\langle b\rangle_I = \{\, a\wedge c \mid c \in B$ และ $b \geq c \,\}$

ตัวอย่าง 3.5 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

จะได้ว่า $15\wedge\langle 10\rangle_I = \{15\wedge 10 , 15\wedge 5 , 15\wedge 2 , 15\wedge 1\} = \{5,1\}$

ตัวอย่าง 3.6 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $\{b,c\}\wedge\langle \{a,c\}\rangle_I = \{\{b,c\}\wedge\{a,c\}, \{b,c\}\wedge\{a\}, \{b,c\}\wedge\{c\}, \{b,c\}\wedge \varnothing\} = \{\{c\},\varnothing\}$

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

$$a\wedge\langle b\rangle_I = \langle a\wedge b\rangle_I$$

พิสูจน์ ให้ $a,b \in B$

จะแสดงว่า $a\wedge\langle b\rangle_I \subseteq \langle a\wedge b\rangle_I$

ให้ $x \in a\wedge\langle b\rangle_I$

จะมี $c \in B$ ซึ่ง $b \geq c$ ที่ทำให้ $x = a \wedge c$

เนื่องจาก $b \geq c$

ดังนั้น $a \wedge b \geq a \wedge c$

เพราะฉะนั้น $a \wedge b \geq x$

นั่นคือ $x \in \langle a \wedge b \rangle_I$

สรุปได้ว่า $a \wedge \langle b \rangle_I \subseteq \langle a \wedge b \rangle_I$

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle a \wedge b \rangle_I \subseteq a \wedge \langle b \rangle_I$

ให้ $x \in \langle a \wedge b \rangle_I$

จะได้ว่า $a \wedge b \geq x$

ดังนั้น $x = x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = (a \wedge x) \wedge b = a \wedge (x \wedge b)$

เนื่องจาก $b \geq x \wedge b$ และ $x = a \wedge (x \wedge b)$

เพราะฉะนั้น $x \in a \wedge \langle b \rangle_I$

สรุปได้ว่า $\langle a \wedge b \rangle_I \subseteq a \wedge \langle b \rangle_I$

เพราะฉะนั้น $a \wedge \langle b \rangle_I = \langle a \wedge b \rangle_I$

ตัวอย่าง 3.8 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

จะได้ว่า $15 \wedge \langle 6 \rangle_I = \{15 \wedge 6 , 15 \wedge 3 , 15 \wedge 2 , 15 \wedge 1\} = \{3,1\}$

และ $\langle 15 \wedge 6 \rangle_I = \langle 3 \rangle_I = \{3,1\}$

ดังนั้น $15 \wedge \langle 6 \rangle_I = \langle 15 \wedge 6 \rangle_I$

ตัวอย่าง 3.9 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

จะได้ว่า $\{b,c\} \wedge \langle \{a,b\} \rangle_I = \{\{b,c\} \wedge \{a,b\}, \{b,c\} \wedge \{a\}, \{b,c\} \wedge \{b\}, \{b,c\} \wedge \varnothing\}$

$= \{\{b\},\varnothing\}$

และ $\langle \{b,c\} \wedge \{a,b\} \rangle_I = \langle \{b\} \rangle_I = \{\{b\},\varnothing\}$

ดังนั้น $\{b,c\} \wedge \langle \{a,b\} \rangle_I = \langle \{b,c\} \wedge \{a,b\} \rangle_I$

ข้อสังเกต 3.10 จากทฤษฎีบท 3.1 และ 3.7 จะได้ว่า $a\wedge\langle b\rangle_I = \langle a\rangle_I \cap \langle b\rangle_I$

ทฤษฎีบท 3.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ $a\wedge\langle b\rangle_I = \langle b\rangle_I$

พิสูจน์ สมมติให้ $a \geq b$

จะแสดงว่า $a\wedge\langle b\rangle_I \subseteq \langle b\rangle_I$

ให้ $x \in a\wedge\langle b\rangle_I$

จะมี $c \in B$ ซึ่ง $b \geq c$ ที่ทำให้ $x = a\wedge c$

เนื่องจาก $b \geq c \geq a\wedge c$

ดังนั้น $b \geq x$

นั่นคือ $x \in \langle b\rangle_I$

สรุปได้ว่า $a\wedge\langle b\rangle_I \subseteq \langle b\rangle_I$

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle b\rangle_I \subseteq a\wedge\langle b\rangle_I$

ให้ $x \in \langle b\rangle_I$

จะได้ว่า $b \geq x$

เนื่องจาก $a \geq b$

ดังนั้น $a \geq x$

เพราะฉะนั้น $x = a\wedge x$

นั่นคือ $x \in a\wedge\langle b\rangle_I$

สรุปได้ว่า $\langle b\rangle_I \subseteq a\wedge\langle b\rangle_I$

เพราะฉะนั้น $a\wedge\langle b\rangle_I = \langle b\rangle_I$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a\wedge\langle b\rangle_I = \langle b\rangle_I$ นั่นคือ $b \in a\wedge\langle b\rangle_I$

จะมี $c \in B$ ซึ่ง $b \geq c$ ที่ทำให้ $b = a\wedge c$

ดังนั้น $a\wedge b = a\wedge(a\wedge c) = (a\wedge a)\wedge c = a\wedge c = b$

เพราะฉะนั้น $a \geq b$

ตัวอย่าง 3.12 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

เพราะว่า $15 > 5$

จะเห็นว่า $15 \wedge \langle 5 \rangle_I = \{15 \wedge 5 , 15 \wedge 1\} = \{5,1\} = \langle 5 \rangle_I$

นั่นคือ $15 \wedge \langle 5 \rangle_I = \langle 5 \rangle_I$

เพราะว่า $10 \wedge \langle 2 \rangle_I = \{10 \wedge 2 , 10 \wedge 1\} = \{2,1\} = \langle 2 \rangle_I$

จะเห็นว่า $10 > 2$

ตัวอย่าง 3.13 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

เพราะว่า $\{b,c\} \supset \{c\}$

จะเห็นว่า $\{b,c\} \wedge \langle \{c\} \rangle_I = \{\{b,c\} \wedge \{c\}, \{b,c\} \wedge \varnothing\} = \{\{c\},\varnothing\} = \langle \{c\} \rangle_I$

เพราะว่า $\{a,c\} \wedge \langle \{a\} \rangle_I = \{\{a,c\} \wedge \{a\}, \{a,c\} \wedge \varnothing\} = \{\{a\},\varnothing\} = \langle \{a\} \rangle_I$

จะเห็นว่า $\{a,c\} \supset \{a\}$

บทแทรก 3.14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$
จะได้ว่า $a < b$ หรือ $a >< b$ ก็ต่อเมื่อ $a \wedge \langle b \rangle_I \neq \langle b \rangle_I$

พิสูจน์ ถ้า $a < b$ หรือ $a >< b$ จะเห็นได้ชัดว่า $a \wedge \langle b \rangle_I \neq \langle b \rangle_I$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a \wedge \langle b \rangle_I \neq \langle b \rangle_I$

จะแสดงว่า ถ้า $a \sim b$ แล้ว $a < b$

สมมติให้ $a \geq b$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $a \wedge \langle b \rangle_I = \langle b \rangle_I$

ขัดแย้งกับ $a \wedge \langle b \rangle_I \neq \langle b \rangle_I$

ดังนั้น ถ้า $a \sim b$ แล้ว $a < b$

นั่นคือ ถ้า $a\wedge<b>_I \neq <b>_I$ แล้ว $a < b$ หรือ $a >< b$

ตัวอย่าง 3.15 พิจารณา Boolean algebra B_{30}

เพราะว่า $5 < 15$

จะเห็นว่า $5\wedge<15>_I = \{5\wedge 15 , 5\wedge 5 , 5\wedge 3 , 5\wedge 1\} = \{5,1\} \neq \{15,5,3,1\} = <15>_I$

นั่นคือ $5\wedge<15>_I \neq <15>_I$

เพราะว่า $5 >< 6$

จะเห็นว่า $5\wedge<6>_I = \{5\wedge 6 , 5\wedge 3 , 5\wedge 2 , 5\wedge 1\} = \{1\} \neq \{6,3,2,1\} = <6>_I$

นั่นคือ $5\wedge<6>_I \neq <6>_I$

เพราะว่า $15\wedge<2>_I = \{15\wedge 2 , 15\wedge 1\} = \{1\} \neq \{2,1\} = <2>_I$

จะเห็นว่า $15 >< 2$

เพราะว่า $3\wedge<6>_I = \{3\wedge 6 , 3\wedge 3 , 3\wedge 2 , 3\wedge 1\} = \{3,1\} \neq \{6,3,2,1\} = <6>_I$

จะเห็นว่า $3 < 6$

ตัวอย่าง 3.16 พิจารณา Boolean algebra $\mathbb{P}\{a,b,c\}$

เพราะว่า $\{c\} \subset \{a,c\}$

จะเห็นว่า $\{c\}\wedge<\{a,c\}>_I = \{\{c\}\wedge\{a,c\}, \{c\}\wedge\{a\}, \{c\}\wedge\{c\}, \{c\}\wedge \varnothing\} = \{\{c\},\varnothing\}$

