



วิทยานิพนธ์

การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี:

สถิติ H สถิติ T และสถิติ O

COMPARISON OF THE THREE MULTINORMALITY
TESTING METHODS: H, T AND O

นางสาวเพ็ญแข สุพัฒน์ศักดิ์สกุล

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พ.ศ. 2551



ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ)

ปริญญา

สถิติ

สถิติ

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี: สถิติ H สถิติ T และ
สถิติ O

Comparison of the Three Multinormality Testing Methods: H, T and O

นามผู้วิจัย นางสาวเพ็ญแข สุพัฒน์ศักดิ์สกุล

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญอ้อม โฉมทิ, Ph.D.)

กรรมการ

(รองศาสตราจารย์อนันต์ชัย เชื้อนธรรม, M.S.)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สาโรจน์ โอพิทักษ์ชีวิน, M.B.A.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์อำไพ ทองธีรภาพ, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา วีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ 4 เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2551

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี: สถิติ H สถิติ T และสถิติ O

Comparison of the Three Multinormality Testing Methods: H, T and O

โดย

นางสาวเพ็ญแข สุพัฒน์ศักดิ์สกุล

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ)

พ.ศ. 2551

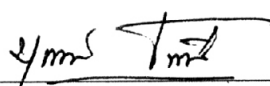
เพ็ญแข สุพรรณศักดิ์สกุล 2551: การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี: สถิติ H สถิติ T และสถิติ O ปรินญาวิทยาสาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ) สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ ปรธานกรรณการที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์บุญอ้อม โหมท, Ph.D. 230 หน้า

การวิจัยในครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี คือ สถิติ H สถิติ T และสถิติ O ทั้งในกรณีที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่มีการแจกแจง 3 แบบ คือ การแจกแจงปกติหลายตัวแปร การแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร และการแจกแจงสถิติเคนท์-ทีหลายตัวแปร ในการศึกษาครั้งนี้ทำการจำลองข้อมูลในแต่ละสถานการณ์จำนวน 1,000 ครั้ง โดยศึกษากรณีที่จำนวนตัวแปร (p) 2, 3 และ 4 ตัวแปร และขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ (α) เท่ากับ 0.05 และ 0.10 ซึ่งผลการศึกษาสรุปได้ดังนี้

1. ความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ทั้งในกรณีที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติ 2, 3 และ 4 ตัวแปร พบว่า สถิติ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ทุกขนาดตัวอย่าง ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญ ส่วนสถิติ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญ ส่วนสถิติ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 สำหรับทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

2. การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ แบ่งการสรุปผลเป็น 2 ส่วน ดังนี้ ส่วนที่ 1 กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ ขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติ T มีอำนาจการทดสอบสูงสุด ทุกจำนวนตัวแปร ทุกระดับนัยสำคัญ และทุกการแจกแจง เมื่อข้อมูลของประชากรมีการแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 สถิติ T มีอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติ O ทุกจำนวนตัวแปร และทุกระดับนัยสำคัญ แต่เมื่อข้อมูลของประชากรมีการแจกแจงสถิติเคนท์-ที ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 สถิติ O มีอำนาจการทดสอบสูงสุด และที่จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 และ 4 สถิติ T มีอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติ O ทุกระดับนัยสำคัญ ส่วนที่ 2 กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ ขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติ T มีอำนาจการทดสอบสูงสุด ทุกจำนวนตัวแปร ทุกระดับนัยสำคัญ และทุกการแจกแจง เมื่อข้อมูลของประชากรมีการแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร ขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติ O มีอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติ T มีอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติ O ทุกจำนวนตัวแปร และทุกระดับนัยสำคัญ ยกเว้นที่จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 ระดับนัยสำคัญ 0.05 สถิติ O มีอำนาจการทดสอบสูงสุด แต่เมื่อข้อมูลของประชากรมีการแจกแจงสถิติเคนท์-ที ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 สถิติ O มีอำนาจการทดสอบสูงสุด ทุกจำนวนตัวแปร และทุกระดับนัยสำคัญ

เพ็ญแข สุพรรณศักดิ์สกุล
ลายมือชื่อนิติ


ลายมือชื่อประธานกรรมการ

๔๘ / ๗.๑. / ๕/

Penkhae Supatsaksakun 2008: Comparison of the Three Multinormality Testing Methods: H, T and O. Master of Science (Statistics), Major Field: Statistics, Department of Statistics. Thesis Advisor: Assistant Professor Boonorm Chomtee, Ph.D. 230 pages.

The main objective of this research was to compare type I error and power of the test for the three multinormality testing methods: H, T, and O, in known and unknown parameters for the three distributions which were multivariate normal distribution, multivariate lognormal distribution and multivariate student-t distribution. In the study, simulation technique was used to generate data for 2, 3, and 4 variables (p), for 20, 30, and 50 of sample sizes (n) at 0.05 and 0.10 significant levels (α). Each situation was simulated for 1,000 iterations. The results were as follows;

1. For type I error, in conditions of known and unknown parameters, normal distributions datum, and 2, 3, 4 variables, T statistic was the best method that can controll type I error in every sample sizes, co-variances, and significant levels. While O statistic can controll type I error when sample sizes equal to 30 and 50 in every co-variances, and significant levels. But H statistic can controll type I error for 2 variables, and every co-variances at 0.10 significant level.

2. For power of the test, the results were seperated into 2 parts as following: Part 1: For known parameters cases, T statistic was the maximum power of the test for sample sizes equal to 20, every variables, significant levels and distributions. For lognormal distribution datum, T statistic was not significantly different from O statistic in term of power of the test for sample sizes equal to 30 and 50, every variables, and significant levels. In case of student-t distribution datum, O statistic was the maximum power of the test when the sample sizes equal to 30, 50, and 2 variables. Furthermore, T statistic was not significantly different from O statistic when considered power of the test for 3, 4 variables, and every significant levels. Part 2: For unknown parameters cases, T statistic was the maximum power of the test when sample sizes equal to 20, every variables, significant levels, and distributions. For lognormal distribution datum, O statistic was the maximum power of the test when sample sizes equal to 30, and T statistic was not significantly different from O statistic when considered power of the test for sample sizes equal to 50, every variables, and significant levels, except O statistic was the maximum power of the test for 2 variables, and significant levels equal to 0.05. Finally, for student-t distribution datum, O statistic was the maximum power of the test when sample sizes equal to 30 and 50, every variables, and significant levels.

Penkhae Supatsaksakun
Student's signature

Boonorm Chomtee 28/ May/ 08
Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญอ้อม โฉมที่
ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์อนันต์ชัย เขื่อนธรรม กรรมการสาขา
วิชาเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์สาโรจน์ โอพิทักษ์ชีวิน กรรมการสาขาวิชาการอง ดร.วรัทยา ธรรมกิตติ
ภพ ดร.อำไพ ทองธีรภาพ และอาจารย์ประจำภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัย
เกษตรศาสตร์ทุกท่าน ที่ได้กรุณาใช้เวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา แนะนำ สั่งสอน ตลอดจนตรวจสอบ
แก้ไขวิทยานิพนธ์จนสำเร็จสมบูรณ์ ถูกต้อง และมีคุณค่าทางวิชาการต่อไป ผู้วิจัยขอกราบ
ขอบพระคุณอาจารย์ทุก ๆ ท่านเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อคุณแม่ และทุกคนในครอบครัว ที่คอยสนับสนุนทั้งทางด้าน
กำลังใจ และกำลังทรัพย์ด้านการศึกษาตลอดมา ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จ
ลุล่วงด้วยดี

ขอขอบคุณคณาจารย์ และเจ้าหน้าที่ ของวิทยาลัยสิ่งแวดล้อม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
และของโครงการศึกษาวิจัยและพัฒนาสิ่งแวดล้อมแหลมผักเบี้ยอันเนื่องมาจากพระราชดำริ รวมทั้ง
น้อง ๆ นิสิตปริญญาโท สาขาสถิติและสาขาวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ

เพ็ญแข สุพัฒน์ศักดิ์สกุล

เมษายน 2551

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(6)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	13
อุปกรณ์และวิธีการ	33
อุปกรณ์	33
วิธีการ	33
ผลและวิจารณ์	73
ผล	73
วิจารณ์	169
สรุปและข้อเสนอแนะ	191
สรุป	191
ข้อเสนอแนะ	196
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	198
ภาคผนวก	202
ภาคผนวก ก คำวิฤตสำหรับสถิติ H, T และ O	203
ภาคผนวก ข ตัวอย่างโปรแกรม SAS ที่ใช้ในงานวิจัย	213
ภาคผนวก ค ตัวอย่างข้อมูลจริงที่นำมาวิเคราะห์ด้วยสถิติทั้ง 3 วิธี คือ H, T และ O	227
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	230

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	แสดงข้อมูลขนาดตัวอย่าง 30 ตัวอย่าง ค่าความแปรปรวนร่วมเท่ากับ 0.3	39
2	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_1 ของ Y_1	42
3	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2	45
4	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3	47
5	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_1 ของ Y_1	56
6	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2	59
7	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3	61
8	แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีทราบ ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	75
9	แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีทราบ ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	77
10	แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีทราบ ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	81
11	แสดงสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ กรณี ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร	85
12	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จาก การทดลองในการทดสอบการแจกแจงลือกนอร์มอล 2 ตัวแปร กรณีทราบ ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	86
13	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จาก การทดลองในการทดสอบการแจกแจงลือกนอร์มอล 3 ตัวแปร กรณีทราบ ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	91

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
22	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงลือกนอร์มอล 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	134
23	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงลือกนอร์มอล 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	139
24	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงลือกนอร์มอล 4 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	145
25	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	152
26	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	157
27	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 4 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	163
28	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_1 ของ Y_1	173
29	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2	176
30	แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3	178
31	แสดงการเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และค่าอำนาจการทดสอบของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี	195

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางผนวกที่	หน้า
ก1 แสดงค่าไคสแควร์	204
ก2 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ $\{a_{n-i+1}\}$ ของสถิติทดสอบ W_F	206
ก3 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ แจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์	207
ก4 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ แจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์	208
ก5 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ แจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์	209
ก6 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ แจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์	211
ก7 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ O ในการทดสอบการ แจกแจงปกติหลายตัวแปร	212
ค1 แสดงข้อมูลตัวดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่ผ่านการบำบัดแล้วจำนวน 30 ตัวอย่าง	228

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ H กรณีทราบค่าพารามิเตอร์	25
2	ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ H กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์	25
3	ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ T กรณีทราบค่าพารามิเตอร์	28
4	ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ T กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์	29
5	ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ O กรณีทราบค่าพารามิเตอร์	32
6	ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ O กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์	32
7	ผังงานสำหรับคำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี	37
8	ผังงานสำหรับคำนวณค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี	38
9	แสดงการกระจายของข้อมูลทั้ง 3 ตัว	68
10	แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_1	69
11	แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_2	70
12	แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_3	71
13	แสดง Chi-square Plot ของการแจกแจงปกติสามตัวแปร	72
14	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	89
15	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	90
16	แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	95

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
17 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลือกนอร์มอล 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	96
18 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลือกนอร์มอล 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	102
19 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลือกนอร์มอล 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	103
20 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีวเคนท์-ที่ 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	107
21 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีวเคนท์-ที่ 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	108
22 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีวเคนท์-ที่ 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	113
23 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีวเคนท์-ที่ 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	114
24 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีวเคนท์-ที่ 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	120

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
25 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	121
26 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	137
27 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	138
28 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	143
29 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	144
30 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	150
31 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงล็อกนอร์มอล 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	151
32 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	155

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
33 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	156
34 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	161
35 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	162
36 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	167
37 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง	168
38 แสดงข้อมูลตัวดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่ผ่านการบำบัดแล้วจำนวน 30 ตัวอย่าง	186
39 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_1	187
40 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_2	188
41 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_3	189
42 แสดง Chi-square Plot ของการแจกแจงปกติสามตัวแปร	190

การเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี:

สถิติ H สถิติ T และสถิติ O

Comparison of the Three Multinormality Testing Methods: H, T and O

คำนำ

งานวิจัยหลายสาขาในปัจจุบัน มักจะศึกษาปัจจัยหรือตัวแปรหลายตัวแปรในคราวเดียวกัน เช่น ทางการแพทย์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ธุรกิจ การเกษตร และสังคมศาสตร์ เป็นต้น ซึ่งเทคนิคที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลของหลายตัวแปรหรือการวิเคราะห์ตัวแปรพหุ (Multivariate Analysis) มีหลายเทคนิค เช่น การวิเคราะห์กลุ่ม (Cluster Analysis) การวิเคราะห์จำแนกประเภท (Discriminant Analysis) การวิเคราะห์ความแปรปรวนหลายตัวแปร (Multivariate Analysis of Variance: MANOVA) การวิเคราะห์สหสัมพันธ์แคนอนนิคัล (Canonical Correlation Analysis) การวิเคราะห์ปัจจัย (Factor Analysis) การวิเคราะห์องค์ประกอบหลัก (Principle Component Analysis) เป็นต้น โดยส่วนใหญ่การวิเคราะห์เหล่านี้มักจะมีข้อสมมติเบื้องต้นว่า ประชากรมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการตรวจสอบข้อสมมติเบื้องต้นก่อนที่จะใช้เทคนิคการวิเคราะห์ข้อมูลสำหรับตัวแปรหลายตัวแปรดังกล่าวมาทำการวิเคราะห์ข้อมูล เพราะหากปรากฏว่าข้อมูลที่ศึกษามีการแจกแจงที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติหลายตัวแปร ซึ่งไม่สอดคล้องกับข้อสมมติเบื้องต้นแล้วนั้น การนำผลการศึกษาวิจัยไปใช้จะมีผลทำให้งานวิจัยนั้น ๆ ขาดความถูกต้อง

เนื่องจากได้มีผู้พัฒนาแบบทดสอบที่ใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรอย่างต่อเนื่อง โดยเริ่มพัฒนาตั้งแต่ปี ค.ศ. 1970 จนถึงปัจจุบัน เช่น แบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่พัฒนามาจากสถิติ Csorgo ที่เสนอโดย Kanta Naito (1996) หรือแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่พัฒนามาจากข้อมูลอนุกรมเวลา ที่เสนอโดย Takeaki Kariya, Ruey S. Tsay, Nobuhiko Terui และ Hong Li (1999) เป็นต้น นอกจากนี้ยังได้มีการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลาย ๆ วิธี ภายใต้ลักษณะการแจกแจงของประชากรแบบต่าง ๆ เช่น ในปี ค.ศ. 1996 Cokki Versluis ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์จำนวน 15 แบบทดสอบ และในปี ค.ศ. 1997 อรศรี ทองเปี่ยม ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบการแจก

แจกปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (1991) กับแบบทดสอบที่เสนอโดย Kanta Naito (1996) ทั้งกรณีที่มีค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เป็นต้น ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าแบบทดสอบเหล่านี้มีประโยชน์ต่อการทำการวิจัยด้านต่าง ๆ เป็นอย่างมาก ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี คือ สถิติ H ที่เสนอโดย J. P. Royston (1983) ซึ่งเป็นสถิติที่พัฒนามาจากสถิติ Shapiro-Wilk แต่ไม่ได้ทำการทดสอบในกรณีที่จำนวนตัวแปรมากกว่า 3 ตัวแปร สถิติ T ที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (1991) ซึ่งพัฒนามาจากสถิติ Rao Score โดยการคำนวณสถิติ T นี้ขึ้นอยู่กับโมเมนต์ที่ 3 และโมเมนต์ที่ 4 และสถิติ O ที่เสนอโดย Charles L. Dunn (1995)

วัตถุประสงค์

การวิจัยในครั้งนี้ใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี คือ สถิติ H ที่เสนอโดย J. P. Royston (1983) สถิติ T ที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (1991) และสถิติ O ที่เสนอโดย Charles L. Dunn (1995) ในกรณีที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของประชากรที่มีการแจกแจงแบบต่าง ๆ 3 แบบ คือ การแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) การแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร (Multivariate Lognormal Distribution) และการแจกแจงสทิวเดนต์-ทีหลายตัวแปร (Multivariate Student-t Distribution) ซึ่งมีวัตถุประสงค์ดังต่อไปนี้

1. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I error) ของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี

สมมติฐานของการวิจัย

ภายใต้ลักษณะการแจกแจงของประชากรแบบต่าง ๆ และสถานการณ์ที่แตกต่างกัน เช่น จำนวนตัวแปร ขนาดตัวอย่างต่าง ๆ กัน เป็นต้น มีผลทำให้ความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรแตกต่างกัน

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้ทำการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนด โดยใช้โปรแกรม SAS 9.1 (Statistical Analysis System version 9.1) ซึ่งสถานการณ์ต่าง ๆ ประกอบด้วย

1. การเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I error) ของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี คือ วิธีการทดสอบที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) วิธีการทดสอบที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) และวิธีการทดสอบที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995)
2. การเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี โดยกำหนดให้ประชากรมีการแจกแจง 2 แบบ คือ การแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบเบ้ขวา และการแจกแจงสวิตเดนซ์-ทีหลายตัวแปร ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบสมมาตร
3. จำนวนตัวแปรหลายตัวแปรที่ศึกษาพร้อมกัน (p) เท่ากับ 2, 3 และ 4
4. ขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษาเท่ากับ 20, 30 และ 50 ซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลขนาดเล็ก กลาง และใหญ่ ตามลำดับ
5. กำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ (Level of Significance, α) 2 ระดับ คือ 0.05 และ 0.10
6. เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กำหนดค่าของพารามิเตอร์เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ และกรณีที่ไมทราบค่าพารามิเตอร์ ดังต่อไปนี้
 - 6.1 กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์

6.1.1 สำหรับ 2 ตัวแปร ($p = 2$) พารามิเตอร์ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และ เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Σ) = $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ 3 แบบ โดยแบ่งเป็น

$$\text{ความแปรปรวนร่วมต่ำเท่ากับ 0.3 คือ } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ความแปรปรวนร่วมกลางเท่ากับ 0.6 คือ } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และความแปรปรวนร่วมสูงเท่ากับ 0.9 คือ } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ σ_{ij} หมายถึง ความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปร x_i กับ x_j และ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; $i, j = 1, 2$

หมายเหตุ: เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบต่าง ๆ กรณี 2 ตัวแปร แสดงได้ดังนี้

แบบที่ 1 มีค่าความแปรปรวนร่วมต่ำ $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma = 0.3$

แบบที่ 2 มีค่าความแปรปรวนร่วมกลาง $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma = 0.6$

แบบที่ 3 มีค่าความแปรปรวนร่วมสูง $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma = 0.9$

6.1.2 สำหรับ 3 ตัวแปร ($p = 3$) พารามิเตอร์ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และ เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Σ) = $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ 7 แบบ โดยแบ่งเป็น

ความแปรปรวนร่วมเท่ากันมี 3 แบบ ซึ่งได้แก่

$$\text{ความแปรปรวนร่วมต่ำเท่ากับ 0.3 คือ } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ความแปรปรวนร่วมกลางเท่ากับ 0.6 คือ } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ความแปรปรวนร่วมสูงเท่ากับ 0.9 คือ } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

และความแปรปรวนร่วมไม่เท่ากันมี 4 แบบ ซึ่งได้แก่

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.9 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ σ_{ij} หมายถึง ความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปร x_i กับ x_j และ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; $i, j = 1, 2, 3$

หมายเหตุ: เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบต่าง ๆ กรณี 3 ตัวแปร แสดงได้ดังนี้

แบบที่ 1 มีค่าความแปรปรวนร่วมต่ำ $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.3$

แบบที่ 2 มีค่าความแปรปรวนร่วมกลาง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.6$

แบบที่ 3 มีค่าความแปรปรวนร่วมสูง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.9$

แบบที่ 4 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.3$ และ $\sigma_{23} = 0.6$

แบบที่ 5 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.3$ และ $\sigma_{23} = 0.9$

แบบที่ 6 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.6$ และ $\sigma_{23} = 0.9$

แบบที่ 7 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = 0.3, \sigma_{13} = 0.6$ และ $\sigma_{23} = 0.9$

6.1.3 สำหรับ 4 ตัวแปร ($p = 4$) พารามิเตอร์ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และ

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Σ) = $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$ 8 แบบ โดยแบ่งเป็น

ความแปรปรวนร่วมเท่ากันมี 3 แบบ ซึ่งได้แก่

ความแปรปรวนร่วมต่ำเท่ากับ 0.3 คือ $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$

ความแปรปรวนร่วมกลางเท่ากับ 0.6 คือ $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$

ความแปรปรวนร่วมสูงเท่ากับ 0.9 คือ $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$

และความแปรปรวนร่วมไม่เท่ากันมี 5 แบบ ซึ่งได้แก่

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 1 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 1 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.3 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.6 & 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.6 & 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

โดยที่ σ_{ij} หมายถึง ความแปรปรวนร่วมระหว่างตัวแปร x_i กับ x_j และ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}; i, j = 1, 2, 3, 4$

หมายเหตุ: เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบต่าง ๆ กรณี 4 ตัวแปร แสดงได้ดังนี้

แบบที่ 1 มีค่าความแปรปรวนร่วมต่ำ $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.3$

แบบที่ 2 มีค่าความแปรปรวนร่วมกลาง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.6$

แบบที่ 3 มีค่าความแปรปรวนร่วมสูง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.9$

แบบที่ 4 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0.3$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.6$$

แบบที่ 5 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{34} = 0.6$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = 0.3$$

แบบที่ 6 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = 0.6$ และ

$$\sigma_{34} = 0.3$$

แบบที่ 7 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0.3$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.9$$

แบบที่ 8 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0.6$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.9$$

6.2 กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ จะประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธี Maximum Likelihood ดังนี้

$$\text{ค่าประมาณของ } \mu \text{ คือ } \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{ค่าประมาณของ } \Sigma \text{ คือ } \hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' = \frac{(n-1)S}{n}$$

$$\text{เมื่อ } S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$$

โดยที่ $\bar{x}$ และ S เป็นสถิติที่มีคุณสมบัติความพอเพียง (Sufficient Statistics)

7. ตารางสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

7.1 สถิติทดสอบ H

7.1.1 กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ใช้ตารางค่าวิกฤตไคสแควร์

7.1.2 กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ใช้ตารางค่าวิกฤตไคสแควร์

7.2 สถิติทดสอบ T

7.2.1 กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง จำลองข้อมูลโดยทำซ้ำ 13,500 ครั้งในแต่ละขนาดตัวอย่าง

7.2.2 กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ใช้ตารางค่าวิกฤตของสถิติทดสอบ T ที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent

7.3 สถิติทดสอบ O

7.3.1 กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ใช้ตารางค่าวิกฤตของสถิติทดสอบ O ที่เสนอโดย Charles L. Dunn

7.3.2 กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ใช้ตารางค่าวิกฤตของสถิติทดสอบ O ที่เสนอโดย Charles L. Dunn

8. การประมาณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 กำหนดจำนวนซ้ำของการตรวจสอบเท่ากับ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

9. การหาค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบแต่ละวิธีทำซ้ำจำนวน 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

ลักษณะการแจกแจงของประชากร

กำหนดให้ $\mathbf{x}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องแบบหลายตัวแปร สามารถเขียน $\mathbf{x}$ ได้ดังนี้ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ โดยที่ p คือ จำนวนตัวแปร

ลักษณะการแจกแจงของประชากรทั้ง 3 แบบที่ศึกษาในการวิจัยครั้งนี้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

มีพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\mu}$ และ $\boldsymbol{\Sigma}$ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\mathbf{x}$ เป็นดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right]; -\infty < \mathbf{x} < \infty, -\infty < \boldsymbol{\mu} < \infty, \boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu}$ แทน เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย

$\boldsymbol{\Sigma}$ แทน เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม

2. การแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร (Multivariate Lognormal Distribution)

มีพารามิเตอร์ μ และ Σ จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\mathbf{x}$ เป็นดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\ln \mathbf{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\ln \mathbf{x} - \mu) \right] ; \mathbf{0} < \mathbf{x} < \infty, -\infty < \mu < \infty, \Sigma > \mathbf{0}$$

โดยที่ μ แทน เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย

Σ แทน เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม

3. การแจกแจงสตีวเคนท์-ทีหลายตัวแปร (Multivariate Student-t Distribution)

มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ v จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\mathbf{x}$ เป็นดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+p}{2}\right)}{(v\pi)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{v} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{v+p}{2}} ; -\infty < \mathbf{x} < \infty$$

โดยที่ v แทน องศาความเป็นอิสระ

Σ แทน เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม

คำจำกัดความ

ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I error) คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปฏิเสธสมมติฐานว่าง (H_0) เมื่อสมมติฐานว่างนั้นเป็นจริง และความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดนี้เขียนแทนด้วย α

ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2 (Type II error) คือ ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการยอมรับสมมติฐานว่าง (H_0) เมื่อสมมติฐานว่างนั้นไม่จริง และความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดนี้เขียนแทนด้วย β

อำนาจการทดสอบ (Power of the test) คือ ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อสมมติฐานว่างนั้นไม่จริง และเขียนแทนด้วย $1-\beta$ เมื่อ β คือ ความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในงานวิจัย

p	หมายถึง จำนวนตัวแปร
n	หมายถึง ขนาดตัวอย่าง
x	หมายถึง ค่าสังเกต
$\mathbf{x}$	หมายถึง เวกเตอร์ของตัวแปรสุ่ม
$\mathbf{X}$	หมายถึง เมตริกซ์ของตัวแปรสุ่ม
$\bar{\mathbf{x}}$	หมายถึง เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง
$\mathbf{S}$	หมายถึง เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง
μ	หมายถึง เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของประชากร
Σ	หมายถึง เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร
H	หมายถึง วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston
T	หมายถึง วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent
O	หมายถึง วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ผู้วิจัยคาดว่าจะในการศึกษาครั้งนี้จะทำให้ได้ผลสรุปว่าวิธีการทดสอบใดจากทั้ง 3 วิธี คือ สถิติ H, T, O ให้อำนาจการทดสอบสูงที่สุด และแต่ละวิธีการทดสอบมีความเหมาะสมกับข้อมูลแบบใด เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้ทำการวิจัยในสาขาต่าง ๆ ได้นำผลจากการวิจัยนี้ไปประยุกต์กับข้อมูลแต่ละประเภทได้อย่างถูกต้องเหมาะสมต่อไป

สถานที่และระยะเวลาทำการวิจัย

สถานที่ที่ใช้ในการทำวิจัยครั้งนี้ คือ ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์ และห้องพินิจคดีปริญา
โท ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ และระยะเวลาที่ใช้ในการทำวิจัย
ครั้งนี้ คือ ตั้งแต่เดือนมกราคม พ.ศ. 2549 ถึงเดือนกุมภาพันธ์ พ.ศ. 2551

การตรวจเอกสาร

การตรวจเอกสารจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 กล่าวถึงผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ ส่วนที่ 2 จะกล่าวถึงวิธีการทดสอบที่ใช้ในงานวิจัย

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Mardia (1970) ได้เสนอสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้ของหลายตัวแปร ($\beta_{1,p}$) และสัมประสิทธิ์ความโค้งของหลายตัวแปร ($\beta_{2,p}$) ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร พร้อมทั้งแสดงการแจกแจงของสถิติทดสอบ $b_{1,p}$ และ $b_{2,p}$ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ พบว่า เป็นแบบทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบสูง

Malkovich and Afifi (1973) ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 5 วิธี ซึ่งพัฒนามาจากสถิติทดสอบการแจกแจงปกติตัวแปรเดียว คือ สถิติที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้ (b_1^*) สถิติที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความโค้ง (b_2^*) สถิติทดสอบ Shapiro-Wilk (W) สถิติทดสอบ Kolmogorov-Smirnov (KS) และสถิติทดสอบของ Cramer-Von Mises (CM) โดยใช้เทคนิค Monte Carlo จำลองข้อมูลให้มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3 และ 5 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 25 และ 50 กำหนดสมมติฐานรองให้มีการแจกแจง 3 ชนิด คือ การแจกแจง Log N(0,1) การแจกแจง Uniform U(0,1) และการแจกแจง Student-t (t_4) พบว่าเมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 สถิติ KS และสถิติ CM มีอำนาจการทดสอบใกล้เคียงกัน แต่ไม่ได้เป็นสถิติทดสอบที่มีประสิทธิภาพดีกว่าสถิติ b_1^* , b_2^* หรือ W และแนะนำให้มีการศึกษาเพิ่มเติมในการสร้างตารางค่าวิกฤตเพื่อแสดงความแตกต่างของอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเหล่านี้

Srivastava and Zaatar (1973) ได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Σ) 4 แบบ คือ $E_1 = \hat{\sigma}_{ij}$, $E_2 = \sigma_{ij}^+$, $E_3 = \sigma_{ij}^*$ และ $E_4 = \hat{\sigma}_{ij}$ ของข้อมูลประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปร โดยใช้เทคนิค Monte Carlo จำลองข้อมูลและเปรียบเทียบที่ขนาดตัวอย่าง (n) และระดับสหสัมพันธ์ (ρ) ต่าง ๆ กัน พบว่า $\hat{\sigma}_{ij}$ เป็นตัวประมาณ

ค่าที่ดีที่สุดเมื่อค่าสหสัมพันธ์ต่ำ และ $\hat{\sigma}_{ij}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าแบบ Maximum Likelihood ($\hat{\sigma}_{ij}$) เป็นตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดเมื่อสหสัมพันธ์มีค่าสูง

Cox and Small (1978) ได้เสนอแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์เชิงเส้นของสมการถดถอยในรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรกำลังสองลักษณะต่าง ๆ กัน การทดสอบสมมติฐานใช้วิธีพล็อตกราฟ เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรว่ามีจุดใดบนกราฟเบี่ยงเบนออกไปจากแนวเส้นตรงบ้าง โครงสร้างของกราฟจะบ่งชี้ถึงการแจกแจงปกติหลายตัวแปรของตัวอย่าง และอาจจะบอกถึงรูปแบบการแปลงข้อมูลที่เหมาะสมได้ ข้อดีของแบบทดสอบนี้ก็คือพิจารณาบนพื้นฐานขององศาความเป็นอิสระเท่ากับหนึ่ง และให้รายละเอียดได้ดีถ้าพบว่าการแจกแจงของตัวอย่างไม่เป็นแบบปกติหลายตัวแปร

