



ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (สถิติ)

ปริญญา

สถิติ

สาขา

สถิติ

ภาควิชา

เรื่อง การแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปและการประยุกต์สำหรับความเชื่อถือได้ทางสถิติ

Generalized Lognormal Distribution and Its Application in Statistical Reliability

นามผู้วิจัย นางสาวศิริพร อรชร

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วินัย โพธิ์สุวรรณ, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์อำไพ ทองธีรภาพ, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา ธีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การแจกแจงลอการิทึมแบบทั่วไปและการประยุกต์สำหรับความเชื่อถือได้ทางสถิติ

Generalized Lognormal Distribution and Its Application in Statistical Reliability

โดย

นางสาวศิริพร อรชร

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ)
พ.ศ. 2552

ศิริพร อรชร 2552: การแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปและการประยุกต์สำหรับความ
เชื่อถือได้ทางสถิติ ปรินญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (สถิติ) สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผู้ช่วยศาสตราจารย์วินัย โพธิ์สุวรรณ, Ph.D.

121 หน้า

งานวิจัยนี้ศึกษาารูปแบบและคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกลอนอร์มัล
วางนัยทั่วไป (generalized lognormal distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงที่มาจากกรแจกแจงปกติ
โดยจะศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม
โมเมนต์ ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน สัมประสิทธิ์ความเบ้ สัมประสิทธิ์ความโด่ง สถิติอันดับ การ
สร้างค่าของตัวแปรสุ่ม การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด การทดสอบ
สารูปสนิทธิโดยใช้สถิติทดสอบของ Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov รวมทั้งการ
วิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปและการประยุกต์กับข้อมูลจริง
การประมวลผลโดยใช้โปรแกรม R ผลการวิจัยพบว่ารูปแบบการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัย
ทั่วไปมีลักษณะต่างๆ กันขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ โดยมีลักษณะเบ้ขวาเมื่อ $0 < \lambda \leq 1$ และ
 $\lambda < 0$ มีลักษณะเบ้ซ้ายเมื่อ $\lambda > 1$ และกราฟมีลักษณะเช่นเดียวกับการแจกแจงปกติ เมื่อ $\lambda = 1$
และกราฟมีลักษณะเป็นการแจกแจงลอกลอนอร์มัลเมื่อ $\lambda = 0$ ในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของ
การแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปพบว่าฟังก์ชันอัตราเสี่ยงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ โดย
สามารถจำแนกได้เป็น 4 กรณี คือ กรณี $\lambda \geq 1$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม กรณี
 $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงแรกเริ่มเป็นฟังก์ชันลด ในระยะต่อมาเป็นฟังก์ชันเพิ่ม กรณี
 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเป็นฟังก์ชันลดในระยะแรก ต่อมาเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็น
ฟังก์ชันลดจนเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนกรณี $\lambda < 0$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงแรกเริ่มเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ในระยะ
ต่อมาเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันลด

Siriporn Aorachon 2009: Generalized Lognormal Distribution and Its Application in Statistical Reliability. Master of Science (Statistics), Major Field: Statistics, Department of Statistics. Thesis Advisor: Assistant Professor Winai Bodhisuwan, Ph.D. 121 pages.

The purpose of this research is to study of generalized lognormal distribution, which is transformed from normal distribution. Basic studies are done based on some probability properties, e.g., moments, mean, variance, coefficient of skewness, coefficient of kurtosis, order statistics and graphs of distribution. Parameter estimation of the model is using maximum likelihood estimate. Some goodness of fit tests of generalized lognormal distribution such as Anderson Darling and Kolmogorov Smirnov have presented. The reliability analysis for generalized lognormal distribution is included. Some real data sets will be presented in this work. The results of the study show that the generalized lognormal distribution is skewed to the right when $0 < \lambda \leq 1$ and $\lambda < 0$, skewed to the left when $\lambda > 1$, when $\lambda = 1$ it is a special case of the normal distribution, furthermore it is lognormal distribution when $\lambda = 0$. The hazard function of generalized lognormal may be classified in 4 cases, e.g., 1) case $\lambda \geq 1$, the generalized lognormal distribution has an increasing hazard rate, 2) $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, the hazard rate tends to infinity as time tends to 0, falling quickly, and then increasing, 3) $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ hazard rate is decreasing at the beginning, and then increasing to a specific point of time, and decreases eventually to zero, 4) $\lambda < 0$, the generalized lognormal hazard rate starts at 0, increases to a specific point of time, and then decreases eventually to zero.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

 /

 /

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความกรุณาของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วินัย โพธิ์สุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อคิดเห็น ตลอดจนช่วยเหลือแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ เป็นอย่างดียิ่งจนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญอ้อม โฉมทิ ประธานการสอบ และรองศาสตราจารย์ ดร.สำรวม จงเจริญ ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก ที่กรุณาให้คำแนะนำ ตรวจสอบ และแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ ที่ประสิทธิประสาทความรู้และประสบการณ์ทางด้านสถิติ

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ญาติพี่น้องและเพื่อน ที่เป็นกำลังใจและให้การสนับสนุนมาโดยตลอด

ศิริพร อรชร
สิงหาคม 2552

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(5)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	6
อุปกรณ์และวิธีการ	30
อุปกรณ์	30
วิธีการ	30
ผลและวิจารณ์	34
ผล	34
วิจารณ์	85
สรุปผลและข้อเสนอแนะ	86
สรุป	86
ข้อเสนอแนะ	92
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	93
ภาคผนวก	95
ภาคผนวก ก การพิสูจน์	96
ภาคผนวก ข ตารางสถิติ	106
ภาคผนวก ค โปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัย	109
ภาคผนวก ง การใช้คำสั่ง mle ในโปรแกรม R	118
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	121

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	ค่าโมเมนต์ที่ 1, 2, 3 และ 4 รอบจุดกำเนิดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัย ทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0$	44
2	ค่าโมเมนต์ที่ 1, 2, 3 และ 4 รอบจุดกำเนิดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัย ทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$	44
3	ค่าโมเมนต์ที่ 2, 3 และ 4 รอบค่าเฉลี่ยของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัย ทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0$	45
4	ค่าโมเมนต์ที่ 2, 3 และ 4 รอบค่าเฉลี่ยของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัย ทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$	45
5	ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่ง ของการแจกแจงลอกนอร์มัล วางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0$	48
6	ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่ง ของการแจกแจงลอกนอร์มัล วางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$	49
7	การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ โดยวิธีแบ่งครึ่งช่วงของข้อมูลอายุการใช้งาน ของเครื่องใช้ไฟฟ้า	56
8	ค่าประมาณของพารามิเตอร์ของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าเมื่อมี การแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป	56
9	ค่าประมาณและความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการ แจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปโดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด	58
10	ค่าเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อน (MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์	60
11	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธี ความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 20$	61

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
12	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 20$	61
13	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 50$	62
14	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 50$	62
15	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 100$	63
16	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 100$	63
17	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 200$	64
18	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 200$	64
19	ค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบ Anderson Darling	68
20	ค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบ Kolmogorov Smirnov	70
21	ค่าประมาณของพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป จากข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า	71

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
22	ค่าสถิติทดสอบ Anderson Darling และค่าสถิติทดสอบ Kolmogorov Smirnov ของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าที่มีการแจกแจงลอการมัลวานัยทั่วไป	72
23	ค่าประมาณของพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการมัลวานัยทั่วไป จากข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน	73
24	ค่าสถิติทดสอบ Anderson Darling และค่าสถิติทดสอบ Kolmogorov Smirnov ของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืนที่มีการแจกแจงลอการมัลวานัยทั่วไป	74
ตารางผนวกที่		
ข1	ค่าวิกฤตของตัวทดสอบสถิติ Anderson Darling สำหรับการแจกแจงลอการมัลวานัยทั่วไป	106
ข2	ค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบ Kolmogorov Smirnov One-sample test	107

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	เส้นโค้งของการแจกแจงปกติ เมื่อ $\mu = 5$ และ $\sigma = 1, 2, 3$	7
2	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึม เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$	8
3	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$	10
4	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = -8$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$	11
5	เส้นโค้งปกติกรณีสี่ข้อมูล มีค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐานและฐานนิยมมีค่าเท่ากัน	12
6	เส้นโค้งของข้อมูลที่มีการแจกแจงเบ้ซ้าย	13
7	เส้นโค้งของข้อมูลที่มีการแจกแจงเบ้ขวา	13
8	เส้นโค้งของความเชื่อถือได้ของการแจกแจงปกติ เมื่อ $\mu = 5$ และ $\sigma = 1, 2, 3$	24
9	เส้นโค้งของอัตราเสี่ยงของการแจกแจงปกติ เมื่อ $\mu = 5$ และ $\sigma = 1, 2, 3$	25
10	เส้นโค้งของความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึม เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$	27
11	เส้นโค้งของอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึม เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$	28
12	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$	36
13	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$	37
14	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 1$	38
15	เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = -8$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$	39
16	เส้นโค้งของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$	41
17	เส้นโค้งของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน เมื่อ $\mu = -8$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.7, -0.8, -1.0$	42

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
18	ฮิสโตแกรมของข้อมูลจากการจำลอง และโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผัน ทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$	52
19	ฮิสโตแกรมของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า	71
20	ฮิสโตแกรมของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน	73
21	เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$	76
22	เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$	77
23	เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปของ ข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า	78
24	เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป ของ ข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน	79
25	เส้นโค้งของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 2$	81
26	เส้นโค้งของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.75$	82
27	เส้นโค้งของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.25$	83
28	เส้นโค้งของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = -1$	84
29	เส้นโค้งของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 2$	90
30	เส้นโค้งของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.75$	90

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	เนื้อหา	หน้า
31	เส้นโค้งของอัตราความถี่ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.25$	91
32	เส้นโค้งของอัตราความถี่ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = -1$	91

การแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปและการประยุกต์สำหรับความเชื่อถือได้ทางสถิติ

Generalized Lognormal Distribution and Its Application in Statistical Reliability

คำนำ

การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติจะเกี่ยวข้องกับรูปแบบความน่าจะเป็นของความล้มเหลวของการใช้งาน วิธีการอนุมานสำหรับอายุการใช้งานที่มีการแจกแจงแบบต่างๆ วิธีการทดสอบอายุการใช้งาน ความเชื่อถือได้ของระบบงานและรูปแบบการบำรุงรักษาและทดแทน ข้อมูลที่เกี่ยวข้องเป็นข้อมูลอายุการใช้งานของผลิตภัณฑ์ (Barlow and Proschan, 1975) โดยปกติอายุการใช้งานของผลิตภัณฑ์ขึ้นอยู่กับอายุการใช้งานของชิ้นส่วนย่อยที่ประกอบเป็นผลิตภัณฑ์นั้น ถ้าชิ้นส่วนย่อยชิ้นใดหมดอายุการใช้งาน อาจทำให้ผลิตภัณฑ์นั้นหมดอายุการใช้งานไปด้วย หรืออาจยังใช้งานต่อไปได้จนกระทั่งชิ้นส่วนย่อยทุกชิ้นหมดอายุการใช้งาน ในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้จะสนใจการแจกแจงของอายุการใช้งาน ซึ่งอาจเป็นการแจกแจงปกติ การแจกแจงลอการิธึมลวง การแจกแจงไวบูลล์ การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Grosh, 1989)

งานวิจัยนี้สนใจอายุการใช้งานที่มีการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป (Generalized Lognormal Distribution) เป็นการแจกแจงที่มาจากการแปลงการแจกแจงปกติ ด้วยวิธี Box-Cox transformations ซึ่งมีพารามิเตอร์ 3 ตัว (Chen, 1995)

กำหนดให้ ϕ และ Φ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

$$\text{กำหนด } y(\lambda) = \begin{cases} (y^\lambda - 1)/\lambda & \text{เมื่อ } \lambda \neq 0 \\ \log y & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \end{cases}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบลอการิธึมลวงนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ $\lambda \in R, \mu \in R$ และ $\sigma > 0$ แล้ว Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(y; \lambda, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \sigma^{-1} \phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} y^{-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

ซึ่งการวิจัยนี้มีความสนใจที่จะศึกษารูปแบบของการแจกแจง คุณสมบัติทางความน่าจะเป็น
วิธีการสร้างค่าของตัวแปรสุ่ม วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ การทดสอบสารูปสถิติ และการ
ประยุกต์ทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

วัตถุประสงค์

1. ศึกษารูปแบบของการแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป
2. ศึกษาคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป
3. ศึกษาการประยุกต์การแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไปทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติ

ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษารูปแบบและคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป รวมทั้งการประยุกต์การแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไปทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติ โดยมีขอบเขตการวิจัยดังนี้คือ

1. การศึกษาคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป จะศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม โมเมนต์ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ ความโด่ง สถิติอันดับ การสร้างตัวแปรสุ่ม การประมาณค่าพารามิเตอร์ และการทดสอบสารูปสมมติ

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์นี้แบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือการศึกษาด้วยข้อมูลจริงและการศึกษาด้วยการจำลองข้อมูลโดยโปรแกรม R (R Development Core Team, 2008)

2.1 ทำการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่อไปนี้

2.1.1 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$

2.1.2 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.4$

2.1.3 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.6$

2.1.4 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.8$

2.1.5 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 1.0$

2.1.6 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2$

2.1.7 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.4$

2.1.8 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.6$

2.1.9 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.8$

2.1.10 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -1.0$

2.2 ในแต่ละสถานการณ์กำหนดขนาดตัวอย่าง $n = 100$ ค่า

2.3 จำลองค่าตัวแปรสุ่มตามลักษณะดังกล่าวข้างต้น ทำซ้ำ 1000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด

3. การทดสอบสารูปสถิติสำหรับการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปในงานวิจัยนี้ใช้ตัวสถิติทดสอบของ Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov ระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบคือ $\alpha = 0.05$

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้ทราบรูปแบบและคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป
2. สามารถนำการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป ไปประยุกต์ทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติ
3. สามารถนำวิธีการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปไปประยุกต์กับการแจกแจงอื่นๆ

การตรวจเอกสาร

การแจกแจงที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้มีการแจกแจงที่เกี่ยวข้องคือการแจกแจงปกติ การแจกแจงลอการิธึม และการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป

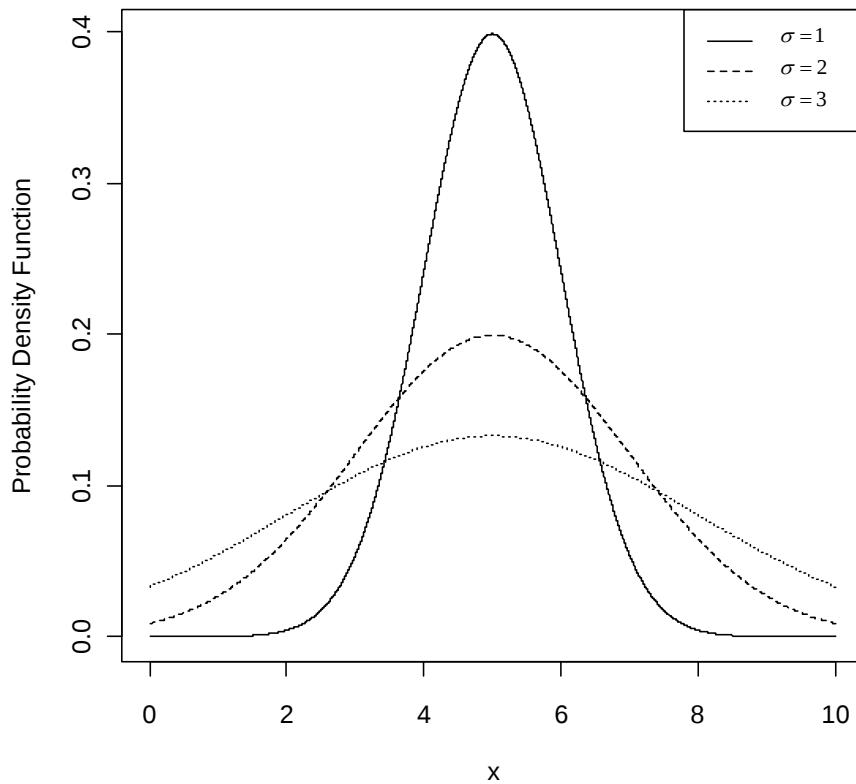
การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่สำคัญ เดอมัวร์ (De Moivre) เป็นผู้ที่ค้นพบสมการเส้นโค้งของการแจกแจงปกติในปี ค.ศ. 1733 และต่อมา เกาส์ (Gauss) ก็ได้ค้นพบสมการนี้จากการศึกษาค่าคลาดเคลื่อนในการวัดปริมาณเดียวกันหลายๆ ครั้ง การแจกแจงนี้จึงมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian distribution) (Johnson *et al.*, 1994)

ถ้า X มีการแจกแจงปกติ ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2 เขียนแทนด้วย $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ โดยที่ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$
$$= 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$

กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นเส้นโค้งมีลักษณะเป็นรูปประฆังคว่ำที่สมมาตร เรียกว่า เส้นโค้งปกติ (normal curve) ดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 เส้นโค้งของการแจกแจงปกติ เมื่อ $\mu = 5$ และ $\sigma = 1, 2, 3$

การแจกแจงลอการิธึม (Lognormal Distribution)

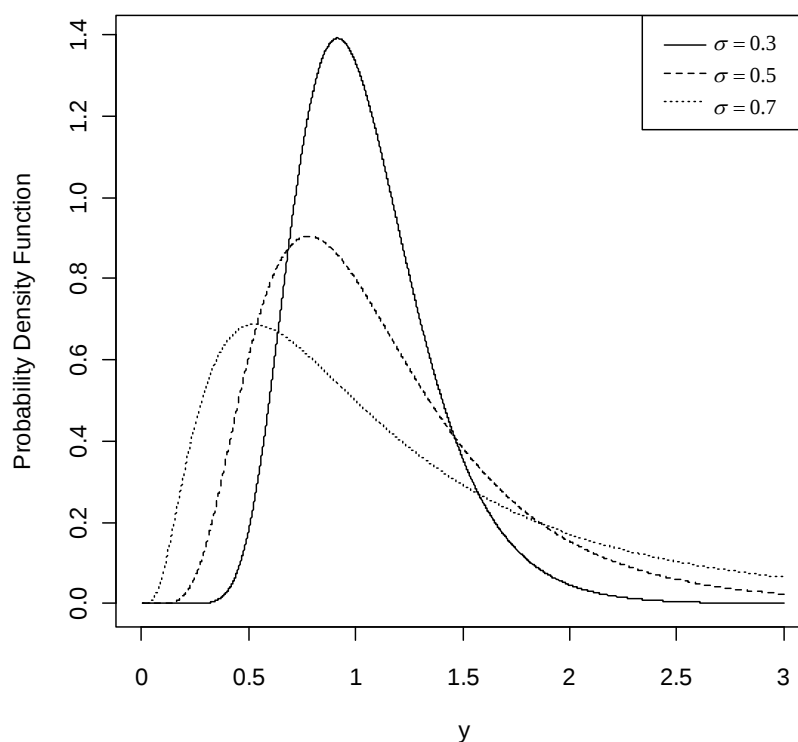
ให้ $Y = e^X$ โดยที่ X มีการแจกแจงปกติ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ เพราะฉะนั้น Y มีปริภูมิ $R_Y = \{y : 0 < y < \infty\}$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ที่มีพารามิเตอร์ $\mu \in R$ และ $\sigma > 0$ ดังนี้ (Johnson *et al.*, 1994)

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y - \mu)^2} \quad \text{เมื่อ } 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ } y \text{ มีค่าอื่น}$$

เราเรียกตัวแปรสุ่ม Y ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังกล่าว่า ตัวแปรสุ่ม
 ลอกนอร์มัล (lognormal random variable) หรือกล่าวว่า Y มีการแจกแจงลอกนอร์มัล
 (lognormal distribution) และเขียนแทนด้วย $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$

กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มัลมีลักษณะ
 ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 เส้นโค้งของการแจกแจงลอกนอร์มัล เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$

ถ้า Y มีการแจกแจงลอกนอร์มัลที่มีพารามิเตอร์ $\mu \in R$ และ $\sigma > 0$ จะมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนดังนี้

$$E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{Var}(Y) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

การแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป (Generalized Lognormal Distribution)

กำหนดให้ ϕ และ Φ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน แล้ว Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้ (Chen, 1995)

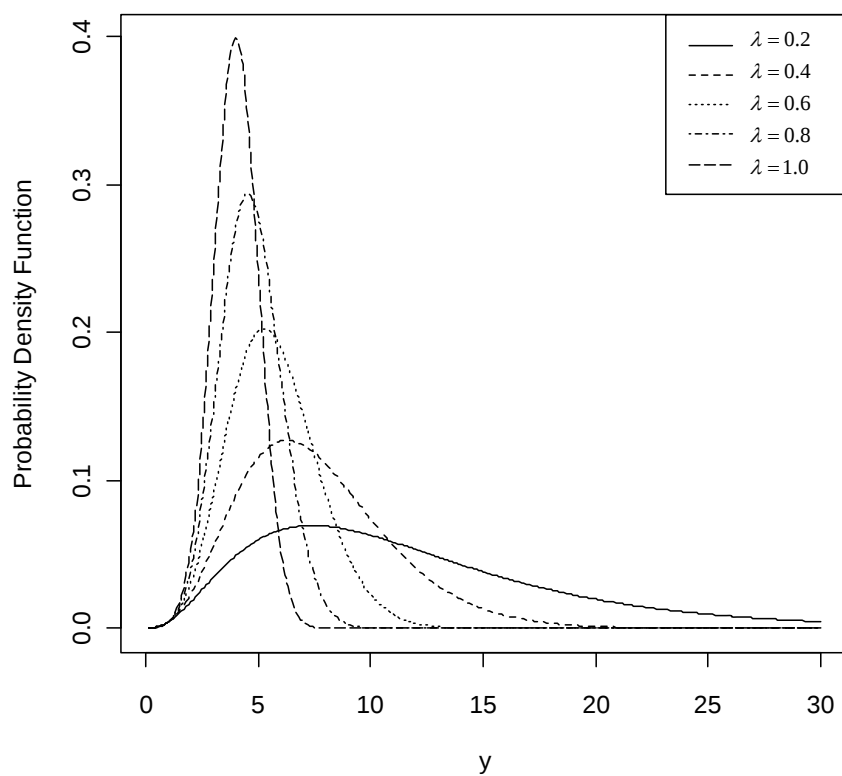
$$\text{กำหนด } y(\lambda) = \begin{cases} (y^\lambda - 1) / \lambda & \text{เมื่อ } \lambda \neq 0 \\ \log y & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \end{cases}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ $\lambda \in R$, $\mu \in R$ และ $\sigma > 0$ แล้ว Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