$\neq \{\{a,c\},\{a\},\{c\},\varnothing\} = <\{a,c\}>_I$

นั่นคือ $\{c\}\wedge<\{a,c\}>_I \neq <\{a,c\}>_I$

เพราะว่า $\{c\} >< \{a,b\}$

จะเห็นว่า $\{c\}\wedge<\{a,b\}>_I = \{\{c\}\wedge\{a,b\}, \{c\}\wedge\{a\}, \{c\}\wedge\{b\}, \{c\}\wedge \varnothing\} = \{\varnothing\}$

$\neq \{\{a,b\},\{a\},\{b\},\varnothing\} = <\{a,b\}>_I$

นั่นคือ $\{c\}\wedge<\{a,b\}>_I \neq <\{a,b\}>_I$

เพราะว่า $\{a\}\wedge<\{a,c\}>_I = \{\{a\}\wedge\{a,c\}, \{a\}\wedge\{a\}, \{a\}\wedge\{c\}, \{a\}\wedge \varnothing\} = \{\{a\},\varnothing\}$

$\neq \{\{a,c\},\{a\},\{c\},\varnothing\} = <\{a,c\}>_I$

จะเห็นว่า $\{a\} \subset \{a,c\}$

เพราะว่า $\{a\}\wedge<\{b,c\}>_I = \{\{a\}\wedge\{b,c\}, \{a\}\wedge\{b\}, \{a\}\wedge\{c\}, \{a\}\wedge \varnothing\} = \{\varnothing\}$

$\neq \{\{b,c\},\{b\},\{c\},\varnothing\} = <\{b,c\}>_I$

จะเห็นว่า $\{a\} >< \{b,c\}$

บทนิยาม 3.17 ให้ B เป็น Boolean algebra ให้ $a \in B$ และ $a \neq 1_B$ จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPI (Boolean principal ideal) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 1_B$, $c_j \neq 1_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \geq a$ และ $c_j \geq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. $a = b_1\wedge b_2\wedge...\wedge b_n\wedge c_1\wedge c_2\wedge...\wedge c_m$
2. $b_i\wedge<c_1\wedge c_2\wedge...\wedge c_m>_I = <c_1\wedge c_2\wedge...\wedge c_m>_I$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$
3. $c_j\wedge<c_1\wedge...\wedge\hat{c}_j\wedge...\wedge c_m>_I \neq <c_1\wedge...\wedge\hat{c}_j\wedge...\wedge c_m>_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก

แทนการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPI ของ a

ด้วย $a = b_1\wedge b_2\wedge...\wedge b_n\wedge\lceil c_1\wedge c_2\wedge...\wedge c_m\rceil$

และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPI ของ a

ตัวอย่าง 3.18 พิจารณา Boolean algebra B_{30} จะได้ว่า $1 = 15\wedge6\wedge\lceil 5\wedge3 \rceil$

เพราะว่า 1. $1 = 15\wedge6\wedge5\wedge3$ และ

2. $15\wedge<5\wedge3>_I = 15\wedge<1>_I = \{15\wedge1\} = \{1\} = <1>_I = <5\wedge3>_I$

$6\wedge<5\wedge3>_I = 6\wedge<1>_I = \{6\wedge1\} = \{1\} = <1>_I = <5\wedge3>_I$

3. $5\wedge<3>_I = \{5\wedge3 , 5\wedge1\} = \{1\} \neq \{3,1\} = <3>_I$

$3\wedge<5>_I = \{3\wedge5 , 3\wedge1\} = \{1\} \neq \{5,1\} = <5>_I$

ดังนั้น $1 = 15\wedge6\wedge\lceil 5\wedge3 \rceil$

ทฤษฎีบท 3.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil$ แล้ว $c >< d$

พิสูจน์ สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil$
จะได้ว่า $c \wedge < d >_I \neq < d >_I$ และ $d \wedge < c >_I \neq < c >_I$
โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c < d$ หรือ $c >< d$
สมมติว่า $c < d$
โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $d \wedge < c >_I = < c >_I$
ขัดแย้งกับ $d \wedge < c >_I \neq < c >_I$
ดังนั้น $c >< d$

ตัวอย่าง 3.20 พิจารณา Boolean algebra B_{210}
เพราะว่า $7 = 70 \wedge \lceil 35 \wedge 14 \rceil$ จะเห็นว่า $35 >< 14$
เพราะว่า $5 = 70 \wedge \lceil 35 \wedge 10 \rceil$ จะเห็นว่า $35 >< 10$
เพราะว่า $3 = 105 \wedge \lceil 21 \wedge 6 \rceil$ จะเห็นว่า $21 >< 6$
เพราะว่า $2 = 42 \wedge \lceil 14 \wedge 6 \rceil$ จะเห็นว่า $14 >< 6$

ทฤษฎีบท 3.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ แล้ว $c_i >< c_j$ สำหรับทุก $i \neq j$

พิสูจน์ สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$
โดย ทฤษฎีบท 3.19 จะได้ว่า $c_k >< (c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_k \wedge \ldots \wedge c_m)$ ทุก $1 \leq k \leq m$
สมมติให้ $c_i \sim c_j$ สำหรับบาง $i \neq j$
กรณี $c_i > c_j$

จะได้ $c_i > c_j \geq c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_i \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $c_i > c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_i \wedge \ldots \wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $c_i \sim (c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_i \wedge \ldots \wedge c_m)$

ขัดแย้งกับ $c_i >< c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_i \wedge \ldots \wedge c_m$

กรณี $c_i < c_j$

จะได้ $c_j > c_i \geq c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $c_j > c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $c_j \sim (c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m)$

ขัดแย้งกับ $c_j >< c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

สรุปได้ว่า $c_i >< c_j$ เมื่อ $i \neq j$

ตัวอย่าง 3.22 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 42 \wedge \lceil 35 \wedge 21 \wedge 15 \rceil$ จะเห็นว่า $35 >< 21$ และ $35 >< 15$ และ $21 >< 15$

เพราะว่า $7 = 21 \wedge \lceil 105 \wedge 70 \wedge 42 \rceil$ จะเห็นว่า $105 >< 70$ และ $105 >< 42$ และ $70 >< 42$

ทฤษฎีบท 3.23 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1. $a = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $a = (b_1 \wedge b_2) \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2. ถ้า $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

3. ถ้า $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

หรือ $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ หรือ $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 1. สมมติให้ $a = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

จะได้ว่า $b_i \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

และ $c_j \wedge < c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

จะแสดงว่า $a = (b_1 \wedge b_2) \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

เพียงพอที่จะแสดงว่า $(b_1 \wedge b_2) \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

เนื่องจาก $b_1 \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

และ $b_2 \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b_1 \geq c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$ และ $b_2 \geq c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $b_1 \wedge b_2 \geq c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(b_1 \wedge b_2) \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

นั่นคือ $a = (b_1 \wedge b_2) \wedge ... \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a = (b_1 \wedge b_2) \wedge ... \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

จะได้ว่า $b_i \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $3 \leq i \leq n$

และ $(b_1 \wedge b_2) \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

และ $c_j \wedge < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

จะแสดงว่า $b_1 \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

และ $b_2 \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

เนื่องจาก $(b_1 \wedge b_2) \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b_1 \wedge b_2 \geq c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $b_1 \geq c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$ และ $b_2 \geq c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b_1 \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

และ $b_2 \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

นั่นคือ $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 2. สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

จะได้ว่า $b \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$

และ $c_j \wedge < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

จะแสดงว่า $(c_1 \wedge c_2) \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I$

สมมติให้ $(c_1 \wedge c_2) \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 \geq c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $c_1 \wedge c_2 \geq c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $c_1 \geq c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$

ขัดแย้งกับ $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$

ดังนั้น $(c_1 \wedge c_2) \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I$

สรุปได้ว่า $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 3. สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.23.2 จะได้ว่า $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge (c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m) \rceil$

และโดย ทฤษฎีบท 3.19 จะได้ว่า $(c_1 \wedge c_2) >< (c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m)$

ถ้า $c_1 \sim c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 \sim c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

ถ้า $c_1 \geq c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 \geq c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 \geq c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ ขัดแย้งกับ $c_1 \wedge c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

ถ้า $c_1 < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ หรือ $c_2 < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ ขัดแย้งกับ $c_1 \wedge c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

ถ้า $c_1 \sim c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แต่ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

สมมติว่า $c_1 < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ ขัดแย้งกับ $c_1 \wedge c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $c_1 \geq c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \geq c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ___(1)

เนื่องจาก $b \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $b \geq c_1 \wedge (c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m) = c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $b \geq c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \wedge \langle c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rangle_I = \langle c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$ ____(2)

เนื่องจาก $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

โดยบทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c_2 \wedge \langle c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m \rangle_I \neq \langle c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$ ___(3)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \wedge \langle c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I \neq \langle c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \wedge \langle c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I = \langle c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_j \geq c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $c_j \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า

$c_j \wedge \langle (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I = \langle (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$

ขัดแย้งกับ $c_j \wedge \langle (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$

$\neq \langle (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

ดังนั้น $c_j \wedge \langle c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I \neq \langle c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ______(4)

ดังนั้น จาก (1) ถึง (4)

สรุปได้ว่า $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

ถ้า $c_2 \sim c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แต่ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับกรณี $c_1 \sim c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แต่ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