Small (1978) ได้ปรับปรุงแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่ใช้วิธีพล็อตกราฟของสถิติลำดับ Squared Radii (r_i^2) เทียบกับค่าคาดหวัง โดยกำหนดสมมติฐานว่างให้มีการแจกแจงเบต้าแทนการแจกแจงไคสแควร์ พบว่าเป็นแบบทดสอบที่มีประสิทธิภาพสูงพอสมควรแม้ว่าการแจกแจงแบบเบต้าให้ค่าประมาณต่ำกว่าที่ควรจะเป็น

Small (1980) ได้เสนอสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้ของหลายตัวแปร (Q_1) และสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความโด่งของหลายตัวแปร (Q_2) ซึ่งพัฒนามาจากสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้ และสัมประสิทธิ์ความโด่งสำหรับหนึ่งตัวแปร เมื่อสมมติฐานว่างคือ การแจกแจงของสถิติ Q_1 และ Q_2 ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น p เมื่อขนาดตัวอย่างมากกว่า 29 และจำนวนตัวแปรตั้งแต่ 2 ถึง 8 นอกจากนี้ Small ยังเสนอแนะให้ใช้สถิติทดสอบ $Q = Q_1 + Q_2$ ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร และเมื่อสมมติฐานว่างคือ $H_0 : Q = Q_1 + Q_2 \sim \chi_{2p}^2$ การแจกแจงของสถิติ Q ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น $2p$

Lin and Mudholkar (1980) ได้พัฒนาสถิติเพื่อใช้ทดสอบการแจกแจงปกติ คือ สถิติ Z และได้เปรียบเทียบกำลังการทดสอบของสถิติ Z กับสถิติอื่น ๆ 5 วิธี คือ สถิติทดสอบ Kolmogorov-Smirnov สถิติทดสอบ Cramer-von Mises สถิติทดสอบ Vasicek สถิติทดสอบ Shapiro-Wilk และสถิติที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้ ($\sqrt{b_1}$) เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 10, 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 โดยกำหนดการแจกแจงที่ศึกษา 13 ชนิด ได้แก่ Beta(2,1), Beta(3,2),

Weibull ($\alpha = 2$), Weibull ($\alpha = 0.5$), Exponential, Gamma ($\alpha = 2$), Gamma ($\alpha = 3$), Gamma ($\alpha = 5$), Lognormal ($\sigma = \frac{1}{4}$), Lognormal ($\sigma = \frac{1}{2}$), Lognormal ($\sigma = 1$), Noncentral $t(\delta = 1, v = 2)$, และ Noncentral $t(\delta = 1, v = 4)$ พบว่าสถิติ Z มีอำนาจการทดสอบสูงสุดเมื่อเทียบกับสถิติทดสอบอื่น ๆ ยกเว้นกรณีการแจกแจงเบต้าที่มีหางสั้น

Hawkins (1981) ได้เสนอวิธีการสำหรับทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรและทดสอบความแปรปรวนคงที่ (Homoscedasticity) ซึ่งเป็นสถิติที่ค่อนข้างง่ายต่อการคำนวณ และเป็นแบบทดสอบที่มีประสิทธิภาพ โดยให้ข้อเสนอแนะว่าเมื่อสมมติฐานของการทดสอบถูกปฏิเสธ (H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงปกติและความแปรปรวนคงที่ตามข้อสมมติเบื้องต้น) ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงไม่เป็นปกติ Hawkins แนะนำให้แก้ปัญหาโดยการแปลงข้อมูลแล้วทดสอบความแปรปรวนคงที่ซ้ำอีกครั้งหนึ่ง หรืออาจจะใช้สถิติทดสอบนอนพารามตริก แต่ถ้าข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติและมีปัญหาความแปรปรวนไม่คงที่อาจใช้วิธีวิเคราะห์ Quadratic Discriminant

Murota and Takeuchi (1981) ได้เสนอสถิติทดสอบที่ใช้กำลังสองของค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชันแคแรคเตอริสติก (The Squared Modulus of The Studentized Empirical Characteristic Function) เพื่อทดสอบการแจกแจงปกติ และสรุปว่าสถิติทดสอบที่เสนอมีประสิทธิภาพมากกว่าหรือเท่ากับสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความโค้งของตัวอย่าง

Machado (1983) ได้ปรับปรุงแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Malkovich และ Afifi (ในปี ค.ศ. 1973) โดยการแปลงสถิติทดสอบให้สามารถเข้าสู่การแจกแจงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (Asymptotic Distribution) และแสดง Percentage Point สำหรับขนาดตัวอย่างมากกว่า 8 และตัวแปรเท่ากับ 2, 3 และ 4

Royston (1983) ได้เสนอสถิติทดสอบ H ซึ่งพัฒนามาจากสถิติ Shapiro-Wilk เพื่อใช้ทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร และแสดงว่าภายใต้สมมติฐานว่าง (H_0 : สถิติ $H \sim \chi^2_{(e)}$) การแจกแจงสถิติทดสอบประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น e เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และ 3 แต่ในกรณีที่จำนวนตัวแปรมากกว่า 3 Royston ไม่ได้ทำการทดสอบไว้

Epps and Pulley (1983) ได้เสนอสถิติทดสอบที่ใช้อินทิกรัลถ่วงน้ำหนักของ Characteristic Function เพื่อทดสอบการแจกแจง Normal และแสดงว่าสถิติที่เสนอมีอำนาจการทดสอบสูง (อ้างถึงใน อรศรี, 2540)

Srivastava (1984) ได้เสนอสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้ (b_{1p}^2) และสัมประสิทธิ์ความโค้ง (b_{2p}) ของหลายตัวแปร ซึ่งคำนวณจากสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโค้งของ Principal Components ที่สกัดจากเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม และการใช้กราฟในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

Sandor Csorgo (1986) ได้นำทฤษฎีการลู่เข้าหนึ่งตัวแปรของ Kazuo Murota และ Kei Takeuchi มาปรับปรุงฟังก์ชัน Empirical Characteristic p ตัวแปร เพื่อทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร และพบว่าสถิติที่ Csorgo เสนอนี้สามารถทดสอบได้ทุกการแจกแจงที่มีตัวอย่างขนาดใหญ่ (อ้างถึงใน อรศรี, 2540)

Srivastava and Hui (1987) ได้เสนอสถิติทดสอบ M_1 และ M_2 ที่พัฒนามาจากสถิติ Shapiro-Wilk โดยใช้ Principal Components และแสดงการแจกแจงของสถิติ M_1 และ M_2 เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ซึ่งใช้เทคนิค Monte Carlo จำลองข้อมูลขนาดตัวอย่าง 10, 25 และ 50 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 4 และ 6 พบว่าภายใต้สมมติฐานว่าง (H_0 : สถิติ $M_1, M_2 \sim \chi_{(p)}^2$) การแจกแจงของ M_1 และ M_2 ประมาณได้ด้วยการแจกแจงโคสเคอร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น p

Ozturk (1991) ได้นำเสนอสถิติ $Q_n^{(k)}$ เพื่อใช้ทดสอบการแจกแจงปกติ สำหรับกรณีหนึ่งตัวแปรและหลายตัวแปร โดยวิธีการเปรียบเทียบกราฟของ $Q_n^{(k)}$ ที่ได้จากข้อมูลตัวอย่างกับการแจกแจงหนึ่งตัวแปร ซึ่งแสดงถึงอำนาจการทดสอบ และสามารถระบุการแจกแจงที่แท้จริงของข้อมูลตัวอย่างจากกราฟที่ได้ด้วย จากการศึกษาอำนาจการทดสอบโดยศึกษาการแจกแจง 7 ชนิด คือ การแจกแจง Normal การแจกแจง Uniform การแจกแจง Exponential การแจกแจง Laplace การแจกแจง Logistic การแจกแจง Cauchy และการแจกแจง Extreme Value ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 25 โดยศึกษารูปแบบสถิติมาตรฐาน $Q_n^{(1)}, Q_n^{(2)}, \dots, Q_n^{(9)}$ เมื่อ $k = 1, \dots, 9$ พบว่าชนิดของสถิติมาตรฐานมีอิทธิพลต่ออำนาจการทดสอบสูง ดังนั้นเราสามารถเพิ่มอำนาจการทดสอบให้สูงขึ้นโดยการเลือกชนิดของสถิติมาตรฐานที่เหมาะสมกับการแจกแจงต่าง ๆ และจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพการ

ทดสอบของสถิติ $Q_n^{(9)}$ กับสถิติ Shapiro-Wilk (W) โดยศึกษาการแจกแจง 35 ชนิด ขนาดตัวอย่าง 15, 35 และ 50 พบว่าอำนาจการทดสอบของสถิติ $Q_n^{(9)}$ ไม่แตกต่างกับของสถิติ W

Mardia and Kent (1991) ได้นำเสนอวิธีการทดสอบสำหรับใช้ทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร และทดสอบความเป็นอิสระกันระหว่างตัวแปร โดยพัฒนามาจากสถิติ Rao Score

Ozturk and Romeu (1992) ได้พัฒนาแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร โดยขยายแนวความคิดจากแบบทดสอบการแจกแจงปกติกรณีตัวแปรเดียวโดยใช้กราฟซึ่งเสนอโดย Ozturk และ Dudewicz ในปี ค.ศ. 1990 และ Ozturk ในปี ค.ศ. 1991 การทดสอบที่ใช้กราฟกำหนดให้ $Q_n = (U_n, V_n)$ โดยที่ U_n และ V_n คือ โคออร์ดิเนตของ Q_n ที่ได้จากฟังก์ชันของสถิติลำดับของตัวอย่าง สถิติ Q_n จะถูกแทนที่โดย Linked Vector ใน 2 มิติ และทำการวิเคราะห์กราฟโดยตรวจสอบว่าจุดปลายของ Q_n ตกอยู่ในช่วงความเชื่อมั่นหรือไม่ จากการศึกษาตัวอย่าง 4 ขนาด คือ 25, 50, 100 และ 200 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 4 และ 8 ตัวแปร สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เท่ากับ 0.5 และ 0.9 โดยศึกษาการแจกแจง 10 ชนิด คือ การแจกแจง Uniform การแจกแจง Chi-square การแจกแจง Student-t การแจกแจง Generalized Lambda การแจกแจง Kinchine การแจกแจง Morgenstern การแจกแจง Pearson Families II และ VII การแจกแจง Bivariate Regression และการแจกแจง Mixtures of Normals ศึกษาที่ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.10, 0.05 และ 0.01 พบว่าอำนาจการทดสอบของ Q_n จะเพิ่มขึ้นตามขนาดของตัวอย่าง และระดับความไม่เป็นปกติของการแจกแจง จากการศึกษาพบว่าสถิติ Q_n เป็นแบบทดสอบหนึ่งที่ได้รับผลกระทบน้อยมากจากความสัมพันธ์ระหว่าง p ตัวแปร และมีอำนาจการทดสอบสูง เมื่อระดับของความไม่เป็นปกติของข้อมูลสูง

Mudholkar *et al.* (1992) ได้พัฒนาแบบทดสอบการแจกแจงปกติหนึ่งตัวแปร คือ สถิติ Z ซึ่งนำเสนอโดย Lin และ Mudholkar ในปี ค.ศ. 1980 เพื่อใช้ทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร คือ สถิติ Z_p และได้ศึกษาอำนาจการทดสอบของ Z_p โดยใช้เทคนิค Monte Carlo จำลองข้อมูลตัวอย่าง 5,000 ชุด ขนาดตัวอย่างเป็น 10, 20 และ 50 เมื่อจำนวนตัวแปรต่าง ๆ กัน พบว่าสถิติทดสอบ Z_p สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดี เมื่อจำนวนตัวแปรน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 และขนาดตัวอย่างมากกว่า 10 หรือจำนวนตัวแปรเท่ากับ 6 และขนาดตัวอย่างมากกว่าหรือเท่ากับ 15 โดยกำหนดระดับนัยสำคัญเป็น 0.20, 0.15, 0.10, 0.05 และ 0.01 และสถิติ Z_q มีกำลังการทดสอบต่ำ เมื่อเทียบกับการแจกแจง Morgenstern Normal Marginal กรณีสองตัวแปร

Landry and Lepage (1992) ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบต่าง ๆ ภายใต้สมมติฐานของการแจกแจงแบบ Beta การแจกแจงแบบ Cauchy การแจกแจงแบบ Weibull การแจกแจงแบบ Chi-square การแจกแจงแบบ Lognormal และการแจกแจงแบบ Student-t เป็นต้น ผลการศึกษาพบว่าแบบทดสอบของ Kazuo Murota & Kei Takeuchi และ T. W. Epps & Lawrence B. Pulley เหมาะสมกับการแจกแจงที่มีสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโค้งใกล้เคียงกับการแจกแจงปกติ เช่น การแจกแจง Student-t ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ 10 ส่วนกรณีที่มีขนาดตัวอย่างน้อย แบบทดสอบ Kolmogorov จะมีประสิทธิภาพสูง (อ้างถึงใน อรศรี, 2540)

วรรณิ (2538) ได้รวบรวมบทความเกี่ยวกับแบบทดสอบภาวะสารูปสนิทธิที่ค้นคว้าในระหว่างปี ค.ศ. 1989-1993 จำนวน 65 บทความ และได้ศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบทดสอบ 8 วิธี คือ แบบทดสอบ Kolmogorov-Smirnov (D_n) แบบทดสอบ Modified Kolmogorov-Smirnov (S_n) สำหรับ Delta-Collected Kolmogorov-Smirnov แบบทดสอบ Kolmogorov-Smirnov สำหรับความแปรปรวน (G) แบบทดสอบที่ใช้ Kullback Leibler Information (A^*) แบบทดสอบ M_n แบบทดสอบ Modified Kolmogorov-Smirnov สำหรับข้อมูลสูญหาย ($D_{n,f}$) และแบบทดสอบ Kolmogorov-Smirnov สำหรับข้อมูลสูญหาย ($K_{n,a}$) สำหรับการทดสอบการแจกแจง Normal และการแจกแจง Exponential ทั้งกรณีที่มีทราบค่าพารามิเตอร์และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ โดยกำหนดให้สมมติฐานรองของการทดสอบเป็นการแจกแจง Normal การแจกแจง Double Exponential การแจกแจง Logistic การแจกแจง Exponential การแจกแจง Weibull และการแจกแจง Gamma ศึกษาโดยการจำลองข้อมูลขนาดตัวอย่าง 5, 10 และ 20 ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 ทำซ้ำ 500 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ ผลการศึกษาพบว่า แบบทดสอบที่ใช้ Kullback Leibler Information มีอำนาจการทดสอบสูงสุด สำหรับกรณีสมมติฐานว่างเป็นการแจกแจง Normal และการแจกแจง Exponential กรณีทราบค่าพารามิเตอร์เมื่อขนาดตัวอย่าง 10 ถึง 50 และข้อมูลซ้ำกันไม่เกิน 2 ค่า ส่วนกรณีข้อมูลสูญหายเมื่อสมมติฐานว่างเป็นการแจกแจง Exponential ที่ทราบค่าพารามิเตอร์ แบบทดสอบ Kolmogorov-Smirnov ให้อำนาจการทดสอบสูงสุด

Looney (1995) ได้แสดงวิธีทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรโดยใช้สถิติทดสอบการแจกแจงปกติสำหรับหนึ่งตัวแปร ซึ่งใช้สถิติทดสอบที่เสนอโดย Royston (H) ซึ่งพัฒนามาจากสถิติ Shapiro-Wilk ในปี ค.ศ. 1983 สถิติทดสอบ Q_1 และ Q_2 ที่เสนอโดย Small ในปี ค.ศ. 1980 ซึ่งพัฒนามาจากสถิติทดสอบที่ใช้วัดสัมประสิทธิ์ความเบ้และสัมประสิทธิ์ความโค้ง สถิติทดสอบที่

เสนอโดย Srivastava ในปี ค.ศ. 1984 และสถิติทดสอบที่เสนอโดย Srivastava และ Hui ในปี ค.ศ. 1987 โดยแสดงตัวอย่างให้เห็นว่าการแปลงข้อมูลจะสามารถเพิ่มประสิทธิภาพของการทดสอบได้

Mudholkar *et al.* (1995) ได้นำเสนอแบบทดสอบการแจกแจงปกติ p ตัวแปร ซึ่งพัฒนามาจากแบบทดสอบการแจกแจงปกติ ตัวแปรเดียวของ Shapiro-Wilk (W) โดยการนำเสนอสถิติทดสอบใน 4 รูปแบบ คือ W_N , W_F , W_L และ W_T โดยที่ N , F , L และ T หมายถึงวิธีการของ Liptak, Fisher, Logit และ Tippet จากการศึกษพบว่าแบบทดสอบทั้งสี่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดี และจากการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการทดสอบกับสถิติทดสอบ Z_p ที่เสนอโดย Mudholkar, McDermott และ Srivastava ในปี ค.ศ. 1992 และสถิติทดสอบ S_W^2 ที่เสนอโดย Mardia และ Foster ในปี ค.ศ. 1983 โดยการจำลองข้อมูลขนาดตัวอย่าง 20, 30 และ 50 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และ 3 จากประชากร p ตัวแปรที่มีการแจกแจง $N_p(0, \Sigma)$ โดยที่ Σ มีสมาชิกตามแนวทแยงเป็น 1 นอกนั้นเป็น 0.5 ศึกษาแบบการแจกแจงหลายตัวแปร 5 ชนิด คือ การแจกแจง Chi-square การแจกแจง t และ Cauchy การแจกแจง Contaminated Normal การแจกแจง Lognormal และการแจกแจง Burr-Pareto-Logistic ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.01 ผลการศึกษาพบว่า สถิติทดสอบ S_W^2 ที่นำเสนอสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดี เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าสถิติทดสอบ Z_p ซึ่ง S_W^2 ในเกือบทุกกรณีได้สถิติทดสอบ W_F มีอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือ สถิติ W_L , W_T และ W_N ตามลำดับ

Chakak and Koehler (1995) ได้เสนอวิธีการสร้างชุดข้อมูลตัวอย่างให้มีการแจกแจงหลายตัวแปรจากตัวอย่างที่มีการแจกแจง Marginal หนึ่งตัวแปร และการแจกแจง Marginal สองตัวแปร

Dunn (1995) ได้นำเสนอสถิติ Bimodal (B) และสถิติ Omnibus (O) เพื่อใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรเมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ และได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบเทียบกับสถิติทดสอบอื่น ๆ 3 วิธี คือ สถิติ Rayleigh (R) สถิติ Ajne (A) และสถิติ Gine' (G) โดยจำลองข้อมูลขนาดตัวอย่าง 30, 50, 70 และ 100 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3, 4, 5 และ 6 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 โดยกำหนดสมมติฐานรองให้มีการแจกแจงต่าง ๆ 21 แบบ ผลการศึกษาพบว่า เมื่อสมมติฐานรองมีการแจกแจง Bimodal สถิติ Bimodal และ Gine' มีอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติ Omnibus เมื่อสมมติฐานรองมีการแจกแจงแบบเบ้ สถิติ Ajne และ Rayleigh มีอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติ Omnibus เมื่อสมมติฐานรองมีการแจกแจง

Elliptical สถิติ Rayleigh และ Ajne มีอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติ Omnibus, Bimodal และ Gine' ตามลำดับ เมื่อสมมติฐานรองมีการแจกแจง Omnibus สถิติ Omnibus มีอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติ Bimodal , Gine' , Ajne และ Rayleigh ตามลำดับ

Versluis (1996) ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์จำนวน 15 แบบทดสอบ โดยเทคนิค Monte Carlo จำลองข้อมูลให้มีการแจกแจง Uniform การแจกแจง Lognormal การแจกแจง Student-t และการแจกแจง Gamma เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 พบว่า Shapiro-Wilk-Stephens (SWS) มีอำนาจการทดสอบสูงสำหรับการแจกแจง ส่วนสถิติ Shapiro-Wilk-Malkovich (SWM) และสถิติ Malkovich (b_1) ให้อำนาจการทดสอบสูง เมื่อสมมติฐานรองเป็นการแจกแจง Lognormal และการแจกแจง Gamma แต่จะให้อำนาจการทดสอบต่ำเมื่อสมมติฐานรองเป็นการแจกแจง Uniform (อ้างถึงใน อรศรี, 2540)

Naito (1996) ได้เสนอแบบทดสอบการแจกแจงปกติ p ตัวแปร โดยใช้อินทิกรัลถ่วงน้ำหนักของกำลังสองของค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชันแคแรคเตอร์ิสติก (Weighted Integral of the Squared Modulus of The Studentized Empirical Characteristic Function) และศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบที่เสนอกับแบบทดสอบของ Kazuo Murota และ Kei Takeuchi แบบทดสอบของ T. W. Epps และ Lawrence B. Pulley แบบทดสอบ Shapiro-Wilk และแบบทดสอบสัมประสิทธิ์ความโค้งของ Mardia พบว่าในกรณีที่ทำการทดสอบการแจกแจงปกติ 1 ตัวแปร แบบทดสอบที่เสนอมีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับแบบทดสอบต่าง ๆ ส่วนกรณีที่ทำการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร พบว่าแบบทดสอบที่เสนอมีประสิทธิภาพมากกว่า หรือเท่ากับแบบทดสอบสัมประสิทธิ์ความโค้งของ Mardia

เสาวลักษณ์ (2540) ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่พัฒนามาจากสถิติ Rao Score ที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) แบบทดสอบที่พัฒนามาจากสถิติ Shapiro-Wilk ที่เสนอโดย Govind S. Mudholkar, Deo Kumar Srivastava และ C. Thomas Lin (W_F , 1995) และแบบทดสอบที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) โดยศึกษาทั้งในกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ที่มีขนาดตัวอย่างเป็น 20, 30 และ 50 เมื่อระดับนัยสำคัญของการทดสอบเท่ากับ 0.05 และ 0.10 ผลการศึกษาสรุปว่า แบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรทั้งสามแบบทดสอบ สามารถควบคุมความ

คลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทั้งกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ในกรณีทราบค่าพารามิเตอร์ แบบทดสอบ T ให้อำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และแบบทดสอบ O ให้อำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50 ส่วนในกรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง แบบทดสอบ W_F ให้อำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และแบบทดสอบ T ให้อำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50

อรศรี (2540) ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) กับแบบทดสอบที่เสนอโดย Kanta Naito (T_W , 1996) ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ทั้งกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ที่มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30 และ 50 เมื่อระดับนัยสำคัญของการทดสอบเท่ากับ 0.05 และ 0.10 ผลการศึกษาสรุปว่า ความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของแบบทดสอบทั้งสองมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับระดับนัยสำคัญที่กำหนด และเมื่อเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบทั้งสอง พบว่า แบบทดสอบ T ให้อำนาจการทดสอบสูงกว่าแบบทดสอบ T_W เมื่อประชากรมีการแจกแจง Student-t และแบบทดสอบทั้งสองให้อำนาจการทดสอบไม่แตกต่างกันมาก เมื่อประชากรมีการแจกแจง Lognormal และการแจกแจง Cauchy นอกจากนี้ แบบทดสอบทั้งสองให้อำนาจการทดสอบสูงขึ้น เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ดังนั้นเมื่อขนาดตัวอย่างน้อยควรเลือกใช้แบบทดสอบ T และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นจะเลือกใช้แบบทดสอบใดก็ได้

Kariya *et al.* (1999) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรโดยใช้คุณลักษณะ Hermitian Polynomial และศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบที่เสนอกับตัวสถิติทดสอบ Mardia และตัวสถิติทดสอบ Hinich's bispectral ด้วยการแจกแจง Chi-square, Cauchy, Simple Exponential, Gamma (2), Uniform[0,1] และ Student-t ซึ่งศึกษาข้อมูลอนุกรมเวลา พบว่าตัวสถิติทดสอบที่เสนอให้อำนาจการทดสอบสูงสุดเมื่อข้อมูลมีการแจกแจง U[0,1] และการแจกแจง Student-t ที่อิงความเป็นอิสระเท่ากับ 3 ส่วนการแจกแจงอื่น ๆ ให้อำนาจการทดสอบใกล้เคียงกับตัวสถิติทดสอบอื่น ๆ

จรรยา (2545) ได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง 3 ตัว ได้แก่ ตัวสถิติ

ทดสอบ MK ตัวสถิติทดสอบ N และตัวสถิติทดสอบ KTT การแจกแจงของประชากรที่ศึกษา ได้แก่ การแจกแจง Multivariate Normal การแจกแจง Multivariate Lognormal การแจกแจง Multivariate Student-t และการแจกแจง Multivariate Chi-square ด้วยค่าพารามิเตอร์ที่ระดับต่าง ๆ จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และ 3 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 ข้อมูลที่ใช้ศึกษาได้จากการจำลองข้อมูลด้วยเทคนิค Monte Carlo จำนวน 2,000 ครั้ง สำหรับแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดเพื่อคำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบทั้ง 3 ตัว ที่ระดับนัยสำคัญ 2 ระดับ คือ 0.05 และ 0.10 ผลการวิจัยสรุปได้ว่าความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ตัวสถิติทดสอบทั้ง 3 ตัวสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทุกสถานการณ์ ส่วนอำนาจการทดสอบกรณีสองและสามตัวแปร ตัวสถิติทดสอบ MK และ N ให้อำนาจการทดสอบสูงสุด

วิธีการทดสอบที่ใช้ในงานวิจัย

1. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J.P. Royston (H)

Royston (1983) ได้นำเสนอสถิติ H ซึ่งพัฒนามาจากสถิติ Shapiro-Wilk เพื่อใช้ทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร และแสดงว่าภายใต้สมมติฐานว่าง (H_0 : สถิติ $H \sim \chi^2_{(e)}$) การแจกแจงสถิติ H ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น $\hat{e}$ เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และ 3

1.1 สมมติฐานของการทดสอบ

H_0 : สถิติ H ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น $\hat{e}$ ($\chi^2_{(\hat{e})}$) เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3 และ 4

H_1 : สถิติ H ไม่สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ ที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น $\hat{e}$ ($\chi^2_{(\hat{e})}$) เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3 และ 4

1.2 ข้อสมมติเบื้องต้น

ให้ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}$ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม Σ

1.3 สถิติทดสอบ (H) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$H = \frac{e}{m} \sum_i^m k_i$$

โดยที่ $e = \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1+(m-1)\bar{c}}, \bar{c} = \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}, c_{ij} = \text{corr}(k_i, k_j)$

$$G = \frac{\sum_i^m k_i}{m}, k_i = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_i) \right] \right\}^2; i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, z = \frac{((1-W)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$W = \frac{(\sum a_i v_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2}, \bar{v} = \frac{\sum v_i}{n}$$

เมื่อ $7 \leq n \leq 20$

$$x = \ln(n) - 3$$

$$\lambda = 0.118898 + 0.133414x + 0.327907x^2$$

$$\ln \mu = -0.37542 - 0.492145x - 1.124332x^2 - 0.199422x^3$$

$$\ln \sigma = -3.15805 + 0.729399x + 3.01855x^2 + 1.558776x^3$$

และเมื่อ $21 \leq n \leq 2000$

$$x = \ln(n) - 5$$

$$\lambda = 0.480385 + 0.318828x - 0.0241665x^3 + 0.00879701x^4 + 0.002989646x^5$$

$$\ln \mu = -1.91487 - 1.37888x - 0.04813209x^2 + 0.1066339x^3 - 0.03513666x^4 - 0.01504614x^5$$

$$\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807x - 0.331885x^2 + 0.1773538x^3 - 0.01638782x^4 - 0.03215018x^5 + 0.003852646x^6$$

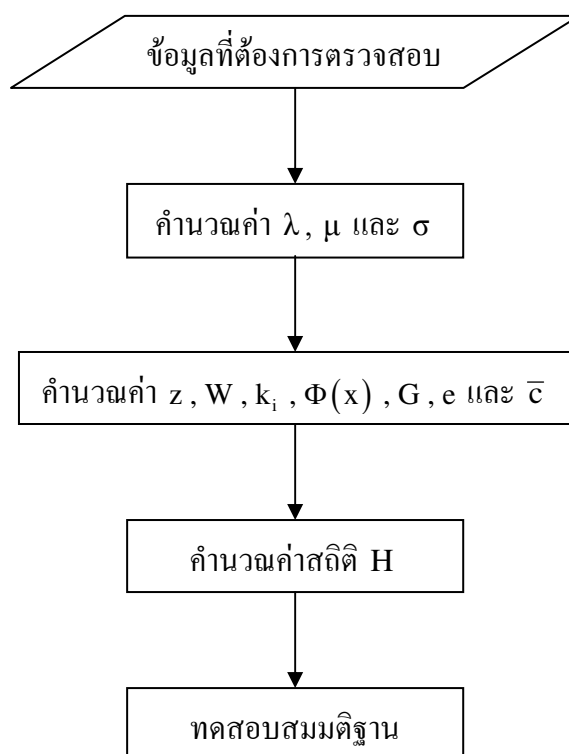
เมื่อ	W	แทน สถิติ Shapiro-Wilk
	a_i	แทน สัมประสิทธิ์เส้นตรง
	v_i	แทน เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม
	z	แทน ค่ามาตรฐาน
	λ	แทน ค่าแลมด้า
	μ	แทน ค่าเฉลี่ย
	σ	แทน ความแปรปรวน
	Φ	แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมมาตรฐาน
	m	แทน จำนวนความผันแปร
	e	แทน อนุภาคความเป็นอิสระ
	c	แทน เมตริกซ์สหสัมพันธ์

1.4 การตัดสินใจ

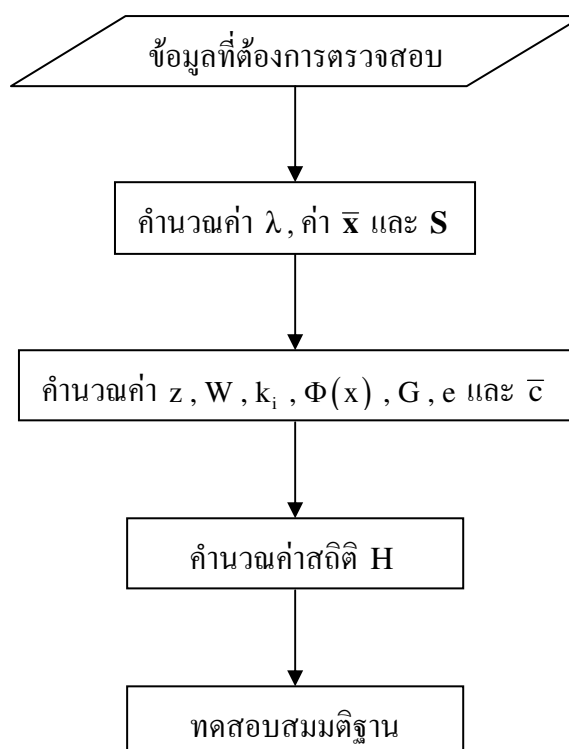
ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อสถิติ H มากกว่าค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก1