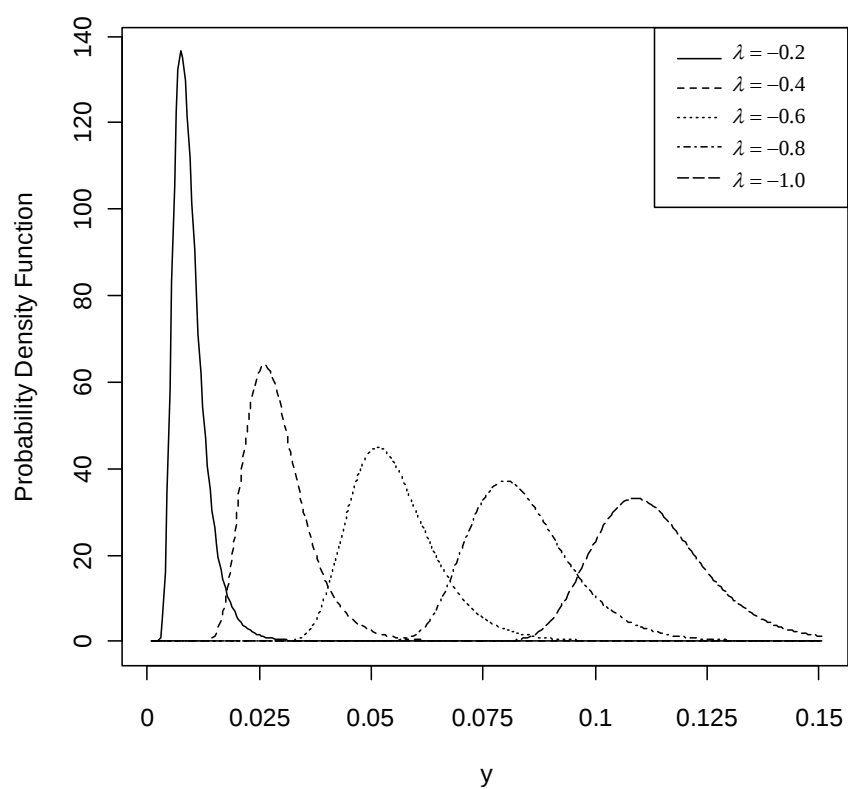
$$f(y; \lambda, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \sigma^{-1} \phi \{ (y(\lambda) - \mu) / \sigma \} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \sigma^{-1} \phi \{ (\log y - \mu) / \sigma \} y^{-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \sigma^{-1} \phi \{ (y(\lambda) - \mu) / \sigma \} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

จะได้กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปดังภาพที่ 3 และภาพที่ 4



ภาพที่ 3 เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$



ภาพที่ 4 เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$

วิธีการที่เกี่ยวข้อง

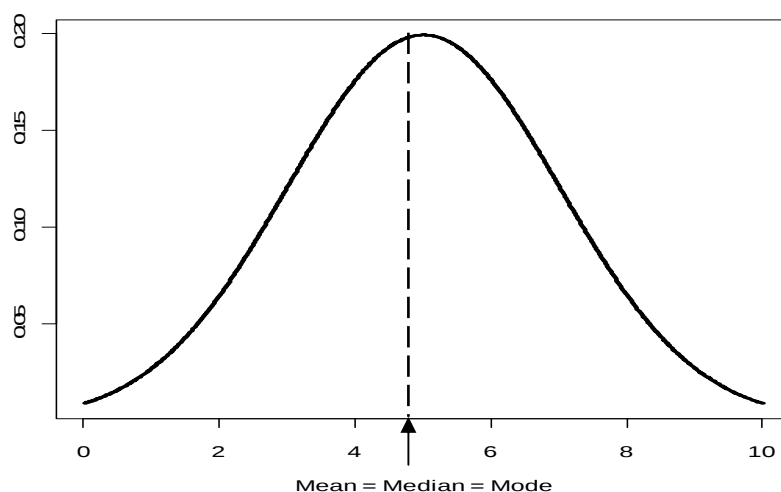
การวัดค่าความเบ้และความโด่ง (Skewness and Kurtosis)

ค่าของความเบ้และความโด่งจะแสดงให้เห็นถึงลักษณะของโค้งการแจกแจงความถี่ของข้อมูล ดังนั้นเราจึงวัดค่าความเบ้และความโด่งเพื่อนำมาอธิบายลักษณะของข้อมูล

การวัดค่าความเบ้ (Skewness)

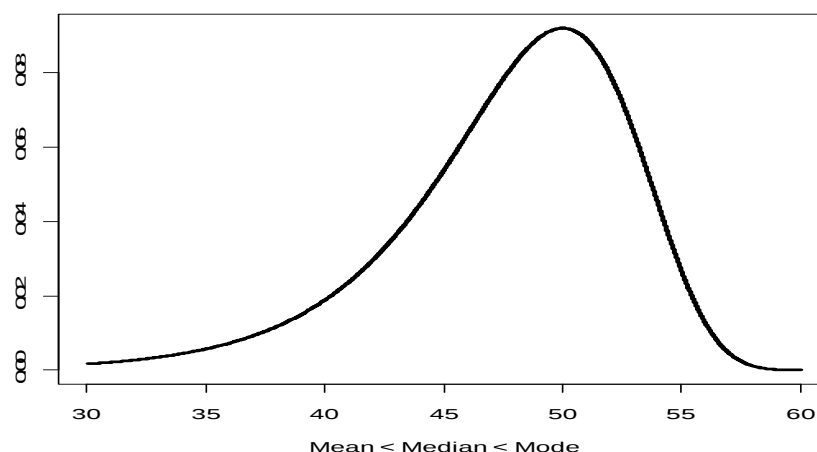
เส้นโค้งปกติชนิดสมมาตรนั้นหมายถึง เส้นโค้งที่ด้านซ้ายและด้านขวาจากกึ่งกลางของเส้นโค้งมีลักษณะเหมือนกันทุกประการและที่ตำแหน่งกึ่งกลางของเส้นโค้ง คือค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และฐานนิยม ซึ่งมีค่าเท่ากัน แต่ถ้าข้อมูลที่มีลักษณะเส้นโค้งชนิดไม่สมมาตรก็จะมีลักษณะเบ้ไปข้างใดข้างหนึ่ง ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมก็จะมีค่าต่างกัน

กราฟเส้นโค้งปกติที่ข้อมูล มีค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมเท่ากัน แสดงได้ดังภาพที่ 5



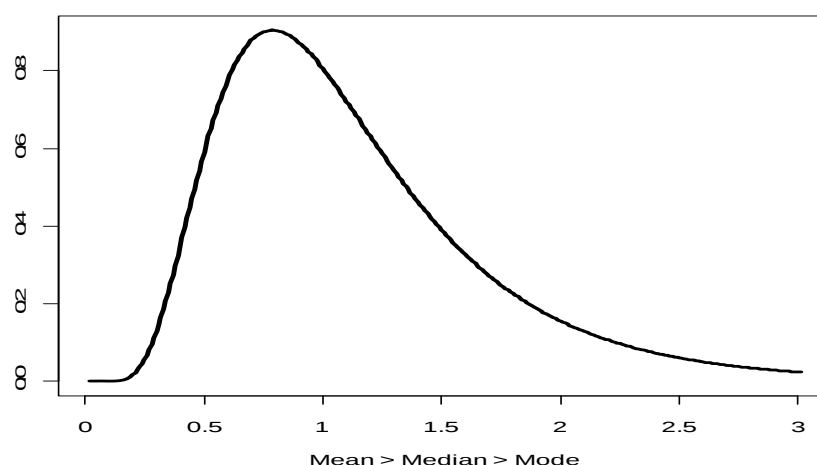
ภาพที่ 5 เส้นโค้งปกติที่ข้อมูลมีค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐานและค่าฐานนิยมเท่ากัน

รูปเส้นโค้งซึ่งได้จากข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ไปทางซ้าย เพราะพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งทางด้านซ้ายของฐานนิยม (Mode) มีค่ามากกว่าทางด้านขวาของค่าฐานนิยม (Mode) และค่าเฉลี่ยจะอยู่ด้านซ้ายของฐานนิยม เนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่อยู่ทางซ้าย จึงเรียกโค้งลักษณะนี้ว่า เบ้ซ้าย (skewed to the left) แสดงได้ดังภาพที่ 6



ภาพที่ 6 เส้นโค้งของข้อมูลที่มีการแจกแจงเบ้ซ้าย

รูปเส้นโค้งซึ่งได้จากข้อมูลมีการแจกแจงเบ้ไปทางขวา เพราะพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งทางด้านขวาของฐานนิยมมีมากกว่าพื้นที่ทางด้านซ้ายของฐานนิยม และค่าเฉลี่ยจะอยู่ด้านขวาของฐานนิยม เนื่องจากข้อมูลส่วนใหญ่ทางขวา จึงเรียกโค้งลักษณะนี้ว่า เบ้ขวา (skewed to the right) แสดงได้ดังภาพที่ 7



ภาพที่ 7 เส้นโค้งของข้อมูลที่มีการแจกแจงเบ้ขวา

การวัดความเบ้ (Measure of skewness) เป็นการวัดเส้นโค้งปกติว่ามีลักษณะสมมาตร เบ้ซ้าย หรือเบ้ขวา ซึ่งมีวิธีการดังนี้

การวัดความเบ้โดยวิธีโมเมนต์

การหาความเบ้จะใช้โมเมนต์ที่ 2 และโมเมนต์ที่ 3 ในการคำนวณด้วยสูตรสัมประสิทธิ์ความเบ้ (g_1) ดังนี้ (Abramowitz and Stegun, 1972)

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2 \sqrt{m_2}}$$

โดยที่ m_2 แทนโมเมนต์ที่ 2 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_2 = E\{Y - E(Y)\}^2$

m_3 แทนโมเมนต์ที่ 3 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_3 = E\{Y - E(Y)\}^3$

โดยการพิจารณาลักษณะของเส้นโค้ง จากสัมประสิทธิ์ความเบ้จะอธิบายลักษณะเส้นโค้งดังนี้

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ $g_1 = 0$ จะได้เส้นโค้งรูปประฆังคว่ำแบบสมมาตร

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ $g_1 > 0$ จะได้เส้นโค้งที่มีลักษณะเบ้ขวา

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ $g_1 < 0$ จะได้เส้นโค้งที่มีลักษณะเบ้ซ้าย

ความโด่ง (Kurtosis)

เส้นโค้งที่เรียกว่าเส้นโค้งปกติ (Normal curve) นอกจากเป็นเส้นโค้งที่มีรูปประฆังคว่ำชนิดสมมาตร ไม่เบ้แล้ว ยังต้องเป็นเส้นโค้งที่มีความโด่งตามส่วนสัดอีกด้วย เส้นโค้งที่โด่งผิดจากปกติ ก็จะเป็นเส้นโค้งที่ไม่ปกติทั้งสิ้น แม้จะมีรูปประฆังคว่ำชนิดสมมาตรก็ตาม

การวัดความโด่ง (Measure of kurtosis) คือ การวัดเส้นโค้งว่ามีความโด่งมากน้อยเพียงไร ซึ่งมีวิธีการดังนี้

การวัดความโด่งโดยวิธีโมเมนต์

การวัดความโด่งจะใช้โมเมนต์ที่ 2 และโมเมนต์ที่ 4 ในการคำนวณสัมประสิทธิ์ความโด่ง (g_2) ด้วยสูตรดังนี้ (Abramowitz and Stegun, 1972)

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

โดยที่ m_2 แทนโมเมนต์ที่ 2 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_2 = E\{Y - E(Y)\}^2$

m_4 แทนโมเมนต์ที่ 4 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_4 = E\{Y - E(Y)\}^4$

โดยการพิจารณาลักษณะของเส้นโค้ง จากสัมประสิทธิ์ความโด่งจะอธิบายลักษณะเส้นโค้งดังนี้

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโด่ง $g_2 = 0$ เป็นเส้นโค้งที่มีความโด่งเป็นปกติ เรียกว่า เส้นโค้งชนิด meso kurtic

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโด่ง $g_2 > 0$ เส้นโค้งที่โด่งกว่าปกติ เรียกว่า เส้นโค้งชนิด leptokurtic

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโด่ง $g_2 < 0$ เส้นโค้งที่แบนราบกว่าปกติ เรียกว่า เส้นโค้งชนิด platykurtic

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method)

การสุ่มเลือกช่วงใดๆ ที่บรรจุค่ารากที่ต้องการมาหนึ่งช่วงแล้วแบ่งช่วงนั้นออกเป็นสองส่วนเท่าๆ กัน ตรวจสอบว่าค่ารากอยู่ทางซ้ายหรือขวาของจุดแบ่ง ทำซ้ำๆ เช่นนี้ไปจนจุดแบ่งเข้าใกล้ค่ารากมากขึ้น (Burden and Faires, 2001)

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ และ $f(a) \cdot f(b) < 0$ จะได้ว่าสมการ $f(x) = 0$ มีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งรากในช่วง (a, b)

ขั้นตอนของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

กำหนด n (จำนวนครั้งของการแบ่งครึ่งช่วง) และให้ $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-n}$

1. กำหนดให้ $i = 1$

2. ทดสอบว่าช่วง $[a, b]$ บรรจุค่ารากไว้หรือไม่ โดยตรวจสอบว่า ถ้า $f(a) \cdot f(b) < 0$ แล้วแสดงว่าค่ารากอยู่ในช่วง $[a, b]$ จากนั้นทำต่อข้อ 3 ถ้า $f(a) \cdot f(b) > 0$ ต้องหาช่วง (a, b) ใหม่

3. กำหนด $x_i = \frac{a+b}{2}$

ถ้า $f(x_i) = 0$ หรือ $f(x_i) < \varepsilon$ จะได้ x_i เป็นรากของสมการ แล้วไปที่ ข้อ 6

ถ้า $f(x_i) \neq 0$ ให้พิจารณา $\text{sgn}(f(x_i))$ ว่ามีค่าเหมือน $\text{sgn}(f(a))$ หรือ $\text{sgn}(f(b))$

4. ถ้า $\text{sgn}(f(x_i)) = \text{sgn}(f(a))$ แสดงว่าค่ารากอยู่ในช่วง (x_i, b) ให้ $a = x_i$ และเพิ่มค่า i อีกหนึ่ง ($i = i + 1$) แล้วกลับไปข้อ 3

5. ถ้า $\text{sgn}(f(x_i)) = \text{sgn}(f(b))$ แสดงว่าค่ารากอยู่ในช่วง (a, x_i) ให้ $b = x_i$ และเพิ่มค่า i อีกหนึ่ง ($i = i + 1$) แล้วกลับไปข้อ 3

6. ได้คำตอบ

$$\text{หมายเหตุ } \text{sgn}(f(x)) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } f(x) < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } f(x) > 0 \end{cases}$$

การประมาณค่าโดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Method of Maximum Likelihood)

แนวคิดความควรจะเป็นสูงสุดจะนำเอาตัวอย่างสุ่มของการแจกแจงมาพิจารณา ถ้าทราบค่าของตัวแปรสุ่มแล้ว ค่าเหล่านี้จะบอกค่าประมาณของพารามิเตอร์จะเป็นค่านี้ด้วยความน่าจะเป็นสูงสุดเท่าไร กล่าวคือ ค่าประมาณนี้จะทำให้ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มมีค่าสูงสุด แนวคิดในการอนุมานทางสถิติแบบความควรจะเป็นสูงสุดนี้จะประมาณค่า โดยหาค่า θ ที่ทำให้ฟังก์ชันความควรจะเป็น $L(\theta; x)$ มีค่าสูงสุด นั่นคือ

$$L(\theta_k; x_1, x_2, \dots, x_n) > L(\theta_j; x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ โดยที่ } j = 1, 2, \dots$$

นิยาม 1 ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $f(x; \theta)$ ฟังก์ชันความควรจะเป็น (likelihood function) ของตัวแปรสุ่มคือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นร่วมของ $X_1, X_2, \dots, X_n$ โดยที่เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ แทนฟังก์ชันความควรจะเป็นจะเป็นด้วยสัญลักษณ์ L หรือ $L(\theta)$ หรือ $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ นั่นคือ

$$L(\theta) = L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

นิยาม 2 ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimator) ของพารามิเตอร์ θ คือ $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันความควรจะเป็นมีค่าสูงที่สุด

การทดสอบสารูปสนิทธิ (Goodness of fit)

การทดสอบสารูปสนิทธิเป็นการทดสอบลักษณะการแจกแจงของข้อมูลว่ามีลักษณะการแจกแจงตามทฤษฎีหรือไม่ โดยที่กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยข้อมูล n ค่า ที่สุ่มมาอย่างอิสระกัน

กระบวนการทดสอบสารูปสนิทธิ

ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาอย่างอิสระกันจากประชากรที่มีการแจกแจงเดียวกัน และเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก คือ $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$

1. กำหนดสมมติฐาน

H_0 : ตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ มีการแจกแจงตามประชากรที่คาดหวัง

H_1 : ตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ไม่มีการแจกแจงตามประชากรที่คาดหวัง

2. กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ

3. เลือกตัวสถิติทดสอบ

4. หาค่าวิกฤตของตัวสถิติที่เลือก

5. คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบจากข้อมูล

6. เปรียบเทียบค่าตัวสถิติทดสอบที่คำนวณได้กับค่าวิกฤต เพื่อสรุปผลว่าจะยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐาน H_0

ตัวสถิติทดสอบสำหรับการทดสอบสารูปสนิท

1. ตัวสถิติทดสอบของ Anderson Darling

ตัวสถิติทดสอบ A^2 จะอยู่ในรูป

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{(2i-1)\log u_i + (2n+1-i)\log(1-u_i)\}$$

เมื่อ u_i แทนความถี่สะสมของค่าสังเกตลำดับที่ i เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

n แทนจำนวนข้อมูล

และ Chen (2005) ได้ดัดแปลง A^2 เพื่อให้ใช้ได้กับการแจกแจงแบบลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปโดยที่

$$A^* = A^2(1 + 4.2/n - 43/n^2)$$

เกณฑ์การตัดสินใจจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อค่า A^* ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตจากตารางค่าวิกฤตของ Anderson Darling สำหรับการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป (ตารางที่ 1 ในภาคผนวก ข)

2. ตัวสถิติทดสอบของ Kolmogorov Smirnov

สถิติทดสอบ Kolmogorov Smirnov จะอยู่ในรูปดังนี้ (Conover, 1980)

$$KS = \max_{1 \leq i \leq n} \{D^+, D^-\}$$

เมื่อ $D^+ = \sup \{S(X_i) - F_0(X_i)\} = \max \left\{ \frac{i}{n} - F_0(X_i) \right\}$

$$D^- = \sup \{F_0(X_i) - S(X_{i-1})\} = \max \left(F_0(X_i) - \frac{(i-1)}{n} \right)$$

$F_0(x_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมตามการแจกแจงที่คาดหวังไว้ของ x_i ซึ่งมีการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก

$S(x_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง

n คือ จำนวนข้อมูล

เกณฑ์การตัดสินใจจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อค่า KS ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตจากตารางค่าวิกฤตของ Kolmogorov Smirnov (ตารางที่ 2 ในภาคผนวก ข)

ทฤษฎีความเชื่อถือได้ (Reliability Theory)

ความเชื่อถือได้ นิยามได้ว่าเป็นความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงานได้ตรงกับหน้าที่ที่ระบุไว้ ภายใต้สภาวะถึงแควดล้อมและช่วงของเวลาที่กำหนด (Leemis, 2005)

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (Reliability Function)

ถ้าให้ T เป็นตัวแปรสุ่มของเวลาที่ผลิตภัณฑ์เกิดข้อผิดพลาด

ให้ $f(t)$ คือฟังก์ชันความน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันของการผิดพลาด ณ เวลา t

ให้ $F(t)$ คือความน่าจะเป็นที่ผลิตภัณฑ์เกิดข้อผิดพลาดจนกระทั่งเวลา t หรือฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของเวลาที่ผลิตภัณฑ์เกิดข้อผิดพลาด

ดังนั้น

$$F(t) = \Pr(T < t)$$

$$= \int_0^t f(x)dx$$

ให้ $R(t)$ คือความน่าจะเป็นที่ผลิตภัณฑ์จะสามารถทำงานได้อย่างเป็นปกติหลังจากเวลา t ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (Lewis, 1984)

ดังนั้น

$$R(t) = \Pr(T \geq t)$$

$$= 1 - \Pr(T < t)$$

$$= 1 - F(t)$$

$$= 1 - \int_0^t f(x) dx$$

$$= \int_t^\infty f(x) dx$$

ฟังก์ชันของการเกิดข้อผิดพลาดขณะเวลา t จะอยู่ในรูป

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt} F(t)$$

$$= \frac{d}{dt} (1 - R(t))$$

$$= -\frac{d}{dt} R(t)$$

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยง (Hazard Rate)

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเขียนแทนด้วย $h(t)$ คือ อัตราการเกิดข้อผิดพลาด ณ เวลา t ใดๆ (Lewis, 1984) ถ้าให้ $t_1 = t$ และ $t_2 = t_1 + \Delta t$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow 0} \frac{F(t_2) - F(t_1)}{R(t_1)(t_2 - t_1)} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)\Delta t} \\
&= \frac{f(t)}{R(t)} \\
&= \frac{1}{R(t)} \frac{d}{dt} F(t) \\
&= \frac{1}{R(t)} \frac{d}{dt} (1 - R(t)) \\
&= -\frac{1}{R(t)} \frac{d}{dt} R(t) \\
&= \frac{d}{dt} [-\ln R(t)]
\end{aligned}$$

ความเชื่อถือได้ของการแจกแจงปกติ

กำหนดให้ T มีการแจกแจงปกติ ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2

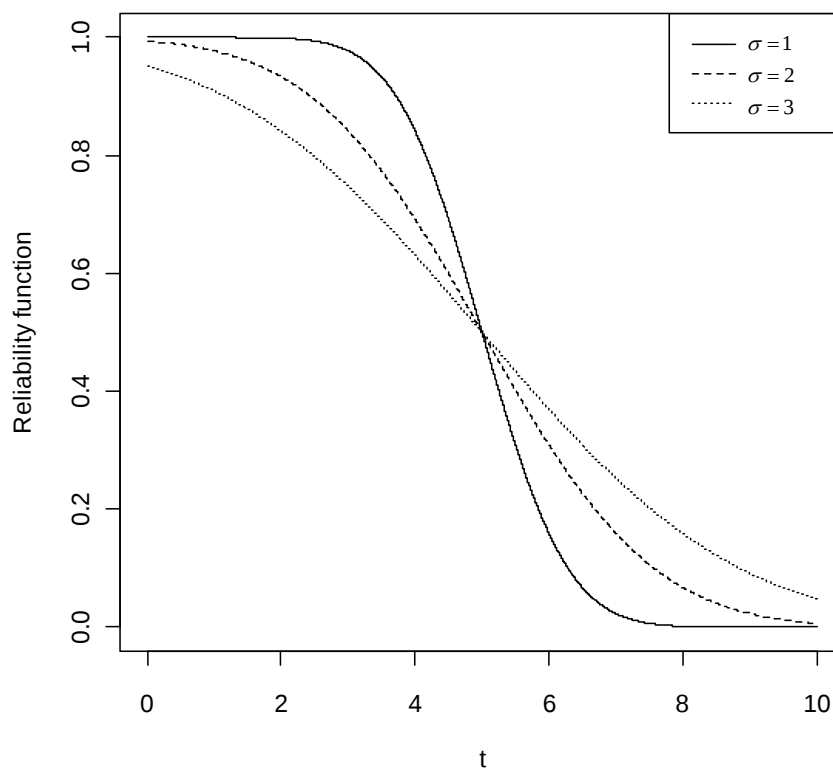
ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติ คือ

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติ จะได้ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงปกติ (Meeker and Escobar, 1998) ในรูปแบบดังนี้

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$

ซึ่งฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงปกติ สามารถแสดงได้ดังภาพที่ 8