จะได้ว่า $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

ถ้า $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

ถ้า $c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m = c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 > c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

และ $c_2 \wedge < c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ _______(5)

เนื่องจาก $b \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m$

เนื่องจาก $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m = c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m = c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m = c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $b \geq c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $b \geq c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \wedge < c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

และ $b \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ _______(6)

เนื่องจาก $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

และ $c_2 \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ _______(7)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \wedge < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \wedge < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_j \geq c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $c_j \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า

$c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

ขัดแย้งกับ $c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

$\neq < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

เพราะฉะนั้น $c_j \wedge < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ _______(8)

ดังนั้น จาก (5) ถึง (8)

สรุปได้ว่า $a = b\wedge c_1\wedge\lceil c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rceil$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$c_j\wedge\langle c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge\hat{c}_j\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I \neq \langle c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge\hat{c}_j\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ _______(9)

ดังนั้น จาก (5), (6), (7) และ (9)

สรุปได้ว่า $a = b\wedge c_2\wedge\lceil c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rceil$

ถ้า $c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m \neq c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

สมมติว่า $c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m > c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

ดังนั้น $c_1 > c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

ส่วนที่เหลือพิสูจน์เหมือนกับกรณี

$c_1 \sim c_3\wedge c_4\wedge\ldots\wedge c_m$ แต่ $c_2 >< c_3\wedge c_4\wedge\ldots\wedge c_m$

ดังนั้น $a = b\wedge c_1\wedge\lceil c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rceil$

สมมติว่า $c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m > c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

ดังนั้น $c_2 > c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

ส่วนที่เหลือพิสูจน์เหมือนกับกรณี

$c_2 \sim c_3\wedge c_4\wedge\ldots\wedge c_m$ แต่ $c_1 >< c_3\wedge c_4\wedge\ldots\wedge c_m$

ดังนั้น $a = b\wedge c_2\wedge\lceil c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rceil$

สมมติว่า $c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m >< c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

จะแสดงว่า $c_1\wedge\langle c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I \neq \langle c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I$

สมมติให้ $c_1\wedge\langle c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I = \langle c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \geq c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m \geq c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

ขัดแย้งกับ $c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m >< c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m$

นั่นคือ $c_1\wedge\langle c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I \neq \langle c_2\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I$

จะแสดงว่า $c_2\wedge\langle c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I \neq \langle c_1\wedge c_3\wedge\ldots\wedge c_m\rangle_I$

สมมติให้ $c_2 \wedge < c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_2 \geq c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

เพราะฉะนั้น $c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \geq c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

ขัดแย้งกับ $c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >< c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

นั่นคือ $c_2 \wedge < c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$

ดังนั้น $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

ตัวอย่าง 3.24 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 105 \wedge 30 \wedge 21 \wedge \lceil 35 \wedge 14 \wedge 10 \rceil$

$1 = 105 \wedge 30 \wedge 21 \wedge 35 \wedge 14 \wedge 10 = (105 \wedge 30) \wedge (21 \wedge 35 \wedge 14 \wedge 10) = 15 \wedge 21 \wedge 35 \wedge 14 \wedge 10$

เนื่องจาก $35 \wedge 14 \wedge 10 \mid 105$ และ $35 \wedge 14 \wedge 10 \mid 30$ ดังนั้น $35 \wedge 14 \wedge 10 \mid 15$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $15 \wedge < 35 \wedge 14 \wedge 10 >_I = < 35 \wedge 14 \wedge 10 >_I$

ดังนั้น $1 = 15 \wedge 21 \wedge \lceil 35 \wedge 14 \wedge 10 \rceil$

ตัวอย่าง 3.25 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 10 \wedge \lceil 35 \wedge 21 \wedge 15 \rceil$

$1 = 10 \wedge 35 \wedge 21 \wedge 15 = (35 \wedge 21) \wedge (15 \wedge 10) = 15 \wedge 10 \wedge 7$

เนื่องจาก $35 \wedge 21 \wedge 15 \mid 10 = 15 \wedge 7 \mid 10$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $10 \wedge < 15 \wedge 7 >_I = < 15 \wedge 7 >_I$

และเนื่องจาก $15 >< 7$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $15 \wedge < 7 >_I \neq < 7 >_I$ และ $7 \wedge < 15 >_I \neq < 15 >_I$

ดังนั้น $1 = 10 \wedge \lceil 15 \wedge 7 \rceil$

บทแทรก 3.26 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $c_1 > c_2$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

2. ถ้า $c_1 > c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

3. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

4. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 1. ให้ $c_1 > c_2$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$
จะได้ว่า $c_1 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(10)
เนื่องจาก $b \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I$
โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m$
เนื่องจาก $c_1 > c_2$ จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 = c_2$
ดังนั้น $b \geq c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(11)
เนื่องจาก $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$
โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c_2 \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(12)
และเนื่องจาก $c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$
เมื่อ $3 \leq j \leq m$
ดังนั้น $c_j \wedge < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$ _____(13)
เพราะฉะนั้น จาก (10) ถึง (13)
สรุปได้ว่า $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 2. ให้ $c_1 > c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$
จะได้ว่า $c_1 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(14)

เนื่องจาก $b \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $b \geq c_1 \wedge (c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m) = c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(15)

เนื่องจาก $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c_2 \wedge < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(16)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \wedge < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \wedge < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_j \geq c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m$

ดังนั้น $c_j \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า

$c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$

ขัดแย้งกับ $c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

เพราะฉะนั้น $c_j \wedge < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ______(17)

เพราะฉะนั้น จาก (14) ถึง (17)

สรุปได้ว่า $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 3. ให้ $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$ จะได้ว่า $c_1 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_1 \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m >_I$ ______(18)

เนื่องจาก $b \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $b \geq c_1 \wedge (c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m) = c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \wedge < c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ ______(19)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_j \wedge < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$ เมื่อ $3 \leq j \leq m$

สมมติให้ $c_j \wedge < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

สำหรับบาง $3 \leq j \leq m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c_j \geq c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $c_j \geq (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า

$c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I = < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

ขัดแย้งกับ $c_j \wedge < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$

เพราะฉะนั้น $c_j \wedge < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I \neq < c_2 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_j \wedge \ldots \wedge c_m >_I$

เมื่อ $3 \leq j \leq m$ ______(20)

ต่อไปจะแสดงว่า $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

สมมติให้ $c_2 \sim c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

ถ้า $c_2 \geq c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

เนื่องจาก $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m = c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

ดังนั้น $c_1 > c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

ขัดแย้งกับ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

ถ้า $c_2 < c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

เนื่องจาก $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

จะได้ว่า $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m = c_2$

ดังนั้น $c_1 > c_2$

ขัดแย้งกับ $c_1 >< c_2$

เพราะฉะนั้น $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c_2 \wedge \langle c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m \rangle_I \neq \langle c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m \rangle_I$ ______(21)

เพราะฉะนั้น จาก (18) ถึง (21)

ดังนั้น $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 4. ให้ $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

และ $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m > c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ 3.

ดังนั้น $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

ตัวอย่าง 3.27 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 30 \wedge \lceil (42 \wedge 6) \wedge 15 \wedge 10 \rceil$

เนื่องจาก $42 \wedge 6 = 6$

จะได้ว่า $30 \wedge \langle 6 \wedge 15 \wedge 10 \rangle_I = \langle 6 \wedge 15 \wedge 10 \rangle_I$

เนื่องจาก $6 | 42$ จะได้ว่า $6 \wedge 15 \wedge 10 \,|\, 42$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $42 \wedge \langle 6 \wedge 15 \wedge 10 \rangle_I = \langle 6 \wedge 15 \wedge 10 \rangle_I$

เนื่องจาก $6 >< 15 \wedge 10$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $6 \wedge \langle 15 \wedge 10 \rangle_I \neq \langle 15 \wedge 10 \rangle_I$

ดังนั้น $1 = 30 \wedge 42 \wedge \lceil 6 \wedge 15 \wedge 10 \rceil$

ตัวอย่าง 3.28 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 70 \wedge \lceil (30 \wedge 42) \wedge 15 \wedge 10 \rceil$

จะได้ว่า $70 \wedge \langle (30 \wedge 42) \wedge 15 \wedge 10 \rangle_I = \langle (30 \wedge 42) \wedge 15 \wedge 10 \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(30 \wedge 42) \wedge 15 \wedge 10 \,|\, 70$

ดังนั้น $30\wedge(42\wedge15\wedge10) \mid 70$

เนื่องจาก $15\wedge10 \mid 30$ จะได้ว่า $42\wedge15\wedge10 \mid 30$

เพราะฉะนั้น $42\wedge15\wedge10 \mid 70$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $70\wedge<42\wedge15\wedge10>_I = <42\wedge15\wedge10>_I$

เนื่องจาก $42\wedge15\wedge10 \mid 30$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $30\wedge<42\wedge15\wedge10>_I = <42\wedge15\wedge10>_I$

เนื่องจาก $42 >< 15\wedge10$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $42\wedge<15\wedge10>_I \neq <15\wedge10>_I$

เนื่องจาก $15 >< 42\wedge10$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $15\wedge<42\wedge10>_I \neq <42\wedge10>_I$