1.5 สรุปขั้นตอนการทดสอบ

สำหรับกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์แสดงดังภาพที่ 1 และภาพที่ 2 ตามลำดับดังนี้



ภาพที่ 1 ฟังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ H กรณีทราบค่าพารามิเตอร์



ภาพที่ 2 ฟังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ H กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

2. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T)

Mardia and Kent (1991) ได้นำเสนอวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร โดยพัฒนามาจากสถิติ Rao Score ซึ่งขึ้นอยู่กับโมเมนต์ที่ 3 และ โมเมนต์ที่ 4

2.1 สมมติฐานของการทดสอบ

H_0 : สถิติ T_3 ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ $\left(\chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)}{6}} \right)$ และ สถิติ T_4 ประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ $\left(\chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}} \right)$ ที่เป็นอิสระกัน ดังนั้น สถิติ T จึงประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ $\left(\chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)(p+7)}{24}} \right)$

H_1 : สถิติ T_3 ไม่สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ $\left(\chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)}{6}} \right)$ และ สถิติ T_4 ไม่สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ $\left(\chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{24}} \right)$ ที่เป็นอิสระกัน ดังนั้น สถิติ T จึงไม่สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงไคสแควร์ $\left(\chi^2_{df=\frac{p(p+1)(p+2)(p+7)}{24}} \right)$

2.2 ข้อสมมติเบื้องต้น

ให้ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ เป็น $p \times 1$ เวกเตอร์ของตัวอย่างขนาด n ที่เป็นอิสระต่อกัน

2.3 สถิติทดสอบ (T) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$T = T_3 + T_4$$

$$\text{โดยที่ } T_3 = \frac{1}{6}nb_{1,p} \text{ และ } T_4 = \frac{1}{24}n[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2)]$$

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3, \quad b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2, \quad b_{2,p}^* = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4$$

$$D_{ii} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad D_{ij} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{S}_{ii} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)^2, \quad \mathbf{S}_{ij} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)$$

- เมื่อ
- p แทน จำนวนตัวแปร
 - $\bar{\mathbf{x}}$ แทน เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง
 - $\mathbf{S}$ แทน เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง
 - $b_{1,p}$ แทน สัมประสิทธิ์ความเบ้ของหลายตัวแปร
 - $b_{2,p}$ แทน สัมประสิทธิ์ความโด่งของหลายตัวแปร
 - D_{ii} แทน Mahalanobis distance ของ $\mathbf{x}_i$
 - D_{ij} แทน Mahalanobis angle ระหว่าง $\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}$ และ $\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}$

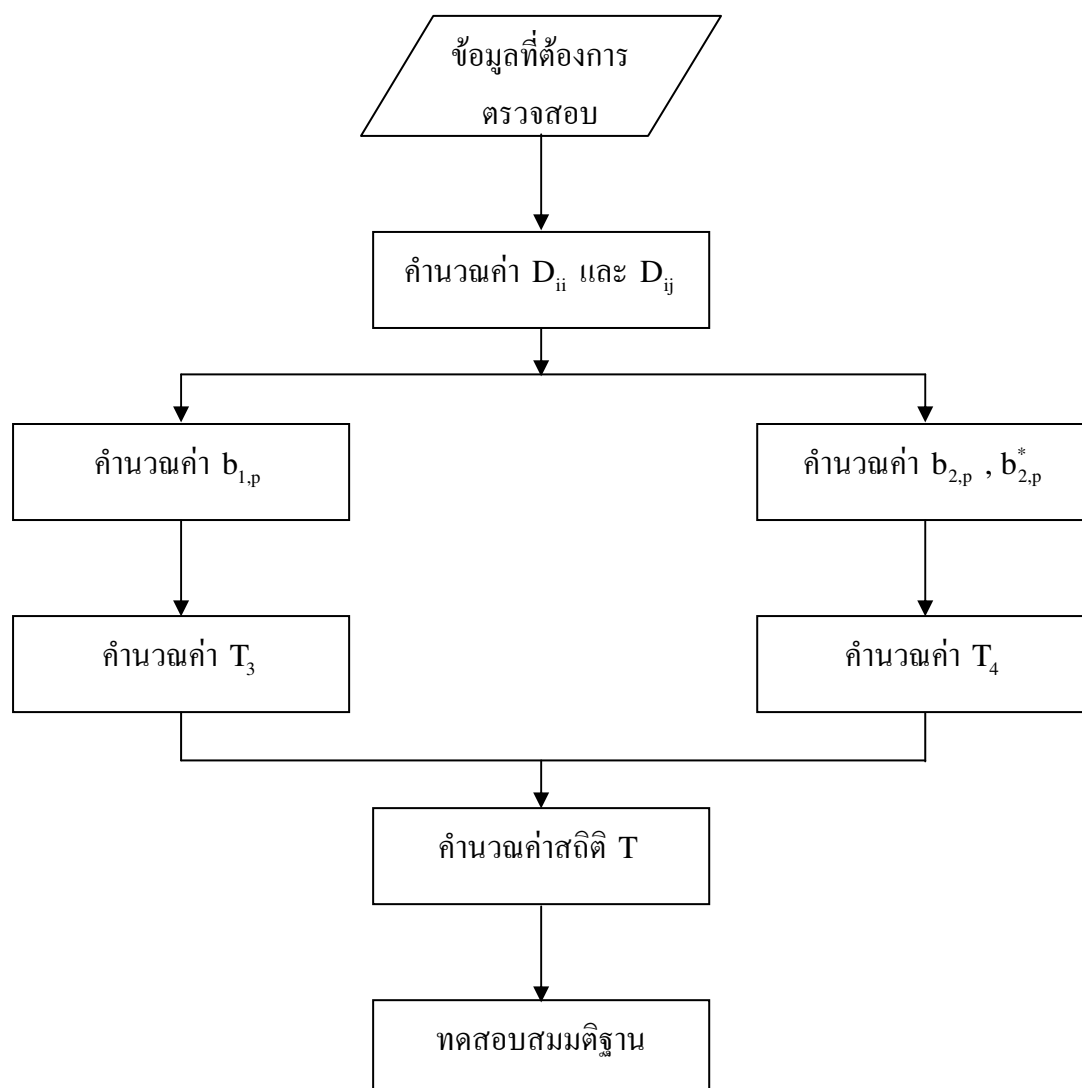
2.4 การตัดสินใจ

ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อสถิติ T มากกว่าค่าวิกฤตในตารางภาคผนวก ก3-

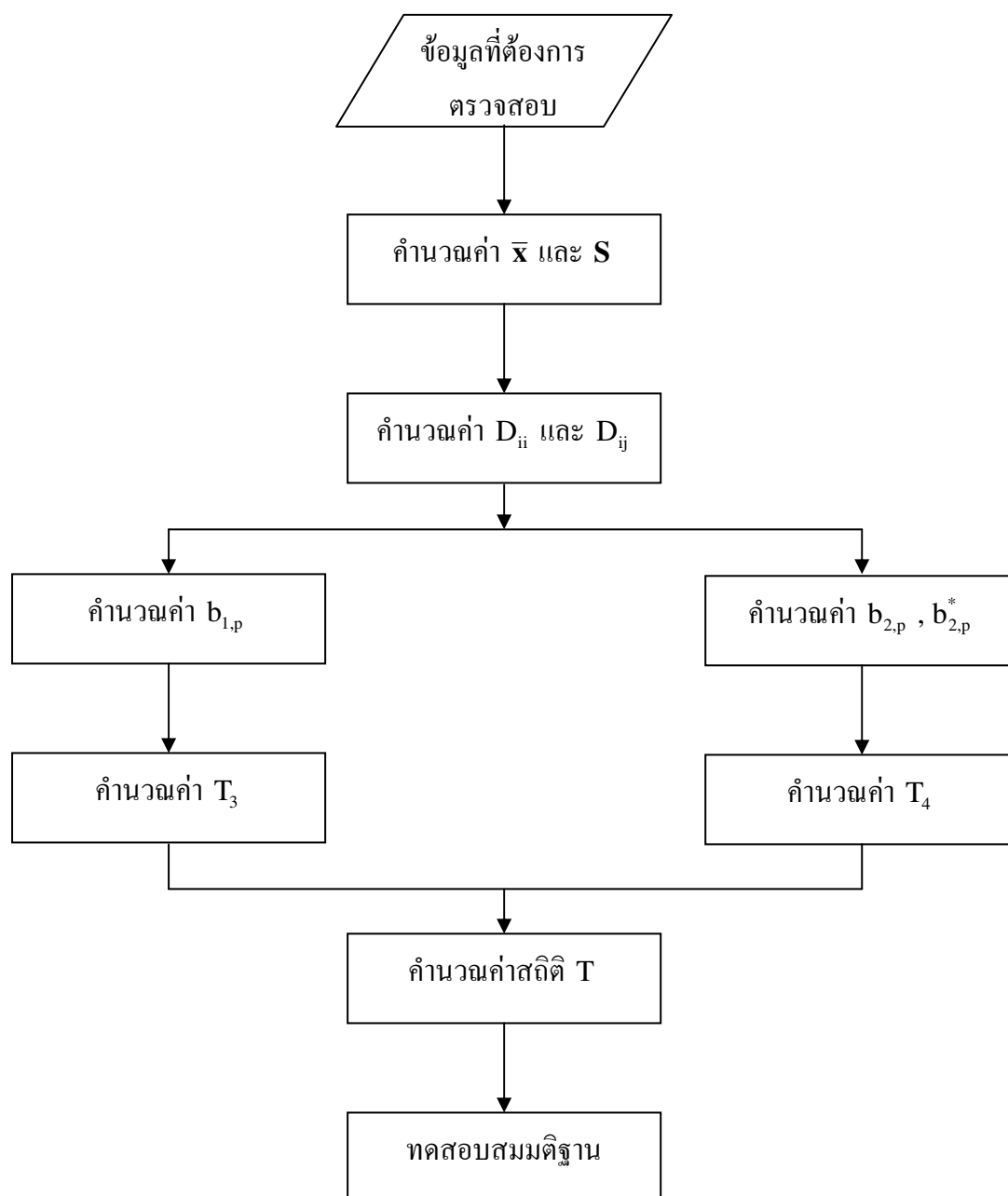
ก6

2.5 สรุปขั้นตอนการทดสอบ

สำหรับกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์แสดงดังภาพที่ 3 และภาพที่ 4 ตามลำดับดังนี้



ภาพที่ 3 ฟังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ T กรณีทราบค่าพารามิเตอร์



ภาพที่ 4 ฟังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ T กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

3. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O)

Dunn (1995) ได้นำเสนอสถิติ 2 วิธี คือ Bimodal (B) และ Omnibus (O) เพื่อใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรเมื่อไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ μ และ Σ และได้ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทั้ง 2 วิธี โดยใช้จำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3, 4, 5 และ 6 และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30, 50, 70 และ 100 พบว่า สถิติ O มีอำนาจการทดสอบที่สูงกว่า B ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกสถิติ O มาทำการทดสอบในครั้งนี้

3.1 สมมติฐานของการทดสอบ

H_0 : สถิติ O มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร

H_1 : สถิติ O ไม่มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร

3.2 ข้อสมมติเบื้องต้น

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ p ตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม Σ

3.3 สถิติทดสอบ (O) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}{n(n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi_{ij} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j); i < j, \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})}{\left[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{1/2}}$$

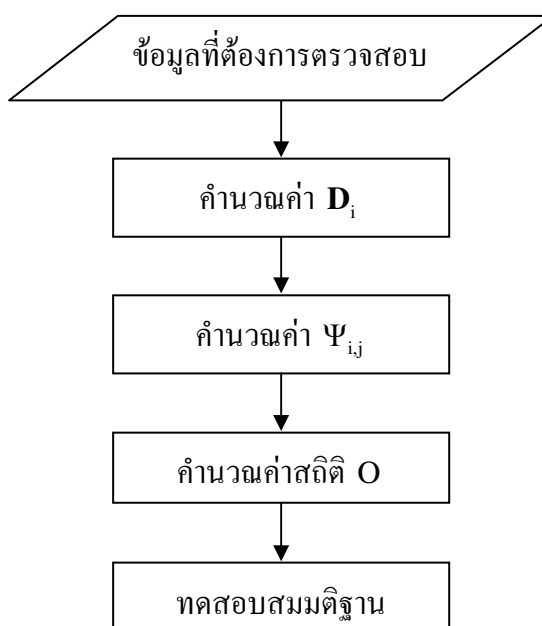
เมื่อ Ψ_{ij} แทน มุม (หน่วยเป็นเรเดียน) ระหว่าง $\mathbf{D}_i$ และ $\mathbf{D}_j$
 $\mathbf{D}_i$ แทน ทิศทางจาก $\bar{\mathbf{x}}$ ไปยัง $\mathbf{x}_i$
 $\mathbf{S}$ แทน เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

3.4 การตัดสินใจ

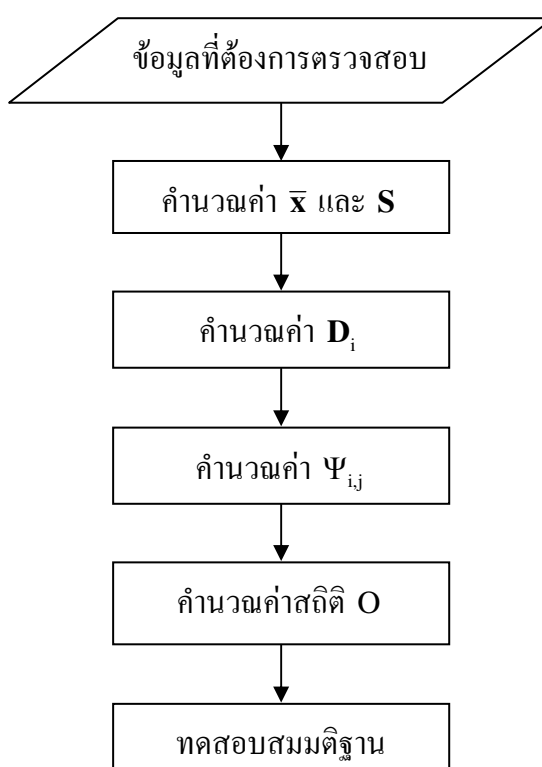
ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อสถิติ O มากกว่าค่าวิกฤตในตารางภาคผนวก ก7

3.5 สรุปขั้นตอนการทดสอบ

สำหรับกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์แสดงดังภาพที่ 5 และภาพที่ 6 ตามลำดับดังนี้



ภาพที่ 5 ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ O กรณีทราบค่าพารามิเตอร์



ภาพที่ 6 ผังงานแสดงขั้นตอนการคำนวณค่าสถิติ O กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ที่ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. โปรแกรม SAS 9.1 (Statistical Analysis System version 9.1)

วิธีการ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเปรียบเทียบวิธีการทดสอบการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร โดยพิจารณาจากความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบ ซึ่งมีวิธีดำเนินการดังนี้

1. การคำนวณค่าประมาณความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จะคำนวณภายใต้สมมติฐานหลัก H_0 เป็นจริง โดยในที่นี้ H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1.1 จำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30 และ 50

1.2 ประเมินค่าพารามิเตอร์ ในที่นี้คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม

1.3 คำนวณค่าสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี คือ สถิติ H , T และ O

1.4 เปรียบเทียบค่าสถิติที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตของตัวสถิติดังกล่าว เพื่อตัดสินใจว่าจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐานหลัก และนับจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานหลัก

1.5 ทำการคำนวณขั้นตอนที่ 1.1 – 1.4 ซ้ำจนครบ 1,000 ครั้ง

1.6 คำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 จากการทดลอง (ค่าประมาณ) ซึ่งเท่ากับ จำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักหารด้วยจำนวนครั้งที่ทำการทดลอง (1,000 ครั้ง)

2. การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จาก การทดลอง จะใช้สถิติทดสอบ Z ทดสอบสมมติฐานแบบสองด้าน ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เพื่อทดสอบสมมติฐานว่า ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลอง จะเท่ากับค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 หรือค่าระดับนัยสำคัญที่กำหนดในการศึกษาวิจัยครั้งนี้หรือไม่ โดยกำหนดให้

α^* แทน ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลอง

α_0 แทน ระดับนัยสำคัญที่กำหนดในการศึกษาวิจัย มี 2 ระดับ คือ 0.05 และ 0.10

N แทน จำนวนครั้งที่ทำการทดลอง ซึ่งเท่ากับ 1,000 ครั้ง

ϕ แทน ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ซึ่งเท่ากับ 0.05

สมมติฐานของการทดสอบ คือ $H_0 : \alpha^* = \alpha_0$ และ $H_1 : \alpha^* \neq \alpha_0$

$$\text{สถิติทดสอบ คือ } Z = \frac{\alpha^* - \alpha_0}{\sqrt{\frac{\alpha_0(1-\alpha_0)}{N}}}$$

เสาวลักษณ์ (2540) กล่าวว่า หลักเกณฑ์การพิจารณาความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ Z เท่ากับ 0.05 และจำนวน

ครั้งที่ทำการทดลองเท่ากับ 1,000 ครั้ง แบบทดสอบที่ใช้ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้จะสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ไว้ได้ ถ้า $-1.96 \leq Z \leq 1.96$ ซึ่งสามารถสรุปผลได้ 2 กรณี คือ

2.1 กรณีที่ต้องการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (α_0) ให้เท่ากับ 0.05 เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ $\alpha = 0.05$

$$\begin{aligned} Z_{\frac{\alpha}{2}} &\leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ Z_{0.025} &\leq Z \leq Z_{0.975} \\ -1.96 &\leq Z \leq 1.96 \\ -1.96 &\leq \frac{\alpha^* - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05(1-0.05)}{1000}}} \leq 1.96 \\ 0.0365 &\leq Z \leq 0.0635 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ (α_0) เท่ากับ 0.05 วิธีการทดสอบสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ไว้ได้ถ้า α^* อยู่ในช่วง $[0.0365, 0.0635]$

2.2 กรณีที่ต้องการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (α_0) ให้เท่ากับ 0.10 เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ $\alpha = 0.05$

$$\begin{aligned} Z_{\frac{\alpha}{2}} &\leq Z \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \\ Z_{0.025} &\leq Z \leq Z_{0.975} \\ -1.96 &\leq Z \leq 1.96 \\ -1.96 &\leq \frac{\alpha^* - 0.10}{\sqrt{\frac{0.10(1-0.10)}{1000}}} \leq 1.96 \\ 0.0814 &\leq Z \leq 0.1186 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญของการทดสอบ (α_0) เท่ากับ 0.10 วิธีการทดสอบสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ไว้ได้ถ้า α^* อยู่ในช่วง $[0.0814, 0.1186]$

3. การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบ

การทดสอบค่าอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้จะคำนวณภายใต้สมมติฐานหลัก H_0 ไม่เป็นจริง โดยในที่นี้ H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

3.1 จำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรด้วยค่าพารามิเตอร์ที่กำหนด และขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30 และ 50 ซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลขนาดเล็ก กลาง และใหญ่ ตามลำดับ

3.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์ ในที่นี้คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม

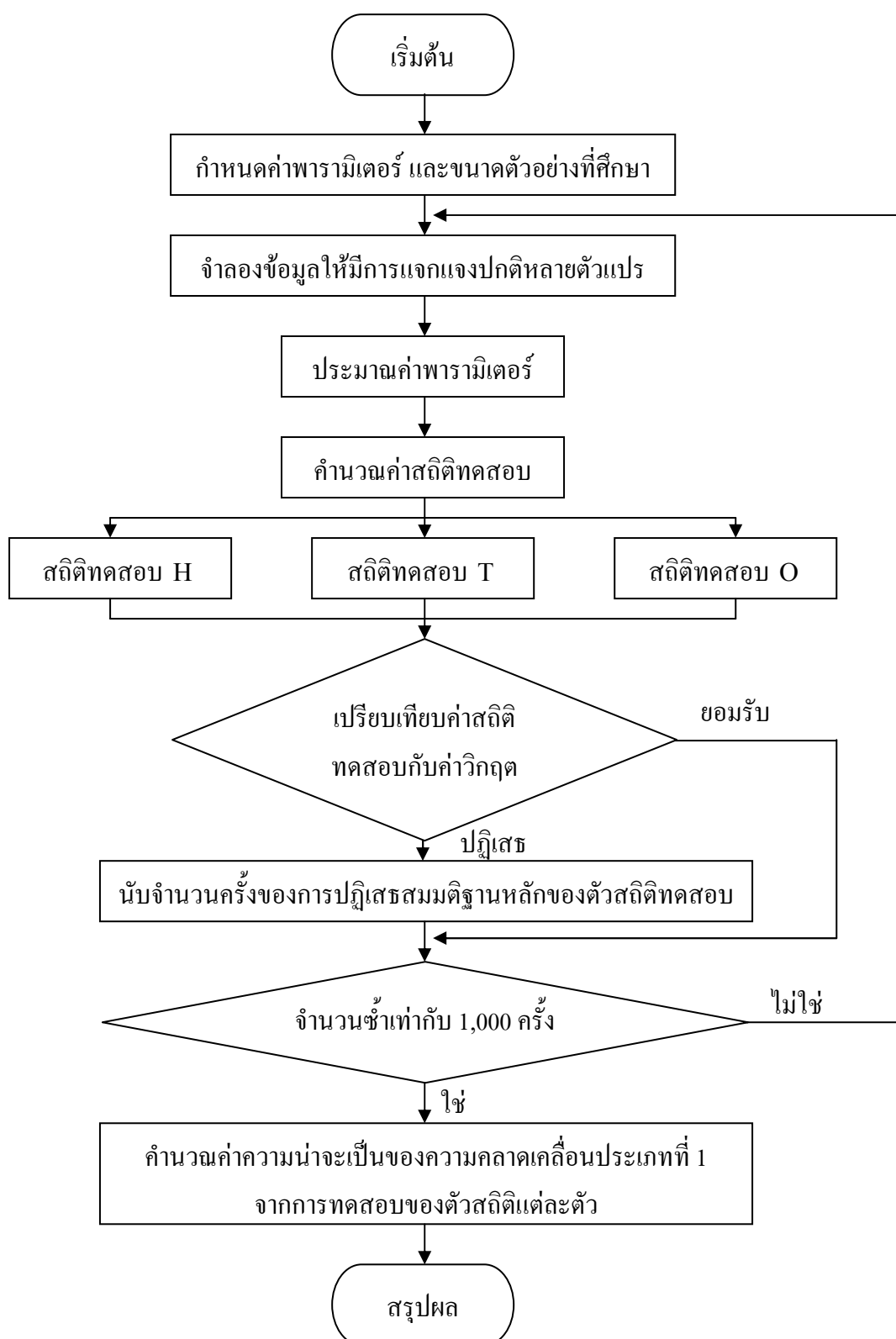
3.3 คำนวณค่าสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี คือ สถิติ H , T และ O

3.4 เปรียบเทียบค่าสถิติที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตของตัวสถิติดังกล่าว เพื่อตัดสินใจว่าจะปฏิเสธหรือยอมรับสมมติฐานหลัก และนับจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานหลัก

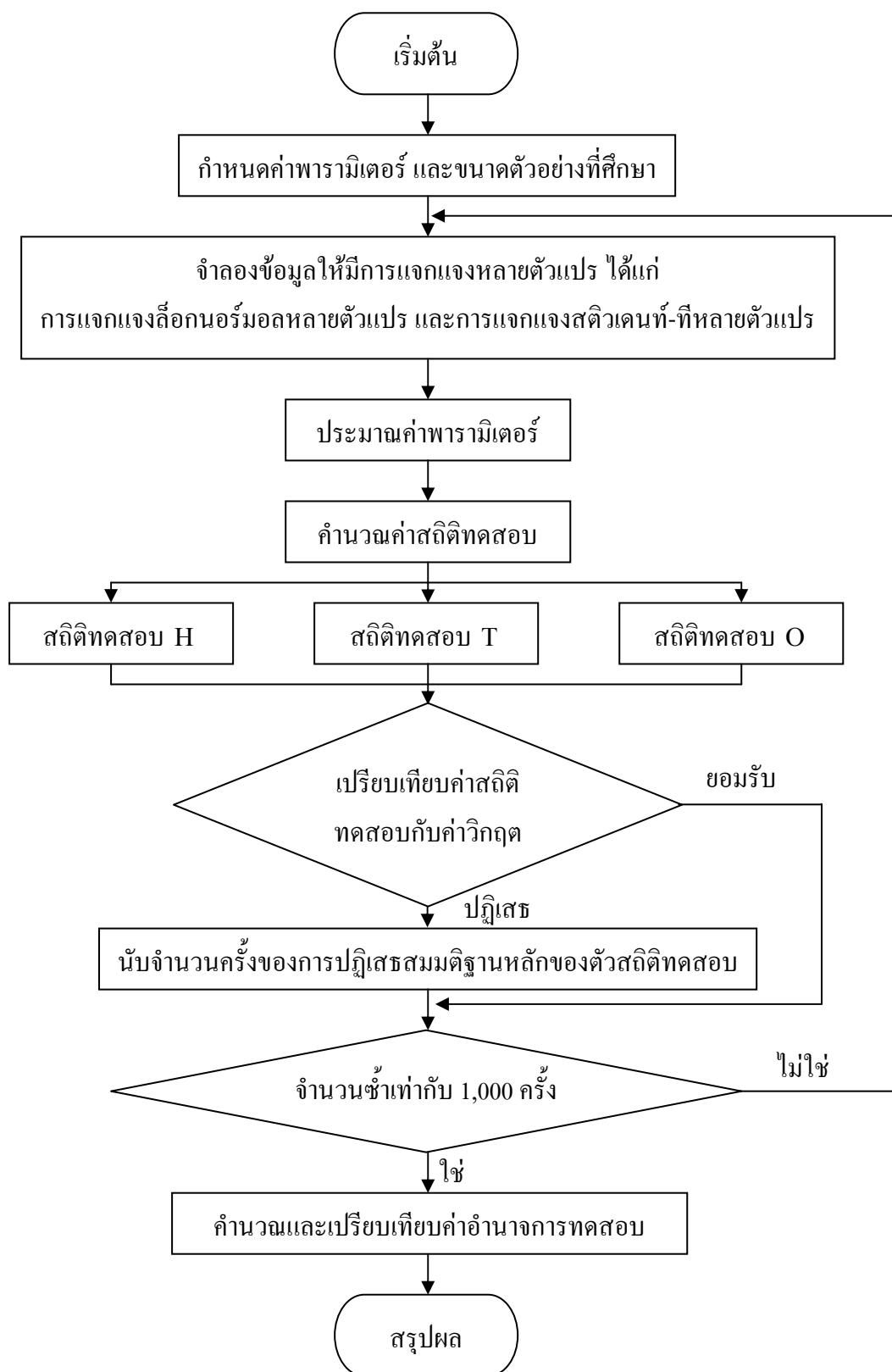
3.5 ทำการคำนวณขั้นตอนที่ 3.1 – 3.4 ซ้ำจนครบ 1,000 ครั้ง

3.6 คำนวณค่าอำนาจการทดสอบจากการทดลอง (ค่าประมาณ) ซึ่งเท่ากับ จำนวนครั้งที่ปฏิเสธสมมติฐานหลักหารด้วยจำนวนครั้งที่ทำการทดลอง (1,000 ครั้ง)

จากนั้นทำการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบที่คำนวณได้ในแต่ละสถานการณ์ โดยที่ตัวสถิติทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดจะเป็นตัวสถิติทดสอบที่มีประสิทธิภาพในการทดสอบมากที่สุด



ภาพที่ 7 ฟังก์ชันสำหรับคำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี



ภาพที่ 8 ผังงานสำหรับคำนวณค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี

ตัวอย่าง การใช้วิธีการทดสอบทั้ง 3 วิธี ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร พิจารณาข้อมูลขนาด 30 ตัวอย่าง ค่าความแปรปรวนรวมเท่ากับ 0.3 ดังแสดงในตารางที่ 1 ต้องการทราบว่า ข้อมูลชุดนี้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปรหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 เมื่อกำหนดว่า

$$1. \text{ กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง โดยที่ } \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 1 แสดงข้อมูลขนาดตัวอย่าง 30 ตัวอย่าง ค่าความแปรปรวนรวมเท่ากับ 0.3

i	x_1	x_2	x_3
1	0.305413	0.717540	-0.316612
2	1.123466	-0.265992	0.275556
3	-0.160362	0.899184	0.474723
4	1.009251	1.366374	0.975713
5	-0.597081	0.515318	-1.458960
6	2.071817	0.543994	-1.112242
7	0.808376	-0.665795	1.082431
8	-0.512862	-1.701423	-1.194842
9	-0.592955	-1.007203	-0.401836
10	-0.143135	0.417771	0.583094
11	0.386791	1.007882	0.297883
12	-1.135648	0.236422	-0.090287
13	0.009759	-0.778126	-1.373336
14	-0.758605	-0.200643	-0.777595
15	0.438751	-0.277999	-1.338513
16	1.004024	1.512872	1.981569

ตารางที่ 1 (ต่อ)

i	X ₁	X ₂	X ₃
17	0.928690	-0.170639	-0.201643
18	-0.602509	1.307831	0.152636
19	1.968752	-0.058358	1.917905
20	-0.983972	-1.136222	-0.949533
21	-2.362571	-0.782888	0.430371
22	1.714009	-0.055894	-0.631549
23	-0.672493	-0.205110	-0.372728
24	-0.203646	0.611413	-1.570825
25	-0.198767	-0.796494	0.239094
26	1.240275	0.384569	2.308814
27	0.671698	1.136020	0.495279
28	1.704119	0.358825	1.021102
29	0.314310	-0.385502	0.027640
30	-1.046709	-0.161222	0.170505

1. กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

สมมติฐานของการทดสอบ คือ

 H_0 : ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

 H_1 : ข้อมูลไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร ที่มีเวกเตอร์

$$\text{ค่าเฉลี่ย } \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1 วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J.P. Roystons (H, 1983) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$H = \frac{e}{m} \sum_1^m k_i$$

โดยที่
$$e = \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1+(m-1)\bar{c}}, \quad \bar{c} = \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}$$

$$G = \frac{\sum_1^m k_i}{m}, \quad k_i = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_i) \right] \right\}^2; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, \quad z = \frac{((1-W)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$W = \frac{(\sum a_i v_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2}, \quad \bar{v} = \frac{\sum v_i}{n}$$

เมื่อ $21 \leq n \leq 2000$

$$x = \ln(n) - 5$$

$$\lambda = 0.480385 + 0.318828x - 0.0241665x^3 + 0.00879701x^4 + 0.002989646x^5$$

$$\ln \mu = -1.91487 - 1.37888x - 0.04813209x^2 + 0.1066339x^3 - 0.03513666x^4 - 0.01504614x^5$$

$$\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807x - 0.331885x^2 + 0.1773538x^3 - 0.01638782x^4 - 0.03215018x^5 + 0.003852646x^6$$

1.1.1 เรียงลำดับข้อมูล $Y_1 = X_1$ จากน้อยไปมาก

1.1.2 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_1 ของ Y_1 ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_i ของ Y_i

i	Y_{li}	a_{30-i+1}	$a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li})$	Y_{li}^2
1	-2.362571	0.4254	1.8863887	5.5817417
2	-1.135648	0.2944	0.9139354	1.2896964
3	-1.046709	0.2487	0.6865906	1.0955997
4	-0.983972	0.2148	0.5774019	0.9682009
5	-0.758605	0.1870	0.3737906	0.5754815
6	-0.672493	0.1630	0.2927413	0.4522468
7	-0.602509	0.1415	0.2280640	0.3630171
8	-0.597081	0.1219	0.1951747	0.3565057
9	-0.592955	0.1036	0.1576424	0.3515956
10	-0.512862	0.0862	0.1138907	0.2630274
11	-0.203646	0.0697	0.0610115	0.0414717
12	-0.198767	0.0537	0.0342347	0.0395083
13	-0.160362	0.0381	0.0208465	0.0257160
14	-0.143135	0.0227	0.0103840	0.0204876
15	0.009759	0.0076	0.0022470	0.0000952
16	0.305413	0.0000	0.0000000	0.0932771
17	0.314310	0.0000	0.0000000	0.0987908
18	0.386791	0.0000	0.0000000	0.1496073
19	0.438751	0.0000	0.0000000	0.1925024
20	0.671698	0.0000	0.0000000	0.4511782
21	0.808376	0.0000	0.0000000	0.6534718
22	0.928690	0.0000	0.0000000	0.8624651
23	1.004024	0.0000	0.0000000	1.0080642
24	1.009251	0.0000	0.0000000	1.0185876
25	1.123466	0.0000	0.0000000	1.2621759
26	1.240275	0.0000	0.0000000	1.5382821
27	1.704119	0.0000	0.0000000	2.9040216

ตารางที่ 2 (ต่อ)

i	Y_{li}	a_{30-i+1}	$a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li})$	Y_{li}^2
28	1.714009	0.0000	0.0000000	2.9378269
29	1.968752	0.0000	0.0000000	3.8759844
30	2.071817	0.0000	0.0000000	4.2924257
sum			5.554344	32.763053

$$1.1.3 \quad \text{คำนวณค่า } W_l = \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} Y_{li}^2}$$

$$= \frac{(5.554344)^2}{32.763053} = 0.9416319$$

$$1.1.4 \quad \text{คำนวณค่า } z_l = \frac{\left((1 - W_l)^\lambda - \mu \right)}{\sigma}$$

$$\text{โดย } x = \ln(n) - 5 \text{ เมื่อ } 20 < n \leq 2000$$

$$x = \ln(30) - 5 = -1.598803$$

$$\text{และ } \lambda = 0.480385 + 0.318828(x) + -0.0241665(x)^3$$

$$+ 0.00879701(x)^4 + 0.002989646(x)^5 \text{ เมื่อ } 20 < n \leq 2000$$

$$\lambda = 0.480385 + 0.318828(-1.598803)$$

$$- 0.0241665(-1.598803)^3 + 0.00879701(-1.598803)^4$$

$$+ 0.002989646(-1.598803)^5$$

$$= 0.095654$$

$$\text{และ } \ln \mu = -1.91487 - 1.37888(x) + -0.04183209(x)^2$$

$$+ 0.1066339(x)^3 - 0.03513666(x)^4 - 0.01504614(x)^5$$

$$\text{เมื่อ } 20 < n \leq 2000$$

$$\begin{aligned}\ln \mu &= -1.91487 - 1.37888(-1.598803) \\ &\quad - 0.04183209(-1.598803)^2 + 0.1066339(-1.598803)^3 \\ &\quad - 0.03513666(-1.598803)^4 - 0.01504614(-1.598803)^5 \\ \mu &= 0.722211\end{aligned}$$

และ $\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807(x) - 0.331885(x)^2$
 $+ 0.1773538(x)^3 - 0.01638782(x)^4 - 0.03215018(x)^5$
 $+ 0.003852646(x)^6$ เมื่อ $20 < n \leq 2000$

$$\begin{aligned}\ln \sigma &= -3.73538 - 1.015807(-1.598803) \\ &\quad - 0.331885(-1.598803)^2 + 0.1773538(-1.598803)^3 \\ &\quad - 0.01638782(-1.598803)^4 - 0.03215018(-1.598803)^5 \\ &\quad + 0.003852646(-1.598803)^6 \\ \sigma &= 0.0336635\end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 = \frac{(1 - 0.9416319)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = 1.1832543$

1.1.5 คำนวณค่า $k_1 = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_1) \right] \right\}^2$
 $= 3.6476226$

1.1.6 คำนวณค่า $Y_2 = X_2 - b_{21}X_1$

โดยที่ $b_{21} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_{1i} X_{2i}}{\sum_{i=1}^{30} X_{1i}^2}$
 $= \frac{8.3905955}{32.763053} = 0.2560993$

1.1.7 เรียงลำดับข้อมูล Y_2 จากน้อยไปมาก

1.1.8 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2 ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2

i	a_{30-i+1}	Y_{2i}	$a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i})$	Y_{2i}^2
1	0.4254	-1.570079	1.2899032	2.4651493
2	0.2944	-0.884227	0.6300070	0.7818582
3	0.2487	-0.872820	0.4926063	0.7618140
4	0.2148	-0.855348	0.3907956	0.7316196
5	0.1870	-0.780625	0.3218042	0.6093758
6	0.1630	-0.745590	0.2696696	0.5559043
7	0.1415	-0.562554	0.1741559	0.3164671
8	0.1219	-0.553711	0.1483861	0.3065957
9	0.1036	-0.494851	0.1175005	0.2448771
10	0.0862	-0.465997	0.0856188	0.2171528
11	0.0697	-0.408476	0.0601444	0.1668525
12	0.0537	-0.390363	0.0266998	0.1523831
13	0.0381	-0.177835	0.0093258	0.0316253
14	0.0227	-0.077599	0.0020657	0.0060216
15	0.0076	-0.032885	0.0002016	0.0010814
16	0.0000	-0.006365	0.0000000	0.0000405
17	0.0000	0.0134031	0.0000000	0.0001796
18	0.0000	0.0669354	0.0000000	0.0044803
19	0.0000	0.1068395	0.0000000	0.0114147
20	0.0000	0.4544278	0.0000000	0.2065046
21	0.0000	0.5272607	0.0000000	0.2780038
22	0.0000	0.6393239	0.0000000	0.4087351
23	0.0000	0.6635666	0.0000000	0.4403206
24	0.0000	0.6682300	0.0000000	0.4465314
25	0.0000	0.9088251	0.0000000	0.8259630
26	0.0000	0.9402526	0.0000000	0.8840750
27	0.0000	0.9639986	0.0000000	0.9292933

ตารางที่ 3 (ต่อ)

i	a_{30-i+1}	Y_{2i}	$a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i})$	Y_{2i}^2
28	0.0000	1.1079055	0.0000000	1.2274546
29	0.0000	1.2557421	0.0000000	1.5768883
30	0.0000	1.4621331	0.0000000	2.1378333
sum			4.0188845	16.726496

$$1.1.9 \quad \text{คำนวณค่า } W_2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} Y_{2i}^2}$$

$$= \frac{(4.0188845)^2}{16.726496} = 0.9656196$$

$$1.1.10 \quad \text{คำนวณค่า } z_2 = \frac{((1 - W_2)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$= \frac{(1 - 0.9656196)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = 0.0657116$$

$$1.1.11 \quad \text{คำนวณค่า } k_2 = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_2) \right] \right\}^2$$

$$= 2.8376782$$

$$1.1.12 \quad \text{คำนวณค่า } Y_3 = X_3 - b_{32}X_2 - b_{31}X_1$$

$$\text{โดยที่ } b_{32} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_{2i} X_{3i}}{\sum_{i=1}^{30} X_{2i}^2}$$

$$= \frac{8.5405172}{18.875322} = 0.45247$$

$$b_{31} = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_{1i} X_{3i}}{\sum_{i=1}^{30} X_{1i}^2}$$

$$= \frac{11.148631}{32.763053} = 0.3402806$$

1.1.13 เรียงลำดับข้อมูล Y_3 จากน้อยไปมาก

1.1.14 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3 ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3

i	a_{30-i+1}	Y_{3i}	$a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i})$	Y_{3i}^2
1	0.4254	-2.063382	1.6063736	4.2575457
2	0.2944	-1.778174	0.9911611	3.1619037
3	0.2487	-1.488951	0.6872409	2.2169747
4	0.2148	-1.362025	0.5306922	1.8551128
5	0.1870	-1.189503	0.4010949	1.4149166
6	0.1630	-1.024578	0.2757468	1.0497603
7	0.1415	-0.745203	0.1902936	0.5553282
8	0.1219	-0.440449	0.1076646	0.1939955
9	0.1036	-0.428671	0.0733009	0.1837592
10	0.0862	-0.289771	0.0470165	0.0839672
11	0.0697	-0.250482	0.0306443	0.0627413
12	0.0537	-0.247302	0.0198550	0.0611582
13	0.0381	-0.234096	0.0125429	0.0548010
14	0.0227	-0.100600	0.0026024	0.0101204
15	0.0076	-0.051086	0.0004917	0.0026097
16	0.0000	0.0136157	0.0000000	0.0001854
17	0.0000	0.0140412	0.0000000	0.0001972

ตารางที่ 4 (ต่อ)

i	a_{30-i+1}	Y_{3i}	$a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i})$	Y_{3i}^2
18	0.0000	0.0951145	0.0000000	0.0090468
19	0.0000	0.1224373	0.0000000	0.0149909
20	0.0000	0.1891781	0.0000000	0.0357884
21	0.0000	0.2556642	0.0000000	0.0653642
22	0.0000	0.2788658	0.0000000	0.0777661
23	0.0000	0.4427712	0.0000000	0.1960463
24	0.0000	0.5996279	0.0000000	0.3595536
25	0.0000	0.6671202	0.0000000	0.4450494
26	0.0000	0.9553899	0.0000000	0.9127698
27	0.0000	1.1086086	0.0000000	1.2290130
28	0.0000	1.2743821	0.0000000	1.6240498
29	0.0000	1.5885414	0.0000000	2.5234639
30	0.0000	1.7127665	0.0000000	2.9335692
sum			4.9767214	25.591548

$$\begin{aligned}
 1.1.15 \text{ ค่า } W_3 &= \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} Y_{3i}^2} \\
 &= \frac{(4.9767214)^2}{25.591548} = 0.96781
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.1.16 \text{ ค่า } z_3 &= \frac{((1 - W_3)^\lambda - \mu)}{\sigma} \\
 &= \frac{(1 - 0.96781)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = -0.06937
 \end{aligned}$$

$$1.1.17 \text{ คำนวณค่า } k_3 = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_3) \right] \right\}^2$$

$$= 2.7407169$$

$$1.1.18 \text{ คำนวณค่า } G = \frac{\sum_1^m k_i}{m}$$

$$= \frac{3.6476226 + 2.8376782 + 2.7407169}{3}$$

$$= 3.0753392$$

$$1.1.19 \text{ คำนวณค่า } \bar{c} = \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}, c_{ij} = \text{corr}(k_i, k_j)$$

$$= 1.2640999$$

$$1.1.20 \text{ คำนวณค่า } e = \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1 + (m-1)\bar{c}}$$

$$= \frac{3}{1 + (3-1)(1.2640999)} = 0.850292$$

$$1.1.21 \text{ คำนวณค่า } H = \frac{e}{m} \sum_1^m k_i \sim \chi_e^2$$

$$= \frac{0.850292}{3} (3.6476226 + 2.8376782 + 2.7407169)$$

$$= 2.6149363$$

1.1.22 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ H ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก1 ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ (df) เท่ากับ 1 ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$H = 2.6149363 < 3.841$$

ดังนั้น ขอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร ที่มี

$$\text{เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย } \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$T = T_3 + T_4$$

$$\text{โดยที่ } T_3 = \frac{1}{6}nb_{1,p} \text{ และ } T_4 = \frac{1}{24}n[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2)]$$

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3, \quad b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2, \quad b_{2,p}^* = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4$$

$$D_{ii} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad D_{ij} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{S}_{ii} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)^2, \quad \mathbf{S}_{ij} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)$$

คำนวณค่าพารามิเตอร์ได้ดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของประชากร

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1607143 & -0.267857 & -0.267857 \\ -0.267857 & 1.1607143 & -0.267857 \\ -0.267857 & -0.267857 & 1.1607143 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1.2.1 \quad \text{คำนวณค่า } b_{1,p} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3 \\ b_{1,p} &= \frac{1}{(30)^2} \left[(0.8783384)^3 + (-0.121486)^3 + \dots + (1.3555241)^3 \right] \\ &= 1.6489217 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.2 \quad \text{คำนวณค่า } b_{2,p} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2 \\ b_{2,p} &= \frac{1}{30} \left[(0.8783384)^2 + (1.6687918)^2 + \dots + (1.3555241)^2 \right] \\ &= 11.32024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.3 \quad \text{คำนวณค่า } b_{2,p}^* &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4 \\ b_{2,p}^* &= \frac{1}{(30)^2} \left[(0.8783384)^4 + (-0.121486)^4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (1.3555241)^4 \right] = 37.685458 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.4 \quad \text{คำนวณค่า } T_3 &= \frac{1}{6} n b_{1,p} \\ &= \frac{1}{6} (30) (1.6489217) = 8.2446085 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.5 \quad \text{คำนวณค่า } T_4 &= \frac{1}{24} n \left[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2) \right] \\ &= \frac{1}{24} (30) \{ 37.685458 - 6(11.32024) + 3(3)(5) \} \\ &= 18.455021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2.6 \quad \text{คำนวณค่า } T &= T_3 + T_4 \\
 &= 8.2446085 + 18.455021 \\
 &= 26.699629
 \end{aligned}$$

1.2.7 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ T ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก4 ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$T = 26.699629 < 146.8789$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร ที่มี

$$\text{เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย } \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}{n(n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi_{ij} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j); i < j, \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{S}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})}{\left[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{1/2}}$$

คำนวณค่าพารามิเตอร์ได้ดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของประชากร

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของประชากร

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1.1607143 & -0.267857 & -0.267857 \\ -0.267857 & 1.1607143 & -0.267857 \\ -0.267857 & -0.267857 & 1.1607143 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1.0000000 & -0.314485 & -0.248623 \\ 0.0000000 & 1.0482848 & -0.248623 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.0773645 \end{bmatrix}$$

$$1.3.1 \quad \text{คำนวณค่า } \mathbf{D}_i = \frac{\Sigma^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \mu)}{\left[(\mathbf{x}_i - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) \right]}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.3258792 \\ 0.7001071 \\ -0.635337 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0.8696787 \\ -0.489349 \\ 0.0647823 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{bmatrix} -0.899026 \\ 0.1375696 \\ 0.4157241 \end{bmatrix}$$

$$1.3.2 \quad \text{คำนวณค่า } \Psi_{i,j} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j); i < j$$

$$\Psi_{1,2} = 1.6713104$$

$$\Psi_{1,3} = 1.1473347$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{29,30} = 2.1628141$$

$$1.3.3 \quad \text{คำนวณค่า } O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A\left(\Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2}\right) \right]^2}{n(n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } A\left(\Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$O = 0.3910601$$

1.3.4 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ O ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก7 ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$O = 0.3910601 < 0.4443$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร ที่มี

$$\text{เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย } \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

สมมติฐานของการทดสอบ คือ

H_0 : ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

H_1 : ข้อมูลไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

2.1 วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$H = \frac{e}{m} \sum_1^m k_i$$

โดยที่
$$e = \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1+(m-1)\bar{c}}, \quad \bar{c} = \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}$$

$$G = \frac{\sum_1^m k_i}{m}, \quad k_i = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_i) \right] \right\}^2; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, \quad z = \frac{((1-W)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$W = \frac{(\sum a_i v_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2}, \quad \bar{v} = \frac{\sum v_i}{n}$$

เมื่อ $21 \leq n \leq 2000$

$$x = \ln(n) - 5$$

$$\lambda = 0.480385 + 0.318828x - 0.0241665x^3 + 0.00879701x^4 + 0.002989646x^5$$

$$\ln \mu = -1.91487 - 1.37888x - 0.04813209x^2 + 0.1066339x^3 - 0.03513666x^4 - 0.01504614x^5$$

$$\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807x - 0.331885x^2 + 0.1773538x^3 - 0.01638782x^4 - 0.03215018x^5 + 0.003852646x^6$$

2.1.1 เรียงลำดับข้อมูล $Y_i = X_i$ จากน้อยไปมาก

2.1.2 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_1 ของ Y_i ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_i ของ Y_i

i	Y_{li}	a_{30-i+1}	$a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li})$	$(Y_{li} - \bar{Y}_l)^2$
1	-2.362571	0.4254	1.8863887	6.520416
2	-1.135648	0.2944	0.9139354	1.7598345
3	-1.046709	0.2487	0.6865906	1.5317739
4	-0.983972	0.2148	0.5774019	1.3804171
5	-0.758605	0.1870	0.3737906	0.9016348
6	-0.672493	0.1630	0.2927413	0.7455157
7	-0.602509	0.1415	0.2280640	0.6295606
8	-0.597081	0.1219	0.1951747	0.6209764
9	-0.592955	0.1036	0.1576424	0.6144906
10	-0.512862	0.0862	0.1138907	0.4953366
11	-0.203646	0.0697	0.0610115	0.1556977
12	-0.198767	0.0537	0.0342347	0.1518712
13	-0.160362	0.0381	0.0208465	0.1234128
14	-0.143135	0.0227	0.0103840	0.1116058
15	0.009759	0.0076	0.0022470	0.0328264
16	0.305413	0.0000	0.0000000	0.0131042
17	0.314310	0.0000	0.0000000	0.0152203
18	0.386791	0.0000	0.0000000	0.0383578
19	0.438751	0.0000	0.0000000	0.0614105
20	0.671698	0.0000	0.0000000	0.2311287
21	0.808376	0.0000	0.0000000	0.3812278
22	0.928690	0.0000	0.0000000	0.5442758
23	1.004024	0.0000	0.0000000	0.6611063
24	1.009251	0.0000	0.0000000	0.6696337
25	1.123466	0.0000	0.0000000	0.8696056
26	1.240275	0.0000	0.0000000	1.1011049
27	1.704119	0.0000	0.0000000	2.2897121

ตารางที่ 5 (ต่อ)

i	Y_{li}	a_{30-i+1}	$a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li})$	$(Y_{li} - \bar{Y}_l)^2$
28	1.714009	0.0000	0.0000000	2.3197406
29	1.968752	0.0000	0.0000000	3.1606172
30	2.071817	0.0000	0.0000000	3.5377000
sum			5.554344	31.669316

$$\begin{aligned}
 2.1.3 \quad \text{คำนวณค่า } W_l &= \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} (Y_{li} - \bar{Y}_l)^2} \\
 &= \frac{(5.554344)^2}{31.669316} = 0.9741523
 \end{aligned}$$

$$2.1.4 \quad \text{คำนวณค่า } z = \frac{((1-W)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$\text{โดยที่ } x = \ln(n) - 5 \text{ เมื่อ } 20 < n \leq 2000$$

$$x = \ln(30) - 5 = -1.598803$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } \lambda &= 0.480385 + 0.318828(x) + -0.0241665(x)^3 \\
 &\quad + 0.00879701(x)^4 + 0.002989646(x)^5 \text{ เมื่อ } 20 < n \leq 2000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 0.480385 + 0.318828(-1.598803) \\
 &\quad - 0.0241665(-1.598803)^3 + 0.00879701(-1.598803)^4 \\
 &\quad + 0.002989646(-1.598803)^5 \\
 &= 0.095654
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } \ln \mu &= -1.91487 - 1.37888(x) + -0.04183209(x)^2 \\
 &\quad + 0.1066339(x)^3 - 0.03513666(x)^4 - 0.01504614(x)^5 \\
 &\quad \text{เมื่อ } 20 < n \leq 2000
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln \mu &= -1.91487 - 1.37888(-1.598803) \\ &\quad - 0.04183209(-1.598803)^2 + 0.1066339(-1.598803)^3 \\ &\quad - 0.03513666(-1.598803)^4 - 0.01504614(-1.598803)^5 \\ \mu &= 0.722211\end{aligned}$$

และ $\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807(x) - 0.331885(x)^2$
 $+ 0.1773538(x)^3 - 0.01638782(x)^4 - 0.03215018(x)^5$
 $+ 0.003852646(x)^6$ เมื่อ $20 < n \leq 2000$

$$\begin{aligned}\ln \sigma &= -3.73538 - 1.015807(-1.598803) \\ &\quad - 0.331885(-1.598803)^2 + 0.1773538(-1.598803)^3 \\ &\quad - 0.01638782(-1.598803)^4 - 0.03215018(-1.598803)^5 \\ &\quad + 0.003852646(-1.598803)^6 \\ \sigma &= 0.0336635\end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 = \frac{(1 - 0.9741523)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = -0.513549$

2.1.5 คำนวณค่า $k_1 = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_1) \right] \right\}^2$
 $= 2.4712755$

2.1.6 คำนวณค่า $Y_2 = X_2 - b_{21}X_1$

โดยที่ $b_{21} = \frac{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2)}{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}$
 $= \frac{7.9387362}{31.669316} = 0.250676$

2.1.7 เรียงลำดับข้อมูล Y_2 จากน้อยไปมาก

2.1.8 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2 ดังตารางที่ 6

ตารางที่ 6 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2

i	a_{30-i+1}	Y_{2i}	$a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i})$	$(Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2$
1	0.4254	-1.572861	1.2896964	2.7282593
2	0.2944	-0.889564	0.6331812	0.9378903
3	0.2487	-0.868435	0.4928773	0.8974132
4	0.2148	-0.858563	0.3922688	0.8788068
5	0.1870	-0.780572	0.3216316	0.7386644
6	0.1630	-0.746668	0.2701873	0.6815351
7	0.1415	-0.551877	0.1721869	0.3978586
8	0.1219	-0.547618	0.1475088	0.3925040
9	0.1036	-0.485555	0.1167090	0.3185907
10	0.0862	-0.464292	0.0849409	0.2950396
11	0.0697	-0.403439	0.0597392	0.2326352
12	0.0537	-0.387983	0.0262671	0.2179646
13	0.0381	-0.190648	0.0100702	0.0726474
14	0.0227	-0.068357	0.0021110	0.0216797
15	0.0076	-0.036532	0.0001980	0.0133208
16	0.0000	-0.010479	0.0000000	0.0079856
17	0.0000	0.0246393	0.0000000	0.0029424
18	0.0000	0.0736619	0.0000000	0.0000273
19	0.0000	0.1011628	0.0000000	0.0004964
20	0.0000	0.4536515	0.0000000	0.1404511
21	0.0000	0.5211017	0.0000000	0.1955569
22	0.0000	0.6409803	0.0000000	0.3159528
23	0.0000	0.6624622	0.0000000	0.3405640
24	0.0000	0.6649919	0.0000000	0.3435230
25	0.0000	0.9109228	0.0000000	0.6922894
26	0.0000	0.9393829	0.0000000	0.7404592
27	0.0000	0.9676415	0.0000000	0.7898907

ตารางที่ 6 (ต่อ)

i	a_{30-i+1}	Y_{2i}	$a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i})$	$(Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2$
28	0.0000	1.1133790	0.0000000	1.0701810
29	0.0000	1.2611873	0.0000000	1.3978423
30	0.0000	1.4588655	0.0000000	1.9043504
sum			4.0195738	16.767322

$$\begin{aligned}
 2.1.9 \quad \text{คำนวณค่า } W_2 &= \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} (Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2} \\
 &= \frac{(4.0195738)^2}{16.767322} = 0.9635989
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.10 \quad \text{คำนวณค่า } z_2 &= \frac{((1 - W_2)^\lambda - \mu)}{\sigma} \\
 &= \frac{(1 - 0.9635989)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = 0.1835948
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.11 \quad \text{คำนวณค่า } k_2 &= \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_2) \right] \right\}^2 \\
 &= 2.9264166
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.12 \quad \text{คำนวณค่า } Y_3 &= X_3 - b_{32}X_2 - b_{31}X_1 \\
 \text{โดยที่ } b_{32} &= \frac{\sum_{i=1}^{30} (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{30} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2} \\
 &= \frac{8.4897309}{18.6886437} = 0.4542722
 \end{aligned}$$

$$b_{31} = \frac{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}$$

$$= \frac{11.025702}{31.669316} = 0.3481509$$

2.1.13 เรียงลำดับข้อมูล Y_3 จากน้อยไปมาก

2.1.14 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3 ดังตารางที่ 7

ตารางที่ 7 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3

i	a_{30-i+1}	Y_{3i}	$a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i})$	$(Y_{3i} - \bar{Y}_3)^2$
1	0.4254	-2.080668	1.6092799	4.4189456
2	0.2944	-1.777673	0.9969031	3.2368826
3	0.2487	-1.485180	0.6824758	2.2699665
4	0.2148	-1.364977	0.5302174	1.9222098
5	0.1870	-1.202892	0.4016111	1.4990383
6	0.1630	-1.023253	0.2760197	1.0914254
7	0.1415	-0.748900	0.1920235	0.5934557
8	0.1219	-0.447451	0.1085636	0.2198777
9	0.1036	-0.422339	0.0711884	0.1969583
10	0.0862	-0.294631	0.0479942	0.0999141
11	0.0697	-0.254636	0.0315271	0.0762290
12	0.0537	-0.243379	0.0196251	0.0701402
13	0.0381	-0.231711	0.0123843	0.0640959
14	0.0227	-0.090808	0.0021806	0.0126043
15	0.0076	-0.045423	0.0003728	0.0044734
16	0.0000	0.0036356	0.0000000	0.0003177
17	0.0000	0.0052530	0.0000000	0.0002627
18	0.0000	0.0933355	0.0000000	0.0051660

ตารางที่ 7 (ต่อ)

i	a_{30-i+1}	Y_{3i}	$a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i})$	$(Y_{3i} - \bar{Y}_3)^2$
19	0.0000	0.1220789	0.0000000	0.0101241
20	0.0000	0.1976900	0.0000000	0.0310568
21	0.0000	0.2621461	0.0000000	0.0579296
22	0.0000	0.2648072	0.0000000	0.0592176
23	0.0000	0.4431448	0.0000000	0.1778177
24	0.0000	0.6081564	0.0000000	0.3442121
25	0.0000	0.6701200	0.0000000	0.4207592
26	0.0000	0.9447614	0.0000000	0.8524847
27	0.0000	1.1034463	0.0000000	1.1706933
28	0.0000	1.2589926	0.0000000	1.5314857
29	0.0000	1.6085465	0.0000000	2.5188422
30	0.0000	1.7023121	0.0000000	2.8252622
sum			4.9823668	25.781848

$$\begin{aligned}
 2.1.15 \text{ ค่า } W_3 &= \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} (Y_{3i} - \bar{Y}_3)^2} \\
 &= \frac{(4.9823668)^2}{25.781848} = 0.9628471
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.16 \text{ ค่า } z_3 &= \frac{\left((1 - W_3)^\lambda - \mu \right)}{\sigma} \\
 &= \frac{(1 - 0.9628471)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = 0.2259465
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.17 \text{ ค่า } k_3 &= \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_3) \right] \right\}^2 \\
 &= 2.9590109
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.18 \quad \text{คำนวณค่า } G &= \frac{\sum_1^m k_i}{m} \\
 &= \frac{2.4712755 + 2.9264166 + 2.9590109}{3} \\
 &= 2.7855677
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.19 \quad \text{คำนวณค่า } \bar{c} &= \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}, \quad c_{ij} = \text{corr}(k_i, k_j) \\
 &= 1.1445975
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.20 \quad \text{คำนวณค่า } e &= \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1 + (m-1)\bar{c}} \\
 &= \frac{3}{1 + (3-1)(1.1445975)} = 0.9120773
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.1.21 \quad \text{คำนวณค่า } H &= \frac{e}{m} \sum_1^m k_i \sim \chi^2_{\hat{e}} \\
 H &= \frac{0.9120773}{3} (2.4712755 + 2.9264166 + 2.9590109) \\
 &= 2.540653
 \end{aligned}$$

2.1.22 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ H ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก1 ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ (df) เท่ากับ 1 ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$H = 2.540653 < 3.841$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

2.2 วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$T = T_3 + T_4$$

$$\text{โดยที่ } T_3 = \frac{1}{6}nb_{1,p} \text{ และ } T_4 = \frac{1}{24}n[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2)]$$

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3, \quad b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2, \quad b_{2,p}^* = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4$$

$$D_{ii} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad D_{ij} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{S}_{ii} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)^2, \quad \mathbf{S}_{ij} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)$$

คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.1909395 \\ 0.0788835 \\ 0.0214605 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.0920454 & 0.2737495 & 0.3801966 \\ 0.2737495 & 0.644436 & 0.2927493 \\ 0.3801966 & 0.2927493 & 1.0569647 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.10507 & -0.330423 & -0.305983 \\ -0.330423 & 1.8738852 & -0.400158 \\ -0.305983 & -0.400158 & 1.1670017 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
2.2.1 \quad \text{คำนวณค่า } b_{1,p} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3 \\
b_{1,p} &= \frac{1}{(30)^2} \left[(1.0603529)^3 + (-0.602791)^3 + \dots + (1.7718179)^3 \right] \\
&= 0.7890019
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.2.2 \quad \text{คำนวณค่า } b_{2,p} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2 \\
b_{2,p} &= \frac{1}{30} \left[(1.0603529)^2 + (1.3968588)^2 + \dots + (1.7718179)^2 \right] \\
&= 12.188508
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.2.3 \quad \text{คำนวณค่า } b_{2,p}^* &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4 \\
b_{2,p}^* &= \frac{1}{(30)^2} \left[(1.0603529)^4 + (-0.602791)^4 + \dots + (1.7718179)^4 \right] \\
&= 37.627841
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.2.4 \quad \text{คำนวณค่า } T_3 &= \frac{1}{6} n b_{1,p} \\
&= \frac{1}{6} (30) (0.7890019) = 3.9450093
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.2.5 \quad \text{คำนวณค่า } T_4 &= \frac{1}{24} n \left[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2) \right] \\
&= \frac{1}{24} (30) \{ 37.627841 - 6(12.188508) + 3(3)(5) \} \\
&= 11.87099
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.2.6 \quad \text{คำนวณค่า } T &= T_3 + T_4 \\
&= 3.9450093 + 11.87099 \\
&= 15.815999
\end{aligned}$$

2.2.7 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ T ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก6 ที่จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$T = 15.815999 < 37.65$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

2.3 วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}{n(n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi_{ij} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j); i < j, \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})}{\left[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right]}$$

คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.1909395 \\ 0.0788835 \\ 0.0214605 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.0920454 & 0.2737495 & 0.3801966 \\ 0.2737495 & 0.644436 & 0.2927493 \\ 0.3801966 & 0.2927493 & 1.0569647 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.10507 & -0.330423 & -0.305983 \\ -0.330423 & 1.8738852 & -0.400158 \\ -0.305983 & -0.400158 & 1.1670017 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1.027996 & -0.150875 & -0.159784 \\ -0.150875 & 1.3490528 & -0.176575 \\ -0.159784 & -0.176575 & 1.053704 \end{bmatrix}$$

$$2.3.1 \quad \text{คำนวณค่า } \mathbf{D}_1 = \frac{\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}})}{\left[(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}) \right]}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.0731644 \\ 0.8779013 \\ -0.473219 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0.8207767 \\ -0.550659 \\ 0.1519894 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{bmatrix} -0.946503 \\ -0.122833 \\ 0.2984024 \end{bmatrix}$$

$$2.3.2 \quad \text{คำนวณค่า } \Psi_{i,j} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j); i < j$$

$$\Psi_{1,2} = 2.0889725$$

$$\Psi_{1,3} = 0.9682631$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{29,30} = 1.6971313$$

$$2.3.3 \quad \text{คำนวณค่า } O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A \left(\Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}{n(n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } A\left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$O = 0.393797$$

2.3.4 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ O ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก7 ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

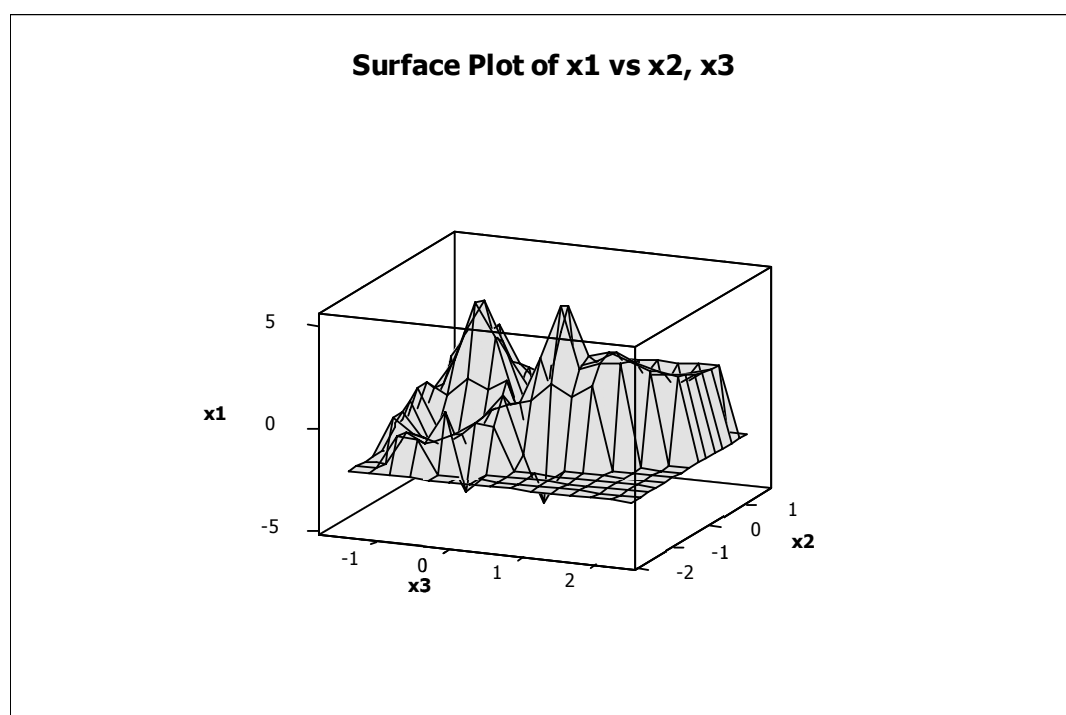
$$O = 0.393797 < 0.4443$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

การตรวจสอบข้อมูล

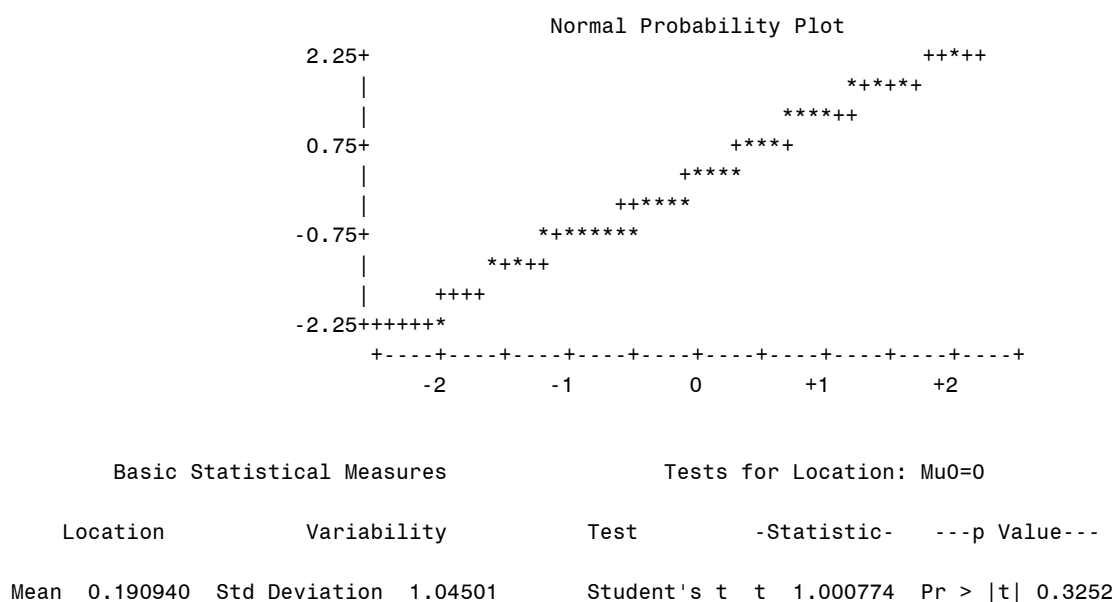
เมื่อนำข้อมูลมาพล็อตกราฟได้ดังนี้



ภาพที่ 9 แสดงการกระจายของข้อมูลทั้ง 3 ตัว

ในการตรวจสอบข้อมูลว่ามีการแจกแจงปกติสามตัวแปรหรือไม่ มีขั้นตอนดังนี้

1. ตรวจสอบการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปร x_1 โดยใช้ Normal Probability Plot



ภาพที่ 10 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_1

สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูล x_1 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

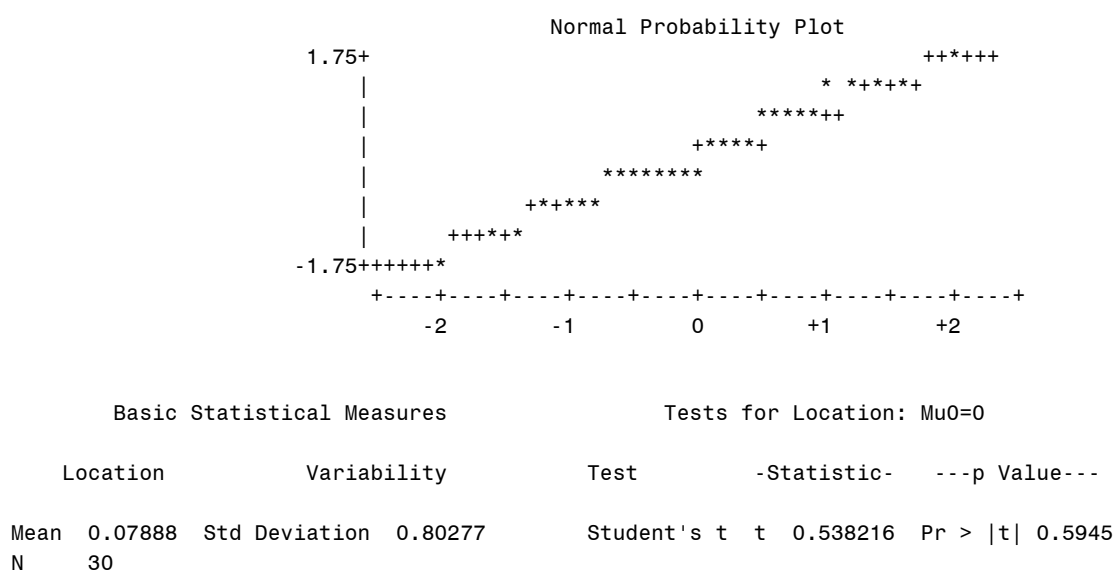
H_1 : ข้อมูล x_1 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

จากภาพที่ 10 โดยใช้สถิติทดสอบที่ ทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปร x_1 พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_1 มีค่าเท่ากับ 0.3252 ซึ่งมีค่ามากกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05

ดังนั้น ขอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูล x_1 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

2. ตรวจสอบการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปร x_2 โดยใช้ Normal Probability Plot



ภาพที่ 11 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_2

สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูล x_2 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

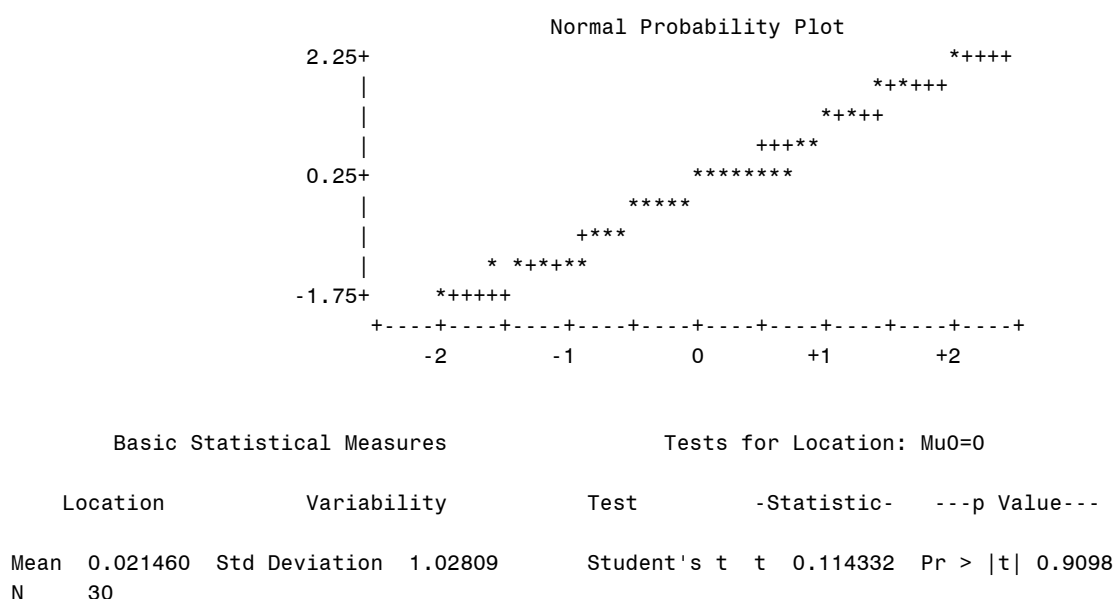
H_1 : ข้อมูล x_2 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

จากภาพที่ 11 โดยใช้สถิติทดสอบที่ ทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปร x_2 พบว่าค่า p-value ของตัวแปร x_2 มีค่าเท่ากับ 0.5945 ซึ่งมีความมากกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูล x_2 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

3. ตรวจสอบการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปร x_3 โดยใช้ Normal Probability Plot



ภาพที่ 12 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_3

สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูล x_3 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

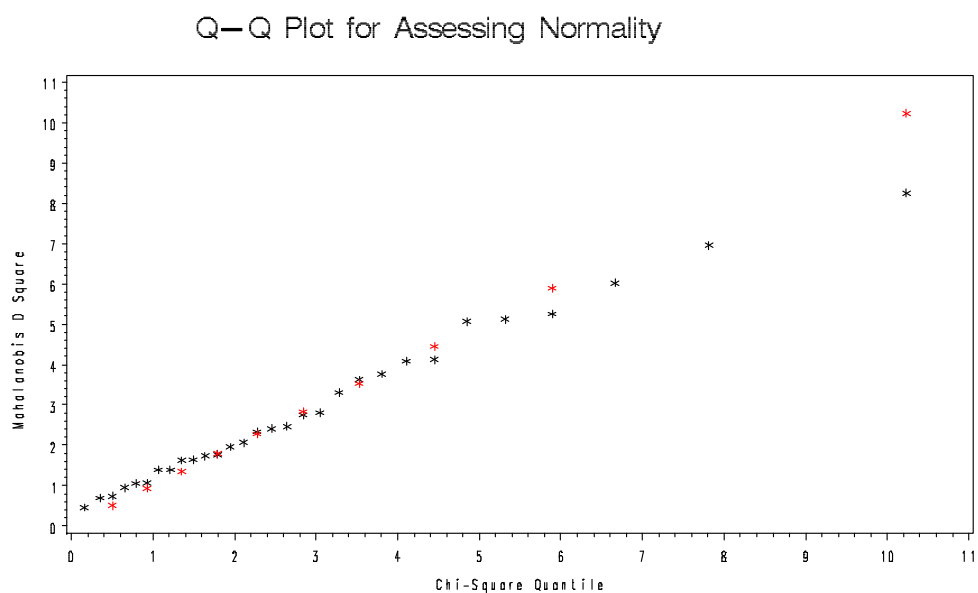
H_1 : ข้อมูล x_3 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

จากภาพที่ 12 โดยใช้สถิติทดสอบที่ ทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปร x_3 พบว่าค่า p-value ของตัวแปร x_3 มีค่าเท่ากับ 0.9098 ซึ่งมีความมากกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูล x_3 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

4. ตรวจสอบการแจกแจงร่วมของตัวแปร x_1 , x_2 และ x_3 โดยใช้ Chi-square Plot



ภาพที่ 13 แสดง Chi-square Plot ของการแจกแจงปกติสามตัวแปร

จากภาพที่ 13 พบว่า ข้อมูลมีแนวโน้มเชิงเส้นตรง ดังนั้น ข้อมูลชุดนี้จึงมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

ผลและวิจารณ์

ผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I error) และศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ (Power of the test) ของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี คือ วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) และวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) ทั้งในกรณีที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ซึ่งได้แก่ การแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) การแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร (Multivariate Lognormal Distribution) และการแจกแจงสตีวเดนต์-ทีหลายตัวแปร (Multivariate Student-t Distribution) โดยกำหนดจำนวนตัวแปรที่ศึกษาเท่ากับ 2, 3 และ 4 ขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 เพื่อหาผลสรุปว่าวิธีการทดสอบวิธีใดสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ และวิธีการทดสอบวิธีใดให้กำลังการทดสอบสูงสุดในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนด

การนำเสนอผลการวิจัยแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

1. เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1
2. เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ

ส่วนที่ 2 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

1. เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

2. เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ

หมายเหตุ: เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบต่าง ๆ กรณี 2 ตัวแปร แสดงได้ดังนี้

แบบที่ 1 มีค่าความแปรปรวนร่วมต่ำ $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma = 0.3$

แบบที่ 2 มีค่าความแปรปรวนร่วมกลาง $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma = 0.6$

แบบที่ 3 มีค่าความแปรปรวนร่วมสูง $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma = 0.9$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบต่าง ๆ กรณี 3 ตัวแปร แสดงได้ดังนี้

แบบที่ 1 มีค่าความแปรปรวนร่วมต่ำ $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.3$

แบบที่ 2 มีค่าความแปรปรวนร่วมกลาง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.6$

แบบที่ 3 มีค่าความแปรปรวนร่วมสูง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0.9$

แบบที่ 4 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.3$ และ $\sigma_{23} = 0.6$

แบบที่ 5 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.3$ และ $\sigma_{23} = 0.9$

แบบที่ 6 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0.6$ และ $\sigma_{23} = 0.9$

แบบที่ 7 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = 0.3, \sigma_{13} = 0.6$ และ $\sigma_{23} = 0.9$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมแบบต่าง ๆ กรณี 4 ตัวแปร แสดงได้ดังนี้

แบบที่ 1 มีค่าความแปรปรวนร่วมต่ำ $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.3$

แบบที่ 2 มีค่าความแปรปรวนร่วมกลาง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.6$

แบบที่ 3 มีค่าความแปรปรวนร่วมสูง $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.9$

แบบที่ 4 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0.3$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.6$$

แบบที่ 5 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{34} = 0.6$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = 0.3$$

แบบที่ 6 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = 0.6$ และ

$$\sigma_{34} = 0.3$$

แบบที่ 7 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0.3$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.9$$

แบบที่ 8 มีค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{14} = 0.6$ และ

$$\sigma_{23} = \sigma_{24} = \sigma_{34} = 0.9$$

ส่วนที่ 1 กรณิทรบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

1.1 เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ผลการศึกษาวิจัยในกรณีนี้ได้นำเสนอในรูปแบบการเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี ในกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง จำนวนตัวแปรที่ศึกษาเท่ากับ 2, 3 และ 4 ขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 ดังแสดงในตารางที่ 8 – 11

ตารางที่ 8 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma = 0.3$	0.05	20	0.001	0.049	•
		30	0.002	0.049	1.000
		50	0.001	0.043	1.000
	0.10	20	0.004	0.103	•
		30	0.003	0.097	1.000
		50	0.002	0.087	1.000
$\sigma = 0.6$	0.05	20	0.004	0.045	•
		30	0.003	0.047	1.000
		50	0.002	0.050	1.000
	0.10	20	0.006	0.099	•
		30	0.005	0.097	1.000
		50	0.003	0.081	1.000

ตารางที่ 8 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma = 0.9$	0.05	20	0.001	0.052	•
		30	0.000	0.050	1.000
		50	0.000	0.043	0.999
	0.10	20	0.002	0.100	•
		30	0.001	0.093	1.000
		50	0.001	0.099	0.999

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 8 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สรุปผลความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ H และ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma = 0.3$ และ $\sigma = 0.6$ ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma = 0.9$ สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ แต่สถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ H และ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

สรุปได้ว่า ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ H และ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma = 0.3$ และ $\sigma = 0.6$ ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วม $\sigma = 0.9$ สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ยกเว้น สถิติทดสอบ H ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ตารางที่ 9 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.048	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.045	1.000
$\sigma_{23} = 0.3$		50	0.000	0.040	1.000
(แบบที่ 1)	0.10	20	0.001	0.096	•
		30	0.001	0.087	1.000
		50	0.000	0.093	1.000

ตารางที่ 9 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.001	0.046	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.050	1.000
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.053	0.999
(แบบที่ 2)	0.10	20	0.002	0.097	•
		30	0.001	0.103	1.000
		50	0.001	0.100	1.000
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.052	•
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.045	1.000
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.040	1.000
(แบบที่ 3)	0.10	20	0.000	0.097	•
		30	0.000	0.103	1.000
		50	0.000	0.089	1.000
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.001	0.042	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.038	1.000
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.038	1.000
(แบบที่ 4)	0.10	20	0.001	0.089	•
		30	0.001	0.085	1.000
		50	0.001	0.103	1.000
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.045	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.055	1.000
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.056	1.000
(แบบที่ 5)	0.10	20	0.001	0.092	•
		30	0.000	0.092	1.000
		50	0.000	0.107	1.000

ตารางที่ 9 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.051	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.055	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.046	1.000
(แบบที่ 6)	0.10	20	0.001	0.105	•
		30	0.001	0.115	0.999
		50	0.001	0.098	1.000
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.055	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.056	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.059	1.000
(แบบที่ 7)	0.10	20	0.001	0.111	•
		30	0.000	0.115	0.999
		50	0.000	0.112	1.000

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 9 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สรุปผลความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 2 และ 4

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7

ขนาดตัวอย่าง 30 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 4 และ 6

ขนาดตัวอย่าง 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 2, 4 และ 6

สรุปได้ว่า ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของ การแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อน ประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 2 และ 4 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่า ความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บาง ค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่า

ความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 4 และ 6

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 2, 4 และ 6

ตารางที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.050	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.051	1.000
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.049	1.000
$\sigma_{23} = 0.3$	0.10	20	0.000	0.086	•
$\sigma_{24} = 0.3$		30	0.000	0.098	1.000
$\sigma_{34} = 0.3$ (แบบที่ 1)		50	0.000	0.091	1.000
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.049	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.058	1.000
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.056	1.000
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.102	•
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.102	1.000
$\sigma_{34} = 0.6$ (แบบที่ 2)		50	0.000	0.107	1.000

ตารางที่ 10 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.048	●
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.054	1.000
$\sigma_{14} = 0.9$		50	0.000	0.044	1.000
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.101	●
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.106	1.000
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.094	1.000
(แบบที่ 3)					
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.042	●
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.044	1.000
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.046	0.999
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.083	●
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.100	1.000
$\sigma_{34} = 0.6$		50	0.000	0.082	1.000
(แบบที่ 4)					
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.055	●
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.049	0.999
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.043	1.000
$\sigma_{23} = 0.3$	0.10	20	0.000	0.101	●
$\sigma_{24} = 0.3$		30	0.000	0.106	1.000
$\sigma_{34} = 0.6$		50	0.000	0.089	1.000
(แบบที่ 5)					

ตารางที่ 10 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.060	●
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.053	1.000
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.051	1.000
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.110	●
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.104	1.000
$\sigma_{34} = 0.3$		50	0.000	0.092	1.000
(แบบที่ 6)					
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.055	●
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.051	1.000
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.060	1.000
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.115	●
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.111	1.000
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.106	1.000
(แบบที่ 7)					
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.048	●
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.046	0.999
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.049	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.102	●
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.084	0.999
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.102	0.999
(แบบที่ 8)					

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 10 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของ

การแจกแจง สรุปผลความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบ การแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

สรุปได้ว่า ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

ตารางที่ 11 แสดงสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ กรณีทราบ

ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร สำหรับ $p = 2, 3$ และ 4

p	Σ	$\alpha = 0.05$			$\alpha = 0.10$		
		n			n		
		20	30	50	20	30	50
2	$\sigma = 0.3$	H, T	H, T, O	H, T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	$\sigma = 0.6$	H, T	H, T, O	H, T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	$\sigma = 0.9$	H, T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
3	แบบที่ 1	T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	T, O
	แบบที่ 2	H, T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	แบบที่ 3	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 4	H, T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	แบบที่ 5	T	T, O	T, O	H, T	T, O	T, O
	แบบที่ 6	T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	แบบที่ 7	T	T, O	T, O	H, T	T, O	T, O
4	แบบที่ 1	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 2	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 3	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 4	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 5	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 6	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 7	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 8	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O

สรุปได้ว่า สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุก ๆ ขนาดตัวอย่างที่ศึกษา ค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และระดับนัยสำคัญที่ศึกษาทั้งหมด และสถิติทดสอบ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ที่ค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษาทั้งหมด และระดับนัยสำคัญทั้ง 2 ระดับ ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และความแปรปรวนร่วมที่ศึกษาทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 ในกรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

1.2 เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ

ผลการวิจัยในกรณีนี้ได้นำเสนอในรูปแบบการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ เมื่อใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี ในกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร และการแจกแจงสวิตเดนซ์-ทีหลายตัวแปร จำนวนตัวแปรที่ศึกษาเท่ากับ 2, 3 และ 4 ขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 ดังแสดงในตารางที่ 12 - 17

ตารางที่ 12 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงลอการิธึม 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma = 0.3$	0.05	20	0.002	1.000	•	T	H
		30	0.002	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.002	1.000	1.000	T*	O*
	0.10	20	0.005	1.000	•	T	H
		30	0.004	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.003	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 12 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma = 0.6$	0.05	20	0.004	0.994	•	T	H
		30	0.003	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.002	1.000	1.000	T*	O*
	0.10	20	0.008	0.997	•	T	H
		30	0.006	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.005	1.000	1.000	T*	O*
	0.05	20	0.001	0.989	•	T	H
		30	0.001	0.999	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma = 0.9$	0.10	20	0.003	0.992	•	T	H
		30	0.003	0.999	1.000	O	T
		50	0.003	1.000	1.000	T*	O*

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

จากตารางที่ 12 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงลอการิธึม 2 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนรวมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

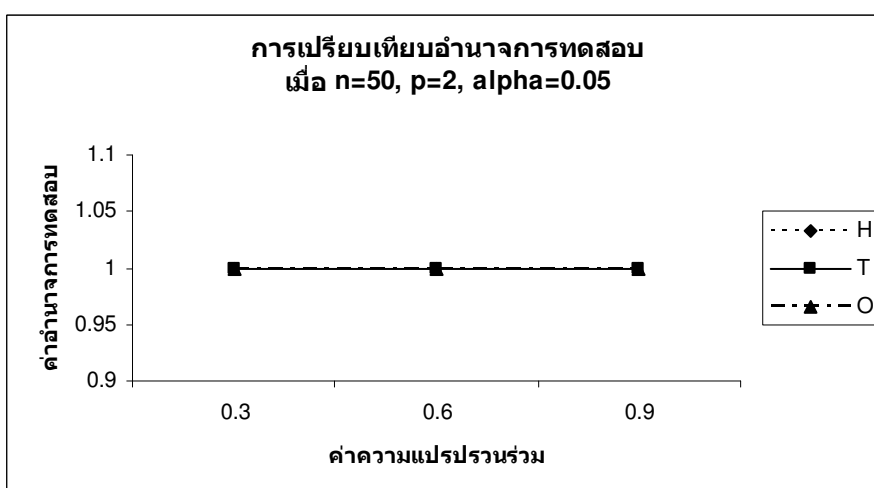
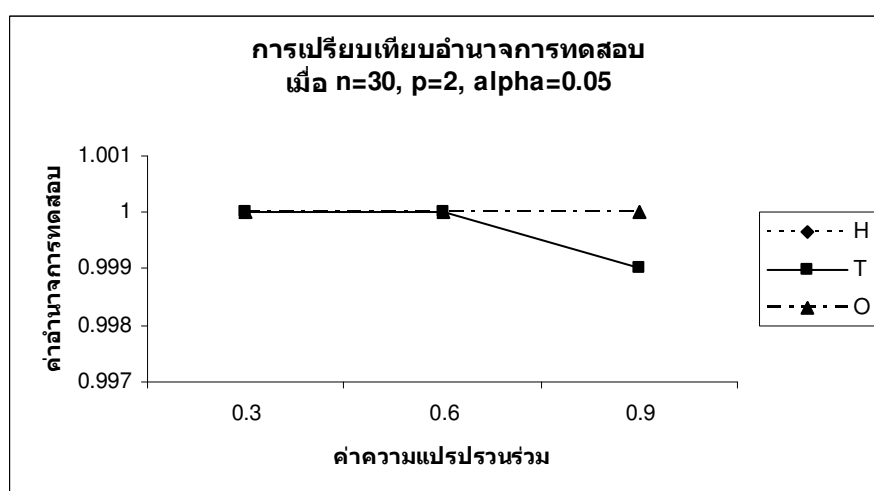
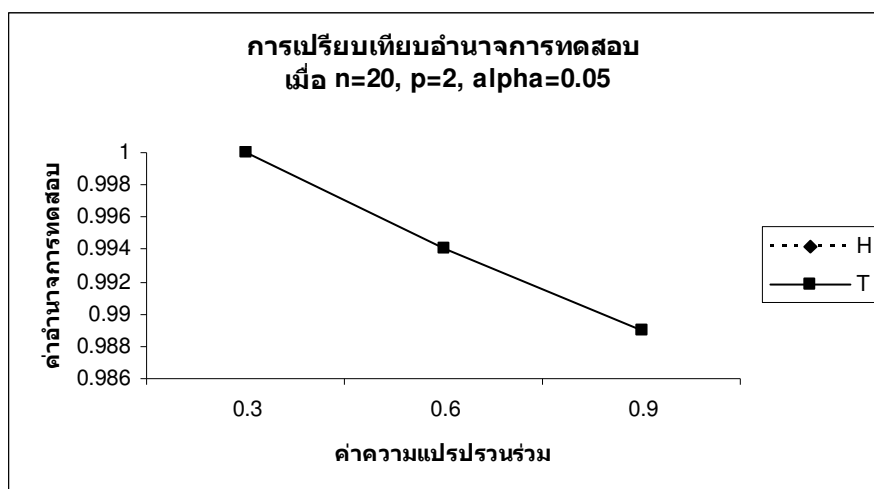
ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