ภาพที่ 8 เส้นโค้งของความเชื่อถือได้ของการแจกแจงปกติ เมื่อ $\mu = 5$ และ $\sigma = 1, 2, 3$

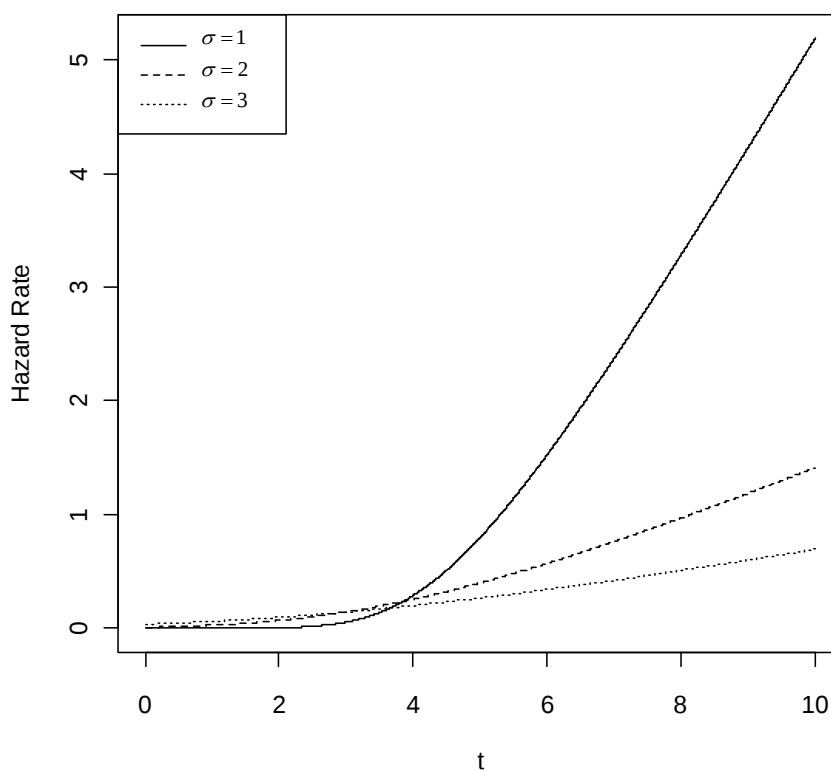
ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงปกติ

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $f(t)$ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ $R(t)$ และฟังก์ชันอัตราเสี่ยง $h(t)$ คือ

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

เพราะฉะนั้นสามารถหาฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงปกติได้ดังนี้

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}$$



ภาพที่ 9 เส้นโค้งของฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงปกติ เมื่อ $\mu=5$ และ $\sigma=1,2,3$

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงปกติมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing) กล่าวคือเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าเพิ่มขึ้น มีผลทำให้ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเพิ่มขึ้นด้วย หรืออีกนัยหนึ่งคือจะพบอัตราการเกิดข้อผิดพลาดของระบบเพิ่มมากขึ้นอันเนื่องมาจากอายุการใช้งานของระบบที่เสื่อมถอยไปตามกาลเวลาหรือจากการใช้งานทำให้เกิดข้อผิดพลาดมากขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 9

ความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอว์มัล

ให้ T มีการแจกแจงลอกลอว์มัล ที่มีพารามิเตอร์ μ และ σ^2

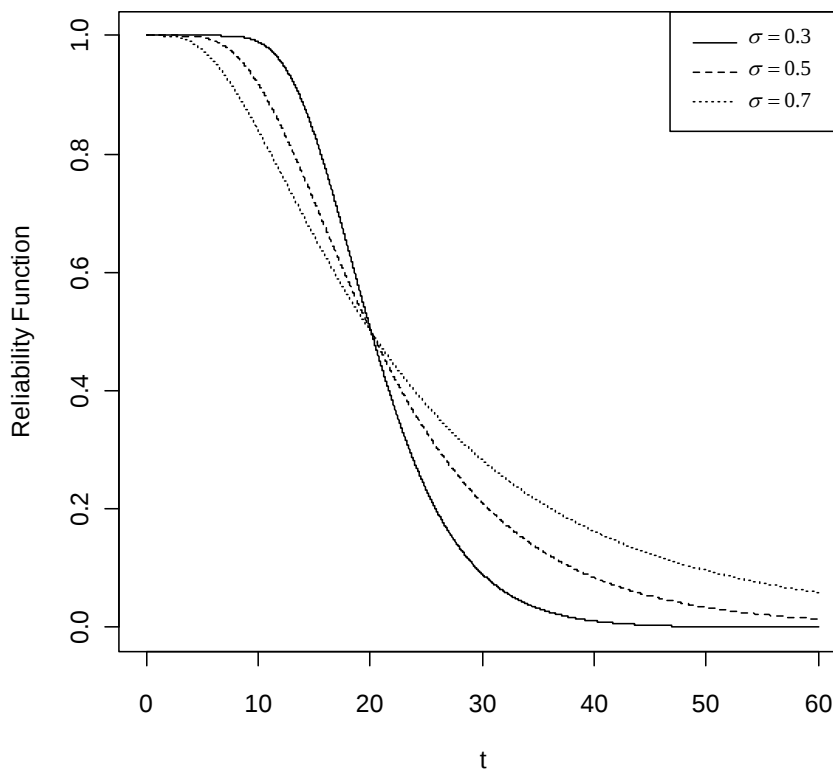
ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอกลอว์มัล คือ

$$F(t) = \Phi[(\log t - \mu) / \sigma]$$

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอกลอว์มัล ดังนั้นการแจกแจงลอกลอว์มัลจะมีฟังก์ชันความเชื่อถือได้คือ (Meeker and Escobar, 1998)

$$R(t) = 1 - \Phi[(\log t - \mu) / \sigma]$$

ซึ่งสามารถแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอว์มัล ได้ดังภาพที่ 10



ภาพที่ 10 เส้นโค้งของความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึม เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึม

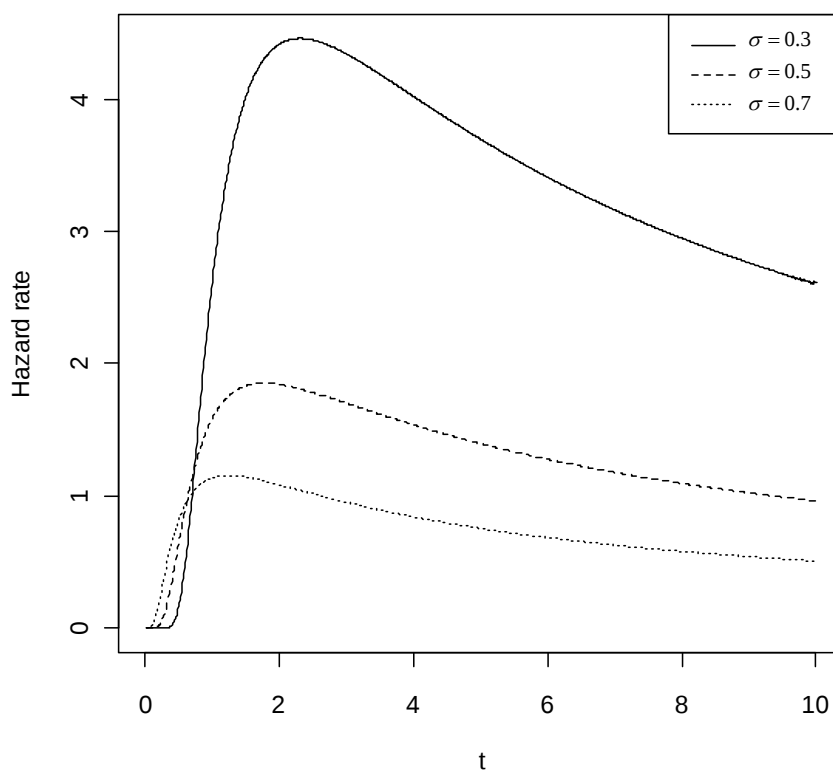
เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น $f(t)$ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ $R(t)$ และฟังก์ชันอัตราเสี่ยง $h(t)$ คือ

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

เพราะฉะนั้นสามารถหาฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมได้ดังนี้

$$h(t) = \frac{\frac{1}{\sigma t} \phi[(\log t - \mu) / \sigma]}{1 - \Phi[(\log t - \mu) / \sigma]}$$

ซึ่งสามารถแสดงโค้งอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึม ได้ดังภาพที่ 11



ภาพที่ 11 เส้นโค้งของอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึม เมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$

จากภาพที่ 11 กราฟแสดงอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึม เห็นได้ว่าอัตราเสี่ยงมีค่าเพิ่มขึ้นในระยะแรกจนถึงจุดสูงสุดจุดหนึ่งแล้วจะมีค่าลดลง โดยเมื่อพารามิเตอร์ σ มีค่ามากจะทำให้อัตราเสี่ยงถึงจุดสูงสุดเร็วกว่าพารามิเตอร์ σ ที่มีค่าน้อย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Chen (1995) ได้ศึกษาการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป (Generalized Lognormal Distribution) โดยศึกษารูปแบบฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป ซึ่งประกอบด้วยพารามิเตอร์ 3 ตัว ศึกษาฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม โมเมนต์ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด การทดสอบภาวะสารูปสนธิโดยใช้ตัวทดสอบ Anderson Darling และ Cramer von และตัวอย่างข้อมูลอายุการใช้งานเครื่องใช้ไฟฟ้าชนิดหนึ่งที่มีการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป พร้อมทั้งประมาณค่าพารามิเตอร์ และทดสอบภาวะสารูปสนธิ

Gupta and Kandu (2007) ได้ศึกษาการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (Generalized exponential distribution) ซึ่งเป็นการแจกแจงที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัว และเป็นส่วนหนึ่งของการแจกแจง exponentiated Weibull โดยเป็นการแจกแจงที่มีลักษณะเบ้ขวา และมีฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงลักษณะเดียวกับการแจกแจงไวบูลล์และการแจกแจงแกมมา งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติทางความน่าจะเป็น โมเมนต์ สถิติอันดับ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด วิธีโมเมนต์ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธี percentile และวิธี L-moment

Barros *et al.* (2009) ได้ศึกษาการแจกแจง generalized Birnbaum-Saunders โดยศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติทางความน่าจะเป็น ลักษณะกราฟของการแจกแจง การสร้างตัวแปรสุ่ม การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีโมเมนต์ การทดสอบสารูปสนธิ และการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติ ซึ่งศึกษาโดยใช้ข้อมูลที่สุ่มมาและข้อมูลจริง รวมทั้งศึกษาทั้งกรณีที่ข้อมูลไม่มี censored และมี censored ซึ่งงานวิจัยนี้ทำการประมวลผลด้วยโปรแกรม R โดยใช้แพ็คเกจ gbs

อุปกรณ์และวิธีการ

การวิจัยเรื่องการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปและการประยุกต์สำหรับความเชื่อถือได้ทางสถิติใช้อุปกรณ์และมีวิธีการศึกษา ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

อุปกรณ์

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ของภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. โปรแกรม R

วิธีการ

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษารูปแบบและคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป รวมทั้งการประยุกต์การแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติ ซึ่งมีวิธีการดังนี้

1. ทำการศึกษารูปแบบของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป โดยพิจารณาลักษณะกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงนี้ โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ทั้งสามตัวมีค่าตามสถานการณ์ต่างๆ แล้วเปรียบเทียบรูปแบบของกราฟว่ามีลักษณะอย่างไร พิจารณาว่าพารามิเตอร์มีผลต่อรูปแบบของการแจกแจงหรือไม่ และศึกษาการกระจาย ความเบ้ ความโด่งของกราฟตามรูปแบบต่างๆ

2. ทำการศึกษาคู่สมมติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป โดยจะศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม โมเมนต์ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ ความโด่ง สถิติอันดับ การสร้างตัวแปรสุ่ม การประมาณค่าพารามิเตอร์ และการทดสอบสารูปสนิทธิ

3. การศึกษาความเบ้ ความโค้งของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป จะศึกษาโดยใช้วิธีโมเมนต์ โดยทำการหาโมเมนต์ที่ 2 โมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 ของการแจกแจงนี้ แล้วนำมาคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโค้ง ดังสูตรต่อไปนี้

$$\text{สัมประสิทธิ์ความเบ้ } (g_1) = \frac{m_3}{m_2 \sqrt{m_2}}$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ความโค้ง } (g_2) = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

เมื่อ m_2 แทนโมเมนต์ที่ 2 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_2 = E\{Y - E(Y)\}^2$

m_3 แทนโมเมนต์ที่ 3 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_3 = E\{Y - E(Y)\}^3$

m_4 แทนโมเมนต์ที่ 4 รอบค่าเฉลี่ย หรือ $m_4 = E\{Y - E(Y)\}^4$

4. สร้างตัวแปรสุ่มของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ $\lambda \in R$, $\mu \in R$ และ $\sigma > 0$

โดยสร้างตัวแปรสุ่ม X ให้มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้วสร้างตัวแปรสุ่มลอการิธึมวางนัยทั่วไป Y เมื่อ $Y = (1 + \lambda x)^{1/\lambda}$

5. การประมาณค่าพารามิเตอร์ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุดโดยศึกษาข้อมูล 2 ลักษณะ คือการศึกษาด้วยการจำลองข้อมูล และการศึกษาด้วยข้อมูลจริง โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์มีวิธีการดังนี้

5.1 ทำการจำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปตามสถานการณ์ดังนี้

5.1.1 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$

5.1.2 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.4$

5.1.3 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.6$

5.1.4 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.8$

5.1.5 $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 1.0$

5.1.6 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2$

5.1.7 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.4$

5.1.8 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.6$

5.1.9 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.8$

5.1.10 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -1.0$

5.2 ในแต่ละสถานการณ์จำลองข้อมูลขนาด 20, 50, 100 และ 200

5.3 ประเมินค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลที่จำลองมาข้างต้นโดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด โดยจำลองข้อมูลและประเมินค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์และแต่ละขนาดตัวอย่าง จำนวน 1000 ครั้ง

5.4 หาค่าเฉลี่ยและความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์ และแต่ละขนาดตัวอย่าง

5.5 ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลจริงที่มีการแจกแจงลอการิธึมผกผัน
ทั่วไป โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

6. ทำการทดสอบสารูปสถิติของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปจากการจำลอง
ข้อมูลและจากข้อมูลจริง ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีการทดสอบสารูปสถิติโดยใช้สถิติทดสอบของ
Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov ระดับนัยสำคัญที่ใช้ในการทดสอบ คือ $\alpha = 0.05$

7. ทำการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปจากข้อมูลที่
จำลองมาและจากข้อมูลจริง โดยศึกษาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ลักษณะกราฟความเชื่อถือได้ ฟังก์ชัน
อัตราเสี่ยงและลักษณะกราฟของอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป

ผลและวิจารณ์

การศึกษารูปแบบและคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป รวมถึงการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป มีผลการศึกษา ดังนี้

ผล

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

เมื่อกำหนดให้ ϕ และ Φ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

$$\text{กำหนด } y(\lambda) = \begin{cases} (y^\lambda - 1)/\lambda & \text{เมื่อ } \lambda \neq 0 \\ \log y & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \end{cases}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ $\lambda \in R, \mu \in R$ และ $\sigma > 0$ แล้ว Y มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้ (Chen, 1995)

$$f(y; \lambda, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu)/\sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \sigma^{-1} \phi\{(\log y - \mu)/\sigma\} y^{-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu)/\sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ } \delta = (\mu + 1/\lambda)/\sigma$$

รูปแบบการแจกแจงลอกนอร์มัลวงนัยทั่วไป

การพิจารณารูปแบบการแจกแจงลอกนอร์มัลวงนัยทั่วไป พิจารณาได้จากกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจง ซึ่งการแจกแจงลอกนอร์มัลวงนัยทั่วไปมีรูปแบบดังนี้

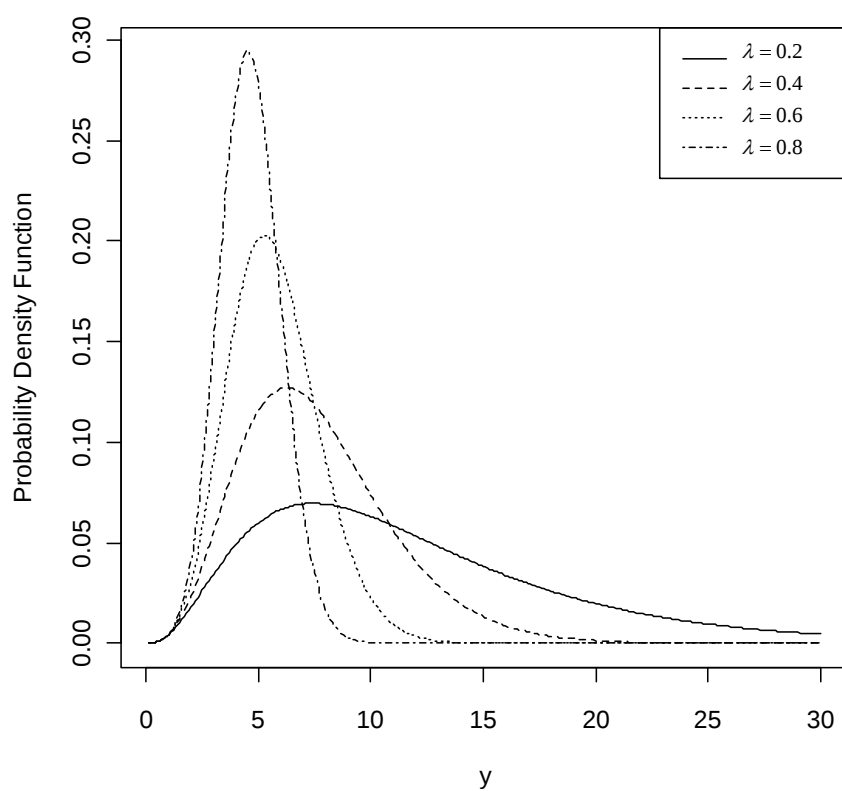
การแจกแจงลอกนอร์มัลวงนัยทั่วไป แบ่งออกเป็น 2 ลักษณะคือกรณี λ เป็นบวก และกรณี λ เป็นลบ

กรณีที่ 1 λ มีค่าเป็นบวก

เมื่อพิจารณาในกรณีที่ λ มีค่าเป็นบวก พบว่าสามารถพิจารณารูปแบบของการแจกแจงลอกนอร์มัลวงนัยทั่วไปได้ 3 กรณี คือ

1.1 กรณี $\lambda < 1$

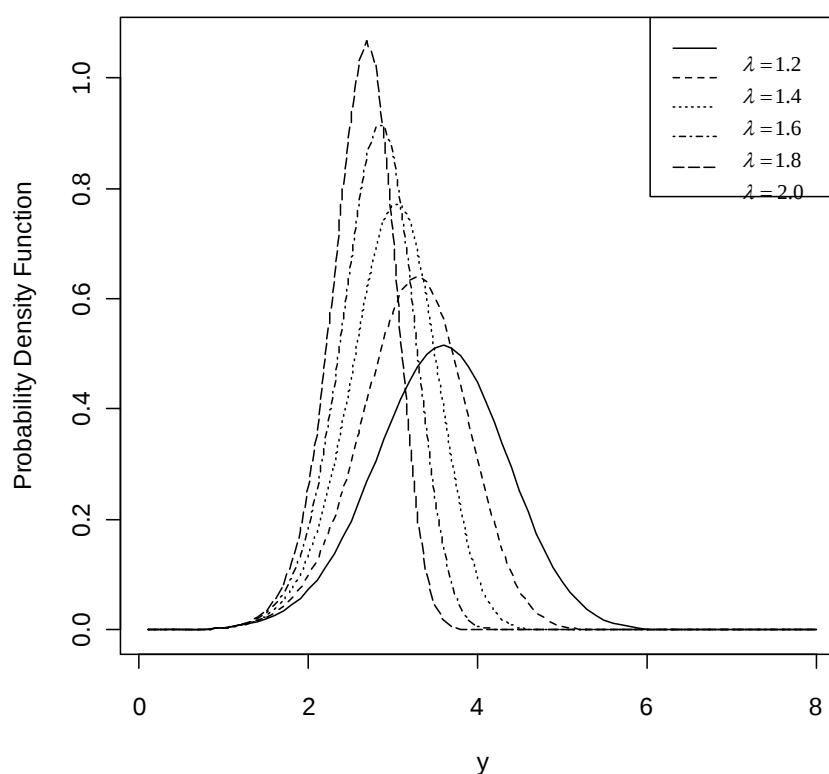
การแจกแจงลอกนอร์มัลวงนัยทั่วไป เมื่อกำหนดให้ $\lambda < 1$ กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นจะมีลักษณะเบ้ขวา (skewed of the right) โดยที่กราฟของการแจกแจงที่มีค่า λ น้อยกว่าจะเบ้มากกว่าการแจกแจงที่มีค่า λ มากกว่า ดังแสดงได้ดังภาพที่ 12



ภาพที่ 12 เส้นโค้งการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

1.2 กรณี $\lambda > 1$

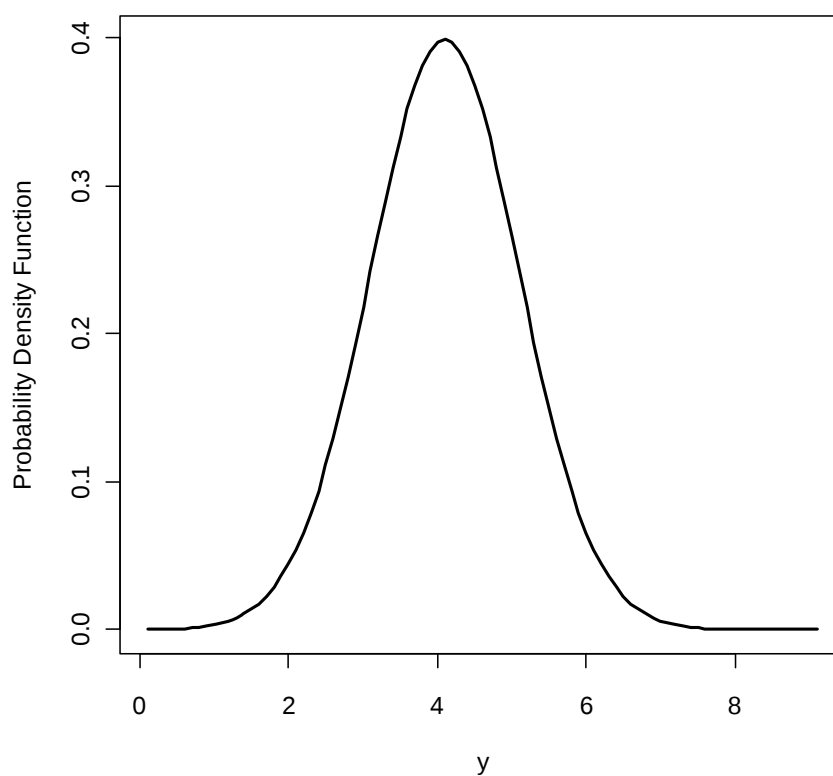
การแจกแจงลอการิธึมผกผันจะน้อยไป เมื่อกำหนดให้ $\lambda > 1$ กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นจะมีลักษณะเบ้ซ้าย (skewed of the left) โดยที่กราฟของการแจกแจงที่มีค่า λ น้อย จะเบ้มากกว่าการแจกแจงที่มีค่า λ มากกว่า ดังแสดงได้ดังภาพที่ 13