เนื่องจาก $10 >< 15\wedge42$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $10\wedge<15\wedge42>_I \neq <15\wedge42>_I$

ดังนั้น $1 = 70\wedge30\wedge\lceil 42\wedge15\wedge10 \rceil$

ตัวอย่าง 3.29 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $1 = 1155\wedge\lceil (385\wedge231)\wedge22\wedge14 \rceil$

จะได้ว่า $1155\wedge<(385\wedge231)\wedge22\wedge14>_I = <(385\wedge231)\wedge22\wedge14>_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(385\wedge231)\wedge22\wedge14 \mid 1155$

ดังนั้น $385\wedge(231\wedge22\wedge14) \mid 1155$

เนื่องจาก $231\wedge22\wedge14 \mid 385\wedge231$ จะได้ว่า $231\wedge22\wedge14 \mid 385$

เพราะฉะนั้น $231\wedge22\wedge14 \mid 1155$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $1155\wedge<231\wedge22\wedge14>_I = <231\wedge22\wedge14>_I$

เนื่องจาก $231\wedge22\wedge14 \mid 385$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $385\wedge<231\wedge22\wedge14>_I = <231\wedge22\wedge14>_I$

เนื่องจาก $231 >< 22\wedge14$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $231 \wedge \langle 22 \wedge 14 \rangle_I \neq \langle 22 \wedge 14 \rangle_I$

เนื่องจาก $22 >< 231 \wedge 14$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $22 \wedge \langle 231 \wedge 14 \rangle_I \neq \langle 231 \wedge 14 \rangle_I$

เนื่องจาก $14 >< 231 \wedge 22$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $14 \wedge \langle 231 \wedge 22 \rangle_I \neq \langle 231 \wedge 22 \rangle_I$

ดังนั้น $1 = 1155 \wedge 385 \wedge \lceil 231 \wedge 22 \wedge 14 \rceil$

ตัวอย่าง 3.30 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $1 = 1155 \wedge \lceil (154 \wedge 231) \wedge 110 \wedge 70 \rceil$

จะได้ว่า $1155 \wedge \langle (154 \wedge 231) \wedge 110 \wedge 70 \rangle_I = \langle (154 \wedge 231) \wedge 110 \wedge 70 \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(154 \wedge 231) \wedge 110 \wedge 70 \mid 1155$

ดังนั้น $154 \wedge (231 \wedge 110 \wedge 70) \mid 1155$

เนื่องจาก $231 \wedge 110 \wedge 70 \mid 154 \wedge 110 \wedge 70$ จะได้ว่า $231 \wedge 110 \wedge 70 \mid 154$

เพราะฉะนั้น $231 \wedge 110 \wedge 70 \mid 1155$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $1155 \wedge \langle 231 \wedge 110 \wedge 70 \rangle_I = \langle 231 \wedge 110 \wedge 70 \rangle_I$

เนื่องจาก $231 \wedge 110 \wedge 70 \mid 154$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $154 \wedge \langle 231 \wedge 110 \wedge 70 \rangle_I = \langle 231 \wedge 110 \wedge 70 \rangle_I$

เนื่องจาก $231 >< 110 \wedge 70$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $231 \wedge \langle 110 \wedge 70 \rangle_I \neq \langle 110 \wedge 70 \rangle_I$

เนื่องจาก $110 >< 231 \wedge 70$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $110 \wedge \langle 231 \wedge 70 \rangle_I \neq \langle 231 \wedge 70 \rangle_I$

เนื่องจาก $70 >< 231 \wedge 110$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $70 \wedge \langle 231 \wedge 110 \rangle_I \neq \langle 231 \wedge 110 \rangle_I$

ดังนั้น $1 = 1155 \wedge 154 \wedge \lceil 231 \wedge 110 \wedge 70 \rceil$

บทแทรก 3.31 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $c_2 > c_1$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2. ถ้า $c_2 > c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

3. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 \wedge c_1 > c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

4. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m > c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.26.1
ดังนั้น $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.26.2
ดังนั้น $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.26.3
ดังนั้น $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.26.4
ดังนั้น $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

ตัวอย่าง 3.32 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 30 \wedge \lceil (14 \wedge 70) \wedge 21 \wedge 6 \rceil$

เนื่องจาก $14 \wedge 70 = 14$

จะได้ว่า $30 \wedge < 14 \wedge 21 \wedge 6 >_I = < 14 \wedge 21 \wedge 6 >_I$

เนื่องจาก $14 | 70$ จะได้ว่า $14 \wedge 21 \wedge 6 \mid 70$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $70\wedge\langle 14\wedge 21\wedge 6\rangle_I = \langle 14\wedge 21\wedge 6\rangle_I$

เนื่องจาก $14 >< 21\wedge 6$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $14\wedge\langle 21\wedge 6\rangle_I \neq \langle 21\wedge 6\rangle_I$

ดังนั้น $1 = 30\wedge 70\wedge\lceil 14\wedge 21\wedge 6\rceil$

ตัวอย่าง 3.33 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $1 = 70\wedge\lceil (30\wedge 42)\wedge 21\wedge 14\rceil$

จะได้ว่า $70\wedge\langle(30\wedge 42)\wedge 21\wedge 14\rangle_I = \langle(30\wedge 42)\wedge 21\wedge 14\rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(30\wedge 42)\wedge 21\wedge 14 \mid 70$

ดังนั้น $42\wedge(30\wedge 21\wedge 14)\mid 70$

เนื่องจาก $21\wedge 14 \mid 42$ จะได้ว่า $30\wedge 21\wedge 14 \mid 42$

เพราะฉะนั้น $30\wedge 21\wedge 14 \mid 70$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $70\wedge\langle 30\wedge 21\wedge 14\rangle_I = \langle 30\wedge 21\wedge 14\rangle_I$

เนื่องจาก $30\wedge 21\wedge 14 \mid 42$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $42\wedge\langle 30\wedge 21\wedge 14\rangle_I = \langle 30\wedge 21\wedge 14\rangle_I$

เนื่องจาก $30 >< 21\wedge 14$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $30\wedge\langle 21\wedge 14\rangle_I \neq \langle 21\wedge 14\rangle_I$

เนื่องจาก $21 >< 30\wedge 14$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $21\wedge\langle 30\wedge 14\rangle_I \neq \langle 30\wedge 14\rangle_I$

เนื่องจาก $14 >< 21\wedge 30$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $14\wedge\langle 21\wedge 30\rangle_I \neq \langle 21\wedge 30\rangle_I$

ดังนั้น $1 = 70\wedge 42\wedge\lceil 30\wedge 21\wedge 14\rceil$

ตัวอย่าง 3.34 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $1 = 1155\wedge\lceil (385\wedge 154)\wedge 33\wedge 21\rceil$

จะได้ว่า $1155 \wedge \langle (385 \wedge 154) \wedge 33 \wedge 21 \rangle_I = \langle (385 \wedge 154) \wedge 33 \wedge 21 \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(385 \wedge 154) \wedge 33 \wedge 21 \mid 1155$

ดังนั้น $154 \wedge (385 \wedge 33 \wedge 21) \mid 1155$

เนื่องจาก $385 \wedge 33 \wedge 21 \mid 385 \wedge 154$ จะได้ว่า $385 \wedge 33 \wedge 21 \mid 154$

เพราะฉะนั้น $385 \wedge 33 \wedge 21 \mid 1155$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $1155 \wedge \langle 385 \wedge 33 \wedge 21 \rangle_I = \langle 385 \wedge 33 \wedge 21 \rangle_I$

เนื่องจาก $385 \wedge 33 \wedge 21 \mid 154$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $154 \wedge \langle 385 \wedge 33 \wedge 21 \rangle_I = \langle 385 \wedge 33 \wedge 21 \rangle_I$

เนื่องจาก $385 >< 33 \wedge 21$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $385 \wedge \langle 33 \wedge 21 \rangle_I \neq \langle 33 \wedge 21 \rangle_I$

เนื่องจาก $33 >< 385 \wedge 21$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $33 \wedge \langle 385 \wedge 21 \rangle_I \neq \langle 385 \wedge 21 \rangle_I$

เนื่องจาก $21 >< 385 \wedge 33$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $21 \wedge \langle 385 \wedge 33 \rangle_I \neq \langle 385 \wedge 33 \rangle_I$

ดังนั้น $1 = 1155 \wedge 154 \wedge \lceil 385 \wedge 33 \wedge 21 \rceil$

ตัวอย่าง 3.35 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $1 = 1155 \wedge \lceil (385 \wedge 154) \wedge 66 \wedge 42 \rceil$

จะได้ว่า $1155 \wedge \langle (385 \wedge 154) \wedge 66 \wedge 42 \rangle_I = \langle (385 \wedge 154) \wedge 66 \wedge 42 \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(385 \wedge 154) \wedge 66 \wedge 42 \mid 1155$

ดังนั้น $154 \wedge (385 \wedge 66 \wedge 42) \mid 1155$

เนื่องจาก $385 \wedge 66 \wedge 42 \mid 154 \wedge 66 \wedge 42$ จะได้ว่า $385 \wedge 66 \wedge 42 \mid 154$

เพราะฉะนั้น $385 \wedge 66 \wedge 42 \mid 1155$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $1155 \wedge \langle 385 \wedge 66 \wedge 42 \rangle_I = \langle 385 \wedge 66 \wedge 42 \rangle_I$