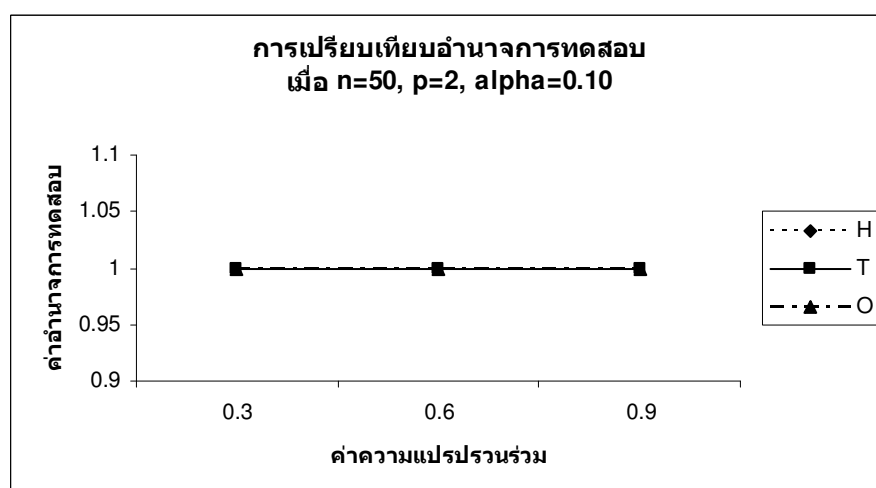
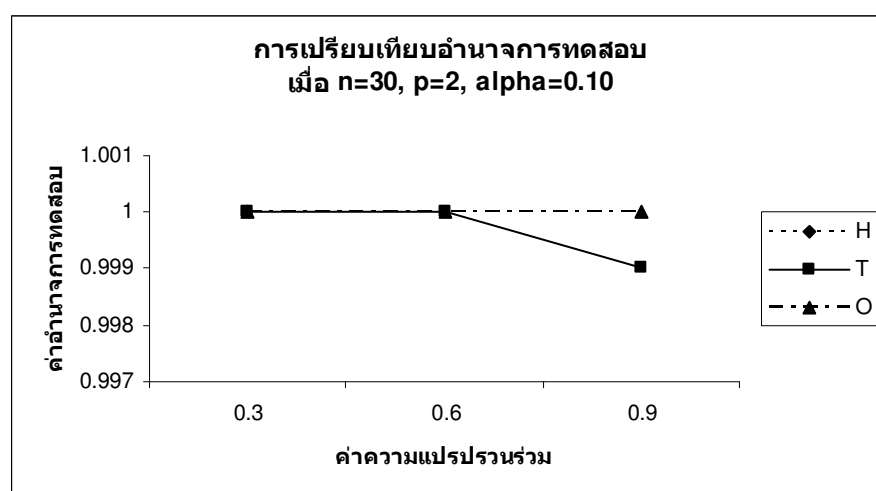
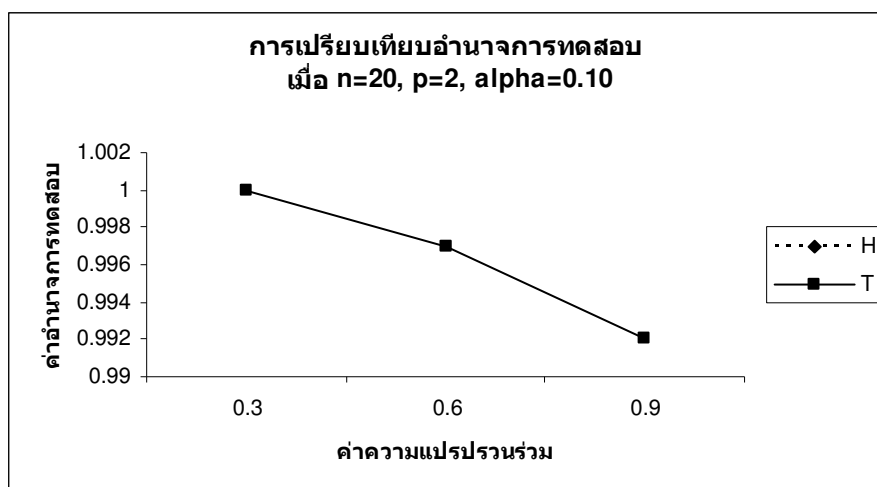
ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O และค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 14 และ 15 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 14 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอจิสติก 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 15 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงต็อกนอร์มอล 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 13 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงล็อกนอร์มอล 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 1)	0.10	20	0.001	1.000	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.001	0.998	●	T	H
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 2)	0.10	20	0.002	0.999	●	T	H
		30	0.002	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.995	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.999	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 3)	0.10	20	0.000	0.999	●	T	-
		30	0.000	0.999	1.000	O	T
		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 13 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.998	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 4)	0.10	20	0.001	0.998	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.996	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 5)	0.10	20	0.001	0.998	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.996	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 6)	0.10	20	0.001	0.997	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.999	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 7)	0.10	20	0.001	0.999	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

- 1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1
- 2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2
- * หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน
- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 13 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงลอการิธึม 3 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

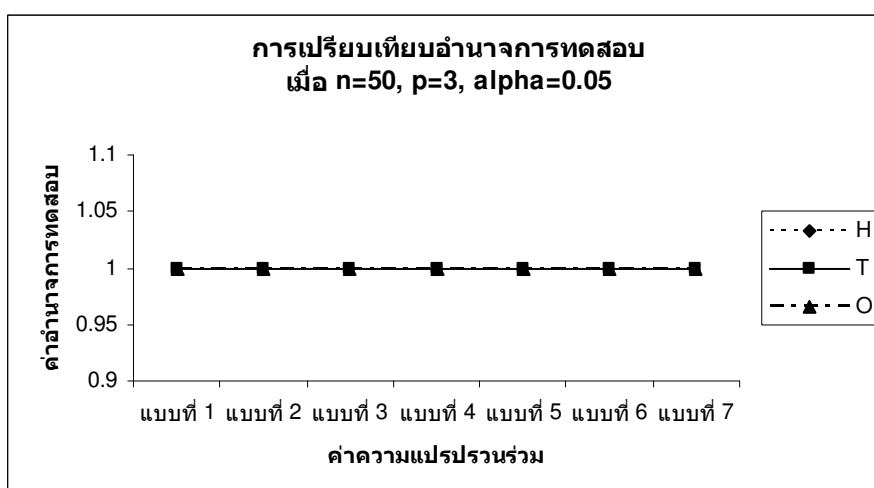
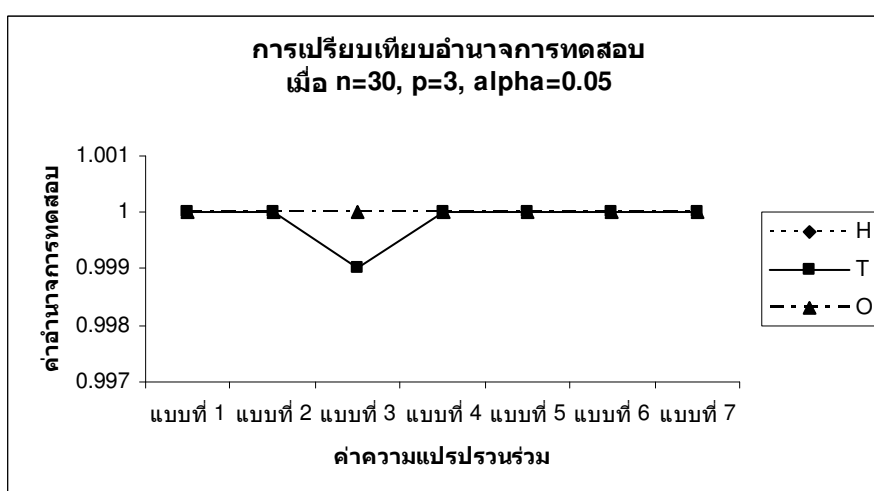
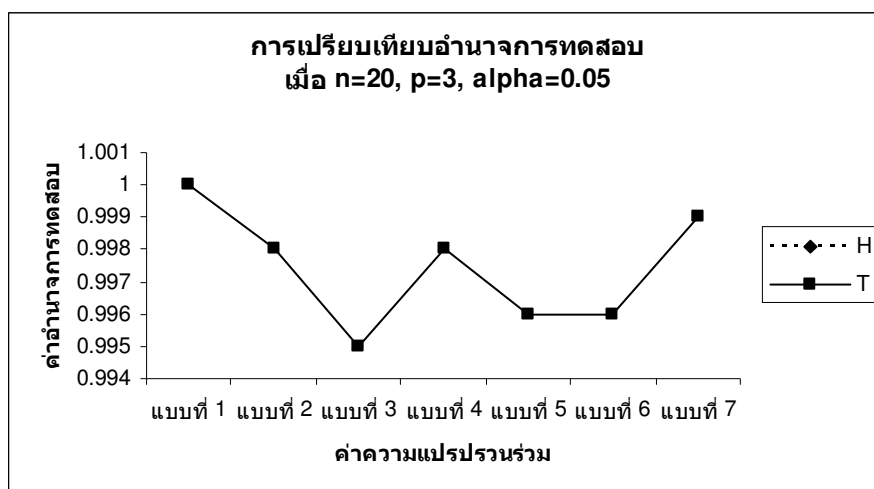
ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

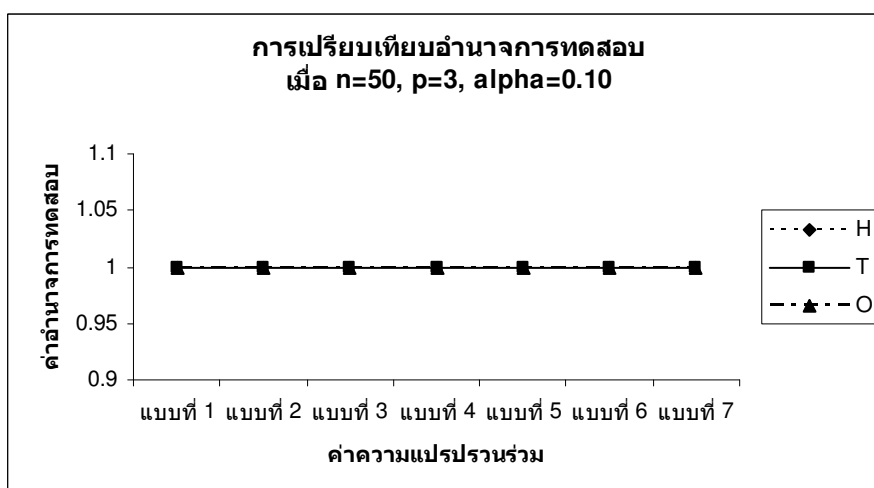
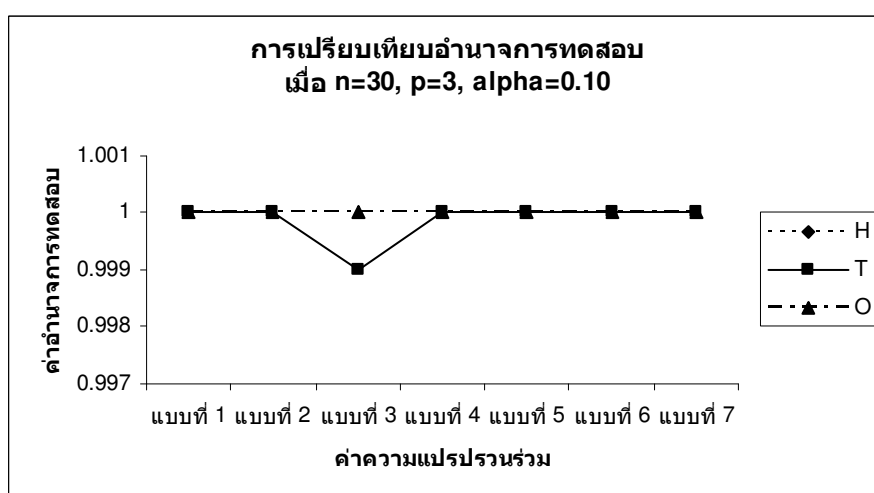
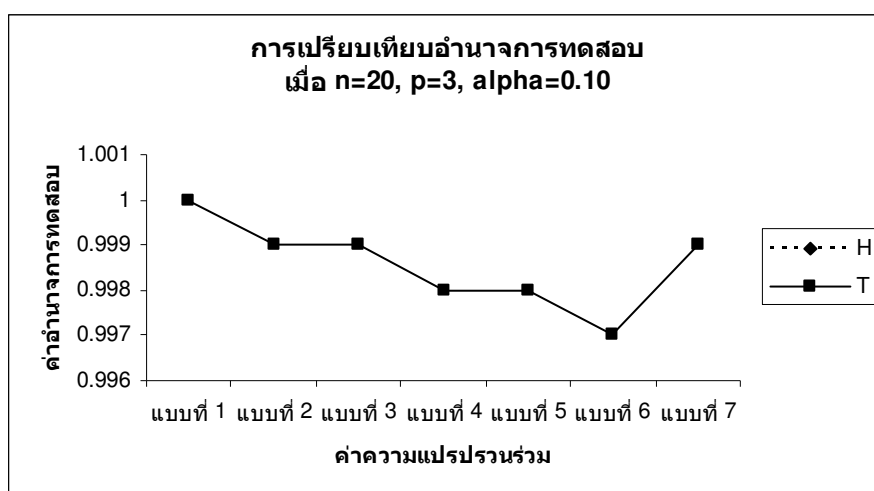
เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 16 และ 17 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 16 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอการิธึม 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 17 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอจิสติก 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 14 (ต่อ)

ตารางที่ 14 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.997	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.998	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 7)							
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.997	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.998	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 8)							

หมายเหตุ: ● หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 14 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงลิกนอร์มอล 4 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 3, 4, 5, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

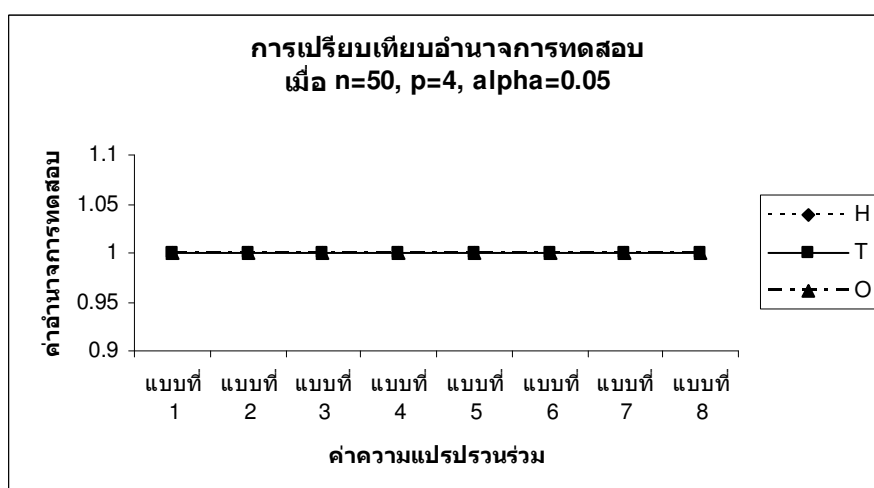
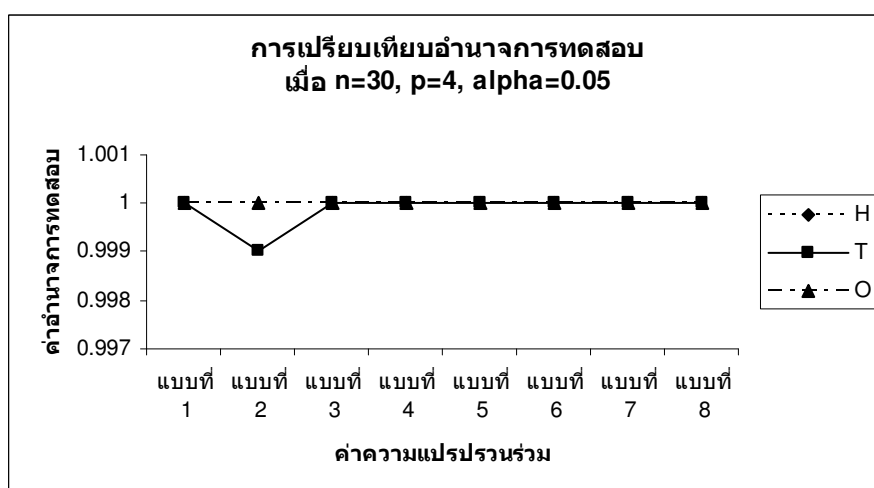
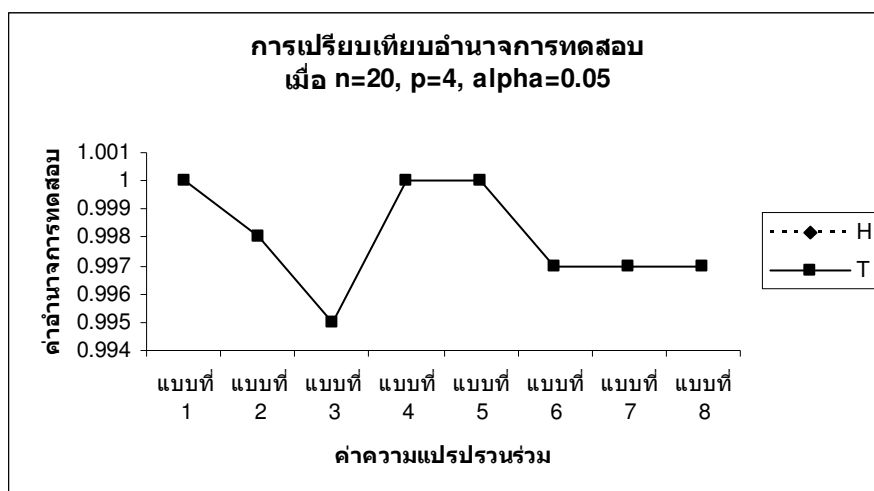
ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 3, 4, 5, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

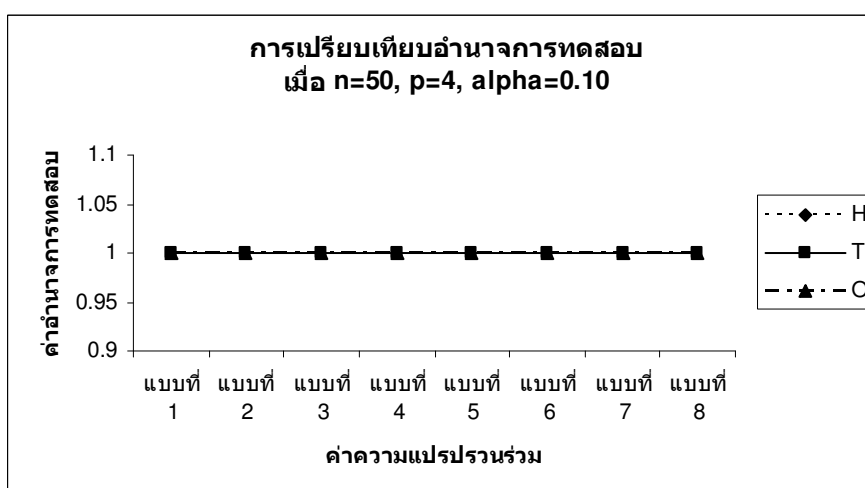
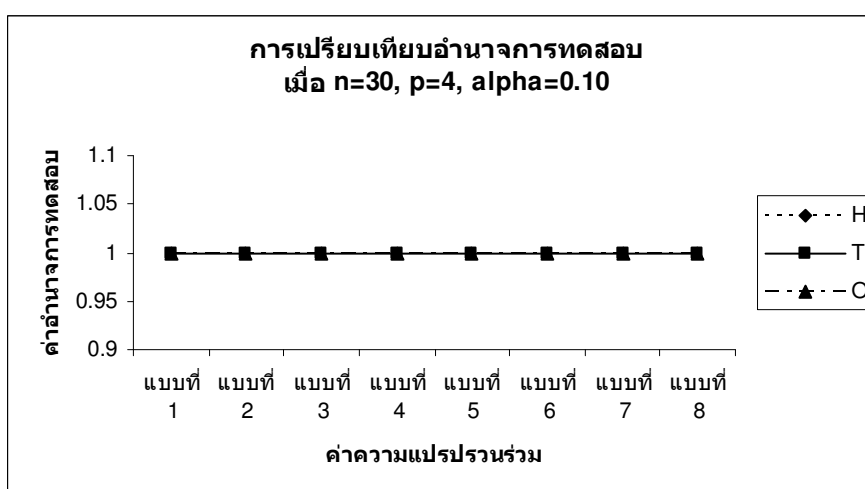
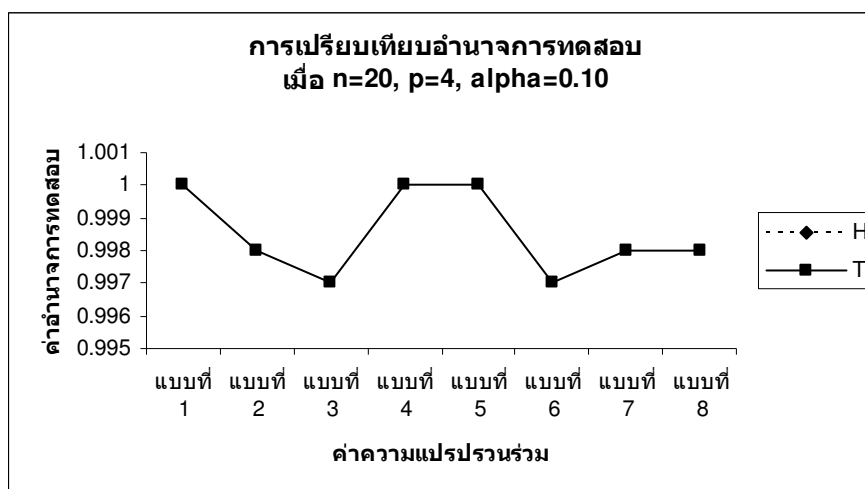
เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 18 และ 19 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 18 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอการิธึม 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 19 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอการิธึม 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 15 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสวิตเดนท-ที่ 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma = 0.3$	0.05	20	0.001	0.291	●	T	H
		30	0.001	0.305	0.999	O	T
		50	0.002	0.377	0.999	O	T
	0.10	20	0.003	0.415	●	T	H
		30	0.003	0.423	0.999	O	T
		50	0.002	0.509	0.999	O	T
	0.05	20	0.003	0.798	●	T	H
		30	0.002	0.903	1.000	O	T
		50	0.002	0.971	1.000	O	T
$\sigma = 0.6$	0.10	20	0.005	0.874	●	T	H
		30	0.005	0.947	1.000	O	T
		50	0.004	0.988	1.000	O	T
	0.05	20	0.001	1.000	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
	0.10	20	0.002	1.000	●	T	H
		30	0.002	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.003	1.000	1.000	T*	O*

หมายเหตุ: ● หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

จากตารางที่ 15 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงสทิวเคนท์-ที 2 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

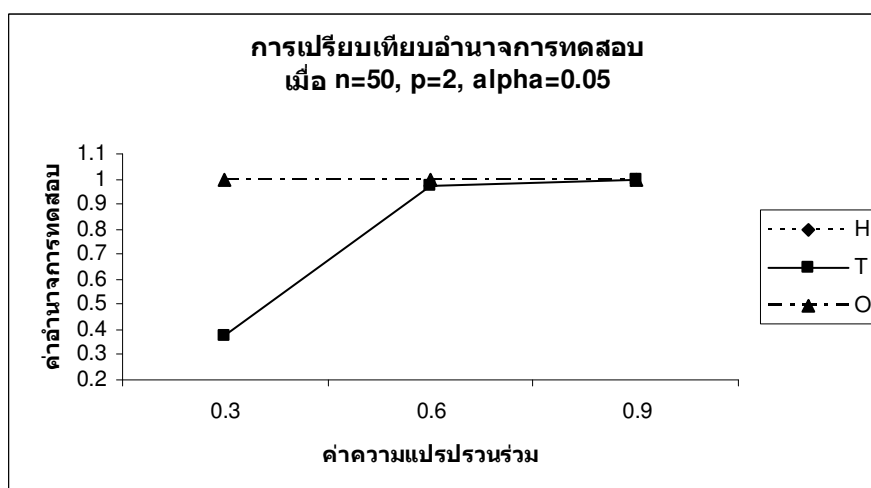
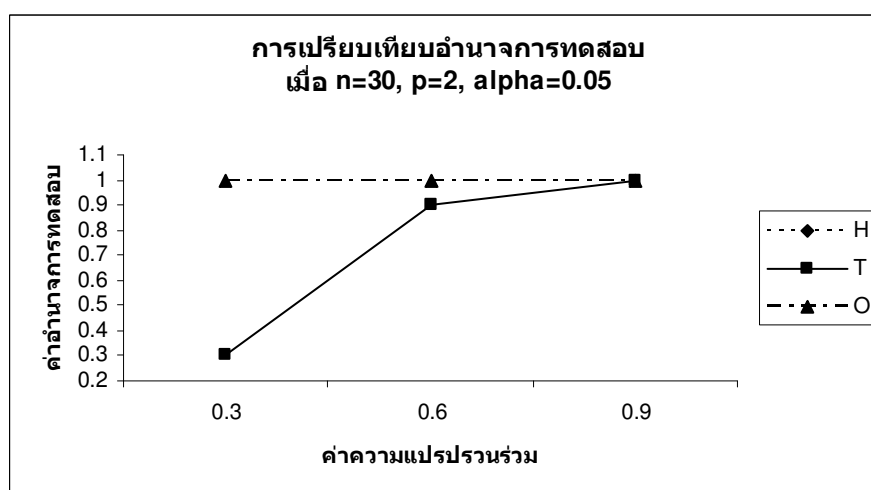
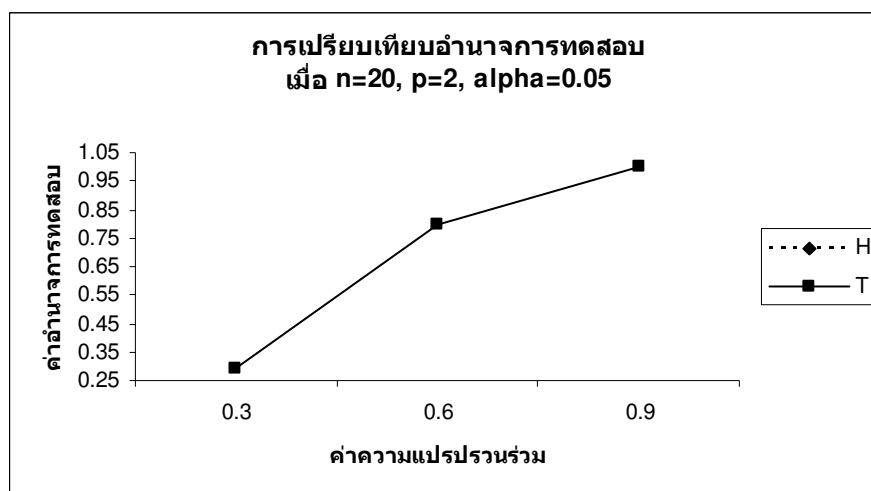
ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

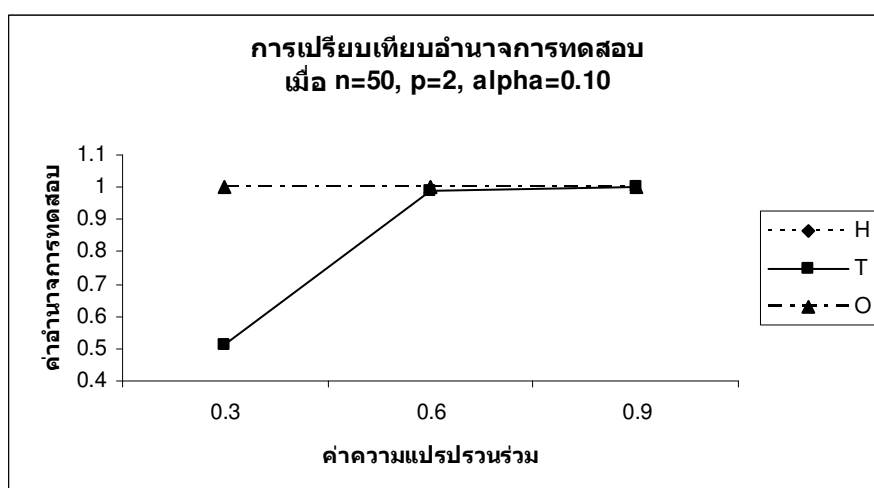
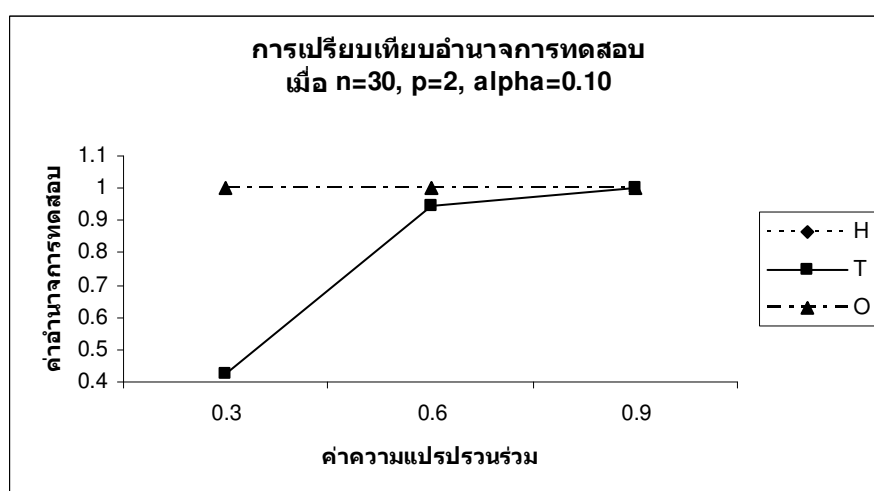
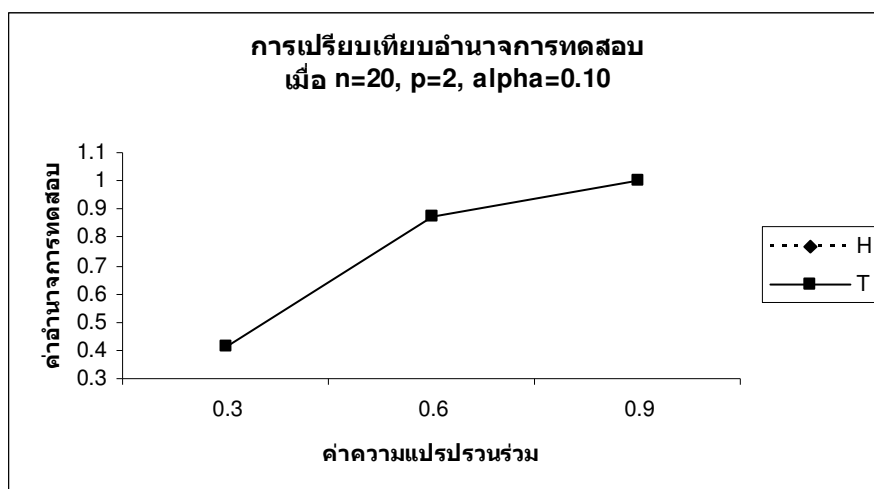
ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 20 และ 21 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 20 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 21 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 16 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการ
ทดลองในการทดสอบการแจกแจงสวิตเดนท-ที่ 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์
ของการแจกแจง