ภาพที่ 13 เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$

1.3 กรณี $\lambda = 1$

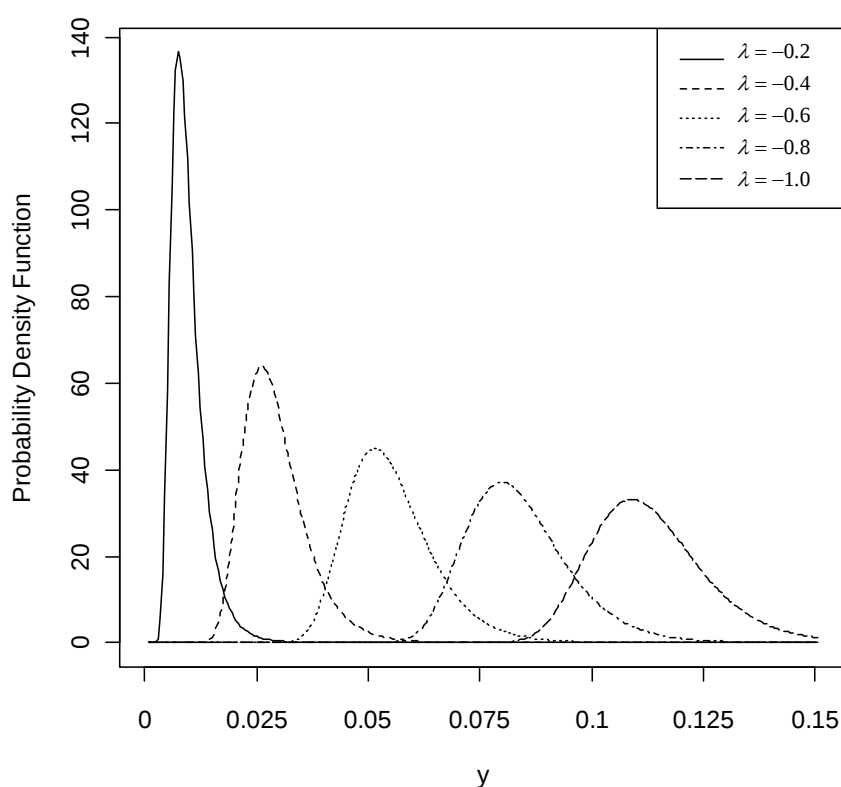
การแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 1$ จะเป็นการแจกแจงปกติดังแสดงได้ดังภาพที่ 14



ภาพที่ 14 เส้นโค้งของการแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 1$

กรณีที่ 2 λ มีค่าเป็นลบ

การแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อกำหนดให้ λ มีค่าเป็นลบ กราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นจะมีลักษณะเบ้ขวา (skewed of the right) ดังแสดงได้ดังภาพที่ 15



ภาพที่ 15 เส้นโค้งการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8$, $\sigma = 1$ และ

$$\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$$

การศึกษาคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป

การศึกษาคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปในงานวิจัยนี้จะศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม โมเมนต์ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ ความโด่ง สถิติอันดับ การสร้างตัวแปรสุ่ม การประมาณค่าพารามิเตอร์ และการทดสอบสารูปสถิติ

โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุด ส่วนการทดสอบสารูปสถิติจะใช้ตัวสถิติทดสอบของ Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov

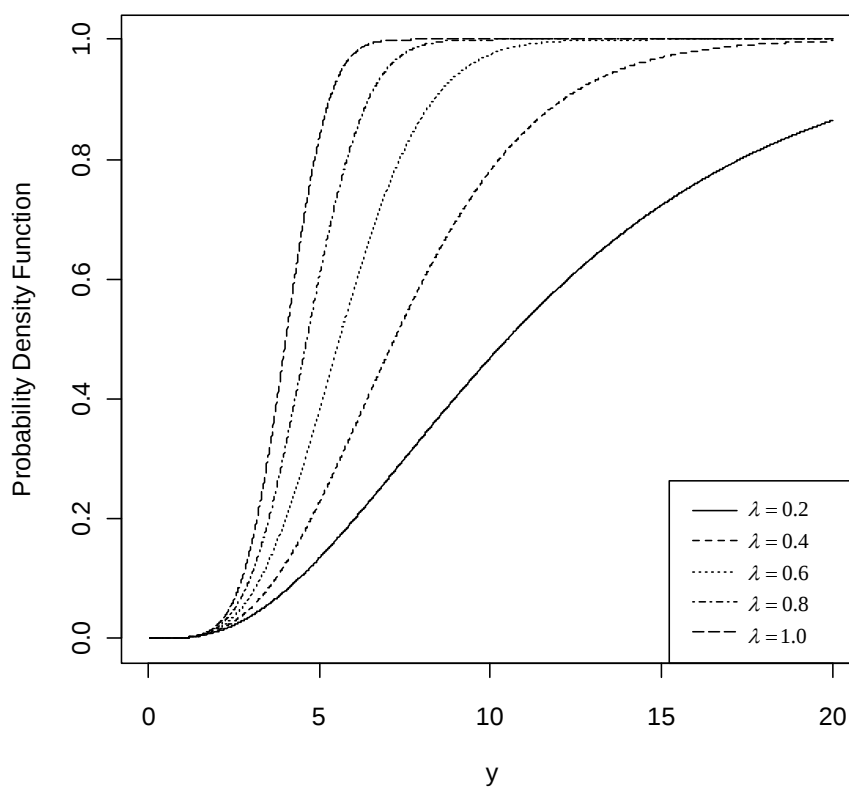
ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Distribution Function) ของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป

จากฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปสามารถหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมได้ดังนี้ คือ (Chen, 1995)

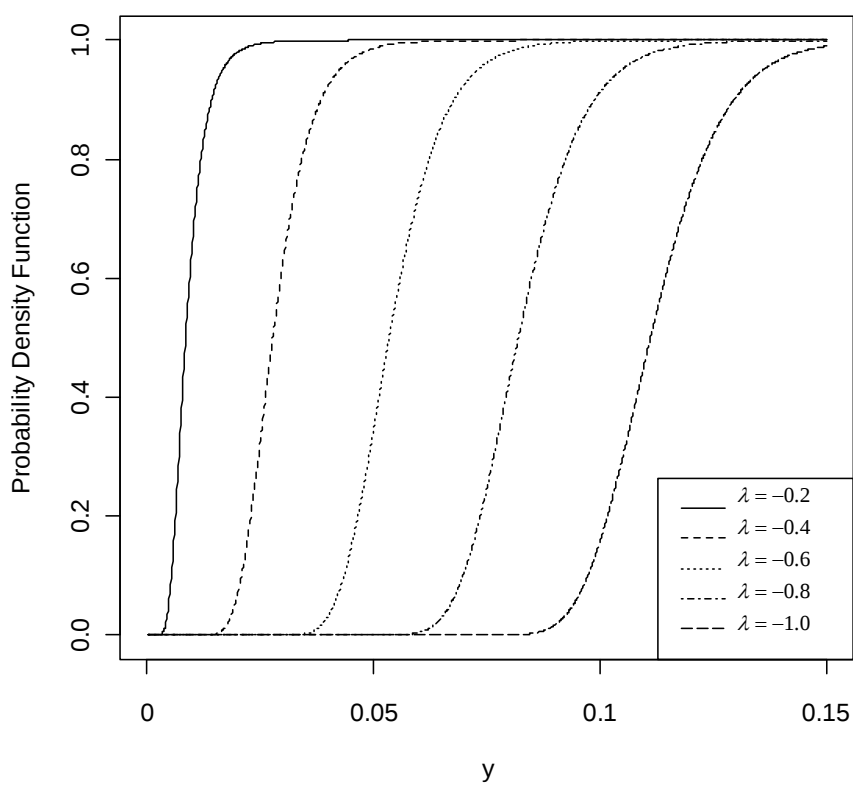
$$F(y; \theta) = F(y; \lambda; \mu; \sigma^2) = \begin{cases} \{\Phi(\delta(y)) + \Phi(\delta) - 1\} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \Phi[(\log y - \mu) / \sigma] & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \Phi(\delta(y)) / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $\delta(y) = ((y(\lambda) - \mu) / \sigma)$ และ $y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda$

โดยฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 16 และ 17



ภาพที่ 16 เส้นโค้งของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับค่า $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$



ภาพที่ 17 เส้นโค้งของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับค่า $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.7, -0.8, -1.0$

โมเมนต์ (Moment) ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

การแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป จะมีโมเมนต์ที่ k รอบจุดกำเนิดดังนี้ (Chen, 1995)

$$E(Y^k) = \begin{cases} \int_{-\delta}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma y)]^{k/\lambda} dy & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \exp(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2) & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \int_{-\infty}^{-\delta} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma y)]^{k/\lambda} dy & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

การแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป จะมีโมเมนต์ที่ k รอบค่าเฉลี่ยดังนี้

$$E\{y - E(Y)\}^k = \begin{cases} \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^k \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^k \sigma^{-1} \phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} y^{-1} dy & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^k \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) dy & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ } y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda \text{ และ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

จากโมเมนต์ที่ k รอบจุดกำเนิด สามารถหาค่าโมเมนต์รอบจุดกำเนิดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ได้ดังตารางที่ 1 และตารางที่ 2

ตารางที่ 1 ค่าประมาณโมเมนต์ที่ 1, 2, 3 และ 4 รอบจุดกำเนิดของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัย
ทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$

(μ, σ, λ)	$E(Y)$	$E(Y^2)$	$E(Y^3)$	$E(Y^4)$
(3,1,0.2)	12.162	205.524	4576.816	129433.200
(3,1,0.4)	7.622	69.417	732.019	8752.980
(3,1,0.6)	5.705	36.493	256.574	1956.273
(3,1,0.8)	4.657	23.520	127.016	726.789
(3,1,1.0)	4.000	17.000	76.000	355.000
(3,1,1.2)	3.549	13.208	51.148	205.049
(3,1,1.4)	3.221	10.778	37.251	132.419
(3,1,1.6)	2.971	9.111	28.694	92.517
(3,1,1.8)	2.774	7.906	23.040	68.496
(3,1,2.0)	2.615	7.000	19.097	52.999

ตารางที่ 2 แสดงค่าประมาณโมเมนต์ที่ 1, 2, 3 และ 4 ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ
 $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	$E(Y)$	$E(Y^2)$	$E(Y^3)$	$E(Y^4)$
(-8,1,-0.2)	0.009231	0.000030	-	-
(-8,1,-0.4)	0.028825	0.000884	-	-
(-8,1,-0.6)	0.054742	0.003095	0.000181	-
(-8,1,-0.8)	0.083338	0.007083	0.000614	0.000060
(-8,1,-1.0)	0.112537	0.012833	0.001484	0.000174

จากโมเมนต์ที่ k รอบค่าเฉลี่ย สามารถหาค่าโมเมนต์รอบค่าเฉลี่ยของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ได้ดังตารางที่ 3 และตารางที่ 4

ตารางที่ 3 ค่าโมเมนต์ที่ 2, 3 และ 4 รอบค่าเฉลี่ยของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$

พารามิเตอร์	$E[Y - E(Y)]^2$	$E[Y - E(Y)]^3$	$E[Y - E(Y)]^4$
(3,1,0.2)	57.596	676.074	23538.690
(3,1,0.4)	11.309	30.435	505.348
(3,1,0.6)	3.945	3.348	49.882
(3,1,0.8)	1.826	0.451	10.000
(3,1,1.0)	0.999	0.002	2.989
(3,1,1.2)	0.610	-0.067	1.149
(3,1,1.4)	0.402	-0.066	0.523
(3,1,1.6)	0.281	-0.054	0.269
(3,1,1.8)	0.205	-0.042	0.152
(3,1,2.0)	0.155	-0.032	0.091

ตารางที่ 4 ค่าโมเมนต์ที่ 2, 3 และ 4 ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$

พารามิเตอร์	$E[Y - E(Y)]^2$	$E[Y - E(Y)]^3$	$E[Y - E(Y)]^4$
(-8,1,-0.2)	1.537×10^{-5}	9.657×10^{-8}	1.921×10^{-9}
(-8,1,-0.4)	5.367×10^{-5}	4.285×10^{-7}	1.201×10^{-8}
(-8,1,-0.6)	9.870×10^{-5}	1.187×10^{-6}	4.149×10^{-8}
(-8,1,-0.8)	1.385×10^{-4}	6.695×10^{-7}	1.316×10^{-7}
(-8,1,-1.0)	1.690×10^{-4}	1.022×10^{-6}	6.191×10^{-8}

ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงลอกกอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = E(Y)$$

$$\text{โดยที่} \quad E(Y) = \int_{-\delta}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma y)]^{k/\lambda} dy$$

$$\text{เมื่อ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

ความแปรปรวนของการแจกแจงลอกกอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

$$\text{ความแปรปรวน} = E\{Y - E(Y)\}^2$$

$$\text{โดยที่} \quad E\{Y - E(Y)\}^2 = \int_0^{\infty} \{Y - E(Y)\}^2 \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy$$

$$\text{เมื่อ } y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda \text{ และ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

ความเบ้ของการแจกแจงลอกกอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

$$\text{สัมประสิทธิ์ความเบ้}(g_1) = \frac{E\{Y - E(Y)\}^3}{[E\{Y - E(Y)\}^2]^{3/2}}$$

$$\text{โดยที่} \quad E\{Y - E(Y)\}^2 = \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^2 \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy$$

$$E\{Y - E(Y)\}^3 = \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^3 \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy$$

$$\text{เมื่อ } y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda \text{ และ } \delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$$

การพิจารณาลักษณะของเส้นโค้ง จากสัมประสิทธิ์ความเบ้มีดังนี้

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (g_1) = 0 จะได้เส้นโค้งแบบสมมาตร

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (g_1) > 0 จะได้เส้นโค้งที่มีลักษณะเบ้ขวา

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (g_1) < 0 จะได้เส้นโค้งที่มีลักษณะเบ้ซ้าย

ความโค้งของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป

$$\text{สัมประสิทธิ์ความโค้ง}(g_2) = \frac{E\{Y - E(Y)\}^4}{[E\{Y - E(Y)\}^2]^2} - 3$$

$$\text{โดยที่} \quad E\{Y - E(Y)\}^2 = \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^2 \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy$$

$$E\{Y - E(Y)\}^4 = \int_0^{\infty} \{y - E(Y)\}^4 \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy$$

$$\text{เมื่อ } y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda \text{ และ } \delta = (\mu + 1 / \lambda) / \sigma$$

จากสัมประสิทธิ์ความโค้ง จะตีความลักษณะเส้นโค้งดังนี้

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโค้ง (g_2) = 0 จะได้เส้นโค้งที่มีความโค้งเป็นปกติ

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโค้ง (g_2) > 0 จะได้เส้นโค้งที่โค้งกว่าปกติ

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโค้ง (g_2) < 0 จะได้เส้นโค้งที่แบนราบกว่าปกติ

สามารถคำนวณค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน สัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโด่ง
แสดงได้ดังนี้

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่งของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป
เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$

พารามิเตอร์	ค่าเฉลี่ย	ความแปรปรวน	ความเบ้	ความโด่ง
(3,1,0.2)	12.162	57.596	1.546	4.095
(3,1,0.4)	7.622	11.309	0.800	0.951
(3,1,0.6)	5.705	3.945	0.427	0.203
(3,1,0.8)	4.657	1.826	0.183	-0.002
(3,1,1.0)	4.000	0.999	0.002	-2.997
(3,1,1.2)	3.549	0.610	-0.141	0.084
(3,1,1.4)	3.221	0.402	-0.260	0.226
(3,1,1.6)	2.971	0.281	-0.362	0.398
(3,1,1.8)	2.774	0.205	-0.451	0.587
(3,1,2.0)	2.615	0.155	-0.529	0.787

จากตารางที่ 5 จะเห็นได้ว่าการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปเมื่อ λ มีค่าเพิ่มมากขึ้น จะ
ทำให้ค่าเฉลี่ยลดลง และมีความแปรปรวนลดลงด้วยเช่นกัน

จะพบว่าการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่มี $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ มีค่า
สัมประสิทธิ์ความเบ้เป็นค่าบวก นั่นคือการแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวา โดยเมื่อ λ มีค่าน้อย จะเบ้
มากกว่าการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่ λ มีค่ามากกว่า แต่การแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัย
ทั่วไปที่มี $\lambda = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ มีค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เป็นค่าลบ นั่นคือการแจกแจงมี
ลักษณะเบ้ซ้าย โดยเมื่อ λ มีค่าน้อยจะเบ้น้อยกว่าการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่ λ มีค่า
มากกว่า

การแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป ที่มี $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6$ มีค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเป็น
ค่าบวก นั่นคือการแจกแจงมีความโด่งมากกว่าปกติ แต่ในกรณีที่ $\lambda = 0.8, 1.0$ มีค่าสัมประสิทธิ์
ความโด่งเข้าใกล้ค่า 0 ซึ่งแสดงว่าโค้งเข้าใกล้การแจกแจงปกติ

ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน ความเบ้ และความโด่งของการแจกแจงลอนอร์มัลวงนัยทั่วไป
เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$

พารามิเตอร์	ค่าเฉลี่ย	ความแปรปรวน	ความเบ้	ความโด่ง
$(-8, 1, -0.2)$	0.009	1.537×10^{-5}	2.471	11.491
$(-8, 1, -0.4)$	0.028	5.367×10^{-5}	1.937	5.980
$(-8, 1, -0.6)$	0.054	9.870×10^{-5}	2.879	10.521
$(-8, 1, -0.8)$	0.083	1.385×10^{-4}	0.410	3.852
$(-8, 1, -1.0)$	0.112	1.690×10^{-4}	6.802	74.582

จากตารางที่ 6 พบว่าการแจกแจงลอนอร์มัลวงนัยทั่วไปเมื่อ λ มีค่าเพิ่มมากขึ้น จะทำให้ค่าเฉลี่ยลดลง และค่าความแปรปรวนลดลงด้วยเช่นกัน และค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เป็นค่าบวกทุกกรณี แสดงว่าการแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวา สำหรับสัมประสิทธิ์ความโด่งมีค่าเป็นบวกทุกกรณี แสดงว่าการแจกแจงลอนอร์มัลวงนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ดังกล่าวมีความโด่งมากกว่าการแจกแจงปกติ

สถิติอันดับ (Order Statistics) ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

ให้ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ เป็นสถิติอันดับของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสำหรับสถิติอันดับที่ 1 หรือ y_1 สำหรับการแจกแจงนี้ (Casella and Berger, 2002) คือ

$$g_1(y_1) = \begin{cases} \frac{n\sigma^{-1}\phi\{\delta(y)\} y^{\lambda-1} [1 - \Phi\{\delta(y)\}]^{n-1}}{[\Phi(\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ n\sigma^{-1}\phi\{\delta(y)\} y^{-1} [1 - \Phi\{\delta(y)\}]^{n-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \frac{n\sigma^{-1}\phi\{\delta(y)\} y^{\lambda-1} [\Phi(-\delta) - \Phi\{\delta(y)\}]^{n-1}}{[\Phi(-\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $\delta(y) = \{y(\lambda) - \mu\} / \sigma$ และ $\delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสำหรับสถิติอันดับที่ n หรือ y_n สำหรับการแจกแจงนี้ คือ

$$g_n(y_n) = \begin{cases} \frac{n\sigma^{-1}\phi\{\delta(y)\} y^{\lambda-1} [\Phi\{\delta(y)\} + \Phi(\delta) - 1]^{n-1}}{[\Phi(\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ n\sigma^{-1}\phi\{\delta(y)\} y^{-1} [\Phi\{\delta(y)\}]^{n-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \frac{n\sigma^{-1}\phi\{\delta(y)\} y^{\lambda-1} [\Phi\{\delta(y)\}]^{n-1}}{[\Phi(-\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $\delta(y) = \{y(\lambda) - \mu\} / \sigma$ และ $\delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$

การสร้างตัวแปรสุ่มของแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

การสร้างตัวแปรสุ่มลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป Y โดยที่ทราบฟังก์ชันการแจกแจงของ $X = (Y^\lambda - 1)/\lambda$ ว่ามีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ขั้นตอนในการสร้างตัวแปรสุ่ม Y มีขั้นตอนดังนี้ (Gupta and Lvin, 1991)

ขั้นที่ 1 สร้างตัวแปรสุ่ม X ให้มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2

ขั้นที่ 2 สร้าง Y

$$\begin{aligned} X &= \frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ Y^\lambda - 1 &= \lambda \cdot X \\ Y^\lambda &= 1 + \lambda \cdot X \\ Y &= (1 + \lambda \cdot X)^{1/\lambda} \end{aligned}$$

จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ λ, μ และ σ

การสร้างตัวแปรสุ่มของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป โดยใช้โปรแกรม R

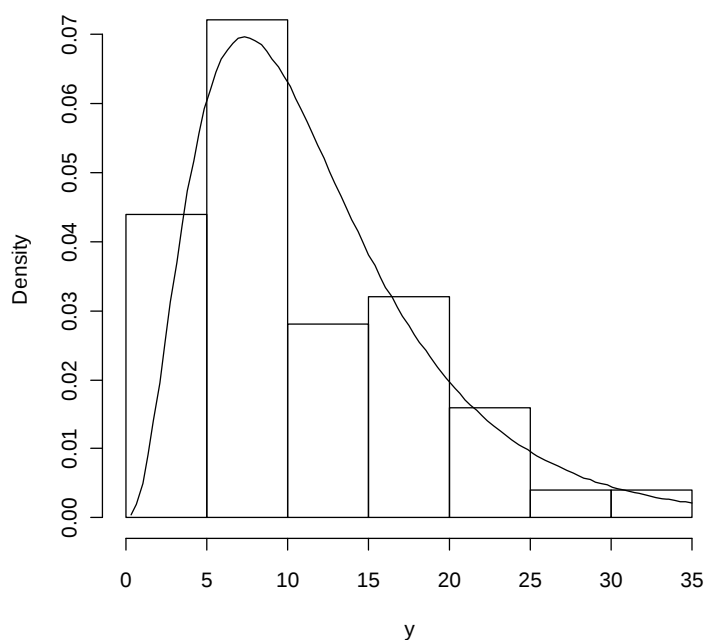
การสร้างตัวแปรสุ่มของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป จำนวน 50 ค่า ด้วยพารามิเตอร์ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$ โดยใช้โปรแกรม R แสดงได้ดังนี้

```
rglnm=function(n,mu,sigma,lambda){
  x=rnorm(n,mu,sigma)
  y=((x*lambda)+1)^(1/lambda)
  print(y)
}
rglnm(50,3,1,0.2)
```

จากโปรแกรมข้างต้นได้ค่าตัวแปรสุ่มลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปดังนี้

[1] 40.046239 4.026861 4.725206 3.857108 2.366267 16.967870 6.194183
 [8] 22.500046 8.617837 13.190380 11.848093 8.769868 12.144703 10.727382
 [15] 4.952683 10.444496 10.324635 6.330677 13.323108 27.428462 20.645220
 [22] 11.131357 16.795319 13.626500 6.051954 3.135691 6.608644 6.377022
 [29] 12.999703 17.562021 1.667655 10.897207 10.107516 5.930675 10.796274
 [36] 9.617712 4.580916 9.217537 15.737188 9.485245 23.501628 5.190754
 [43] 22.583438 7.899091 10.678463 10.354317 39.889319 4.039536 10.386053
 [50] 12.150030