เนื่องจาก $385 \wedge 66 \wedge 42 \mid 154$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $154 \wedge < 385 \wedge 66 \wedge 42 >_I = < 385 \wedge 66 \wedge 42 >_I$

เนื่องจาก $385 >< 66 \wedge 42$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $385 \wedge < 66 \wedge 42 >_I \neq < 66 \wedge 42 >_I$

เนื่องจาก $66 >< 385 \wedge 42$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $66 \wedge < 385 \wedge 42 >_I \neq < 385 \wedge 42 >_I$

เนื่องจาก $42 >< 385 \wedge 66$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $42 \wedge < 385 \wedge 66 >_I \neq < 385 \wedge 66 >_I$

ดังนั้น $1 = 1155 \wedge 154 \wedge \lceil 385 \wedge 66 \wedge 42 \rceil$

บทแทรก 3.36 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ ถ้า $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

และ $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m = c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ และ $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ พิสูจน์เหมือนกับทฤษฎีบท 3.23.3

ดังนั้น $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ และ $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

ตัวอย่าง 3.37 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}

เพราะว่า $1 = 1155 \wedge \lceil (231 \wedge 154) \wedge 55 \wedge 35 \rceil$

จะได้ว่า $1155 \wedge < (231 \wedge 154) \wedge 55 \wedge 35 >_I = < (231 \wedge 154) \wedge 55 \wedge 35 >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $(231 \wedge 154) \wedge 55 \wedge 35 \mid 1155$

ดังนั้น $231 \wedge (154 \wedge 55 \wedge 35) \mid 1155$ และ $154 \wedge (231 \wedge 55 \wedge 35) \mid 1155$

เนื่องจาก $231 \wedge 55 \wedge 35 = 154 \wedge 55 \wedge 35$

จะได้ว่า $154 \wedge 55 \wedge 35 \mid 231$ และ $231 \wedge 55 \wedge 35 \mid 154$

เพราะฉะนั้น $154 \wedge 55 \wedge 35 \mid 1155$ และ $231 \wedge 55 \wedge 35 \mid 1155$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $1155 \wedge \langle 154 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I = \langle 154 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I$

และ $1155 \wedge \langle 231 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I = \langle 231 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I$

เนื่องจาก $154 \wedge 55 \wedge 35 \mid 231$ และ $231 \wedge 55 \wedge 35 \mid 154$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $231 \wedge \langle 154 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I = \langle 154 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I$

และ $154 \wedge \langle 231 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I = \langle 231 \wedge 55 \wedge 35 \rangle_I$

เนื่องจาก $231 >< 55 \wedge 35$ และ $154 >< 55 \wedge 35$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $231 \wedge \langle 55 \wedge 35 \rangle_I \neq \langle 55 \wedge 35 \rangle_I$

และ $154 \wedge \langle 55 \wedge 35 \rangle_I \neq \langle 55 \wedge 35 \rangle_I$

เนื่องจาก $55 >< 231 \wedge 35$ และ $55 >< 154 \wedge 35$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $55 \wedge \langle 231 \wedge 35 \rangle_I \neq \langle 231 \wedge 35 \rangle_I$

และ $55 \wedge \langle 154 \wedge 35 \rangle_I \neq \langle 154 \wedge 35 \rangle_I$

เนื่องจาก $35 >< 231 \wedge 55$ และ $35 >< 154 \wedge 55$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $35 \wedge \langle 231 \wedge 55 \rangle_I \neq \langle 231 \wedge 55 \rangle_I$

และ $35 \wedge \langle 154 \wedge 55 \rangle_I \neq \langle 154 \wedge 55 \rangle_I$

ดังนั้น $1 = 1155 \wedge 231 \wedge \lceil 154 \wedge 55 \wedge 35 \rceil$ และ $1 = 1155 \wedge 154 \wedge \lceil 231 \wedge 55 \wedge 35 \rceil$

บทแทรก 3.38 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ ถ้า $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >< c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ พิสูจน์เหมือนกับทฤษฎีบท 3.23.3
ดังนั้น $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

ตัวอย่าง 3.39 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}
เพราะว่า $1 = 1155 \wedge \lceil (385 \wedge 231) \wedge 165 \wedge 105 \rceil$

ถ้าสมมติให้ $385 \wedge < 231 \wedge 165 \wedge 105 >_I = < 231 \wedge 165 \wedge 105 >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $231 \wedge 165 \wedge 105 \mid 385$

ดังนั้น $231 \wedge 165 \wedge 105 \mid 385 \wedge 165 \wedge 105$ ขัดแย้งกับ $231 \wedge 165 \wedge 105 >< 385 \wedge 165 \wedge 105$

เพราะฉะนั้น $385 \wedge < 231 \wedge 165 \wedge 105 >_I \neq < 231 \wedge 165 \wedge 105 >_I$

ถ้าสมมติให้ $231 \wedge < 385 \wedge 165 \wedge 105 >_I = < 385 \wedge 165 \wedge 105 >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $385 \wedge 165 \wedge 105 \mid 231$

ดังนั้น $385 \wedge 165 \wedge 105 \mid 231 \wedge 165 \wedge 105$ ขัดแย้งกับ $385 \wedge 165 \wedge 105 >< 231 \wedge 165 \wedge 105$

เพราะฉะนั้น $231 \wedge < 385 \wedge 165 \wedge 105 >_I \neq < 385 \wedge 165 \wedge 105 >_I$

ดังนั้น $1 = 1155 \wedge \lceil 385 \wedge 231 \wedge 165 \wedge 105 \rceil$

บทแทรก 3.40 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1. $a = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

ก็ต่อเมื่อ $a = (\ldots((b_1 \wedge b_2) \wedge b_3) \wedge \ldots \wedge b_n) \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2. ถ้า $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rceil$

3. ถ้า $a = b \wedge \lceil (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

หรือ $a = b \wedge c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j} \wedge \lceil \overline{c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j}} \rceil$

สำหรับบาง $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ เมื่อ $1 \leq j < m$

โดยที่ $\overline{c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j}} = c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_j} \wedge \ldots \wedge c_m$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.23.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.23.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์โดยอาศัยทฤษฎีบท 3.23.3

บทแทรก 3.41 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \wedge \lceil (...((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge ... \wedge c_m) \rceil$ และ $c_1,...,c_m$ เป็น dual atom ที่แตกต่างกัน
แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

พิสูจน์ ให้ $a = b \wedge \lceil (...((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge ... \wedge c_m) \rceil$
เนื่องจาก $b \wedge < (...((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge ... \wedge c_m) >_I = < (...((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge ... \wedge c_m) >_I$
โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq (...((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge ... \wedge c_m)$
เพราะฉะนั้น $b \geq (c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-1}) \wedge c_m$
เนื่องจาก $c_1,...,c_m$ เป็น dual atom ที่แตกต่างกัน
ดังนั้น $(c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-1}) >< c_m$
โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $c_m \wedge < (c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-1}) >_I \neq < (c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-1}) >_I$
และ $(c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-1}) \wedge < c_m >_I \neq < c_m >_I$
นั่นคือ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-1}) \wedge c_m \rceil$
เนื่องจาก $c_1,...,c_m$ เป็น dual atom ที่แตกต่างกัน
ดังนั้น $(c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-2}) \wedge c_m >< c_{m-1} \wedge c_m$
โดยบทแทรก 3.38 จะได้ว่า $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_{m-2}) \wedge c_{m-1} \wedge c_m \rceil$
ในทำนองเดียวกัน ดำเนินการไปจนกระทั่งได้
$a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

ตัวอย่าง 3.42 พิจารณา Boolean algebra B_{2310}
เพราะว่า $1 = 231 \wedge \lceil ((((1155 \wedge 770) \wedge 462) \wedge 330) \wedge 210) \rceil$ จะได้ว่า
$231 \wedge < ((((1155 \wedge 770) \wedge 462) \wedge 330) \wedge 210) >_I = < ((((1155 \wedge 770) \wedge 462) \wedge 330) \wedge 210) >_I$
โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $((((1155 \wedge 770) \wedge 462) \wedge 330) \wedge 210) \mid 231$
ดังนั้น $1155 \wedge 770 \wedge 462 \wedge 330 \wedge 210 \mid 231$
เนื่องจาก 210,330,462,770,1155 เป็น dual atom ที่แตกต่างกัน
ดังนั้น $210 \wedge < 330 \wedge 462 \wedge 770 \wedge 1155 >_I \neq < 330 \wedge 462 \wedge 770 \wedge 1155 >_I$

และ $330 \wedge < 210 \wedge 462 \wedge 770 \wedge 1155 >_I \neq < 210 \wedge 462 \wedge 770 \wedge 1155 >_I$

และ $462 \wedge < 210 \wedge 330 \wedge 770 \wedge 1155 >_I \neq < 210 \wedge 330 \wedge 770 \wedge 1155 >_I$

และ $770 \wedge < 210 \wedge 330 \wedge 462 \wedge 1155 >_I \neq < 210 \wedge 330 \wedge 462 \wedge 1155 >_I$

และ $1155 \wedge < 210 \wedge 330 \wedge 462 \wedge 770 >_I \neq < 210 \wedge 330 \wedge 462 \wedge 770 >_I$