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.460	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.500	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.3$		50	0.000	0.582	1.000	O	T
(แบบที่ 1)	0.10	20	0.001	0.569	●	T	H
		30	0.001	0.627	1.000	O	T
		50	0.001	0.701	1.000	O	T
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.001	0.956	●	T	H
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.001	0.986	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.999	1.000	O	T
(แบบที่ 2)	0.10	20	0.002	0.981	●	T	H
		30	0.001	0.995	1.000	O	T
		50	0.001	0.999	1.000	O	T
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 3)	0.10	20	0.000	1.000	●	T	-
		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 16 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.798	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.899	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.971	1.000	O	T
(แบบที่ 4)	0.10	20	0.001	0.865	●	T	H
		30	0.001	0.941	1.000	O	T
		50	0.000	0.987	1.000	O	T
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 5)	0.10	20	0.001	1.000	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 6)	0.10	20	0.001	1.000	●	T	H
		30	0.001	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 7)	0.10	20	0.000	1.000	●	T	-
		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

- 1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1
- 2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2
- * หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน
- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 16 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงสทิวเคนต์-ที 3 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5 และ 6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

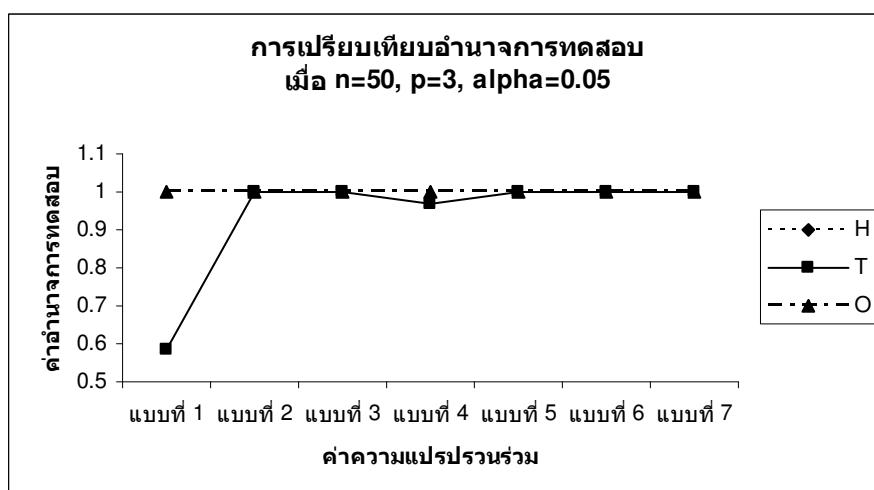
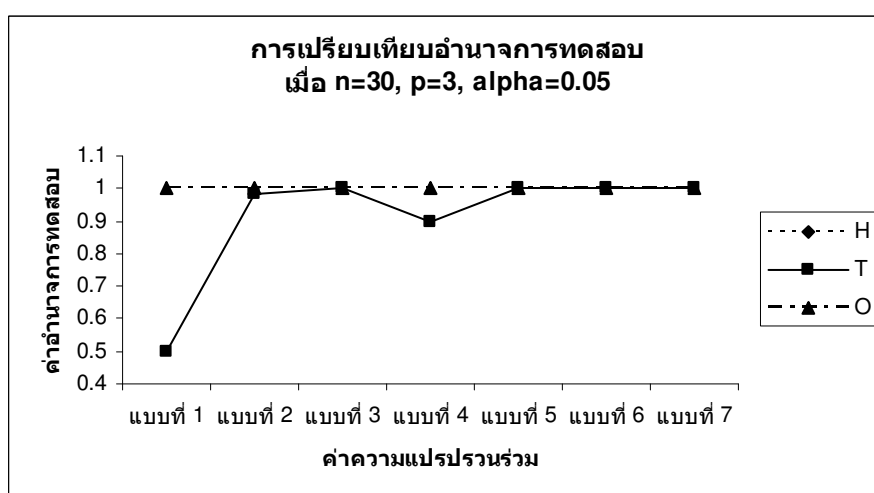
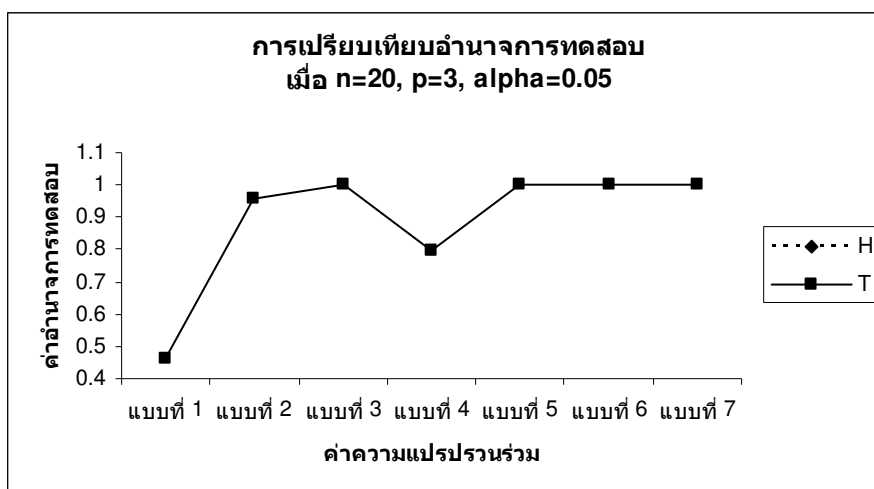
ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

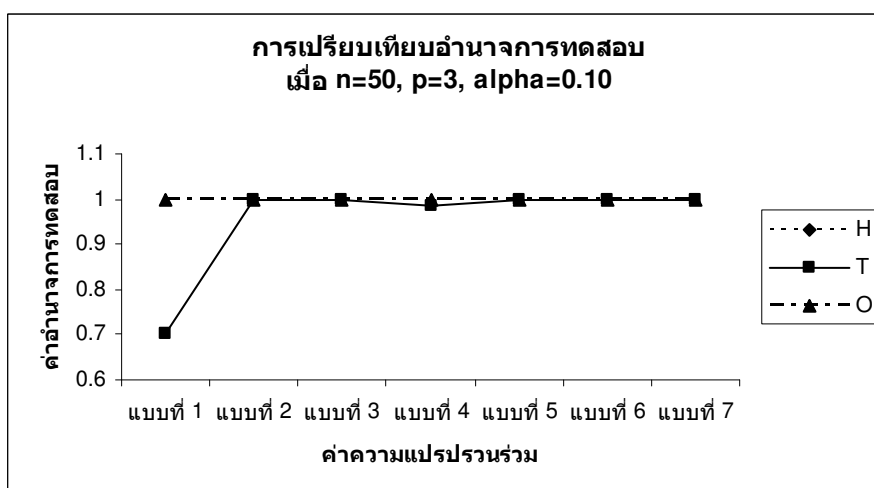
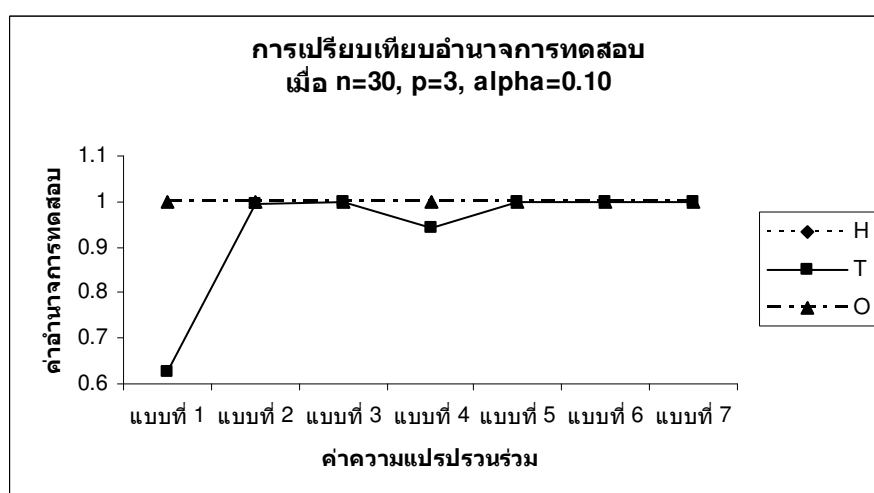
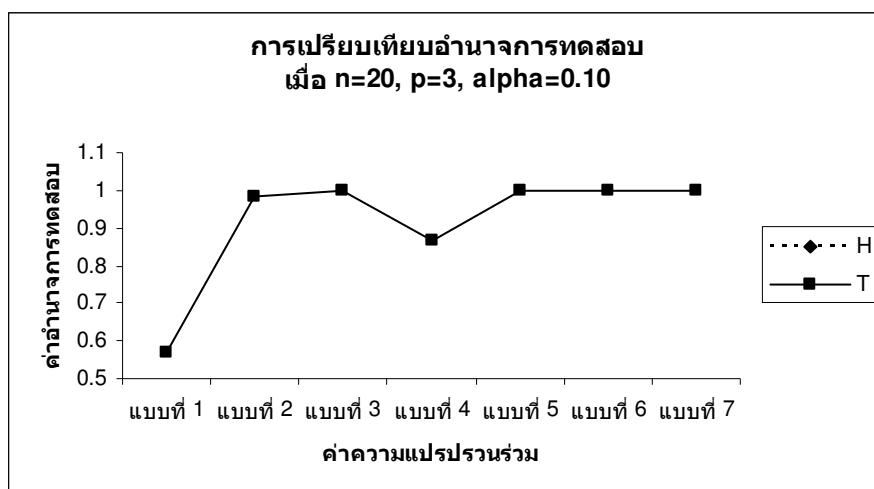
สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2, 4, 5 และ 6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 2 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 3, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 22 และ 23 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 22 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 23 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสทิวเคนต์-ที 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 17 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.968	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.991	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.983	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.999	1.000	O	T
$\sigma_{34} = 0.6$ (แบบที่ 4)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.989	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.999	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.3$	0.10	20	0.000	0.996	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{34} = 0.6$ (แบบที่ 5)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.995	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.999	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.998	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{34} = 0.3$ (แบบที่ 6)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 17 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 7)							
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	1.000	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 8)							

หมายเหตุ: ● หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 17 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงสทิวเคนต์-ที 4 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 4, 5 และ 6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมแบบที่ 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

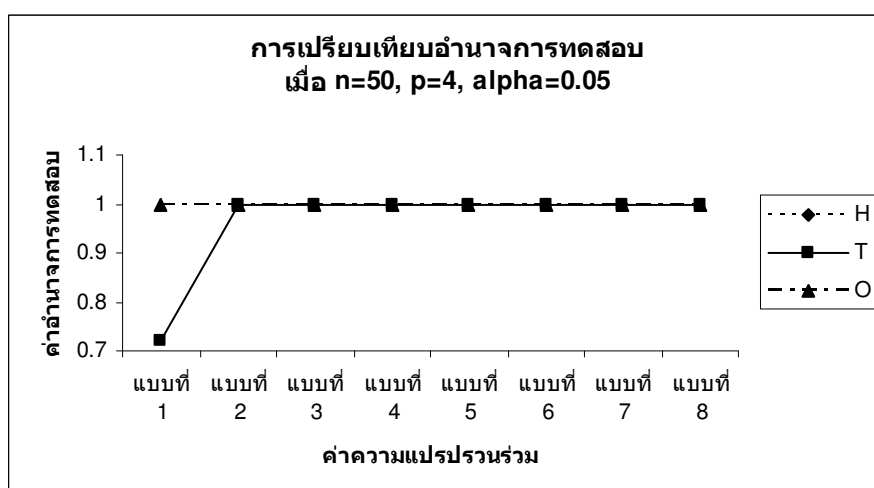
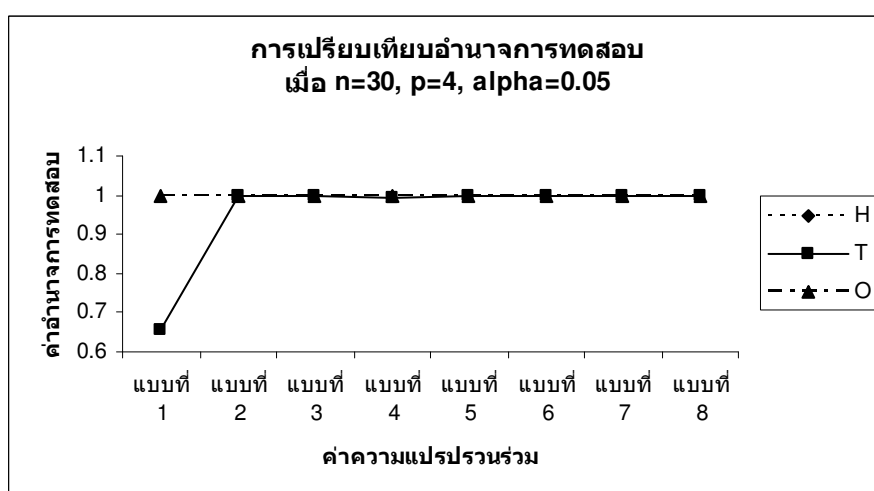
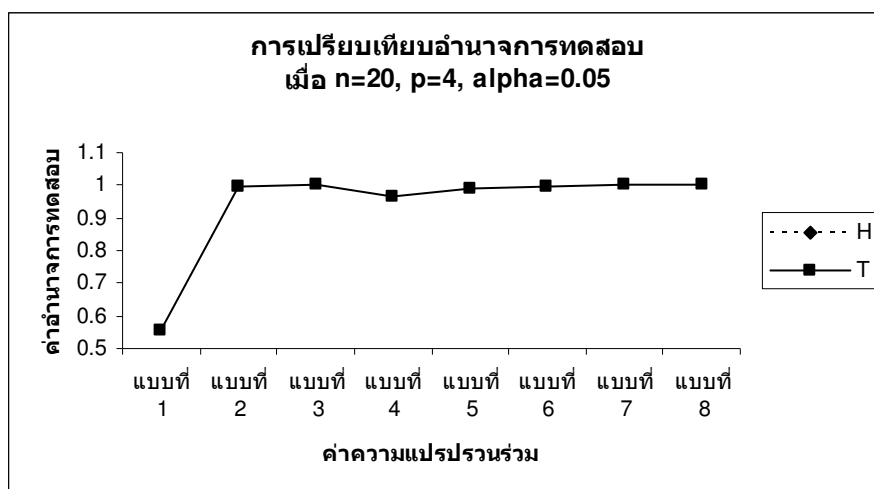
ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมแบบที่ 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญ

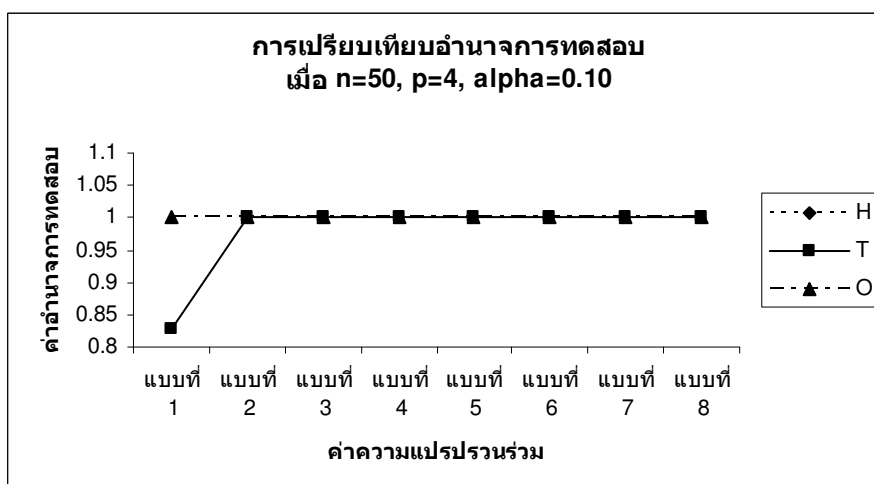
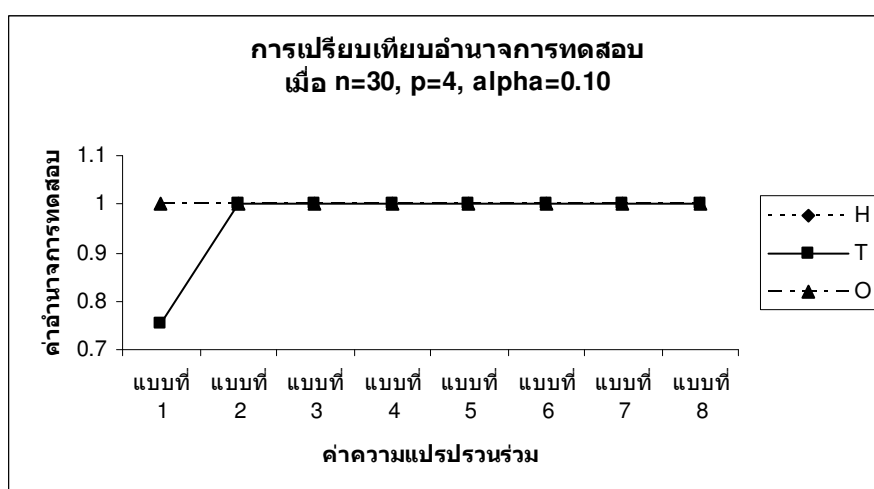
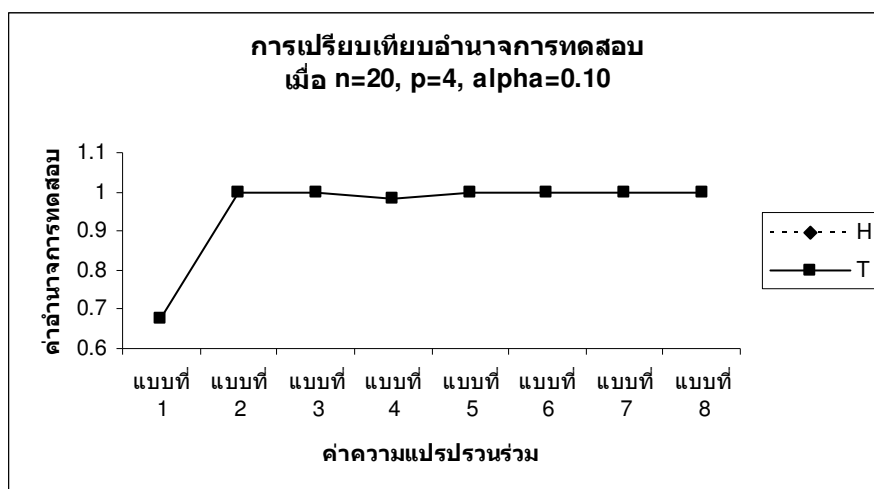
เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 4, 5 และ 6 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 และ 4 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมแบบที่ 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 24 และ 25 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H ไม่มีค่าจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 24 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสทิวเดนท์-ที 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 25 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสทิวเดนท-ที 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ส่วนที่ 2 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

2.1 เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ผลการศึกษาวิจัยในกรณีนี้ได้นำเสนอในรูปแบบการเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี ในกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง จำนวนตัวแปรที่ศึกษาเท่ากับ 2, 3 และ 4 ขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 ดังแสดงในตารางที่ 18 – 21

ตารางที่ 18 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma = 0.3$	0.05	20	0.001	0.025	•
		30	0.001	0.041	1.000
		50	0.001	0.039	0.999
	0.10	20	0.003	0.037	•
		30	0.002	0.060	1.000
		50	0.002	0.059	0.999
$\sigma = 0.6$	0.05	20	0.001	0.021	•
		30	0.001	0.036	0.999
		50	0.001	0.048	0.999
	0.10	20	0.004	0.032	•
		30	0.004	0.050	0.999
		50	0.003	0.063	0.999

ตารางที่ 18 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma = 0.9$	0.05	20	0.001	0.014	•
		30	0.001	0.031	0.999
		50	0.000	0.036	0.999
	0.10	20	0.002	0.024	•
		30	0.003	0.039	0.999
		50	0.003	0.053	0.999

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 18 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สรุปผลความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ H และ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ขนาดตัวอย่าง 30 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ขนาดตัวอย่าง 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ $\sigma = 0.3$ และ $\sigma = 0.6$

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ H และ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

สรุปได้ว่า ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ H และ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ $\sigma = 0.3$ และ $\sigma = 0.6$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบทั้ง 3 วิธี สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม

ตารางที่ 19 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.014	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.026	0.999
$\sigma_{23} = 0.3$		50	0.000	0.053	0.999
(แบบที่ 1)	0.10	20	0.001	0.022	•
		30	0.001	0.034	0.999
		50	0.000	0.070	0.999
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.014	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.030	1.000
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.059	0.999
(แบบที่ 2)	0.10	20	0.001	0.016	•
		30	0.001	0.049	1.000
		50	0.001	0.074	0.999
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.017	•
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.043	1.000
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.061	0.999
(แบบที่ 3)	0.10	20	0.000	0.021	•
		30	0.001	0.058	1.000
		50	0.000	0.075	1.000
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.012	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.033	0.999
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.049	1.000
(แบบที่ 4)	0.10	20	0.000	0.017	•
		30	0.000	0.043	0.999
		50	0.001	0.073	1.000

ตารางที่ 19 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.013	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.035	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.046	0.999
(แบบที่ 5)	0.10	20	0.000	0.016	•
		30	0.000	0.049	0.999
		50	0.000	0.062	0.999
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.014	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.034	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.049	0.999
(แบบที่ 6)	0.10	20	0.001	0.019	•
		30	0.001	0.046	0.999
		50	0.000	0.070	0.999
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.017	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.030	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.052	0.999
(แบบที่ 7)	0.10	20	0.001	0.026	•
		30	0.000	0.045	0.999
		50	0.000	0.069	0.999

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 19 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สรุปผลความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 6 และ 7

ขนาดตัวอย่าง 30 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 3 และ 6

ขนาดตัวอย่าง 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 2 และ 4

สรุปได้ว่า ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วน

สถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 6 และ 7

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 1, 2, 3 และ 6

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ส่วนที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้บางค่าความแปรปรวนร่วม ซึ่งได้แก่ แบบที่ 2 และ 4

ตารางที่ 20 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.009	•
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.036	0.999
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.055	0.999
$\sigma_{23} = 0.3$	0.10	20	0.000	0.013	•
$\sigma_{24} = 0.3$		30	0.000	0.046	0.999
$\sigma_{34} = 0.3$ (แบบที่ 1)		50	0.000	0.073	0.999

ตารางที่ 20 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.007	●
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.035	0.999
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.046	0.999
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.011	●
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.043	0.999
$\sigma_{34} = 0.6$		50	0.000	0.067	0.999
(แบบที่ 2)					
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.014	●
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.026	0.999
$\sigma_{14} = 0.9$		50	0.000	0.056	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.016	●
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.036	0.999
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.074	0.999
(แบบที่ 3)					
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.008	●
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.024	0.999
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.056	0.999
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.012	●
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.040	0.999
$\sigma_{34} = 0.6$		50	0.000	0.073	0.999
(แบบที่ 4)					

ตารางที่ 20 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.011	●
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.038	0.999
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.070	0.999
$\sigma_{23} = 0.3$	0.10	20	0.000	0.015	●
$\sigma_{24} = 0.3$		30	0.000	0.052	0.999
$\sigma_{34} = 0.6$		50	0.000	0.086	0.999
(แบบที่ 5)					
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.012	●
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.033	0.999
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.050	0.999
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.012	●
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.043	0.999
$\sigma_{34} = 0.3$		50	0.000	0.066	0.999
(แบบที่ 6)					
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.008	●
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.033	0.999
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.055	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.012	●
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.046	0.999
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.075	0.999
(แบบที่ 7)					

ตารางที่ 20 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนร่วม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	H	T	O
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.008	•
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.027	0.999
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.054	0.999
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.015	•
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.034	0.999
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.071	0.999
(แบบที่ 8)					

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

จากตารางที่ 20 แสดงการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สรุปผลความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของสถิติทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

ขนาดตัวอย่าง 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

สรุปได้ว่า ในการทดสอบการแจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 สถิติทดสอบ T และ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ไว้ได้ทั้งหมดในทุกค่าความแปรปรวนร่วม ส่วนสถิติทดสอบ H ไม่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

ตารางที่ 21 แสดงสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร สำหรับ $p = 2, 3$ และ 4

p	Σ	$\alpha = 0.05$			$\alpha = 0.10$		
		n			n		
		20	30	50	20	30	50
2	$\sigma = 0.3$	H, T	H, T, O	H, T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	$\sigma = 0.6$	H, T	H, T, O	H, T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	$\sigma = 0.9$	H, T	H, T, O	T, O	H, T	H, T, O	H, T, O

ตารางที่ 21 (ต่อ)

p	Σ	$\alpha = 0.05$			$\alpha = 0.10$		
		n			n		
		20	30	50	20	30	50
3	แบบที่ 1	T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	T, O
	แบบที่ 2	T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	H, T, O
	แบบที่ 3	T	T, O	T, O	T	H, T, O	T, O
	แบบที่ 4	T	T, O	T, O	T	T, O	H, T, O
	แบบที่ 5	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 6	T	T, O	T, O	H, T	H, T, O	T, O
	แบบที่ 7	T	T, O	T, O	H, T	T, O	T, O
4	แบบที่ 1	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 2	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 3	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 4	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 5	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 6	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 7	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O
	แบบที่ 8	T	T, O	T, O	T	T, O	T, O

สรุปได้ว่า สถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ในทุก ๆ ขนาดตัวอย่างที่ศึกษา ค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และระดับนัยสำคัญที่ศึกษาทั้งหมด และสถิติทดสอบ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ที่ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ที่ค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษาทั้งหมด และระดับนัยสำคัญทั้ง 2 ระดับ ส่วนสถิติทดสอบ H สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และความแปรปรวนร่วมที่ศึกษาทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 ในกรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

2.2 เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ

ผลการศึกษาวิจัยในกรณีนี้ได้นำเสนอในรูปแบบการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบเมื่อใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี ในกรณีที่ไมทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร และการแจกแจงสทิวเดนท-ทีหลายตัวแปร จำนวนตัวแปรที่ศึกษาเท่ากับ 2, 3 และ 4 ขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 20, 30 และ 50 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 ดังแสดงในตารางที่ 22 – 27

ตารางที่ 22 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงลอการิธึม 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma = 0.3$	0.05	20	0.004	0.818	•	T	H
		30	0.003	0.997	1.000	O	T
		50	0.002	1.000	1.000	T*	O*
	0.10	20	0.005	0.855	•	T	H
		30	0.004	0.980	1.000	O	T
		50	0.004	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma = 0.6$	0.05	20	0.003	0.824	•	T	H
		30	0.003	0.975	1.000	O	T
		50	0.002	0.999	1.000	O	T
	0.10	20	0.007	0.864	•	T	H
		30	0.005	0.986	1.000	O	T
		50	0.004	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 22 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma = 0.9$	0.05	20	0.002	0.847	•	T	H
		30	0.002	0.975	1.000	O	T
		50	0.002	0.999	1.000	O	T
	0.10	20	0.004	0.876	•	T	H
		30	0.003	0.984	1.000	O	T
		50	0.003	1.000	1.000	T*	O*

หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

จากตารางที่ 22 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงลอการิธึม 2 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนรวมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนรวมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

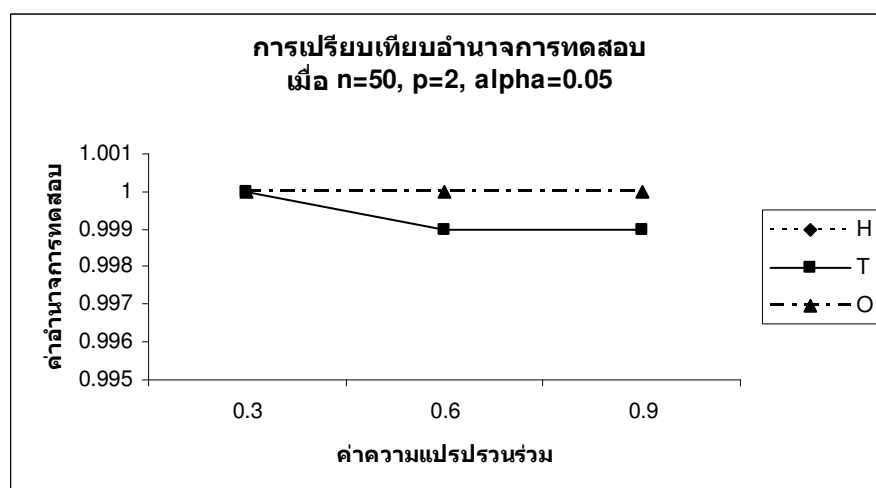
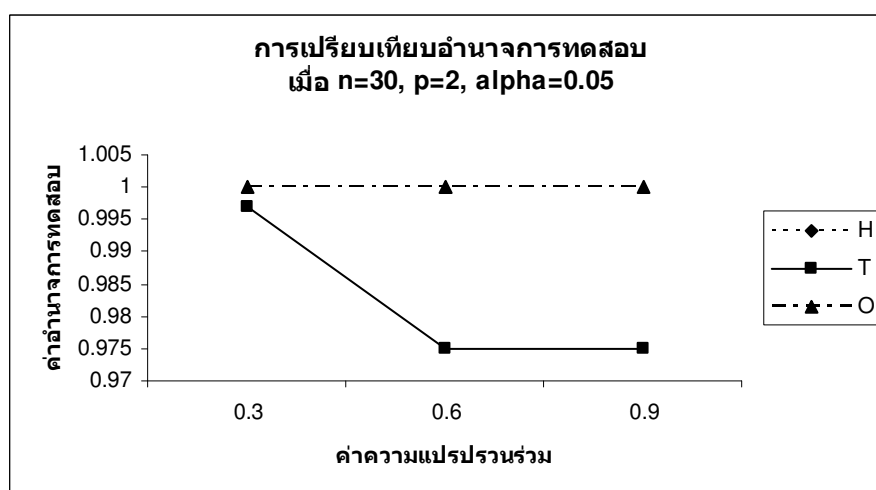
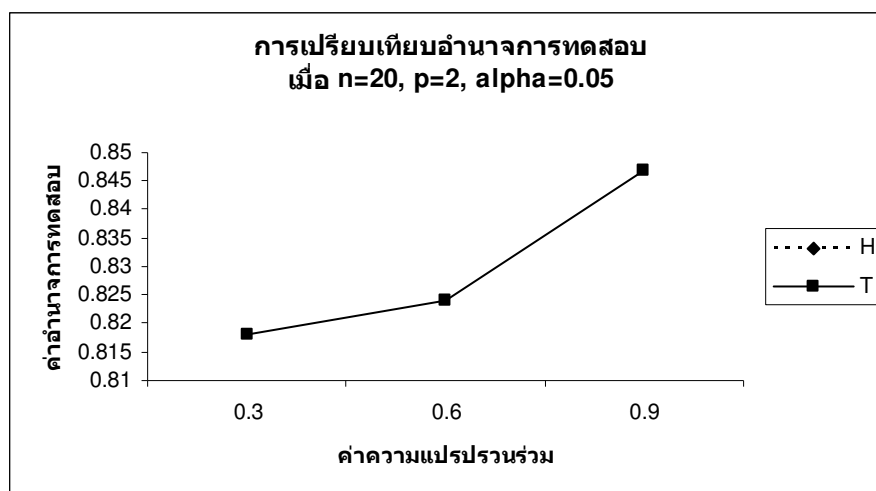
ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