จากค่าของตัวแปรสุ่มที่สร้างได้นี้เขียนฮิสโตแกรมได้ดังภาพที่ 18



ภาพที่ 18 ฮิสโตแกรมของข้อมูลจากการจำลอง และโค้งของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป
 เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$

จากฮิสโตแกรมและเส้นโค้งของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป พบว่าข้อมูลจากการจำลองสอดคล้องกับโค้งการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด
(Maximum Likelihood Estimation)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัวของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป คือ λ, μ และ σ โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

ให้ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป และ L คือ Log-Likelihood Function ของตัวแปรสุ่มแสดงดังนี้ (Chen, 1995)

$$L = \begin{cases} -n \log \sigma - (2\sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n \{(y_i^\lambda - 1) / \lambda - \mu\}^2 + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i - n \log \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ -n \log \sigma - (2\sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n (\log y_i - \mu)^2 - \sum_{i=1}^n \log y_i & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ -n \log \sigma - (2\sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n \{(y_i^\lambda - 1) / \lambda - \mu\}^2 + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i - n \log \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

และหา Likelihood Equations กรณี $\lambda > 0$ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = (\sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n \{(y_i^\lambda - 1) / \lambda - \mu\} - n[\phi(\delta) / \Phi(\delta)][1 / \sigma]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + (\sigma^3)^{-1} \sum_{i=1}^n \{(y_i^\lambda - 1) / \lambda - \mu\}^2 + n[\phi(\delta) / \Phi(\delta)][\delta / \sigma]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & -(\lambda^2 \sigma^2)^{-1} \sum_{i=1}^n \{(y_i^\lambda - 1) / \lambda - \mu\} \{ \lambda y_i^\lambda \log y_i - y_i^\lambda + 1 \} + n[\phi(\delta) / \Phi(\delta)][1 / \lambda^2 \sigma] \\ & + \sum_{i=1}^n \log y_i \end{aligned}$$

เนื่องจากไม่สามารถแก้สมการเพื่อหาค่าได้โดยตรง ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical method) เพื่อการประมาณค่า โดยในที่นี้ใช้วิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection Method)

สมการที่จะใช้ในการประมาณค่า λ คือ (Chen, 1995)

$$l(\lambda) = -n \log \tilde{\sigma}^2 - (n/2) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i$$

โดยที่ $n \tilde{\sigma}^2(\lambda) = \sum_{i=1}^n \{y_i(\lambda) - \bar{y}(\lambda)\}^2$, $\bar{y}(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i(\lambda)$ และ $y_i(\lambda) = (y_i^\lambda - 1) / \lambda$

และสามารถประมาณค่า μ และ σ ได้ดังนี้

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(\hat{\lambda})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i(\hat{\lambda}) - \hat{\mu})^2$$

การประมาณค่า λ ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขแบบแบ่งครึ่งช่วง

จากข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าชนิดหนึ่ง ซึ่งเก็บรวบรวมโดย Lawless (1982) ปรากฏดังนี้

14	34	59	61	69	80	123	142	165	210
381	464	479	556	574	839	917	969	991	1064
1088	1091	1174	1270	1275	1355	1397	1477	1578	1649
1702	1893	1932	2001	2161	2292	2326	2337	2628	2785
2811	2886	2993	3122	3248	3715	3790	3857	3912	4100
4106	4116	4315	4510	4586	5267	5299	5583	6065	9701

สมการที่จะใช้ในการประมาณค่า คือ

$$l(\lambda) = -(n/2) \log \tilde{\sigma}^2(\lambda) - (n/2) + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i$$

โดยที่ $n\tilde{\sigma}^2(\lambda) = \sum_{i=1}^n \{y_i(\lambda) - \bar{y}(\lambda)\}^2$, $\bar{y}(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i(\lambda)$ และ $y_i(\lambda) = (y_i^\lambda - 1) / \lambda$

ดังนั้น $\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{-n}{\tilde{\sigma}^2(\lambda)} \sum_{i=1}^n \{y_i(\lambda) - \bar{y}(\lambda)\} \{ \lambda y_i^\lambda \log y_i - y_i^\lambda + 1 \} / \lambda^2 + \sum \log y_i = 0$

ให้ $f(w) = \frac{-n}{\tilde{\sigma}^2(\lambda)} \sum_{i=1}^n \{w_i(\lambda) - \bar{w}(\lambda)\} \{ \lambda w_i^\lambda \log w_i - w_i^\lambda + 1 \} / \lambda^2 + \sum \log w_i$

เลือกช่วงที่จะใช้คือ $[0.2, 0.4]$

นั่นคือกำหนด $a_1 = 0.2$ และ $b_1 = 0.4$

พิจารณา $f(a_1) = f(0.2) = 22.58730$

$$f(b_1) = f(0.4) = -1.476468$$

เนื่องจาก $f(a_1)f(b_1) < 0$ ดังนั้น $\lambda \in (0.2, 0.4)$

และจะได้ $w_1 = \frac{0.2+0.4}{2} = 0.3$

จากนั้นทำต่อไปจนได้ $w_2, w_3, w_4, \dots, w_n$ ดังแสดงได้ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ โดยวิธีการแบ่งครึ่งช่วงของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า

n	a_n	b_n	w_n	$f(w_n)$
1	0.200000000	0.400000000	0.300000000	9.950057000
2	0.300000000	0.400000000	0.350000000	4.084924000
3	0.350000000	0.400000000	0.375000000	1.266437000
4	0.375000000	0.400000000	0.387500000	-0.114427500
5	0.375000000	0.387500000	0.381250000	0.573646700
6	0.381250000	0.387500000	0.384375000	0.229020700
7	0.384375000	0.387500000	0.385937500	0.057149480
8	0.385937500	0.387500000	0.386718750	-0.028675770
9	0.385937500	0.386718750	0.386328125	0.014227660
10	0.386328125	0.386718750	0.386523437	-0.007226297

จากตารางที่ 7 ได้ค่าประมาณของ λ เท่ากับ 0.386523437 นำมาประมาณค่า μ และ σ จากสมการ

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(\hat{\lambda})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i(\hat{\lambda}) - \hat{\mu})^2$$

จะได้ค่าประมาณของ μ และ σ ดังตารางที่ 8

ตารางที่ 8 ค่าประมาณพารามิเตอร์ของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าเมื่อมีการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

พารามิเตอร์	λ	μ	σ
ค่าประมาณ	0.3865	42.4098	18.1633

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอกลอนนอร์มัลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด โดยใช้โปรแกรม R

การใช้โปรแกรม R เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด โดยสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกลอนนอร์มัลวางนัยทั่วไป ที่มี $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$ จำนวน 1000 ค่า แล้วหาค่าตัวประมาณเพื่อเปรียบเทียบกับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง

```
mle_glnm=function(n,mu,sigma,lambda){
  x=rnorm(n,mu,sigma)
  y=(1+(lambda*x))^(1/lambda)

  wl=function (mu,sigma,lambda)
  {
    L=-(-(n/2)*log(2*pi))+((-n/2)*log(sigma))-
    ((1/(2*sigma))*sum((((y^lambda)-1)/lambda)-mu)^2)))+((lambda-
    1)*sum(log(y))))
  }

  library(stats4)
  e<-mle(minuslogl=wl, start=list(mu=3, sigma=1, lambda=0.2), method="CG")
  summary(e)
}
mle_glnm(1000,3,1,0.2)
```

จากโปรแกรมข้างต้น ได้ผลลัพธ์ดังนี้

Maximum likelihood estimation

Call:

```
mle(minuslogl = wl, start = list(mu = 3, sigma = 1, lambda = 0.2),
    method = "CG")
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error
mu	2.9398081	0.15880622
sigma	0.9076983	0.16894825
lambda	0.1795872	0.03884829

-2 log L: 6555.442

จากผลลัพธ์จะได้ค่าประมาณของพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว จากข้อมูลที่จำลองมา 1000 ค่า ดังตารางที่ 9

ตารางที่ 9 ค่าประมาณและความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปโดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

พารามิเตอร์	ค่าจริง	ค่าประมาณ	ค่าคลาดเคลื่อน
μ	3	2.9398081	0.15880622
σ	1	0.9076983	0.16894825
λ	0.2	0.1795872	0.03884829

ซึ่งจะเห็นว่าค่าประมาณของพารามิเตอร์ทั้งสามตัว มีค่ากับใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่แท้จริง

เพื่อให้การประมาณค่าด้วยวิธีนี้มีความน่าเชื่อถือ ดังนั้นจึงทำการประมาณค่าหลายๆ รอบ เพื่อดูความแม่นยำ โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่าความคลาดเคลื่อน(MSE)

$$\text{เมื่อ ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i}{N}$$

$$\text{และ ค่าความคลาดเคลื่อน } MSE(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N (\theta - \hat{\theta}_i)^2}{N}$$

โดยที่ θ เป็นค่าพารามิเตอร์ที่สนใจ

$\hat{\theta}_i$ เป็นค่าประมาณของพารามิเตอร์ ในการทำซ้ำครั้งที่ i

N เป็นจำนวนรอบของการทำซ้ำ

ในงานวิจัยนี้จะหาค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยสร้างตัวแปรสุ่มลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปครั้งละ 100 ค่า จำนวน 1000 ครั้ง

การหาค่าความคลาดเคลื่อนของประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

โดยสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป ที่มี $\mu=3, \sigma=1$ และ $\lambda=0.2$ จำนวน 100 ค่า ทำการประมาณค่าโดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด จำนวน 1000 รอบ แล้วหาค่าเฉลี่ยของค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าความคลาดเคลื่อน (MSE)

```
mse_glnm=function(m,n,mu,sigma,lambda){
  wl=function (mu,sigma,lambda)
  {
    w<-y
    L=-(-(n/2)*log(2*pi)+((-n)*log(sigma))-
      ((1/(2*(sigma^2)))*sum((((w^lambda)-1)/lambda)-mu)^2)))+((lambda-
      1)*sum(log(w))))
  }
  ahat<-rep(0,m)
  bhat<-rep(0,m)
  lhat<-rep(0,m)
  for(j in 1:m){
    x=rnorm(n,mu,sigma)
    y=(1+(lambda*x))^(1/lambda)
    library(stats4)
    est<-mle(minuslogl=wl,start=list(mu=3,sigma=1,lambda=0.2),
      method="CG")
    ahat[j]<-coef(est)[1]
    bhat[j]<-coef(est)[2]
    lhat[j]<-coef(est)[3]}
  av_mu<-sum(ahat)/m
  av_sigma<-sum(bhat)/m
  av_lambda<-sum(lhat)/m
  MSE_mu<-sum((mu-ahat)^2)/m
  MSE_sigma<-sum((sigma-bhat)^2)/m
  MSE_lambda<-sum((lambda-lhat)^2)/m
  print(av_mu)
  print(av_sigma)
  print(av_lambda)
  print(MSE_mu)
  print(MSE_sigma)
  print(MSE_lambda)
}
mse_glnm(1000,100,3,1,0.2)
```

จากโปรแกรมข้างต้น ได้ผลลัพธ์ดังนี้

[1] 2.991228
 [1] 0.9937096
 [1] 0.1953053
 [1] 0.0950507
 [1] 0.02888832
 [1] 0.005759738

จากผลลัพธ์จะได้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัวของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด จากการสร้างตัวแปรสุ่ม 100 ค่า จำนวน 1000 รอบ แสดงได้ดังตารางที่ 10

ตารางที่ 10 ค่าเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อน (MSE) ของการประมาณค่าพารามิเตอร์

พารามิเตอร์	μ	σ	λ
ค่าจริง	3	1	0.2
ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ	2.991228	0.9937096	0.1953053
ค่าความคลาดเคลื่อน	0.0950507	0.02888832	0.0057597

จากตารางที่ 10 เห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยของตัวประมาณของพารามิเตอร์ทั้งสามตัวใกล้เคียงกับค่าจริงมาก และค่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ตัว มีค่าค่อนข้างน้อย ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าประมาณมีค่าใกล้เคียงค่าพารามิเตอร์ในระดับที่ยอมรับได้

ตารางที่ 11-18 แสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ และค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสามตัวของการแจกแจงลอการิธึมด้วยวิธีความควรจะเป็น 2 กรณี คือ กรณี λ มีค่าเป็นบวก และกรณี λ มีค่าเป็นลบ โดยการจำลองข้อมูลครั้งละ 20, 50, 100 และ 200 ค่า เป็นจำนวน 1000 รอบ

ตารางที่ 11 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 20$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(3,1,0.2)	3.005321	0.9577901	0.1850293	0.3930897	0.1148439	0.02218439
(3,1,0.4)	2.964182	0.9574753	0.3834156	0.2096324	0.07796121	0.01963169
(3,1,0.6)	3.015679	0.9711573	0.5870742	0.4164627	0.1518483	0.03990116
(3,1,0.8)	3.033552	0.9863764	0.7797249	0.569792	0.1639765	0.06121929
(3,1,1.0)	3.000491	0.9576253	0.9611967	0.6161577	0.1519525	0.0851787

ตารางที่ 12 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 20$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(-8,1,-0.2)	-8.006415	0.9623614	-0.2005460	0.0007274	0.0163631	0.0000946
(-8,1,-0.4)	-8.005456	0.9706593	-0.4009139	0.0061648	0.0227788	0.0001785
(-8,1,-0.6)	-8.010415	0.9739575	-0.6008682	0.0120187	0.0250119	0.0002576
(-8,1,-0.8)	-8.007929	0.9705592	-0.800471	0.0595194	0.0299034	0.0005722
(-8,1,-1.0)	-8.004296	0.9592984	-1.000868	0.0504447	0.0270110	0.0007082

ตารางที่ 13 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 50$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(3,1,0.2)	3.026622	0.9953534	0.1974016	0.203802	0.0705272	0.0107044
(3,1,0.4)	2.978930	0.9693024	0.3791593	0.2328342	0.0680744	0.0193660
(3,1,0.6)	3.001846	0.9890934	0.5857736	0.283455	0.0953939	0.0275435
(3,1,0.8)	3.068306	1.016388	0.7892877	0.544299	0.1369921	0.0539838
(3,1,1.0)	3.011762	0.9859427	0.9707111	0.4874317	0.1071454	0.0653687

ตารางที่ 14 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 50$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(-8,1,-0.2)	-8.00365	0.9745693	-0.200046	0.0021100	0.0088632	0.0000421
(-8,1,-0.4)	-7.996733	0.9879903	-0.399747	0.0262954	0.0104279	0.0001440
(-8,1,-0.6)	-8.003609	0.9839402	-0.600357	0.0016677	0.0085580	0.0000911
(-8,1,-0.8)	-8.003057	0.9939025	-0.800303	0.0029925	0.0095510	0.0001182
(-8,1,-1.0)	-8.00166	0.9860725	-0.999743	0.0079545	0.0104617	0.0001812

ตารางที่ 15 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 100$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(3,1,0.2)	2.994151	0.9921943	0.1943235	0.1088161	0.0324640	0.0067109
(3,1,0.4)	2.996441	0.9903971	0.3988963	0.0211445	0.0105595	0.0019363
(3,1,0.6)	3.015037	0.9989412	0.6017236	0.0642689	0.0248333	0.0065684
(3,1,0.8)	2.997658	1.0103971	0.7985670	0.0415645	0.0439760	0.0032586
(3,1,1.0)	3.018054	0.9989412	0.9909564	0.0548701	0.0248333	0.0034768

ตารางที่ 16 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 100$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(-8,1,-0.2)	-8.000903	0.9947358	-0.200044	0.0000889	0.0019679	0.0001880
(-8,1,-0.4)	-7.998816	0.9921117	-0.399944	0.0123867	0.0053778	0.0007286
(-8,1,-0.6)	-8.00174	0.9935212	-0.600501	0.0036029	0.0042926	0.0005224
(-8,1,-0.8)	-8.004351	0.9943685	-0.800583	0.0277928	0.0063530	0.0002061
(-8,1,-1.0)	-7.999532	0.9918227	-1.000202	0.0393129	0.0060362	0.0003244

ตารางที่ 17 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 3, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ โดยที่ $n = 200$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(3,1,0.2)	3.000947	0.9974724	0.1961564	0.0791375	0.0242655	0.0045565
(3,1,0.4)	3.002923	0.9964001	0.3990561	0.0411593	0.0148086	0.0030615
(3,1,0.6)	2.985777	0.989881	0.5836998	0.1814999	0.0489927	0.0170108
(3,1,0.8)	2.967474	0.9779243	0.7806022	0.1018028	0.0231345	0.0132484
(3,1,1.0)	3.016442	1.009595	1.004434	0.0279379	0.0109305	0.0044719

ตารางที่ 18 ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควร
จะเป็นสูงสุดของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = -8, \sigma = 1$ และ
 $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$ โดยที่ $n = 200$

พารามิเตอร์ (μ, σ, λ)	ค่าเฉลี่ยของ			MSE ของ		
	μ	σ	λ	μ	σ	λ
(-8,1,-0.2)	-8.00279	1.001796	-0.200238	0.0086610	0.0024968	0.0000221
(-8,1,-0.4)	-8.00053	0.9960873	-0.399929	0.0000808	0.0019434	0.0000147
(-8,1,-0.6)	-8.000792	0.995036	-0.599995	0.0000706	0.0018275	0.0000213
(-8,1,-0.8)	-8.001978	0.9968303	-0.800016	0.0024816	0.0025655	0.0000414
(-8,1,-1.0)	-8.005345	0.9976434	-1.000459	0.0193444	0.0033370	0.0001534

จากตารางที่ 11-18 พบว่า การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด สำหรับพารามิเตอร์ μ, σ และ λ ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป จะทำให้ค่าเฉลี่ยของ ค่าประมาณพารามิเตอร์ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกๆ ขนาดตัวอย่าง และเมื่อพิจารณาค่า MSE พบว่ามีค่าค่อนข้างน้อย นั้นแสดงว่าการประมาณค่าด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดสามารถใช้ ในประมาณกับการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

การทดสอบสารูปสนิทธิ (Goodness of fit) ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

การทดสอบสารูปสนิทธิในงานวิจัยนี้ จะทดสอบว่าตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวาง นัยทั่วไปหรือไม่ โดยจะใช้ตัวสถิติทดสอบ 2 ชนิดคือ

ตัวสถิติทดสอบของ Anderson Darling

ตัวสถิติทดสอบ A^2 จะอยู่ในรูปดังนี้

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ (2i-1) \log u_i + (2n+1-i) \log(1-u_i) \}$$

เมื่อ u_i แทนความถี่สะสมของค่าสังเกตลำดับที่ i เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

n แทนจำนวนข้อมูล

และ Chen (2005) ได้ดัดแปลง A^2 เพื่อให้ใช้ได้กับการแจกแจงแบบลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปโดยที่

$$A^* = A^2 (1 + 4.2/n - 43/n^2)$$

เกณฑ์การตัดสินใจจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อค่า A^* ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต จากตารางค่าวิกฤตของ Anderson Darling สำหรับการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป (ตาราง ภาคผนวกที่ ข1)

ตัวสถิติทดสอบของ Kolmogorov Smirnov

สถิติทดสอบ Kolmogorov Smirnov อยู่ในรูปดังนี้ (Conover, 1980)

$$KS = \max_{1 \leq i \leq n} \{D^+, D^-\}$$

เมื่อ $D^+ = \sup \{S(X_i) - F_0(X_i)\} = \max \left\{ \frac{i}{n} - F_0(X_i) \right\}$

$$D^- = \sup \{F_0(X_i) - S(X_{i-1})\} = \max \left\{ F_0(X_i) - \frac{(i-1)}{n} \right\}$$

$F_0(x_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมตามการแจกแจงที่คาดหวังไว้ของ x_i ซึ่งมีการเรียงลำดับจากน้อยไปมาก

$S(x_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง

n คือ จำนวนข้อมูล

เกณฑ์การตัดสินใจจะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อค่า KS ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตจากตารางค่าวิกฤตของ Kolmogorov Smirnov (ตารางภาคผนวกที่ ข2)

การทดสอบสารูปสถิติของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยในงานวิจัยนี้ จะศึกษาข้อมูลที่สุ่มมาและจากข้อมูลจริง

การทดสอบสารูปสถิติจากข้อมูลที่สุ่มมา มีขั้นตอนดังนี้

1. สุ่มตัวอย่างที่มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป จำนวน 100 ค่า
2. ประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ค่าสังเกตจากตัวอย่างสุ่ม

3. ทำการทดสอบสารูปสนิทธิ โดยตัวสถิติทดสอบของ Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov

การทดสอบสารูปสนิทธิของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

การทดสอบสารูปสนิทธิสำหรับข้อมูลที่ได้จากตัวแปรสุ่มโดยจำลองค่าตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ที่มี $\mu = 3, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2$ จำนวน 100 ค่า

1. การทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบของ Anderson Darling

```
ad_glnm=function(n,mu,sigma,lambda){
x=rnorm(n,mu,sigma)
y=(1+(lambda*x))^(1/lambda)
wl=function (mu,sigma,lambda)
{
L=-(-(n/2)*log(2*pi))+(-(n/2)*log(sigma))-
((1/(2*sigma))*sum((((y^lambda)-1)/lambda)-mu)^2))+((lambda-
1)*sum(log(y)))
}
library(stats4)
e<-mle(minuslogl=wl,start=list(mu=3,sigma=1,lambda=0.2),method="CG")
summary(e)
mu.hat<-coef(e)[1]
coef(e)[1]
sigma.hat<-coef(e)[2]
coef(e)[2]
lambda.hat<-coef(e)[3]
print(lambda.hat)
n<-length(y)
z=sort(y)
F<-pnorm((((z^lambda.hat)-1)/lambda.hat)-mu.hat)/sigma.hat)
i=1:n
u1<-(2*i)-1
u2<-2*(n-i)+1
k1<-log(F)
k2<-log(1-F)
w<-sum(k1*u1+k2*u2)
A<-n-w/n
A2<-A*(1+4.2/n-43/(n^2))
A2
}
ad_glnm(100,3,1,0.2)
```

ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
mu
2.614329
sigma
0.8177551
lambda
0.146592
[1] 0.3858636
```

จากผลลัพธ์แสดงค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบของ Anderson Darling ได้ดังตารางที่ 19

ตารางที่ 19 ค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบของ Anderson Darling

ค่าประมาณของ μ	ค่าประมาณของ σ	ค่าประมาณของ λ	ค่า A^*
2.614329	0.8177551	0.146592	0.3858636

จากตารางที่ 19 ได้ค่า A^* เท่ากับ 0.3858636 ซึ่งนำมาเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต จะยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ข้อมูลนี้มีการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

2. การทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบของ Kolmogorov Smirnov

```
ks_glnm=function(n,mu,sigma,lambda){
  x=rnorm(n,mu,sigma)
  y=(1+(lambda*x))^(1/lambda)
  wl=function (mu,sigma,lambda)
  {
    L=-(-(n/2)*log(2*pi)+((-n/2)*log(sigma))-
      ((1/(2*sigma))*sum((((y^lambda)-1)/lambda)-mu)^2)))+((lambda-
      1)*sum(log(y))))
  }
  library(stats4)
  e<-mle(minuslogl=wl,start=list(mu=3,sigma=1,lambda=0.2),method="CG")
  summary(e)
  mu.hat<-coef(e)[1]
  coef(e)[1]
  sigma.hat<-coef(e)[2]
  coef(e)[2]
  lambda.hat<-coef(e)[3]
  coef(e)[3]
  delta=(mu.hat+(1/lambda.hat))/sigma.hat
  F<-(pnorm((((x^lambda.hat)-1)/lambda.hat)
    -mu.hat)/sigma.hat))+pnorm(delta)-1)/pnorm(delta)
  n<-length(y)
  z=sort(y)
  i=1:n
  s1<-i/n
  s2<-(i-1)/n
  d1=abs(s1-F)
  m=abs(s2-F)
  ks<-max(d1,m)
  ks
}
ks_glnm(100,3,1,0.2)
```