นั่นคือ $1 = 231 \wedge \lceil 210 \wedge 330 \wedge 462 \wedge 770 \wedge 1155 \rceil$

ทฤษฎีบท 3.43 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c \rceil$ แล้ว $a = c \wedge \lceil b \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $b = c$

พิสูจน์ ให้ $a = b \wedge \lceil c \rceil$ จะได้ว่า $b \wedge < c >_I = < c >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq c$

สมมติให้ $a = c \wedge \lceil b \rceil$ จะได้ว่า $c \wedge < b >_I = < b >_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c \geq b$

ดังนั้น $b = c$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $b = c$ จะได้ $c \geq b$

ดังนั้น $a = c \wedge \lceil b \rceil$

ตัวอย่าง 3.44 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $< 35 \wedge 15 >_I = < 5 >_I = \{5,1\}$ และ $< 35 \wedge 10 >_I = < 5 >_I = \{5,1\}$

ดังนั้น $(35 \wedge 15) \wedge < 35 \wedge 10 >_I = \{5 \wedge 5, 5 \wedge 1\} = \{5,1\} = < 5 >_I = < 35 \wedge 10 >_I$

และ $(35 \wedge 10) \wedge < 35 \wedge 15 >_I = \{5 \wedge 5, 5 \wedge 1\} = \{5,1\} = < 5 >_I = < 35 \wedge 15 >_I$

เพราะฉะนั้น $5 = (35 \wedge 15) \wedge \lceil 35 \wedge 10 \rceil$ และ $5 = (35 \wedge 10) \wedge \lceil 35 \wedge 15 \rceil$

ทฤษฎีบท 3.45 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$ สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $b < d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$ แล้ว $a = c \wedge d \wedge \lceil b \rceil$

2. ถ้า $b >< d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$ ก็ต่อเมื่อ $a = c \wedge \lceil b \wedge d \rceil$

พิสูจน์ 1. ให้ $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil$

สมมติให้ $b < d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$

จะได้ว่า $b = b \wedge d$

เนื่องจาก $b \wedge d = c \wedge d$

ดังนั้น $b = c \wedge d$

โดย ทฤษฎีบท 3.43 จะได้ว่า $a = c \wedge d \wedge \lceil b \rceil$

พิสูจน์ 2. ให้ $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil$

สมมติให้ $b >< d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $b \wedge <d>_I \neq <d>_I$ และ $d \wedge <b>_I \neq <b>_I$

เนื่องจาก $c \geq c \wedge d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$

ดังนั้น $c \geq b \wedge d$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $c \wedge <b \wedge d>_I = <b \wedge d>_I$

นั่นคือ $a = c \wedge \lceil b \wedge d \rceil$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil = c \wedge \lceil b \wedge d \rceil$

จะได้ว่า $b \wedge <c \wedge d>_I = <c \wedge d>_I$ และ $c \wedge <b \wedge d>_I = <b \wedge d>_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq c \wedge d$ และ $c \geq b \wedge d$

ดังนั้น $b \wedge d \geq c \wedge d$ และ $c \wedge d \geq b \wedge d$

นั่นคือ $b \wedge d = c \wedge d$

เนื่องจาก $a = c \wedge \lceil b \wedge d \rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.19 จะได้ว่า $b >< d$

ตัวอย่าง 3.46 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $5 = 105 \wedge 10 \wedge \lceil 35 \wedge 15 \rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.23.1 จะได้ว่า $105 \wedge 10 \wedge \lceil 35 \wedge 15 \rceil = 5 \wedge \lceil 35 \wedge 15 \rceil$

เนื่องจาก $5 = 5 \wedge 15$ และ $5 \wedge 15 = 35 \wedge 15$

ดังนั้น $5 = 35 \wedge 15$

โดย ทฤษฎีบท 3.43 จะได้ว่า $5 = 35 \wedge 15 \wedge \lceil 5 \rceil$

ดังนั้น $5 = 35 \wedge 15 \wedge \lceil 105 \wedge 10 \rceil$

ตัวอย่าง 3.47 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $5 = 35 \wedge \lceil 15 \wedge 10 \rceil$

เนื่องจาก $15 \wedge 10 = 35 \wedge 10$ ดังนั้น $35 \wedge 10 \mid 15$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $15 \wedge \langle 35 \wedge 10 \rangle_I = \langle 35 \wedge 10 \rangle_I$

เนื่องจาก $35 >< 10$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $35 \wedge \langle 10 \rangle_I \neq \langle 10 \rangle_I$ และ $10 \wedge \langle 35 \rangle_I \neq \langle 35 \rangle_I$

ดังนั้น $5 = 15 \wedge \lceil 35 \wedge 10 \rceil$

ทฤษฎีบท 3.48 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge c \wedge \lceil d \rceil$ จะได้ดังนี้

1. $a = b \wedge d \wedge \lceil c \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $c = d$

2. ถ้า $b >< c$ และ $b \wedge c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a = d \wedge \lceil b \wedge c \rceil$

พิสูจน์ 1. ให้ $a = b \wedge c \wedge \lceil d \rceil$

จะได้ว่า $b \wedge \langle d \rangle_I = \langle d \rangle_I$ และ $c \wedge \langle d \rangle_I = \langle d \rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b \geq d$ และ $c \geq d$

สมมติให้ $a = b \wedge d \wedge \lceil c \rceil$

จะได้ว่า $b\wedge\langle c\rangle_I=\langle c\rangle_I$ และ $d\wedge\langle c\rangle_I=\langle c\rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b\geq c$ และ $d\geq c$

เพราะฉะนั้น $c=d$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $c=d$

เนื่องจาก $b\geq d$ ดังนั้น $b\geq c$

นั่นคือ $a=b\wedge d\wedge\lceil c\rceil$

พิสูจน์ 2. สมมติให้ $b><c$ และ $b\wedge c=d$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $b\wedge\langle c\rangle_I\neq\langle c\rangle_I$ และ $c\wedge\langle b\rangle_I\neq\langle b\rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $d\wedge\langle b\wedge c\rangle_I=\langle b\wedge c\rangle_I$

ดังนั้น $a=d\wedge\lceil b\wedge c\rceil$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a=b\wedge c\wedge\lceil d\rceil=d\wedge\lceil b\wedge c\rceil$

จะได้ว่า $b\wedge\langle d\rangle_I=\langle d\rangle_I$ และ $c\wedge\langle d\rangle_I=\langle d\rangle_I$ และ $d\wedge\langle b\wedge c\rangle_I=\langle b\wedge c\rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $b\geq d$ และ $c\geq d$ และ $d\geq b\wedge c$

ดังนั้น $b\wedge c\geq d$ และ $d\geq b\wedge c$

นั่นคือ $b\wedge c=d$

เนื่องจาก $a=d\wedge\lceil b\wedge c\rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.19 จะได้ว่า $b><c$

ตัวอย่าง 3.49 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $3=42\wedge 21\wedge 30\wedge\lceil 15\wedge 6\rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.23.1 จะได้ว่า $42\wedge 21\wedge 30\wedge\lceil 15\wedge 6\rceil=42\wedge 3\wedge\lceil 15\wedge 6\rceil$

เนื่องจาก $42\wedge\langle 15\wedge 6\rangle_I=\langle 15\wedge 6\rangle_I$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $15\wedge 6\mid 42$

เนื่องจาก $3=15\wedge 6$ ดังนั้น $3\mid 42$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $42\wedge \langle 3\rangle_I = \langle 3\rangle_I$

นั่นคือ $3 = 42\wedge(15\wedge 6)\wedge\lceil 3\rceil = 42\wedge(15\wedge 6)\wedge\lceil 21\wedge 30\rceil$

ตัวอย่าง 3.50 พิจารณา Boolean algebra B_{210}

เพราะว่า $3 = 42\wedge 15\wedge\lceil 105\wedge 6\rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.23.2 จะได้ว่า $42\wedge 15\wedge\lceil 105\wedge 6\rceil = 42\wedge 15\wedge\lceil 3\rceil$

เนื่องจาก $42\wedge 15 = 3$

โดย ทฤษฎีบท 3.11 จะได้ว่า $3\wedge \langle 42\wedge 15\rangle_I = \langle 42\wedge 15\rangle_I$

เนื่องจาก $42 >< 15$

โดย บทแทรก 3.14 จะได้ว่า $42\wedge \langle 15\rangle_I \neq \langle 15\rangle_I$ และ $15\wedge \langle 42\rangle_I \neq \langle 42\rangle_I$

ดังนั้น $3 = 3\wedge\lceil 42\wedge 15\rceil$

โดย ทฤษฎีบท 3.23.1 จะได้ว่า $3 = 105\wedge 6\wedge\lceil 42\wedge 15\rceil$

4. <u>การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal filter</u>

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์การแยกตัวประกอบบน Boolean algebra ซึ่งแยกในรูปแบบที่มีตัวดำเนินการ meet เป็นตัวเชื่อม และได้ใช้ Boolean principal filter มาใช้แบ่งกลุ่มของตัวประกอบ และลดทอนให้เหลือน้อยที่สุด และใช้เป็นเกณฑ์ในการเปลี่ยนชุดตัวประกอบที่ยังทำให้ได้ผลลัพธ์เดิมเท่ากัน