ได้ผลลัพธ์ดังนี้

```
      mu
3.174614
    sigma
1.434581
    lambda
0.2835203
[1] 0.08061397
```

จากผลลัพธ์แสดงค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบของ Kolmogorov Smirnov ได้ดังตารางที่ 20

ตารางที่ 20 ค่าประมาณของพารามิเตอร์และค่าสถิติทดสอบของ Kolmogorov Smirnov

ค่าประมาณของ μ	ค่าประมาณของ σ	ค่าประมาณของ λ	ค่า KS
3.174614	1.434581	0.2835203	0.08061397

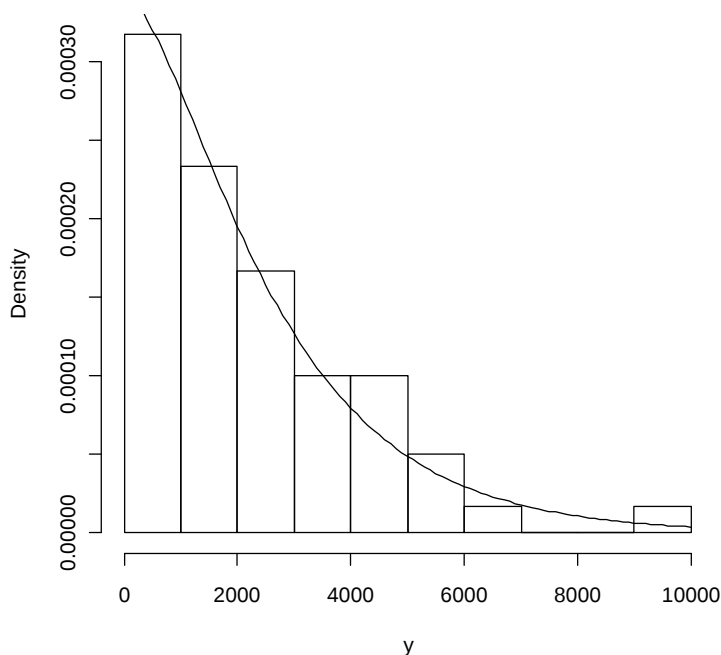
จากตารางที่ 20 ได้ค่า KS เท่ากับ 0.08061397 ซึ่งนำมาเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต จะยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ข้อมูลนี้มีการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปโดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และการทดสอบสารูปสันติโดยใช้ข้อมูลจริง

1. ข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าชนิดหนึ่ง ซึ่งเก็บรวบรวมโดย Lawless (1982) ปรากฏดังนี้

14	34	59	61	69	80	123	142	165	210
381	464	479	556	574	839	917	969	991	1064
1088	1091	1174	1270	1275	1355	1397	1477	1578	1649
1702	1893	1932	2001	2161	2292	2326	2337	2628	2785
2811	2886	2993	3122	3248	3715	3790	3857	3912	4100
4106	4116	4315	4510	4586	5267	5299	5583	6065	9701

สร้างฮิสโตแกรมได้ดังภาพที่ 19



ภาพที่ 19 ฮิสโตแกรมของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า

เมื่อพิจารณาว่าข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้านี้มีการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด จะได้ค่าประมาณดังตารางที่ 21

ตารางที่ 21 ค่าประมาณของพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไประมาณค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า

พารามิเตอร์	ค่าประมาณของพารามิเตอร์
μ	42.2424
σ	18.8124
λ	0.3857

เมื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าแล้ว ทำการทดสอบสารูปสันติ ได้ผลดังตารางที่ 22

ตารางที่ 22 ค่าสถิติทดสอบของ Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov ของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้าที่มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

ตัวทดสอบ	ค่าตัวทดสอบ	ค่าวิกฤต
A^*	0.4713268	0.6029
KS	0.1749231	0.1756

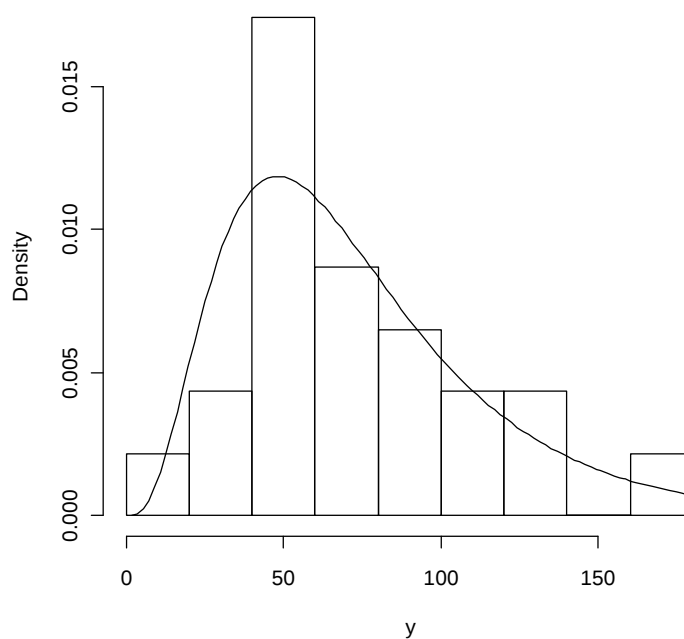
จากตารางที่ 22 ได้ค่า A^* เท่ากับ 0.4713268 ซึ่งยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ข้อมูลนี้มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

และได้ค่า KS เท่ากับ 0.1749231 ซึ่งยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ข้อมูลนี้มีการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เช่นเดียวกัน

2. ข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน (หน่วย : ล้านรอบ) จำนวน 23 ข้อมูล ซึ่งศึกษาโดย Lawless (1982) หน้า 228 ปรากฏดังนี้

17.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60	48.80	51.84	51.96	54.12
55.56	67.80	68.44	68.64	68.88	84.12	93.12	98.64	105.12	105.84
127.92	128.04	173.40							

สร้างฮิสโตแกรมได้ดังภาพที่ 20



ภาพที่ 20 ฮิสโตแกรมของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน

เมื่อพิจารณาว่าข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืนนี้มีการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป ประเมินค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด จะได้ค่าประมาณดังตารางที่ 23

ตารางที่ 23 ค่าประมาณของพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป จากข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน

พารามิเตอร์	ค่าประมาณของพารามิเตอร์
μ	6.353
σ	1.284
λ	0.189

เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืนแล้ว ทำการทดสอบสารูปสถิติ ได้ผลดังตารางที่ 24

ตารางที่ 24 ค่าสถิติทดสอบของ Anderson Darling และ Kolmogorov Smirnov ของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืนที่มีการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป

ตัวทดสอบ	ค่าตัวทดสอบ	ค่าวิกฤต
A^*	0.2587807	0.6029
KS	0.1135498	0.1756

จากตารางที่ 24 ได้ค่า A^* เท่ากับ 0.2587807 ซึ่งยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ข้อมูลนี้มีการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

และได้ค่า KS เท่ากับ 0.1135498 ซึ่งยอมรับสมมติฐาน H_0 นั่นคือ ข้อมูลนี้มีการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เช่นเดียวกัน

การศึกษาการประยุกต์การแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปทางการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติ

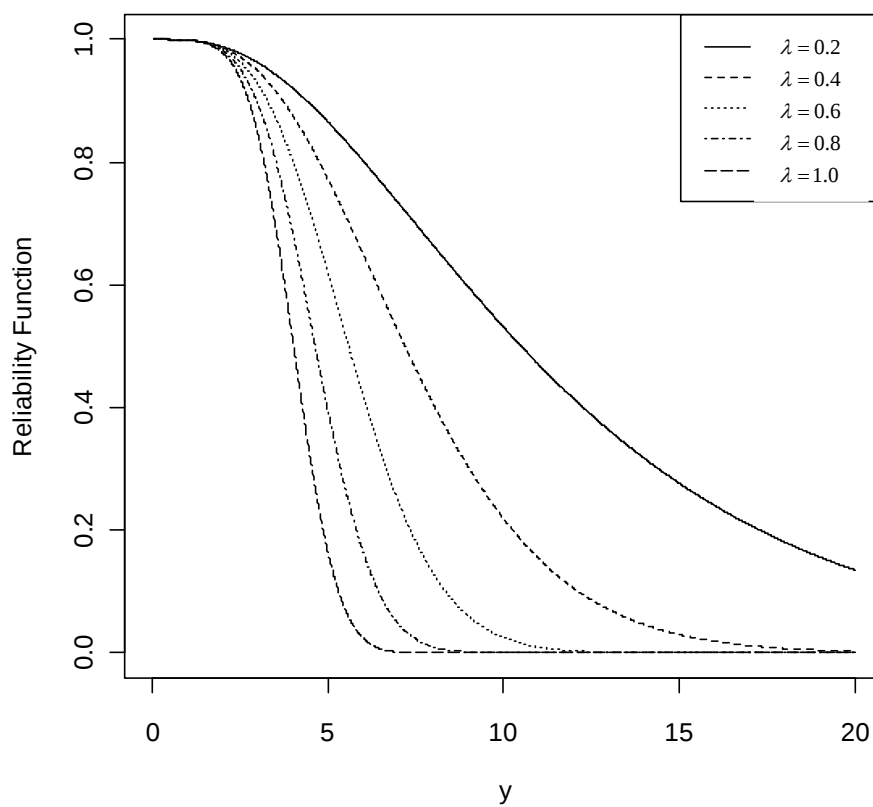
การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป สามารถหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปดังนี้ คือ

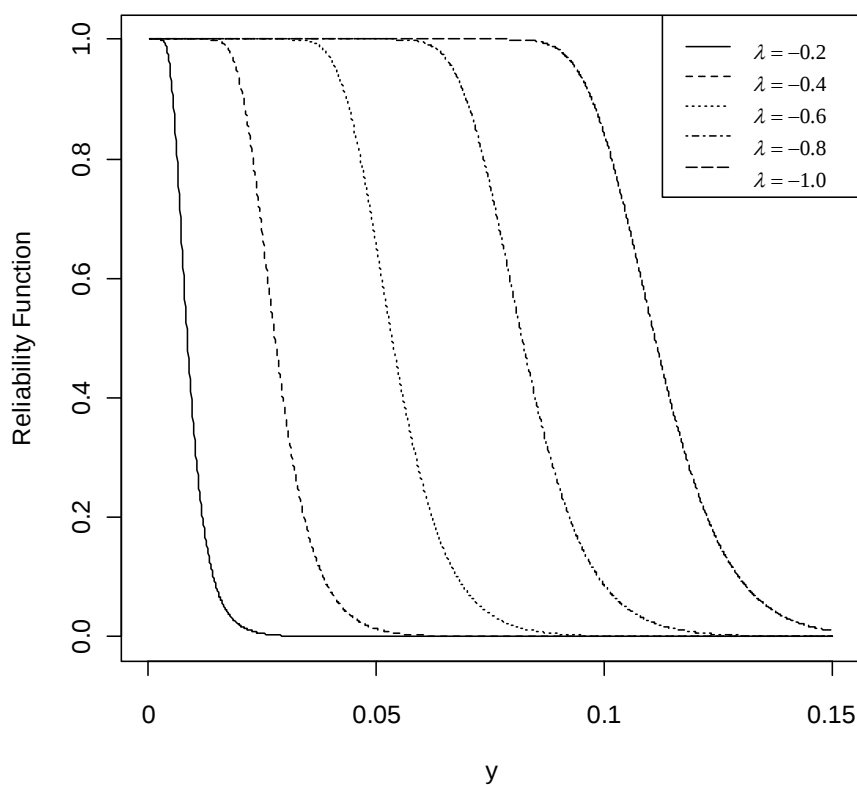
$$R(y) = \begin{cases} [1 - \Phi(\delta(y))] / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ 1 - \Phi[(\log y - \mu) / \sigma] & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ [1 - \Phi(\delta(y)) / \Phi(-\delta)] & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $\delta(y) = \{y(\lambda) - \mu\} / \sigma$ และ $y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda$

สามารถแสดงฟังก์ชันความเชื่อถือได้ได้ดังภาพที่ 21 และ 22



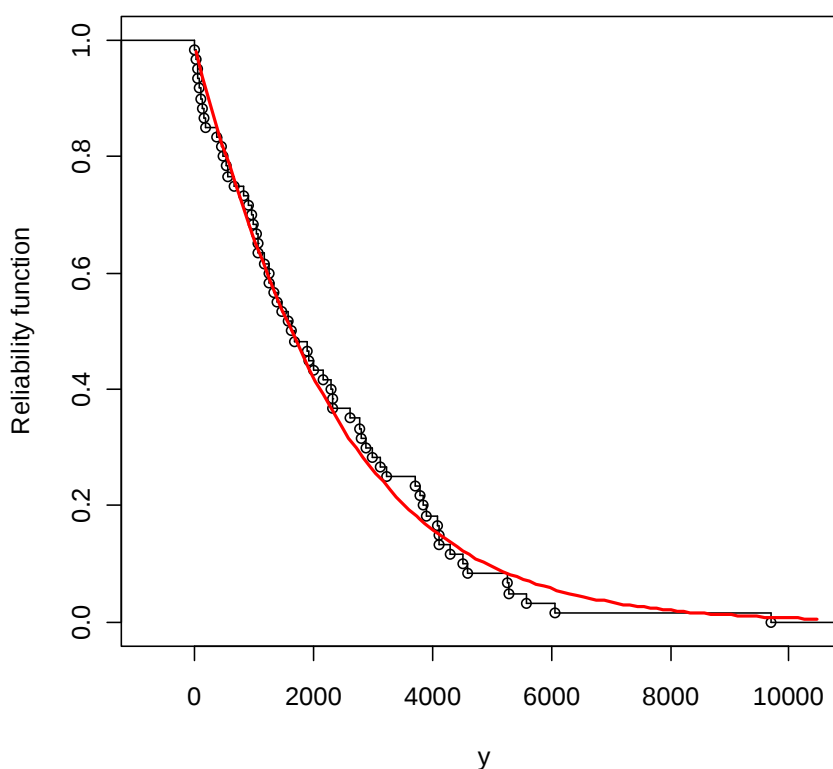
ภาพที่ 21 เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป
เมื่อ $\mu = 3$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$



ภาพที่ 22 เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมถ่วงน้ำหนักทั่วไป
เมื่อ $\mu = -8$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -0.2, -0.4, -0.6, -0.8, -1.0$

การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้สำหรับข้อมูลจริงที่มีการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป

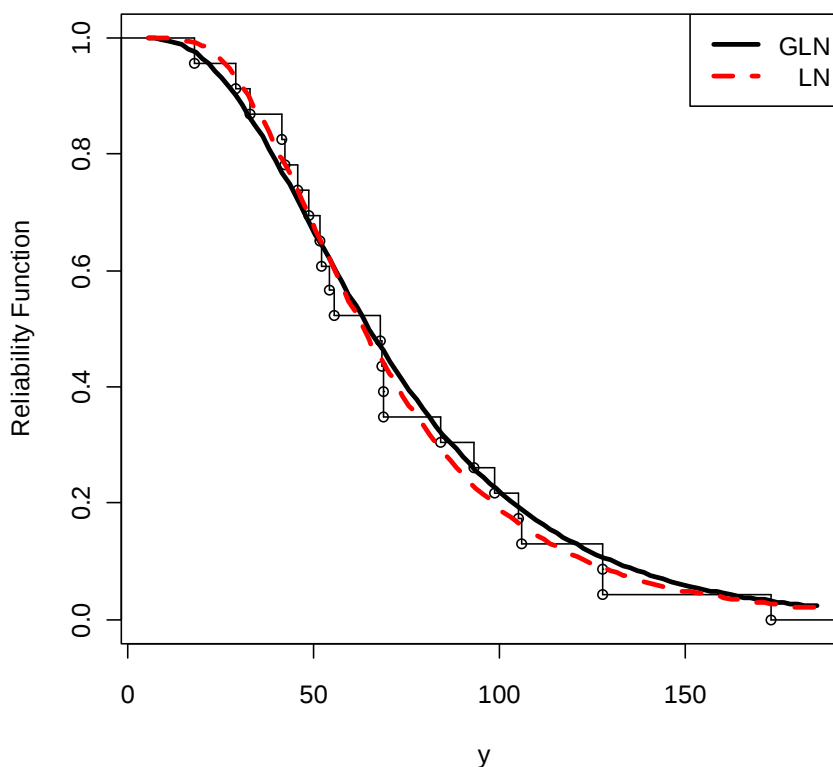
1. ความเชื่อถือได้ของอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า เมื่อนำมาสร้างกราฟเทียบกับกราฟความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป ที่มี $\mu = 42.2424$, $\sigma = 18.8124$ และ $\lambda = 0.3857$ ได้ดังภาพที่ 23



ภาพที่ 23 เส้นโค้งฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า Lawless (1982)

จากภาพที่ 23 เห็นได้ว่ากราฟความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ดังกล่าว มีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟความเชื่อถือได้ของข้อมูลอายุการใช้งานของเครื่องใช้ไฟฟ้า

2. ความเชื่อถือได้ของอายุการใช้งานของตลับลูกปืน เมื่อนำมาสร้างกราฟเปรียบเทียบกับกราฟความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปที่มีพารามิเตอร์ $\mu = 6.3531436$, $\sigma = 1.2843307$ และ $\lambda = 0.1886337$ และเปรียบเทียบกับกราฟความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลที่มี $\mu = 4.1506$ และ $\sigma = 0.5214$ แสดงได้ดังภาพที่ 24



ภาพที่ 24 เส้นโค้งของฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป ของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน Lawless (1982)

จากภาพที่ 24 เห็นได้ว่ากราฟความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไปและการแจกแจงลอกลอนอร์มัลที่มีพารามิเตอร์ดังกล่าว มีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟความเชื่อถือได้ของข้อมูลอายุการใช้งานของตลับลูกปืน

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยง (Hazard Rate) สำหรับการแจกแจงลอการิธึมผกผัน

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(y)$ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ $R(y)$ และฟังก์ชันอัตราเสี่ยง $h(y)$ คือ

$$h(y) = \frac{f(y)}{R(y)}$$

เพราะฉะนั้นสามารถหาฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันได้ดังนี้

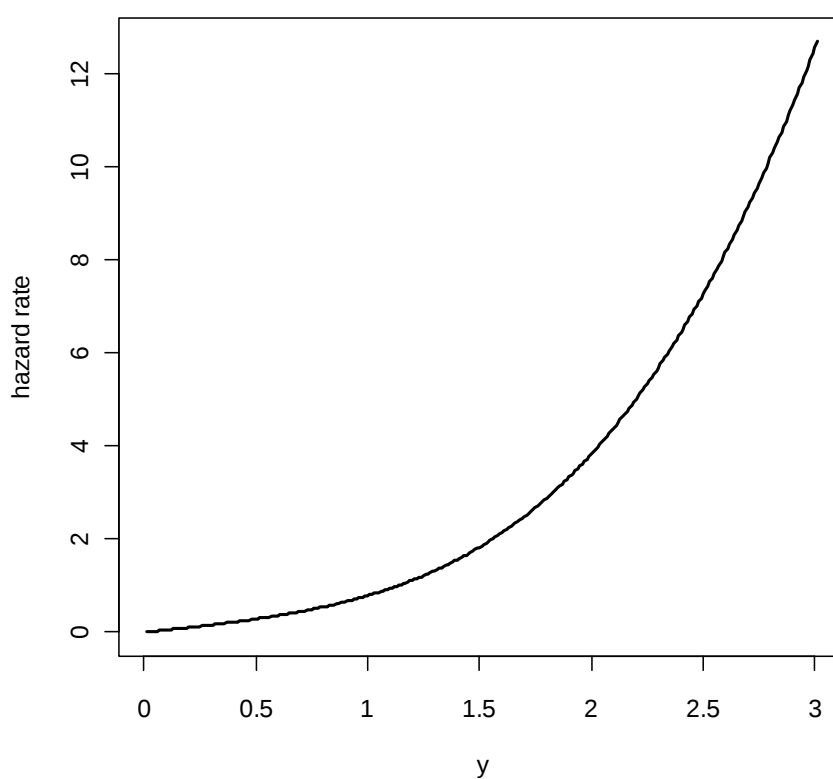
$$h(y) = \begin{cases} \frac{\sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1}}{1 - \Phi\{\delta(y)\}} & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \frac{\sigma^{-1} \phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} y^{-1}}{1 - \Phi\{(\log y - \mu) / \sigma\}} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \frac{\sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1}}{\Phi(-\delta) - \Phi\{\delta(y)\}} & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $\delta(y) = \{y(\lambda) - \mu\} / \sigma$, $\delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$ และ $y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda$

โดยจากการศึกษาพบว่าลักษณะรูปแบบฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 กรณี ดังนี้

1. กรณี $\lambda \geq 1$

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (Increasing) กล่าวคือเมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าเพิ่มขึ้น มีผลทำให้ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเพิ่มขึ้นด้วย หรืออีกนัยหนึ่งคือจะพบอัตราการเกิดข้อผิดพลาดของระบบเพิ่มมากขึ้นอันเนื่องมาจากการใช้งานของระบบที่เสื่อมถอยไปตามกาลเวลาหรือจากการใช้งานทำให้เกิดข้อผิดพลาดมากขึ้น ดังแสดงในภาพที่ 25



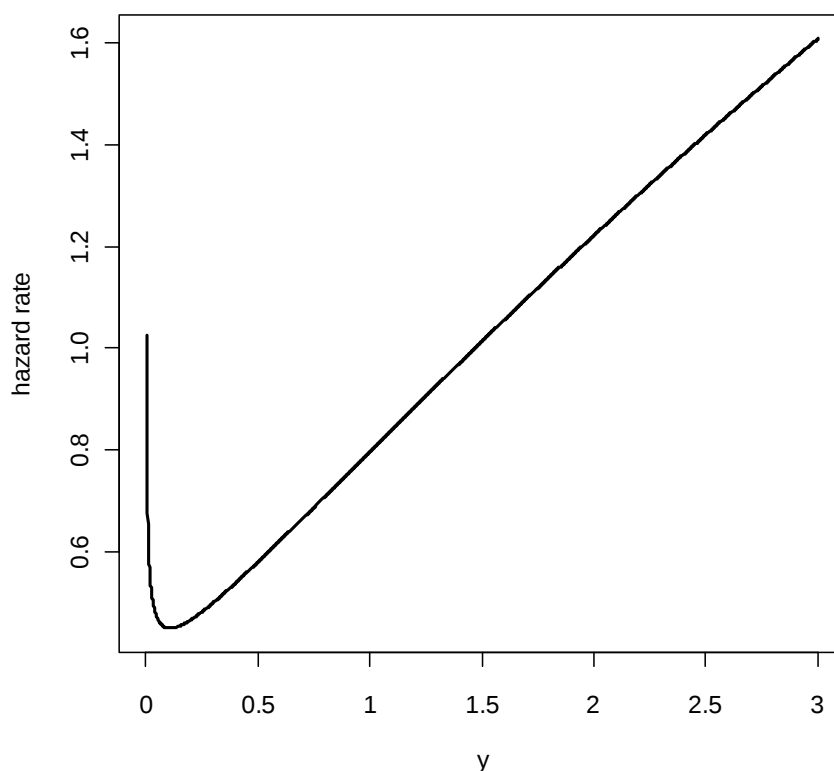
ภาพที่ 25 เส้นโค้งของฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 2$