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $\langle a\rangle_F \cup \langle b\rangle_F \subseteq \langle a\wedge b\rangle_F$

พิสูจน์ ให้ $x \in \langle a\rangle_F \cup \langle b\rangle_F$

จะได้ว่า $x \geq a$ หรือ $x \geq b$

ดังนั้น $x \geq a\wedge b$

นั่นคือ $x \in \langle a\wedge b\rangle_F$

บทแทรก 4.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

ถ้า $a \sim b$ แล้ว $<a>_F \cup <b>_F = <a \wedge b>_F$

พิสูจน์ สมมติให้ $a \sim b$

ถ้า $a \geq b$

ให้ $x \in <a \wedge b>_F$

จะได้ว่า $x \geq a \wedge b = b$

ดังนั้น $x \in <b>_F \subseteq <a>_F \cup <b>_F$

นั่นคือ $<a \wedge b>_F \subseteq <a>_F \cup <b>_F$

โดย ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $<a>_F \cup <b>_F = <a \wedge b>_F$

ถ้า $b > a$

ให้ $x \in <a \wedge b>_F$

จะได้ว่า $x \geq a \wedge b = a$

ดังนั้น $x \in <a>_F \subseteq <a>_F \cup <b>_F$

นั่นคือ $<a \wedge b>_F \subseteq <a>_F \cup <b>_F$

โดย ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $<a>_F \cup <b>_F = <a \wedge b>_F$

บทนิยาม 4.3 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

กำหนดให้ $a \wedge <b>_F = \{ a \wedge c \mid c \in B$ และ $c \geq b \}$

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$ โดยที่ $a \neq 1_B$

$$a \wedge <b>_F \subset <a \wedge b>_F$$

พิสูจน์ ให้ $x \in a \wedge <b>_F$

จะมี $c \geq b$ ที่ทำให้ $x = a \wedge c$

เนื่องจาก $c \geq b$

ดังนั้น $x = a \wedge c \geq a \wedge b$

นั่นคือ $x \in \langle a \wedge b \rangle_F$

เพราะฉะนั้น $a \wedge \langle b \rangle_F \subset \langle a \wedge b \rangle_F$

ข้อสังเกต 4.5 $a \wedge \langle b \rangle_F \neq \langle a \wedge b \rangle_F$ เพราะว่า $1_B \notin a \wedge \langle b \rangle_F$

ทฤษฎีบท 4.6 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ $\langle a \wedge b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

พิสูจน์ ให้ $a \geq b$

เนื่องจาก $\langle b \rangle_F \subseteq \langle a \rangle_F \cup \langle b \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 4.1 จะได้ว่า $\langle b \rangle_F \subseteq \langle a \wedge b \rangle_F$

จะแสดงว่า $\langle a \wedge b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

เพียงพอที่จะแสดงว่า $\langle a \wedge b \rangle_F \subseteq \langle b \rangle_F$

ให้ $x \in \langle a \wedge b \rangle_F$

จะได้ $x \geq a \wedge b$

ดังนั้น $x \geq a \wedge b = b$

นั่นคือ $x \in \langle b \rangle_F$

สรุปได้ว่า $\langle a \wedge b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $\langle a \wedge b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

จะได้ว่า $a \wedge b = b$

ดังนั้น $a \geq b$

บทแทรก 4.7 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ $a \wedge \langle b \rangle_F \subset \langle b \rangle_F$

พิสูจน์ ให้ $a \geq b$

โดย ทฤษฎีบท 4.6 จะได้ว่า $\langle a \wedge b \rangle_F = \langle b \rangle_F$

โดย ทฤษฎีบท 4.4 จะได้ว่า $a \wedge \langle b \rangle_F \subset \langle b \rangle_F$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a \wedge \langle b \rangle_F \subset \langle b \rangle_F$

เนื่องจาก $a = a \wedge 1_B$ และ $1_B \geq b$

ดังนั้น $a \in a \wedge \langle b \rangle_F$

เพราะฉะนั้น $a \in \langle b \rangle_F$

นั่นคือ $a \geq b$

บทแทรก 4.8 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a,b \in B$

จะได้ว่า $a < b$ หรือ $a >< b$ ก็ต่อเมื่อ $\langle a \wedge b \rangle_F \neq \langle b \rangle_F$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.14

บทนิยาม 4.9 ให้ B เป็น Boolean algebra ให้ $a \in B$ และ $a \neq 1_B$
จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPF (Boolean principal filter) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 1_B$, $c_j \neq 1_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \geq a$ และ $c_j \geq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

2. $\langle b_i \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rangle_F = \langle c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rangle_F$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

3. $\langle c_1 \wedge ... \wedge c_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_F \neq \langle c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m \rangle_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก

แทนการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPF ของ a

ด้วย $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$
และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPF ของ a

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \wedge \lfloor c \wedge d \rfloor$ แล้ว $c >< d$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.19

ทฤษฎีบท 4.11 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ แล้ว $c_i >< c_j$ เมื่อ $i \neq j$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.21

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
1. $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $a = (b_1 \wedge b_2) \wedge ... \wedge b_n \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$
2. ถ้า $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \wedge \lfloor (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rfloor$
3. ถ้า $a = b \wedge \lfloor (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$
หรือ $a = b \wedge c_1 \wedge \lfloor c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ หรือ $a = b \wedge c_2 \wedge \lfloor c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.23.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.23.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.23.3

บทแทรก 4.13 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lfloor (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $c_1 > c_2$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lfloor c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

2. ถ้า $c_1 > c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lfloor c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

3. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lfloor c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

4. ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lfloor c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.26.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.26.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.26.3

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.26.4

บทแทรก 4.14 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lfloor (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $c_2 > c_1$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lfloor c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

2. ถ้า $c_2 > c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lfloor c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

3. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 \wedge c_1 > c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lfloor c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

4. ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m > c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lfloor c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.31.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.31.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.31.3

พิสูจน์ 4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.31.4

บทแทรก 4.15 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lfloor (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$ ถ้า $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$
และ $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m = c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lfloor c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$ และ $a = b \wedge c_2 \wedge \lfloor c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.36

บทแทรก 4.16 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lfloor (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$ ถ้า $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >< c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$
แล้ว $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.38

บทแทรก 4.17 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
1. $a = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$
ก็ต่อเมื่อ $a = (\ldots((b_1 \wedge b_2) \wedge b_3) \wedge \ldots \wedge b_n) \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$
2. ถ้า $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \wedge \lfloor (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rfloor$
3. ถ้า $a = b \wedge \lfloor (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rfloor$ แล้ว $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$
หรือ $a = b \wedge c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j} \wedge \lfloor \overline{c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j}} \rfloor$
สำหรับบาง $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ เมื่อ $1 \leq j < m$
โดยที่ $\overline{c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j}} = c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_j} \wedge \ldots \wedge c_m$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.40.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.40.2

พิสูจน์ 3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.40.3

บทแทรก 4.18 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$
ถ้า $a = b \wedge \lfloor (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rfloor$ และ $c_1,\ldots,c_m$ เป็น dual atom ที่แตกต่างกัน แล้ว $a = b \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rfloor$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับบทแทรก 3.41

ทฤษฎีบท 4.19 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lfloor c \rfloor$ แล้ว $a = c \wedge \lfloor b \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $b = c$

พิสูจน์ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.43

ทฤษฎีบท 4.20 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lfloor c \wedge d \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. ถ้า $b > d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$ แล้ว $a = c \wedge d \wedge \lfloor b \rfloor$
2. ถ้า $b >< d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$ ก็ต่อเมื่อ $a = c \wedge \lfloor b \wedge d \rfloor$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.45.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.45.2

ทฤษฎีบท 4.21 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge c \wedge \lfloor d \rfloor$ จะได้ดังนี้

1. $a = b \wedge d \wedge \lfloor c \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $c = d$

2. ถ้า $b >\!< c$ และ $b \wedge c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a = d \wedge \lfloor b \wedge c \rfloor$

พิสูจน์ 1. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.48.1

พิสูจน์ 2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.48.2

สรุป

1. ผลการแยกตัวประกอบบน Boolean algebra สรุปได้เป็น 4 กรณีดังนี้

1.1 ถ้า B เป็น Boolean algebra สำหรับ $a \in B$ และ $a \neq 0_B$ จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPF (Boolean principal filter) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 0_B$, $c_j \neq 0_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \leq a$ และ $c_j \leq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1) $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n \vee c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m$

2) $b_i \vee < c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m >_F = < c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

3) $c_j \vee < c_1 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F \neq < c_1 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก แทนการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPF ของ a ด้วย $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rfloor$ และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPF ของ a

1.2 ถ้า B เป็น Boolean algebra สำหรับ $a \in B$ และ $a \neq 0_B$ จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPI (Boolean principal ideal) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 0_B$, $c_j \neq 0_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \leq a$ และ $c_j \leq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1) $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n \vee c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m$

2) $< b_i \vee c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m >_I = < c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

3) $< c_1 \vee ... \vee c_j \vee ... \vee c_m >_I \neq < c_1 \vee ... \vee \hat{c}_j \vee ... \vee c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก แทนการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ BPI ของ a ด้วย $a = b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n \vee \lceil c_1 \vee c_2 \vee ... \vee c_m \rceil$ และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPI ของ a

1.3 ถ้า B เป็น Boolean algebra สำหรับ $a \in B$ และ $a \neq 1_B$ จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPI (Boolean principal ideal) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 1_B$, $c_j \neq 1_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \geq a$ และ $c_j \geq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1) $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

2) $b_i \wedge < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

3) $c_j \wedge < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I \neq < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_I$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก แทนการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPI ของ a ด้วย $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$ และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPI ของ a

1.4 ถ้า B เป็น Boolean algebra สำหรับ $a \in B$ และ $a \neq 1_B$ จะเรียกว่า a มีการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPF (Boolean principal filter) ถ้ามีสมาชิก $b_i \neq 1_B$, $c_j \neq 1_B$ ใน B และทั้ง b_i และ c_j แตกต่างกันหมด โดยที่ $b_i \geq a$ และ $c_j \geq a$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq m$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1) $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m$

2) $< b_i \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_F = < c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$

3) $< c_1 \wedge ... \wedge c_j \wedge ... \wedge c_m >_F \neq < c_1 \wedge ... \wedge \hat{c}_j \wedge ... \wedge c_m >_F$ เมื่อ $1 \leq j \leq m$

โดยที่ $\hat{c}_j$ แทนสมาชิกที่ถูกย้ายออก แทนการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ BPF ของ a ด้วย $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge \lfloor c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rfloor$ และเรียกแต่ละ b_i ว่า inessential factors และเรียกแต่ละ c_j ว่า essential factors ของ BPF ของ a

ทั้ง 4 กรณีได้ทำการวิเคราะห์การแยกตัวประกอบ โดยใช้ Boolean principal ไม่ว่าจะเป็นกรณีที่เป็น meet หรือ join ก็ตาม ทำให้เราแบ่งตัวประกอบได้เป็น 2 แบบ นั่นคือ inessential factors และ essential factors

2. เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการจัดกลุ่ม inessential factors และ essential factors มีดังนี้

2.1 การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal filter

2.1.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1) $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $a = (b_1 \vee b_2) \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2) ถ้า $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

3) ถ้า $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$
หรือ $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ หรือ $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2.1.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ จะได้ดังนี้

1) ถ้า $c_1 < c_2$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2) ถ้า $c_1 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

3) ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_2 < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

4) ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2.1.3 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ จะได้ดังนี้

1) ถ้า $c_2 < c_1$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2) ถ้า $c_2 < c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

3) ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \vee c_1 < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$
แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

4) ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m < c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2.1.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ ถ้า $c_1 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$ และ $c_2 >< c_3 \vee c_4 \vee \ldots \vee c_m$

และ $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m = c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee c_1 \vee \lfloor c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ และ $a = b \vee c_2 \vee \lfloor c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2.1.5 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \vee \lfloor (c_1 \vee c_2) \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ ถ้า $c_1 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m >< c_2 \vee c_3 \vee \ldots \vee c_m$

แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2.1.6 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1) $a = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

ก็ต่อเมื่อ $a = (\ldots((b_1 \vee b_2) \vee b_3) \vee \ldots \vee b_n) \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2) ถ้า $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$

3) ถ้า $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$ แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

หรือ $a = b \vee c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j} \vee \lfloor \overline{c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j}} \rfloor$

สำหรับบาง $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ เมื่อ $1 \leq j < m$

โดยที่ $\overline{c_{i_1} \vee c_{i_2} \vee \ldots \vee c_{i_j}} = c_1 \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_1} \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_2} \vee \ldots \vee \hat{c}_{i_j} \vee \ldots \vee c_m$

2.1.7 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$

ถ้า $a = b \vee \lfloor (\ldots((c_1 \vee c_2) \vee c_3) \vee \ldots \vee c_m) \rfloor$ และ $c_1, \ldots, c_m$ เป็น atom ที่แตกต่างกัน

แล้ว $a = b \vee \lfloor c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_m \rfloor$

2.2 การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal ideal จะได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียว กับการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal filter

2.3 การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal ideal

2.3.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1) $a = b_1 \wedge b_2 \wedge ... \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $a = (b_1 \wedge b_2) \wedge ... \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

2) ถ้า $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$

3) ถ้า $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

หรือ $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$ หรือ $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

2.3.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$ จะได้ดังนี้

1) ถ้า $c_1 > c_2$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

2) ถ้า $c_1 > c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

3) ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_2 > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

4) ถ้า $c_1 >< c_2$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m > c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

2.3.3 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge ... \wedge c_m \rceil$ จะได้ดังนี้

1) ถ้า $c_2 > c_1$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

2) ถ้า $c_2 > c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

3) ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge ... \wedge c_m$ และ $c_2 \wedge c_1 > c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge ... \wedge c_m \rceil$

4) ถ้า $c_2 >< c_1$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m > c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2.3.4 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ ถ้า $c_1 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$ และ $c_2 >< c_3 \wedge c_4 \wedge \ldots \wedge c_m$

และ $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m = c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge c_1 \wedge \lceil c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ และ $a = b \wedge c_2 \wedge \lceil c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2.3.5 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil (c_1 \wedge c_2) \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ ถ้า $c_1 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m >< c_2 \wedge c_3 \wedge \ldots \wedge c_m$

แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2.3.6 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

1) $a = b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

ก็ต่อเมื่อ $a = (\ldots((b_1 \wedge b_2) \wedge b_3) \wedge \ldots \wedge b_n) \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2) ถ้า $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rceil$

3) ถ้า $a = b \wedge \lceil (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rceil$ แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

หรือ $a = b \wedge c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j} \wedge \lceil \overline{c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j}} \rceil$

สำหรับบาง $\{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ เมื่อ $1 \leq j < m$

โดยที่ $\overline{c_{i_1} \wedge c_{i_2} \wedge \ldots \wedge c_{i_j}} = c_1 \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \hat{c}_{i_j} \wedge \ldots \wedge c_m$

2.3.7 ให้ B เป็น finite Boolean algebra และ $a \in B$

ถ้า $a = b \wedge \lceil (\ldots((c_1 \wedge c_2) \wedge c_3) \wedge \ldots \wedge c_m) \rceil$ และ $c_1, \ldots, c_m$ เป็น dual atom ที่แตกต่างกัน

แล้ว $a = b \wedge \lceil c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m \rceil$

2.4 การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal filter จะได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียว กับการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal ideal

3. เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการสลับที่ inessential factors กับ essential factors มีดังนี้

3.1 การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal filter

3.1.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c \rfloor$ จะได้ว่า $a = c \vee \lfloor b \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $b = c$

3.1.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee \lfloor c \vee d \rfloor$ จะได้ดังนี้

1) ถ้า $b > d$ และ $b \vee d = c \vee d$ แล้ว $a = c \vee d \vee \lfloor b \rfloor$

2) ถ้า $b >< d$ และ $b \vee d = c \vee d$ ก็ต่อเมื่อ $a = c \vee \lfloor b \vee d \rfloor$

3.1.3 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \vee c \vee \lfloor d \rfloor$ จะได้ดังนี้

1) $a = b \vee d \vee \lfloor c \rfloor$ ก็ต่อเมื่อ $c = d$

2) ถ้า $b >< c$ และ $b \vee c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a = d \vee \lfloor b \vee c \rfloor$

3.2 การแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal ideal จะได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียว กับการแยกตัวประกอบแบบ join โดยใช้ Boolean principal filter

3.3 การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal ideal

3.3.1 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$
สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c \rceil$ แล้ว $a = c \wedge \lceil b \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $b = c$

3.3.2 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge \lceil c \wedge d \rceil$ จะได้ดังนี้

1) ถ้า $b < d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$ แล้ว $a = c \wedge d \wedge \lceil b \rceil$

2) ถ้า $b >< d$ และ $b \wedge d = c \wedge d$ ก็ต่อเมื่อ $a = c \wedge \lceil b \wedge d \rceil$

3.3.3 ให้ B เป็น Boolean algebra และ $a \in B$

สมมติให้ $a = b \wedge c \wedge \lceil d \rceil$ จะได้ดังนี้

1) $a = b \wedge d \wedge \lceil c \rceil$ ก็ต่อเมื่อ $c = d$

2) ถ้า $b >< c$ และ $b \wedge c = d$ ก็ต่อเมื่อ $a = d \wedge \lceil b \wedge c \rceil$

3.4 การแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal filter จะได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียว กับการแยกตัวประกอบแบบ meet โดยใช้ Boolean principal ideal

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

Durbin, J.R. 1979. **Modern Algebra.** John Wiley & Sons, Inc., New York.

Lidl, R. and G. Pilz. 1984. **Applied Abstract Algebra.** Springer-Verlag, Inc., New York.

Roersma, N. 1991. **U-factorizations in commutative rings with zero divisors.** Mathematics Subject Classification. Available Source: http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2001/vol2-n2/paper6/v2n2-6pd.pdf, June 22, 2005.

ประวัติการศึกษา

ชื่อ –นามสกุล	นายวิทวัส พันธวิมล
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 20 กุมภาพันธ์ 2525
สถานที่เกิด	จังหวัดกรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	ระดับปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์ วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์