2. กรณี $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$

โค้งอัตราเสี่ยงแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงช่วงชีวิตของระบบมีลักษณะดังภาพที่ 26 โดยจะแบ่งโค้งอัตราเสี่ยงออกเป็น 2 ช่วงเวลาดังนี้

ส่วนที่ 1 เป็นระยะแรกเริ่ม (Early Life) หรือระยะที่อัตราเสี่ยงลดลง ซึ่งระยะนี้การใช้งานของระบบจะพบข้อผิดพลาดได้ง่ายเนื่องจากระบบอาจถูกออกแบบมาไม่สมบูรณ์หรือบุคลากรอาจขาดความชำนาญในการใช้ระบบ

ส่วนที่ 2 เป็นช่วงระยะของการสึกหรอ (Wear out Failure) หรือ ระยะที่อัตราเสี่ยงเพิ่มขึ้น ซึ่งระยะนี้จะพบอัตราการเกิดข้อผิดพลาดของระบบเพิ่มมากขึ้นอันเนื่องมาจากการใช้งานของระบบที่เสื่อมถอยไปตามกาลเวลาหรือจากการใช้งานทำให้เกิดข้อผิดพลาดมากขึ้น



ภาพที่ 26 เส้นโค้งของแสดงฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันนัยทั่วไป เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.75$

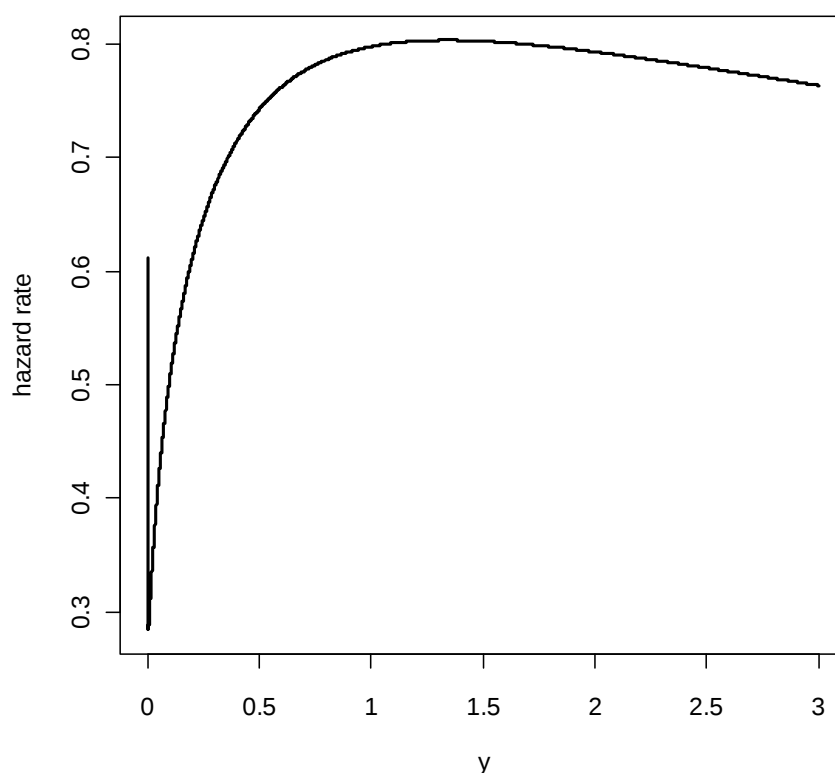
3. กรณี $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

โค้งอัตราเสี่ยงแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงช่วงชีวิตของระบบมีลักษณะดังภาพที่ 27 โดยจะแบ่งโค้งอัตราเสี่ยงออกเป็น 3 ช่วงเวลาดังนี้

ส่วนที่ 1 ระยะเริ่มแรกฟังก์ชันอัตราเสี่ยงมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเป็นระยะที่อัตราความล้มเหลวลดลง

ส่วนที่ 2 หลังจากทีอัตราเสี่ยงลดลงในช่วงแรกลดลง จนถึง ณ เวลาหนึ่งจะเข้าสู่ระยะที่ 2 คือฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเพิ่มขึ้นซึ่งระยะนี้จะพบอัตราการเกิดข้อผิดพลาดของระบบเพิ่มมากขึ้น

ส่วนที่ 3 อัตราเสี่ยงที่เพิ่มขึ้นในระยะที่สอง เมื่อเพิ่มถึง ณ ช่วงเวลาหนึ่งอัตราเสี่ยงจะลดลง



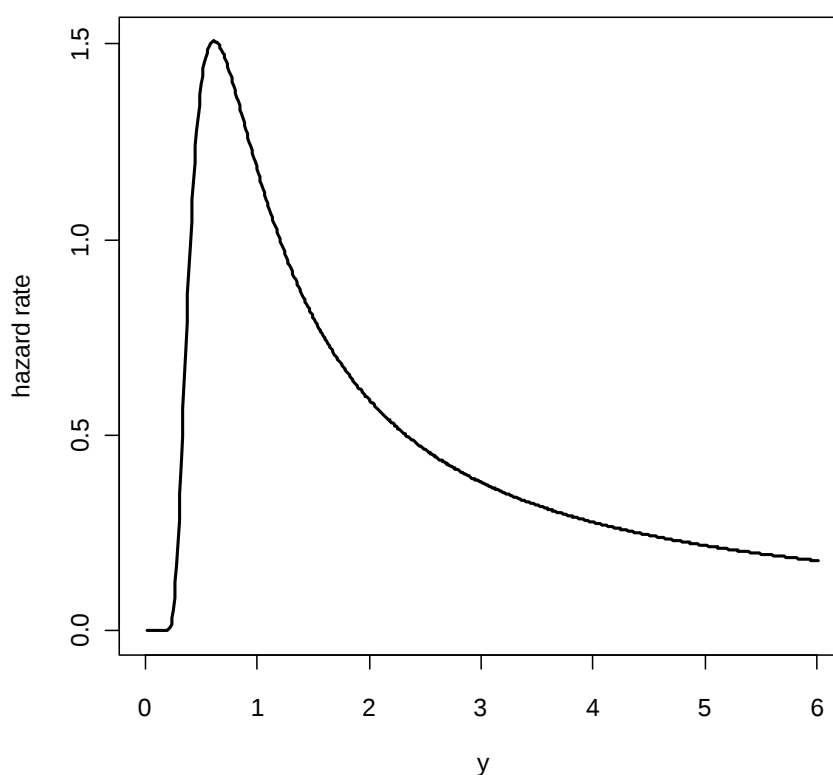
ภาพที่ 27 เส้นโค้งของฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทุกค่า เมื่อ $\mu = 0, \sigma = 1$ และ $\lambda = 0.25$

4. กรณี $\lambda < 0$

โค้งอัตราเสี่ยงแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงช่วงชีวิตของระบบมีลักษณะดังภาพที่ 28 โดยจะแบ่งโค้งอัตราเสี่ยงออกเป็น 2 ช่วงเวลาดังนี้

ส่วนที่ 1 เป็นระยะที่อัตราความล้มเหลวเพิ่มขึ้น ซึ่งระยะนี้จะพบอัตราการเกิดข้อผิดพลาดของระบบเพิ่มมากขึ้น

ส่วนที่ 2 ระยะที่อัตราความล้มเหลวลดลง ซึ่งระยะนี้จะพบอัตราการเกิดข้อผิดพลาดของระบบลดน้อยลง



ภาพที่ 28 เส้นโค้งฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\mu = 0$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -1$

วิจารณ์

จากการศึกษารูปแบบของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปพบว่ารูปแบบของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไปขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ๑ ส่วนการศึกษาคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นพบว่าคุณสมบัติที่ศึกษา ผลที่ได้มีความสอดคล้องกับงานวิจัยของ Chen (1995) และการศึกษาการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป ผลการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้มีความสอดคล้องกับงานวิจัยของ Gupta and Lvin (2005)

สรุปและข้อเสนอแนะ

จากการศึกษารูปแบบและคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป รวมทั้งการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป สรุปได้ดังนี้

สรุป

1. รูปแบบของการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป

การแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปมีรูปแบบของการแจกแจงตามพารามิเตอร์ λ ดังนี้

1. กรณี λ มีค่าเป็นบวก

1.1 กรณี $\lambda < 1$

การแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปมีลักษณะเบ้ขวา โดยเมื่อ λ มีค่าน้อย จะเบ้มากกว่าการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปที่มีค่า λ มากกว่า

1.2 กรณี $\lambda > 1$

การแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปมีลักษณะเบ้ซ้าย โดยเมื่อ λ มีค่าน้อย จะเบ้มากกว่าการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปที่มีค่า λ มากกว่า

1.3 กรณี $\lambda = 1$

การแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไป เมื่อ $\lambda = 1$ จะเป็นการแจกแจงปกติ

2. กรณี λ มีค่าเป็นลบ

การแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปมีลักษณะขวา โดยเมื่อ λ มีค่าน้อย จะเบ้น้อยกว่าการแจกแจงลอการิธึมผกผันทั่วไปที่มีค่า λ มาก

2. คุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

ถ้าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์

$\lambda \in R, \mu \in R$ และ $\sigma > 0$ สามารถสรุปคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกนอร์มัลได้ดังนี้

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น

$$f(y) = \begin{cases} \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \sigma^{-1} \phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} y^{-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม

$$F(y) = \begin{cases} \{\Phi\{\delta(y)\} + \Phi(\delta) - 1\} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \Phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \Phi\{\delta(y)\} / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

โมเมนต์

$$E(y^k) = \begin{cases} \int_{-\delta}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma y)]^{k/\lambda} dy & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \exp(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2) & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \int_{-\infty}^{-\delta} (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma y)]^{k/\lambda} dy & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

$$R(y) = \begin{cases} [1 - \Phi\{\delta(y)\}] / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ 1 - \Phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ 1 - \Phi\{\delta(y)\} / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

ฟังก์ชันอัตราเสี่ยง

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1}}{1 - \Phi(\delta(y))} & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \frac{\sigma^{-1} \phi\{(\log y - \mu) / \sigma\} y^{-1}}{1 - \Phi\{(\log y - \mu) / \sigma\}} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \frac{\sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1}}{\Phi(-\delta) - \Phi\{\delta(y)\}} & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $\delta(y) = ((y(\lambda) - \mu) / \sigma)$, $\delta = (\mu + 1 / \lambda) / \sigma$ และ $y(\lambda) = (y^\lambda - 1) / \lambda$

3. การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ทางสถิติของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป

รูปแบบฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมลวงนัยทั่วไป ขึ้นอยู่กับ λ ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 กรณี คือ

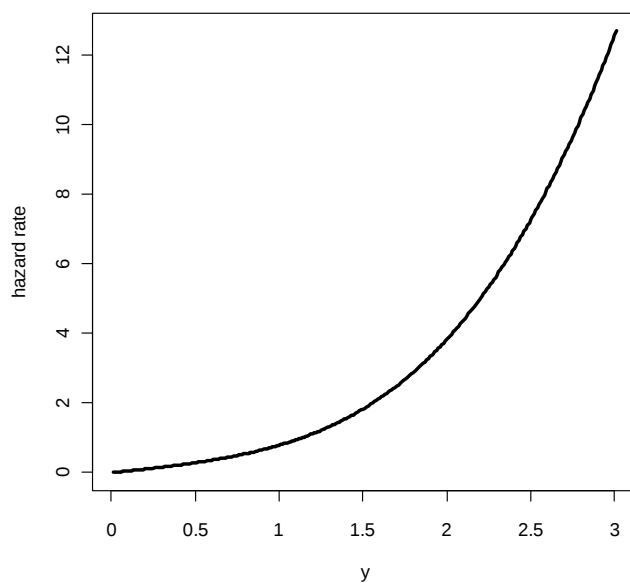
กรณี $\lambda \geq 1$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

กรณี $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงแรกเริ่มเป็นฟังก์ชันลด และเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันเพิ่มในระยะต่อมา

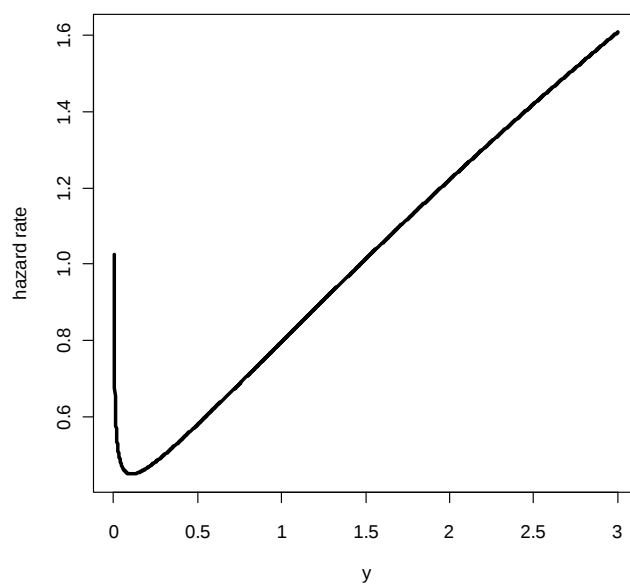
กรณี $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงแรกเริ่มเป็นฟังก์ชันลด ต่อมาจะเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันเพิ่มหลังจากนั้นเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันลด

กรณี $\lambda < 0$ ฟังก์ชันอัตราเสี่ยงแรกเริ่มเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันลดในระยะต่อมา

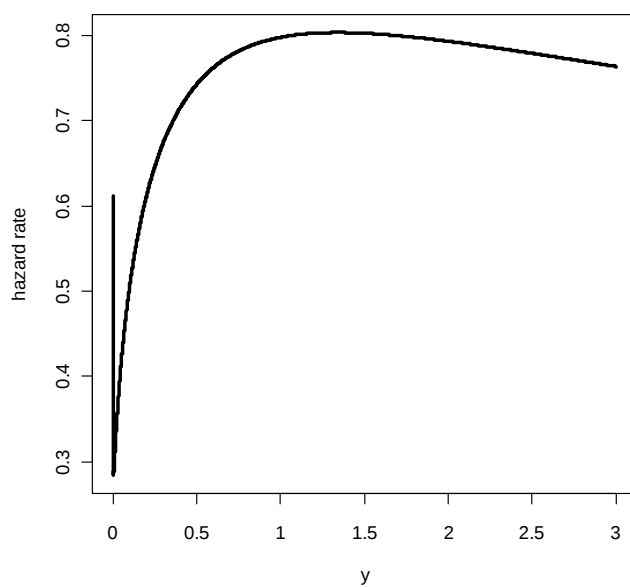
ซึ่งทั้ง 4 กรณี สามารถแสดงได้ดังภาพ



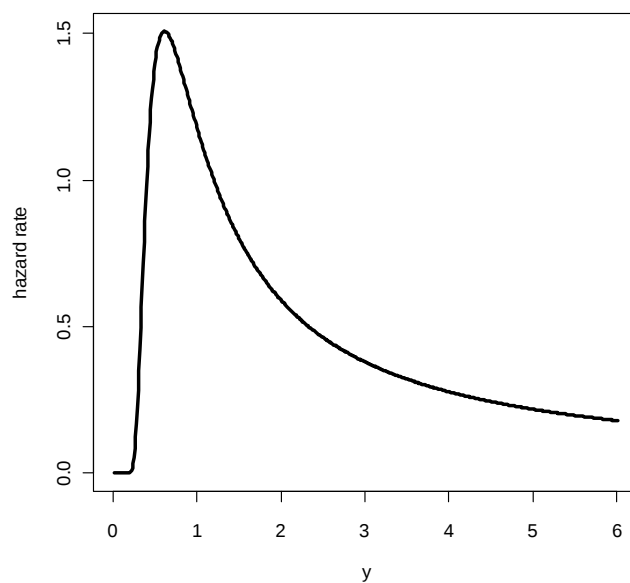
ภาพที่ 29 เส้นโค้งฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับ $\mu = 0$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 2$



ภาพที่ 30 เส้นโค้งฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับ $\mu = 0$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.75$



ภาพที่ 31 เส้นโค้งฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับ $\mu = 0$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = 0.25$



ภาพที่ 32 เส้นโค้งฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอการิธึมผกผันสำหรับ $\mu = 0$, $\sigma = 1$ และ $\lambda = -1$

ข้อเสนอแนะ

1. ควรศึกษาคุณสมบัติทางความน่าจะเป็นทางด้านอื่นๆ ของการแจกแจงลอการิธึมว่างน้อยทั่วไป เช่น การลู่เข้าเชิงอนันต์ (Asymptotic property)
2. ควรศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมว่างน้อยทั่วไปด้วยวิธีการอื่น เช่น การประมาณแบบเบส์ และใช้ตัวสถิติทดสอบอื่นในการทดสอบสารูปสนิทธิ เช่น ตัวสถิติทดสอบ Jarque-bera

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- Abramowitz, M. and I.A. Stegun. 1972. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. 9th ed. Dover, New York.
- Barros, M., G.A. Paula. and V. Leiva. 2009. An R implementation for generalized Birnbaum-Saunders distributions. **Computational Statistics and Data Analysis** (53): 1511-1528.
- Burden, R.L. and J.D. Faires. 2001. **Numerical analysis**. Brook/Cole, Australia.
- Casella, G. and R.L. Berger. 2002. **Statistical Inference**. 2nd ed. Duxbury, California.
- Chen, G. 1995. Generalized log-normal distributions with reliability applications. **Computational Statistics and Data Analysis** (19): 309-319.
- Conover, W.J. 1980. **Practical Nonparametric Statistics**. 2 ed. John Wiley & Sons, New York.
- Grosh, D.L. 1989. **A Primer of Reliability Theory**. 2 ed. John Wiley & Sons, New York.
- Gupta, R.D. and D. Kundu. 2007. Generalized exponential distribution : Existing results and some recent developments. **Journal of Statistical Planning and Inference** (137): 3537-3547.
- Johnson, N.L., S. Kotz. and N. Balakrishnan. 1994. **Continuous Univariate distribution**. 2 ed. John Wiley & Sons, New York.
- Lawless, J.S. 1982. **Statistical models and Methods for Lifetimes Data**. John Wiley, New York.

- Lewis, E.E. 1984. **Introduction to Reliability Engineering**. 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.
- Leemis, L.M. 2005. **Reliability : Probability models and Statistical Methods**. Prentice Hall International Inc.
- Meeker, W.Q. and L.A. Escobar. 1998. **Statistical Methods for Reliability Data**. John Wiley & Sons.
- Proschan, F. and R.E. Barlow. 1975. **Statistical Theory of Reliability and life testing**. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- R Development Core Team. 2008. **A Language and Environment for Statistical Computing**. **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria.
- Siegel, S. and N.J. Castellan. 1988. **Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences**. McGraw-Hill Book Co, Singapore.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การพิสูจน์

การพิสูจน์ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป คือ

$$F(y; \theta) = F(y; \lambda; \mu; \sigma^2) = \begin{cases} \{\Phi(\delta(y)) + \Phi(\delta) - 1\} / \Phi(\delta) & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \Phi[(\ln y - \mu) / \sigma] & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \Phi(\delta(y)) / \Phi(-\delta) & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

การพิสูจน์ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม

กรณี $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} F(y; \lambda, \mu, \sigma^2) &= \int_0^y \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy \\ &= \frac{\sigma^{-1} \sigma}{\Phi(\delta)} \int_0^y \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} d[(y(\lambda) - \mu) / \sigma] \\ &= \frac{1}{\Phi(\delta)} \Phi[(y(\lambda) - \mu) / \sigma] \Big|_0^y \\ &= \frac{1}{\Phi(\delta)} [\Phi[(y(\lambda) - \mu) / \sigma] - \Phi(\frac{(-1/\lambda) - \mu}{\sigma})] \\ &= \frac{1}{\Phi(\delta)} [\Phi(\delta(y)) - \Phi(-\delta)] \\ &= \{\Phi(\delta(y)) + \Phi(-\delta) - 1\} / \Phi(\delta) \end{aligned}$$

เมื่อ $\delta(y) = (y(\lambda) - \mu) / \sigma$ และ $\delta = (\mu + 1/\lambda) / \sigma$

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
 F(y; \lambda, \mu, \sigma^2) &= \int_0^y \sigma^{-1} \phi\{(\ln y - \mu) / \sigma\} y^{-1} dy \\
 &= \sigma^{-1} \sigma \int_0^y \phi\{(\ln y - \mu) / \sigma\} d[(\ln y - \mu) / \sigma] \\
 &= \Phi[(\ln y - \mu) / \sigma] \Big|_0^y \\
 &= \Phi[(\ln y - \mu) / \sigma]
 \end{aligned}$$

กรณี $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
 F(y; \lambda, \mu, \sigma^2) &= \int_0^y \sigma^{-1} \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) dy \\
 &= \frac{\sigma^{-1} \sigma}{\Phi(-\delta)} \int_0^y \phi\{(y(\lambda) - \mu) / \sigma\} d[(y(\lambda) - \mu) / \sigma] \\
 &= \frac{1}{\Phi(-\delta)} \Phi[(y(\lambda) - \mu) / \sigma] \Big|_0^y \\
 &= [\Phi[(y(\lambda) - \mu) / \sigma] / \Phi(-\delta)] \\
 &= \Phi(\delta(y)) / \Phi(-\delta)
 \end{aligned}$$

เมื่อ $\delta(y) = (y(\lambda) - \mu) / \sigma$ และ $\delta = (\mu + 1 / \lambda) / \sigma$

การพิสูจน์โมเมนต์ของการแจกแจงลอการิธึมด้วยวิธีทั่วไป

โมเมนต์ของการแจกแจงลอการิธึมด้วยวิธีทั่วไป คือ

$$E(y^k) = \begin{cases} \int_{-\delta}^{\infty} y^k (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma v)]^{k/\lambda} dv & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ \exp(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2) & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \int_{-\infty}^{-\delta} y^k (2\pi)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\} [1 + \lambda(\mu + \sigma v)]^{k/\lambda} dv & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

การพิสูจน์โมเมนต์

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} E(y^k) &= \int_0^{\infty} y^k f(y; \lambda, \mu, \sigma^2) dy \\ &= \int_{-\delta}^{\infty} y^k (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} y^{-1} dy \end{aligned}$$

ให้ $z = \log y$

ดังนั้น $y = e^z$ และ $dy = e^z dz$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
 E(y^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} e^{kz} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} e^{kz} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 - 2z\mu + \mu^2)\right\} dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 - 2z(\sigma^2 k + \mu) + \mu^2)\right\} dz \\
 &= e^{k\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^{-1}(z^2 - 2z(\sigma^2 k + \mu) + (\sigma^2 k + \mu)^2)\right\} dz \\
 &= e^{k\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - (\sigma^2 k + \mu)}{\sigma}\right)^2\right\} d\left(\frac{z - (\sigma^2 k + \mu)}{\sigma}\right) \\
 &= e^{k\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2}
 \end{aligned}$$

กรณี $\lambda > 0$

$$E(y^k) = \int_0^{\infty} y^k (2\pi)^{-1} \sigma^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right)/\sigma\right]^2\right\} y^{\lambda-1} / \Phi(\delta) dy$$

$$\text{ให้} \quad v = \left(\frac{y^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right) / \sigma$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y = [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{1/\lambda} \quad \text{และ} \quad dy = [(\lambda v\sigma + 1)]^{(1-\lambda)/\lambda} \sigma dv$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
E(y^k) &= \int_{-\delta}^{\infty} (2\pi)^{-1} \sigma^{-1} [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{(k+\lambda-1)/\lambda} \exp(-\frac{1}{2}v^2) \sigma [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{(1-\lambda)/\lambda} / \Phi(\delta) dv \\
&= \frac{1}{\Phi(\delta)} \int_{-\delta}^{\infty} (2\pi)^{-1} [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{k/\lambda} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv
\end{aligned}$$

กรณี $\lambda < 0$

$$E(y^k) = \int_0^{\infty} y^k (2\pi)^{-1} \sigma^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right) / \sigma\right]\right\} y^{\lambda-1} / \Phi(-\delta) dy$$

$$\text{ให้ } v = \left(\frac{y^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right) / \sigma$$

$$\text{ดังนั้น } y = [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{1/\lambda} \quad \text{และ} \quad dy = [(\lambda v\sigma + 1)]^{(1-\lambda)/\lambda} \sigma dv$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
E(y^k) &= \int_{-\infty}^{-\delta} (2\pi)^{-1} \sigma^{-1} [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{(k+\lambda-1)/\lambda} \exp(-\frac{1}{2}v^2) \sigma [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{(1-\lambda)/\lambda} / \Phi(-\delta) dv \\
&= \frac{1}{\Phi(-\delta)} \int_{-\infty}^{-\delta} (2\pi)^{-1} [\lambda(v\sigma + \mu) + 1]^{k/\lambda} \exp(-\frac{1}{2}v^2) dv
\end{aligned}$$

การพิสูจน์สถิติอันดับของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

ให้ $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ เป็นสถิติอันดับของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ จากการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสำหรับสถิติอันดับที่ 1 หรือ y_1 สำหรับการแจกแจงนี้ คือ

$$g_1(y_1) = \begin{cases} \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[1-\Phi(\delta(y))]^{n-1}}{[\Phi(\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{-1}[1-\Phi(\delta(y))]^{n-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[\Phi(-\delta)-\Phi(\delta(y))]^{n-1}}{[\Phi(-\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสำหรับสถิติอันดับที่ n หรือ y_n สำหรับการแจกแจงนี้ คือ

$$g_n(y_n) = \begin{cases} \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[\Phi(\delta(y))+\Phi(\delta)-1]^{n-1}}{[\Phi(\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda > 0 \\ n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{-1}[\Phi(\delta(y))]^{n-1} & \text{เมื่อ } \lambda = 0 \\ \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[\Phi(\delta(y))]^{n-1}}{[\Phi(-\delta)]^n} & \text{เมื่อ } \lambda < 0 \end{cases}$$

การพิสูจน์สถิติอันดับที่ 1

จาก Casella and Berge (2002) ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น X_j เมื่อ $1 \leq j \leq n$ ได้แก่

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f_X(x) [F_X(x)]^{j-1} [1-F_X(x)]^{n-j}$$

ดังนั้นสถิติอันดับที่ 1 คือ

$$f_{X_{(1)}}(x) = n f_X(x) [1-F_X(x)]^{n-1}$$

เมื่อนำฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปแทนลงไปในการข้างต้นจะได้สถิติอันดับที่ 1 ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปดังนี้ คือ

กรณี $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}}{\Phi(\delta)} \left[\frac{1-\Phi(\delta(y))}{\Phi(\delta)} \right]^{n-1} \\ &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[1-\Phi(\delta(y))]^{n-1}}{[\Phi(\delta)]^n} \end{aligned}$$

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= n\sigma^{-1}\phi\left[\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)\right]y^{-1} \left[1 - \Phi\left[\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right] \right]^{n-1} \\ &= n\sigma^{-1}\phi(\delta(y))y^{-1} [1-\Phi(\delta(y))]^{n-1} \end{aligned}$$

กรณี $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}}{\Phi(-\delta)} \left[1 - \frac{\Phi(\delta(y))}{\Phi(-\delta)} \right]^{n-1} \\ &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[\Phi(-\delta) - \Phi(\delta(y))]^{n-1}}{[\Phi(-\delta)]^n} \end{aligned}$$

การพิสูจน์สถิติอันดับที่ n

สถิติอันดับที่ n คือ

$$f_{X_{(n)}}(x) = nf_X(x)[F_X(x)]^{n-1}$$

ดังนั้นเมื่อนำฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นและฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปแทนลงไปในการข้างต้นจะได้สถิติอันดับที่ n ของการแจกแจงลอการิธึมวางนัยทั่วไปดังนี้ คือ

กรณี $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(x) &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}}{\Phi(\delta)} \left[\frac{\Phi(\delta(y)) + \Phi(\delta) - 1}{\Phi(\delta)} \right]^{n-1} \\ &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[\Phi(\delta(y)) + \Phi(\delta) - 1]^{n-1}}{[\Phi(\delta)]^n} \end{aligned}$$

กรณี $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(x) &= n\sigma^{-1}\phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)y^{-1} \left[\Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \right]^{n-1} \\ &= n\sigma^{-1}\phi(\delta(y))y^{-1} [\Phi(\delta(y))]^{n-1} \end{aligned}$$

กรณี $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
 f_{X_{(n)}}(x) &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}}{\Phi(-\delta)} \left[\frac{\Phi(\delta(y))}{\Phi(-\delta)} \right]^{n-1} \\
 &= \frac{n\sigma^{-1}\phi[\delta(y)]y^{\lambda-1}[\Phi(\delta(y))]^{n-1}}{[\Phi(-\delta)]^n}
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

ตารางสถิติ

ตารางผนวกที่ ข1 แสดงค่าวิกฤตของสถิติทดสอบ Anderson Darling สำหรับการแจกแจงลอก
นอร์มัลวางนัยทั่วไป

Upper α - percentiles for testing goodness-of-fit of generalized lognormal distributions

Modified statistics	Upper percentiles								
α	0.50	0.40	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01
A^*	0.2871	0.3211	0.3624	0.4184	0.4572	0.5112	0.6029	0.6945	0.8158

ที่มา: Chen (1995)

ตารางผนวกที่ ข2 ค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบ Kolmogorov Smimov One sample test

ขนาดของกลุ่ม	ระดับนัยสำคัญ				
ตัวอย่าง (N)	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.438	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.210	.220	.240	.270	.320
30	.190	.200	.220	.240	.290
35	.180	.190	.210	.230	.270
มากกว่า 35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$

ที่มา: Siegel and Castellan (1988)

ภาคผนวก ค
โปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัย

การเขียนกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ

```
y<-seq(0,10,0.001)
mu<-5
sigma1<-1
sigma2<-2
sigma3<-3
T1<-dnorm((y-mu)/sigma1)/sigma1
T2<-dnorm((y-mu)/sigma2)/sigma2
T3<-dnorm((y-mu)/sigma3)/sigma3
matplot(cbind(T1,T2,T3),type='l',ylab='Probability Density Function'
,xlab='y',lwd=2,xaxt="n",col=1)
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," ")
,lwd=2,text.width=strwidth("sigma=1"),lty=1:2:3,col=1)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y,
c("sigma=1","sigma=2","sigma=3"),pos=2)
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000, 8000, 10000),
,labels = expression(0,2,4,6,8,10))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติ

```
y<-seq(0,10,0.001)
mu<-5
sigma1<-1
sigma2<-2
sigma3<-3
T1<-pnorm((y-mu)/sigma1)
T2<-pnorm((y-mu)/sigma2)
T3<-pnorm((y-mu)/sigma3)
matplot(cbind(T1,T2,T3),type='l',ylab='Cumulative Density Function'
,xlab='y',lwd=2,xaxt="n",col=1)
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," ")
,lwd=2,text.width=strwidth("sigma=1"),lty=1:2:3,col=1)
text(temp$rect$left +
temp$rect$w,temp$text$y,c("sigma=1","sigma=2","sigma=3"),pos=2)
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000, 8000, 10000),
,labels = expression(0,2,4,6,8,10))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงปกติ

```
y<-seq(0,10,0.001)
mu<-5
sigma1<-1
sigma2<-2
sigma3<-3
T1<-1-pnorm((y-mu)/sigma1)
T2<-1-pnorm((y-mu)/sigma2)
T3<-1-pnorm((y-mu)/sigma3)
matplot(cbind(T1,T2,T3),type='l',ylab='Reliability function'
,xlab='y',lwd=2,col=1,xaxt = "n")
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," ")
,text.width=strwidth("sigma=1"),lty=1:2:3,col=1,lwd=2)
text(temp$rect$left +
temp$rect$w,temp$text$y,c("sigma=1","sigma=2","sigma=3"),pos=2)
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000, 8000, 10000),
,labels = expression(0,2,4,6,8,10))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงปกติ

```
y<-seq(0,10,0.001)
mu<-5
sigma1<-1
sigma2<-2
sigma3<-3
T1<-(dnorm((y-mu)/sigma1)/sigma1)/(1-pnorm((y-mu)/sigma1))
T2<-(dnorm((y-mu)/sigma2)/sigma2)/(1-pnorm((y-mu)/sigma2))
T3<-(dnorm((y-mu)/sigma3)/sigma3)/(1-pnorm((y-mu)/sigma3))
matplot(cbind(T1,T2,T3),type='l',ylab='Hazard Rate'
,xlab='y',xaxt = "n",lwd=2,col=1)
temp<-legend('topleft',legend=c(" "," "," ")
,text.width=strwidth("sigma=1"),lty=1:2:3,col=1,lwd=2)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y,
c("sigma=1","sigma=2","sigma=3"),pos=2)
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000, 8000,10000),
,labels = expression(0,2,4,6,8,10))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกลอนอร์มัล

```
y<-seq(0,3,0.001)
mu<-0
sigma1<-0.3
sigma2<-0.5
sigma3<-0.8
T1<-dnorm((log(y)-mu)/sigma1)/(sigma1*y)
T2<-dnorm((log(y)-mu)/sigma2)/(sigma2*y)
T3<-dnorm((log(y)-mu)/sigma3)/(sigma3*y)
matplot(cbind(T1,T2,T3),type='l',ylab='Probability Density
Function',xlab='y',lwd=3,xaxt = "n")
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," ")
,text.width=strwidth("sigma=0.3"),lty=1:2:3,col=1:2:3,lwd=3)
text(temp$rect$left +
temp$rect$w,temp$text$y,c("sigma=0.3","sigma=0.5","sigma=0.8"),pos=2)
axis(1, at = c(0,500, 1000,1500, 2000, 2500,3000),
,labels = expression(0,0.5,1.0,1.5,2.0,2.5,3.0))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอกลอนอร์มัล

```
y<-seq(0,60,.01)
mu=3
sigma1=.75
sigma2=1
sigma3=1.5
R1<-pnorm(((log(y)-mu))/ sigma1)
R2<-pnorm(((log(y)-mu))/ sigma2)
R3<-pnorm(((log(y)-mu))/ sigma3)
matplot(cbind(R1,R2,R3),type='l',ylab='Cumulative Distribution
Function',xlab='y',xaxt = "n",lwd=2,col=1)
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," ")
,text.width=strwidth("sigma=0.75")
,lty=1:2:3,col=1,lwd=2)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y,
c("sigma=0.75","sigma=1.0","sigma=1.5"),pos=2)
axis(1, at = c(0,1000, 2000,3000, 4000, 5000,6000),
,labels = expression(0,10,20,30,40,50,60))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความเชื่อใจได้ของการแจกแจงลอกลอนอร์มัล

```
y<-seq(0,60,.01)
mu=3
sigma1=.75
sigma2=1
sigma3=1.5
R1<-1-pnorm(((log(y)-mu))/ sigma1)
R2<-1-pnorm(((log(y)-mu))/ sigma2)
R3<-1-pnorm(((log(y)-mu))/ sigma3)
matplot(cbind(R1,R2,R3),type='l',ylab='Cumulative Distribution
Function',xlab='y',xaxt = "n",lwd=2,col=1)
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," "),
, text.width=strwidth("sigma=0.75")
,lty=1:2:3,col=1,lwd=2)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y,
c("sigma=0.75","sigma=1.0","sigma=1.5"),pos=2)
axis(1, at = c(0,1000, 2000,3000, 4000, 5000,6000),
, labels = expression(0,10,20,30,40,50,60))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอกลอนอร์มัล

```
y<-seq(0,10,.01)
a=0
sigma1=0.3
sigma2=0.5
sigma3=0.7
R1<-((dnorm(((log(y)-mu))/sigma1))/(sigma1*y))
/(1-pnorm(((log(y)-mu))/sigma1))
R2<-((dnorm(((log(y)-mu))/sigma2))/(sigma2*y))
/(1-pnorm(((log(y)-mu))/sigma2))
R3<-((dnorm(((log(y)-mu))/sigma3))/(sigma3*y))
/(1-pnorm(((log(y)-mu))/sigma3))
matplot(cbind(R1,R2,R3),type='l',ylab='Hazard rate'
,xlab='X',xaxt="n",lwd=2,col=1)
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," "),
, text.width=strwidth("sigma=0.3"),lty=1:2:3,col=1)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y,
c("sigma=0.3","sigma=0.5","sigma=0.7"),pos=2)
axis(1, at = c(0,200, 400,600, 800,1000),
, labels = expression(0,2,4,6,8,10))
```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลอกลอนอร์มัลวางนัยทั่วไป

```

y<-seq(0.1,30,0.1)
lambda1<-0.2
lambda2<-0.4
lambda3<-0.6
lambda4<-0.8
lambda5<-1.0
mu<-3
sigma<-1
ylambda1<-((y^(lambda1))-1)/lambda1
ylambda2<-(((y^(lambda2))-1)/lambda2)
ylambda3<-(((y^(lambda3))-1)/lambda3)
ylambda4<-(((y^(lambda4))-1)/lambda4)
ylambda5<-(((y^(lambda5))-1)/lambda5)
delta1<-((mu+(1/lambda1)))/sigma
delta2<-((mu+(1/lambda2)))/sigma
delta3<-((mu+(1/lambda3)))/sigma
delta4<-((mu+(1/lambda4)))/sigma
delta5<-((mu+(1/lambda5)))/sigma
T1<-(1/sigma)*(dnorm((ylambda1-mu)/sigma))*(y^(lambda1-1))/pnorm(delta1)
T2<-(1/sigma)*(dnorm((ylambda2-mu)/sigma))*(y^(lambda2-1))/pnorm(delta2)
T3<-(1/sigma)*(dnorm((ylambda3-mu)/sigma))*(y^(lambda3-1))/pnorm(delta3)
T4<-(1/sigma)*(dnorm((ylambda4-mu)/sigma))*(y^(lambda4-1))/pnorm(delta4)
T5<-(1/sigma)*(dnorm((ylambda5-mu)/sigma))*(y^(lambda5-1))/pnorm(delta5)
matplot(cbind(T1,T2,T3,T4,T5),type='l',col=1,
ylab='Probability Density Function',xlab='y',xaxt = "n")
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," "," "," "),
, text.width=strwidth("lambda=0.2"),lty=1:2:3:4:5,col=1)
text(temp$rect$left +
temp$rect$w,temp$text$y,c("lambda=0.2","lambda=0.4","lambda=0.6","lambda=0.8","lambda=1.0"),pos=2)
axis(1, at = c(0,50, 100,150, 200, 250,300),
, labels = expression(0,5,10,15,20,25,30))

```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงลอกลอนอรั่มลางนัยทั่วไป

```

y<-seq(0,20,0.01)
lambda1<-0.2
lambda2<-0.4
lambda3<-0.6
lambda4<-0.8
lambda5<-1.0
mu<-3
sigma<-1
ylambda1<-(((y^(lambda1))-1)/lambda1)
ylambda2<-(((y^(lambda2))-1)/lambda2)
ylambda3<-(((y^(lambda3))-1)/lambda3)
ylambda4<-(((y^(lambda4))-1)/lambda4)
ylambda5<-(((y^(lambda5))-1)/lambda5)
delta1<-((mu+(1/lambda1)))/sigma
delta2<-((mu+(1/lambda2)))/sigma
delta3<-((mu+(1/lambda3)))/sigma
delta4<-((mu+(1/lambda4)))/sigma
delta5<-((mu+(1/lambda5)))/sigma
T1<-(pnorm((ylambda1-mu)/sigma)+pnorm(delta1)-1)/pnorm(delta1)
T2<-(pnorm((ylambda2-mu)/sigma)+pnorm(delta2)-1)/pnorm(delta2)
T3<-(pnorm((ylambda3-mu)/sigma)+pnorm(delta3)-1)/pnorm(delta3)
T4<-(pnorm((ylambda4-mu)/sigma)+pnorm(delta4)-1)/pnorm(delta4)
T5<-(pnorm((ylambda5-mu)/sigma)+pnorm(delta5)-1)/pnorm(delta5)
matplot(cbind(T1,T2,T3,T4,T5),type='l'
,ylab='Probability Density Function',xlab='y',xaxt = "n",col=1)
axis(1, at = c(0,500, 1000,1500, 2000),
,labels = expression(0,5,10,15,20))
temp<-legend('bottomright',legend=c(" "," "," "," "," ")
,text.width=strwidth("lambda=0.2")
,lty=1:2:3:4:5,col=1)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y
,c("lambda=0.2","lambda=0.4","lambda=0.6","lambda=0.8","lambda=1.0"),p
os=2)

```

การเขียนกราฟฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

```

y<-seq(0,20,0.01)
lambda1<-0.2
lambda2<-0.4
lambda3<-0.6
lambda4<-0.8
lambda5<-1.0
mu<-3
sigma<-1
ylambda1<-(((y^(lambda1))-1)/lambda1)
ylambda2<-(((y^(lambda2))-1)/lambda2)
ylambda3<-(((y^(lambda3))-1)/lambda3)
ylambda4<-(((y^(lambda4))-1)/lambda4)
ylambda5<-(((y^(lambda5))-1)/lambda5)
delta1<-((mu+(1/lambda1)))/sigma
delta2<-((mu+(1/lambda2)))/sigma
delta3<-((mu+(1/lambda3)))/sigma
delta4<-((mu+(1/lambda4)))/sigma
delta5<-((mu+(1/lambda5)))/sigma
T1<-1-(pnorm((ylambda1-mu)/sigma)+pnorm(delta1)-1)/pnorm(delta1)
T2<-1-(pnorm((ylambda2-mu)/sigma)+pnorm(delta2)-1)/pnorm(delta2)
T3<-1-(pnorm((ylambda3-mu)/sigma)+pnorm(delta3)-1)/pnorm(delta3)
T4<-1-(pnorm((ylambda4-mu)/sigma)+pnorm(delta4)-1)/pnorm(delta4)
T5<-1-(pnorm((ylambda5-mu)/sigma)+pnorm(delta5)-1)/pnorm(delta5)
matplot(cbind(T1,T2,T3,T4,T5),type='l',col=1
,ylab='Reliability Function',xlab='y',xaxt="n")
axis(1, at = c(0,500, 1000,1500, 2000),
,labels = expression(0,5,10,15,20))
temp<-legend('topright',legend=c(" "," "," "," "," "),
,text.width=strwidth("lambda=0.2")
,lty=1:2:3:4:5,col=1)
text(temp$rect$left + temp$rect$w,temp$text$y
,c("lambda=0.2","lambda=0.4","lambda=0.6","lambda=0.8","lambda=1.0"),p
os=2)

```

การเขียนกราฟฟังก์ชันอัตราเสี่ยงของการแจกแจงลอกนอร์มัลวางนัยทั่วไป

```

x<-seq(0,3,.01)
mu=0
sigma=1
lambda=2
h=(1/((2*pi)^.5)*sigma))*exp(-(.5)*((((x^lambda)-1)/lambda)-
mu)/sigma)^2)*(x^(lambda-1))/(1-pnorm((((x^lambda)-1)/lambda)-
mu)/sigma))
matplot(cbind(h),type='l',ylab='hazard rate',xlab='x',xaxt="n",lwd=2)
axis(1, at = c(0,50, 100,150,200,250,300),
,labels = expression(0,0.5,1,1.5,2,2.5,3))

```

โปรแกรมที่ใช้อินทิเกรตเพื่อหาค่าโมเมนต์

การหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิด

```
inter_glmn=function(mu,sigma,lambda,k){
a<- function(x)
{
((x^k)*dnorm(((x^(lambda)-1)/lambda)-mu)/sigma)*(x^(lambda-1))/sigma
}
integrate(a,0,Inf)
}
inter_glmn(3,1,0.2,1)
```

การหาโมเมนต์รอบค่าเฉลี่ย

```
inter_glmn=function(mu,sigma,lambda,k,xbar){
a<- function(x)
{
(((x-xbar)^k)*dnorm(((x^(lambda)-1)/lambda)-mu)/sigma)*(x^(lambda-1))/sigma
}
integrate(a,0,Inf)
}
inter_glmn(3,1,0.2,1, 12.15815)
```

เมื่อ xbar คือค่าโมเมนต์ที่ 1 รอบจุดกำเนิด

ภาคผนวก ง
การใช้คำสั่ง mle ในโปรแกรม R

Maximum Likelihood Estimation

รายละเอียดเกี่ยวกับการใช้ฟังก์ชัน mle เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด สำหรับโปรแกรม R มีรูปแบบคำสั่งดังนี้

รูปแบบคำสั่ง

```
mle(minuslogl, start = formals(minuslogl), method = "BFGS",
    fixed = list(), ...)
```

โดยที่แต่ละคำสั่งมีคำอธิบายดังนี้

minuslogl	Function to calculate negative log-likelihood.
start	Named list. Initial values for optimizer.
method	Optimization method to use. See optim.
fixed	Named list. Parameter values to keep fixed during optimization.
...	Further arguments to pass to optim.

General-purpose Optimization

ในการใช้คำสั่ง mle สำหรับโปรแกรม R ใช้วิธีการของ Optimization ในการหาค่าประมาณ โดยมีรูปแบบคำสั่งดังนี้

รูปแบบคำสั่ง

```
optim(par, fn, gr = NULL, ...,
      method = c("Nelder-Mead", "BFGS", "CG", "L-BFGS-B", "SANN"),
      lower = -Inf, upper = Inf, control = list(), hessian = FALSE)
```

โดยที่แต่ละคำสั่งมีคำอธิบายดังนี้

par	Initial values for the parameters to be optimized over.
fn	A function to be minimized (or maximized), with first argument the vector of parameters over which minimization is to take place. It should return a scalar result.
gr	A function to return the gradient for the "BFGS", "CG" and "L-BFGS-B" methods. If it is NULL, a finite-difference approximation will be used. For the "SANN" method it specifies a function to generate a new candidate point. If it is NULL a default Gaussian Markov kernel is used.
...	Further arguments to be passed to fn and gr.
method	The method to be used. See 'Details'.
lower, upper	Bounds on the variables for the "L-BFGS-B" method.
control	A list of control parameters. See 'Details'.
hessian	Logical. Should a numerically differentiated Hessian matrix be returned?
message	A character string giving any additional information returned by the optimizer, or NULL.
hessian	Only if argument hessian is true. A symmetric matrix giving an estimate of the Hessian at the solution found. Note that this is the Hessian of the unconstrained problem even if the box constraints are active.

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นางสาวศิริพร อรชร
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 12 เมษายน 2527
สถานที่เกิด	อำเภอสามพราน จังหวัดนครปฐม
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-