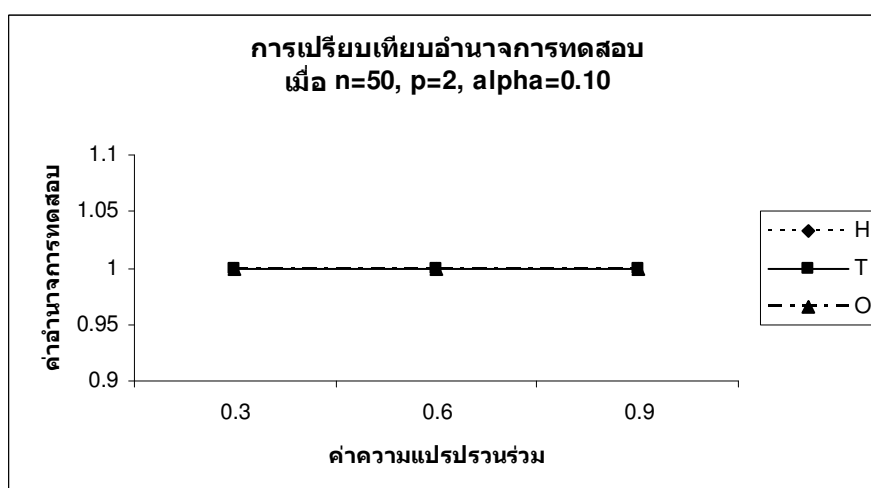
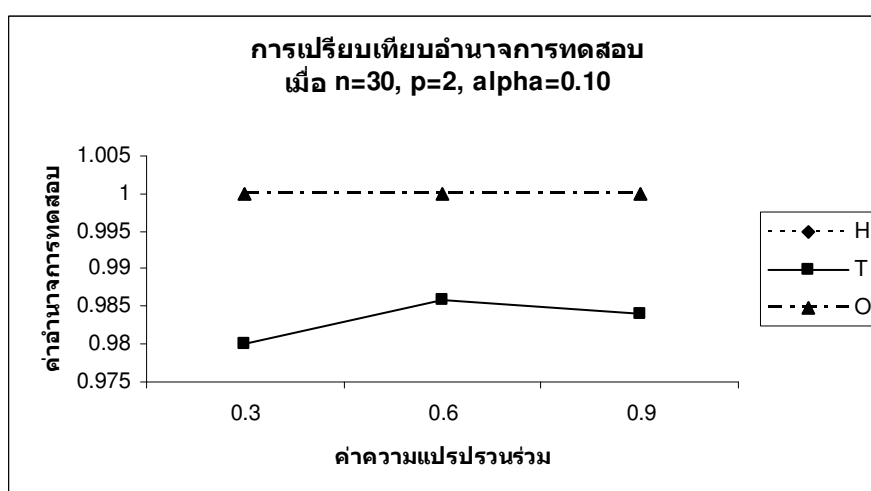
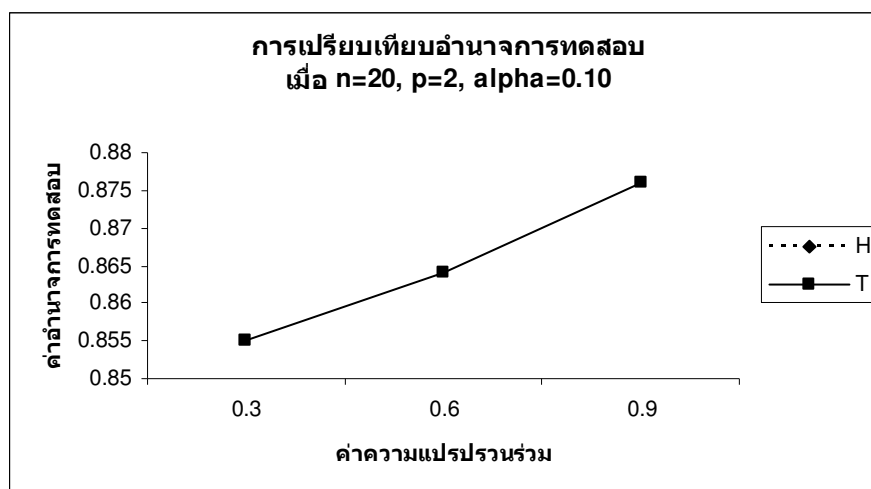
เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 26 และ 27 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 26 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอจิสติก 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 27 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอการิธึม 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 23 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการ
ทดลองในการทดสอบการแจกแจงลอจิสติก 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบ
ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.001	0.888	•	T	H
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.001	0.993	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 1)	0.10	20	0.002	0.910	•	T	H
		30	0.001	0.994	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.909	•	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.001	0.996	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 2)	0.10	20	0.001	0.929	•	T	H
		30	0.001	0.998	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.912	•	T	-
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.991	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 3)	0.10	20	0.001	0.926	•	T	H
		30	0.001	0.992	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 23 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.887	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.990	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 4)	0.10	20	0.001	0.903	●	T	H
		30	0.001	0.993	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.894	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.994	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 5)	0.10	20	0.001	0.916	●	T	H
		30	0.001	0.996	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.903	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.993	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 6)	0.10	20	0.001	0.921	●	T	H
		30	0.001	0.996	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.935	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.996	1.000	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
(แบบที่ 7)	0.10	20	0.001	0.946	●	T	H
		30	0.001	0.997	1.000	O	T
		50	0.001	1.000	1.000	T*	O*

- หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ
- 1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1
 - 2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2
 - * หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน
 - หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 23 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงลอการิธึม 3 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

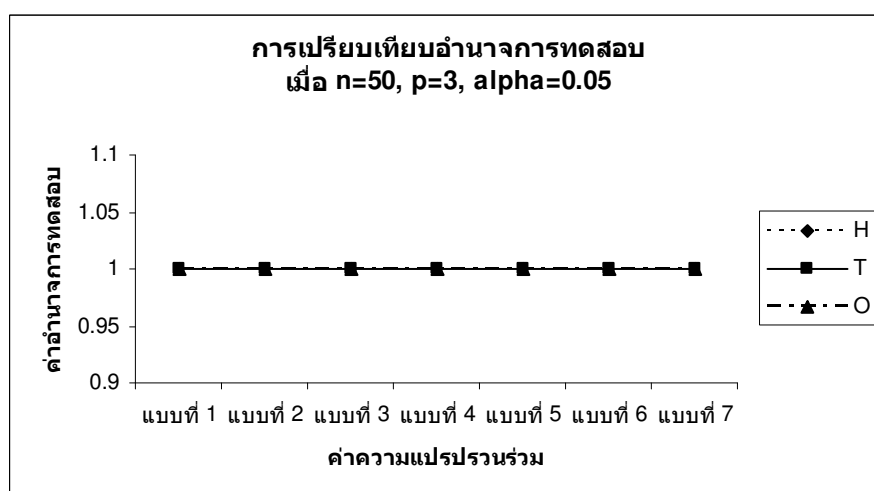
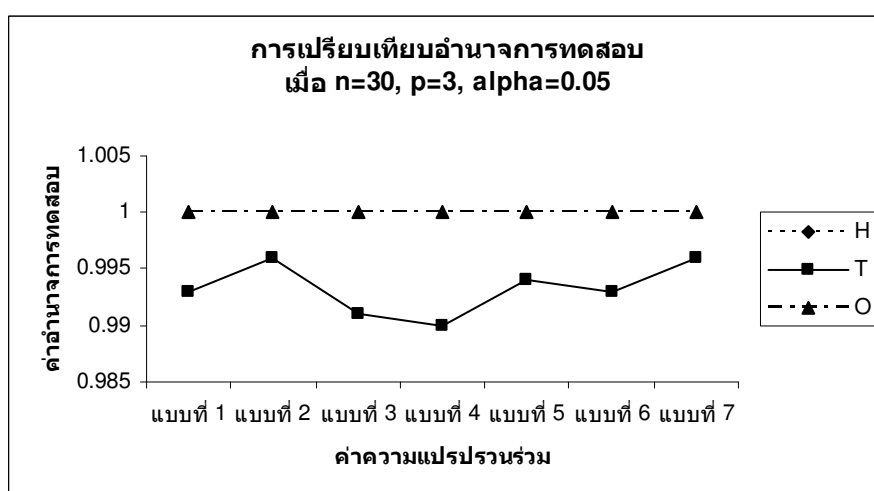
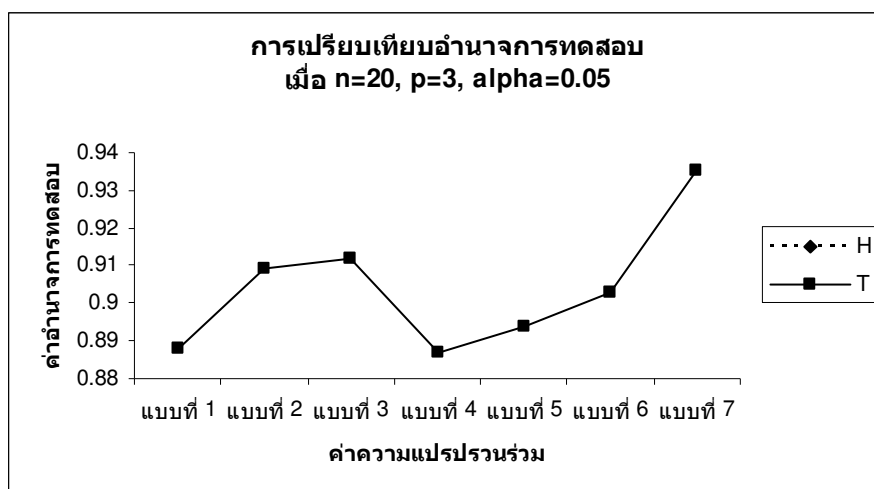
ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

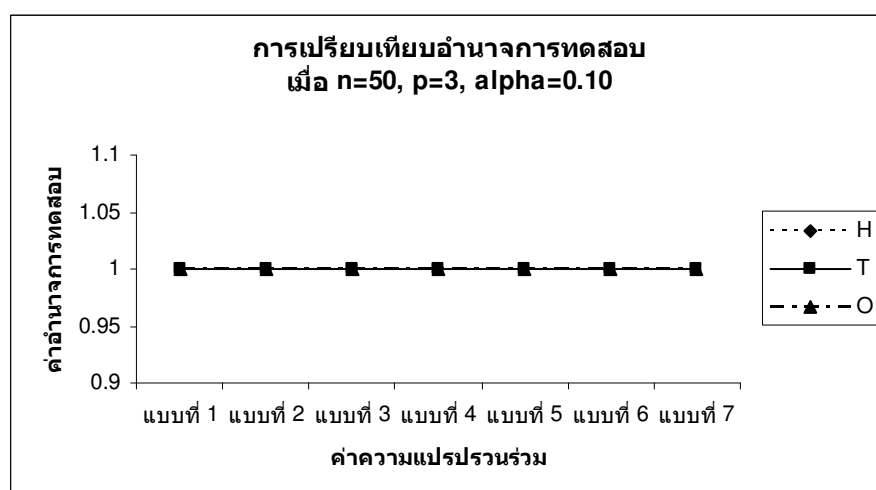
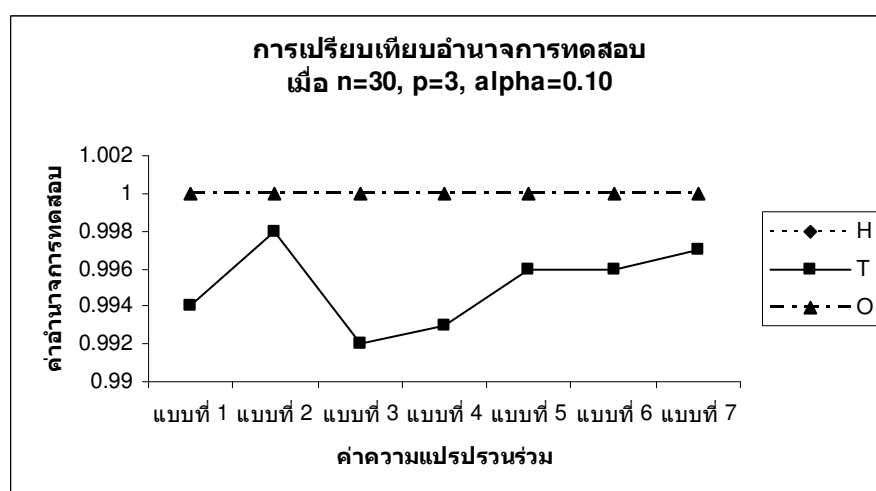
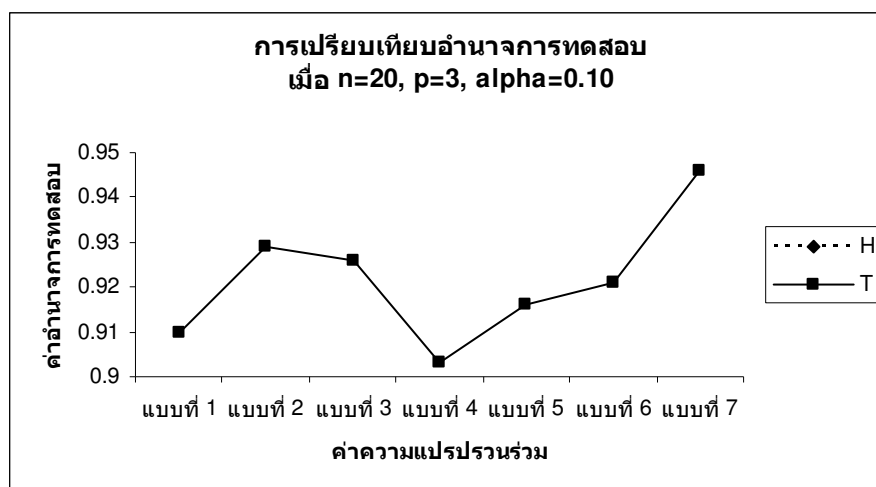
เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 28 และ 29 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 28 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอจิสติก 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 29 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอจิสติก 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 24 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.904	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.997	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.001	0.919	●	T	H
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.997	1.000	O	T
$\sigma_{34} = 0.6$ (แบบที่ 4)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.909	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.998	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.3$	0.10	20	0.000	0.929	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.3$		30	0.000	0.998	1.000	O	T
$\sigma_{34} = 0.6$ (แบบที่ 5)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.922	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.997	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.6$	0.10	20	0.000	0.931	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.6$		30	0.000	0.998	1.000	O	T
$\sigma_{34} = 0.3$ (แบบที่ 6)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*

ตารางที่ 24 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.935	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.998	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.946	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.999	1.000	O	T
$\sigma_{34} = 0.9$ (แบบที่ 7)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.934	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.996	1.000	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.940	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.997	1.000	O	T
$\sigma_{34} = 0.9$ (แบบที่ 8)		50	0.000	1.000	1.000	T*	O*

หมายเหตุ: ● หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 24 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงลอการิธึม 4 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 และ 4 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

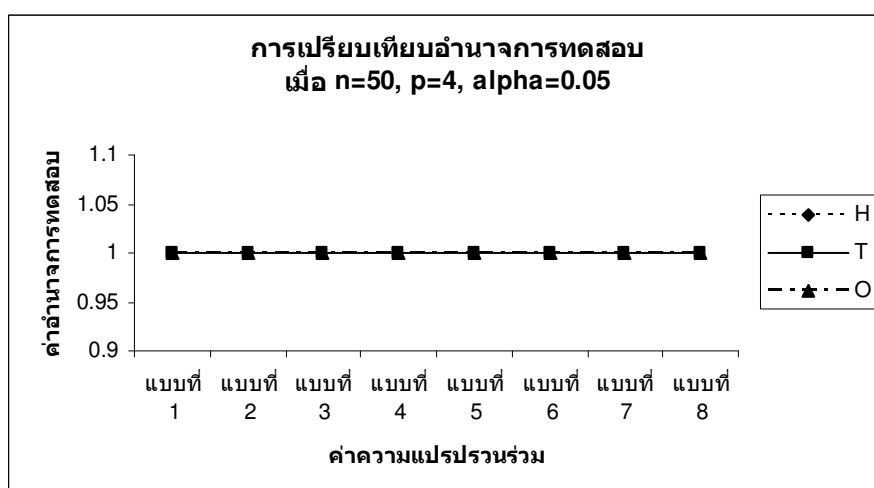
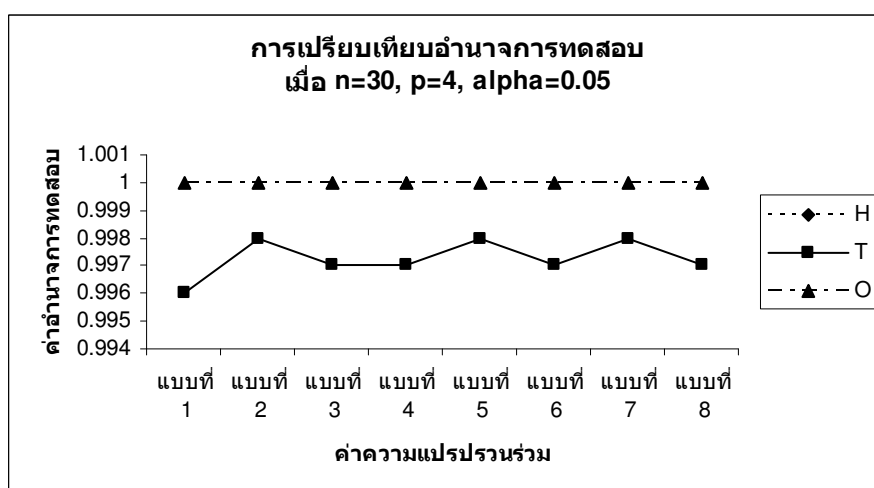
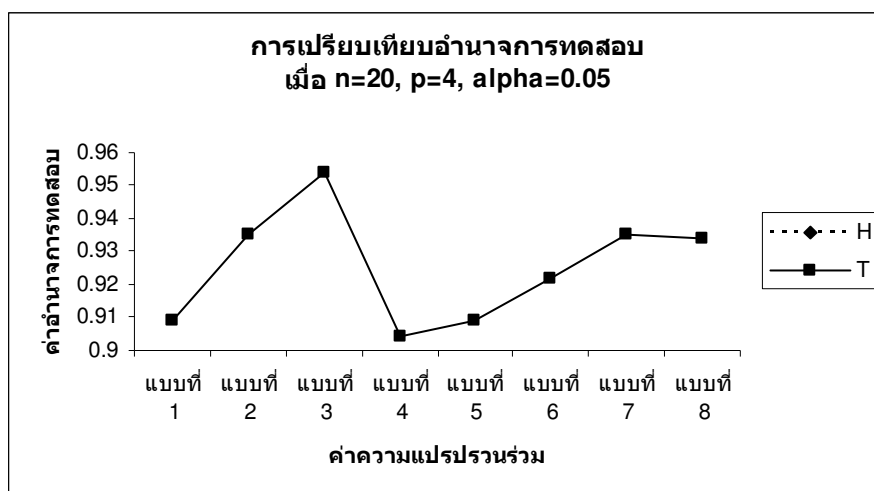
ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 3, 5, 6, 7 และ 8 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2 และ 4 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

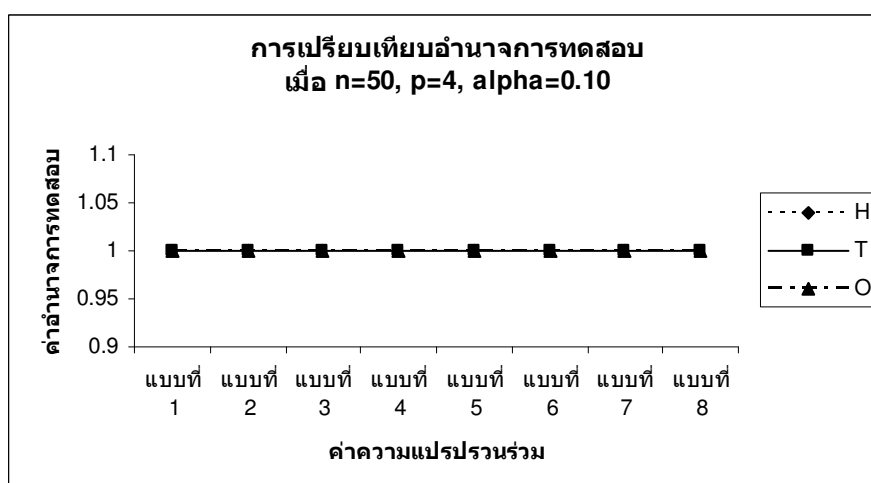
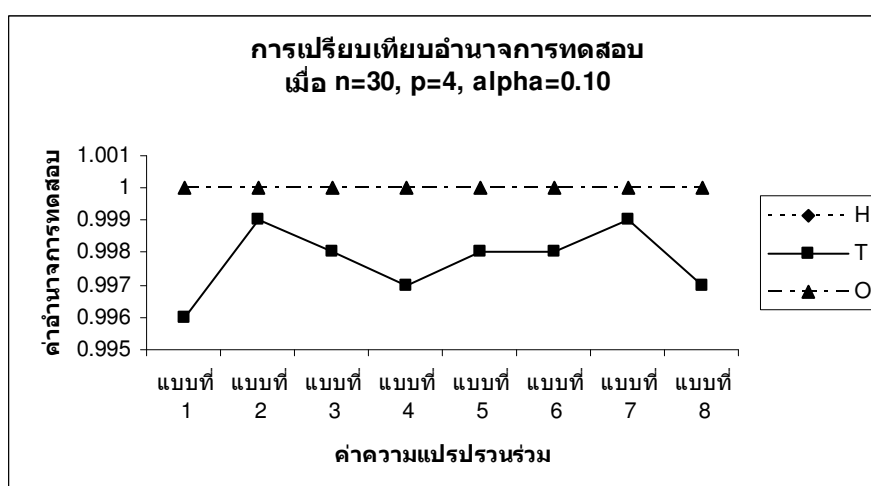
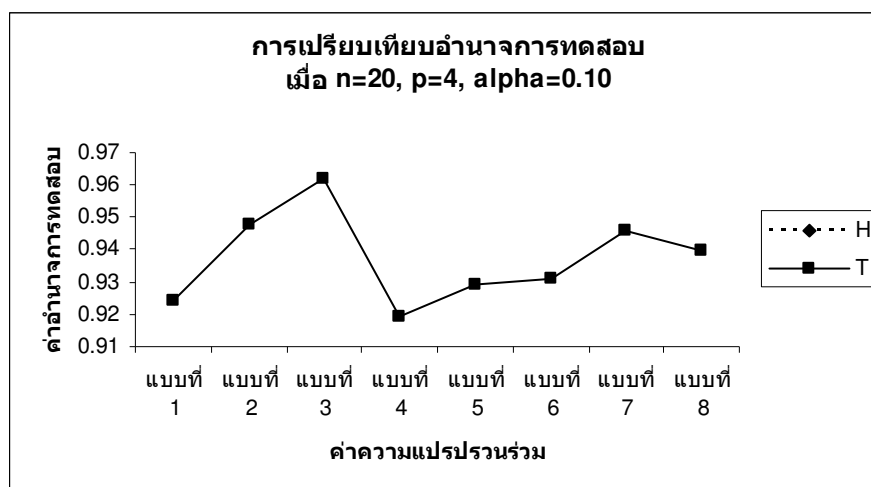
เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 30 และ 31 แต่เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ H มีค่าน้อยมากจึงไม่แสดงในกราฟ



ภาพที่ 30 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอจิสติก 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 31 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงลอการิธึม 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 25 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสทิวเคนต์-ที 2 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma = 0.3$	0.05	20	0.001	0.045	●	T	H
		30	0.001	0.066	0.999	O	T
		50	0.000	0.079	0.999	O	T
	0.10	20	0.001	0.060	●	T	H
		30	0.002	0.083	0.999	O	T
		50	0.002	0.107	0.999	O	T
	0.05	20	0.001	0.046	●	T	H
		30	0.000	0.048	0.999	O	T
		50	0.001	0.058	0.999	O	T
$\sigma = 0.6$	0.10	20	0.001	0.052	●	T	H
		30	0.001	0.065	0.999	O	T
		50	0.001	0.079	0.999	O	T
	0.05	20	0.000	0.038	●	T	-
		30	0.000	0.069	0.999	O	T
		50	0.001	0.069	0.999	O	T
	0.10	20	0.001	0.051	●	T	H
		30	0.001	0.084	0.999	O	T
		50	0.001	0.103	0.999	O	T

หมายเหตุ: ● หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 25 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงสทิวเคนท์-ที 2 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H

ขนาดตัวอย่าง 30 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

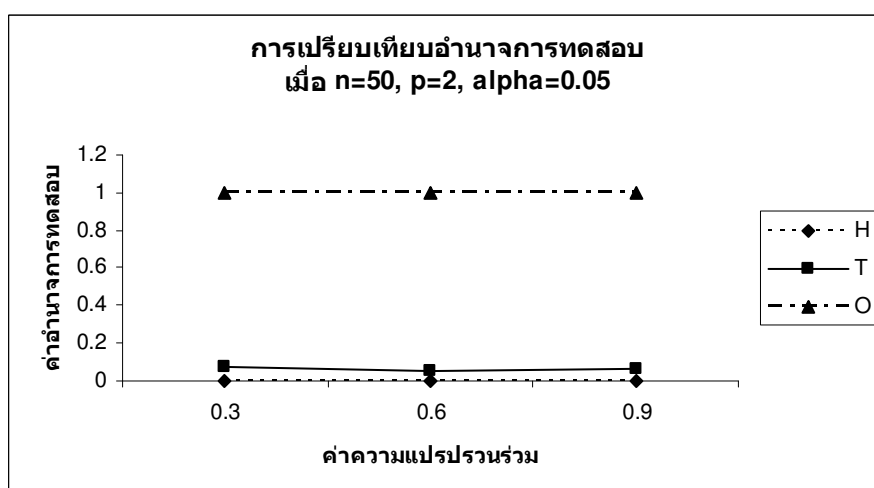
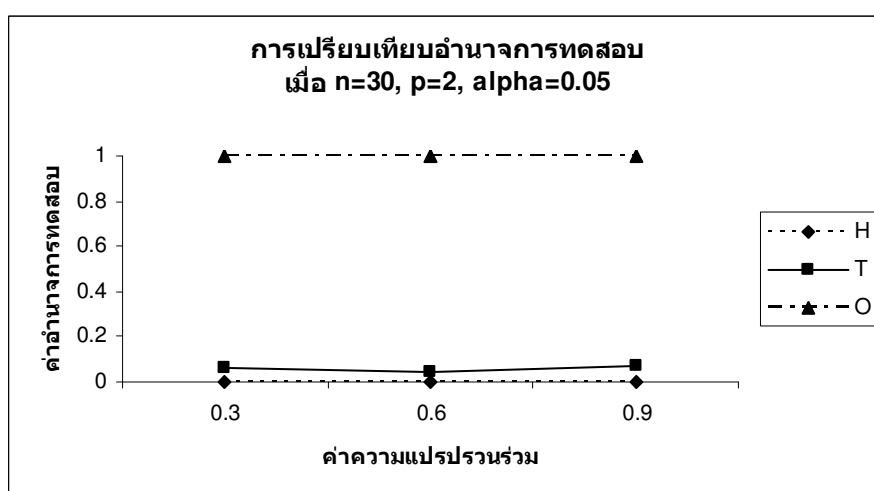
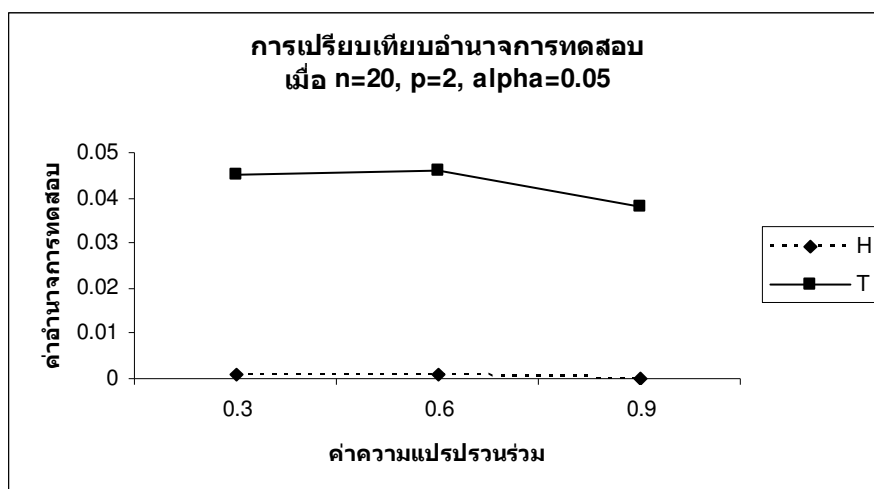
ขนาดตัวอย่าง 50 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมเป็น 0.3 และ 0.6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวน

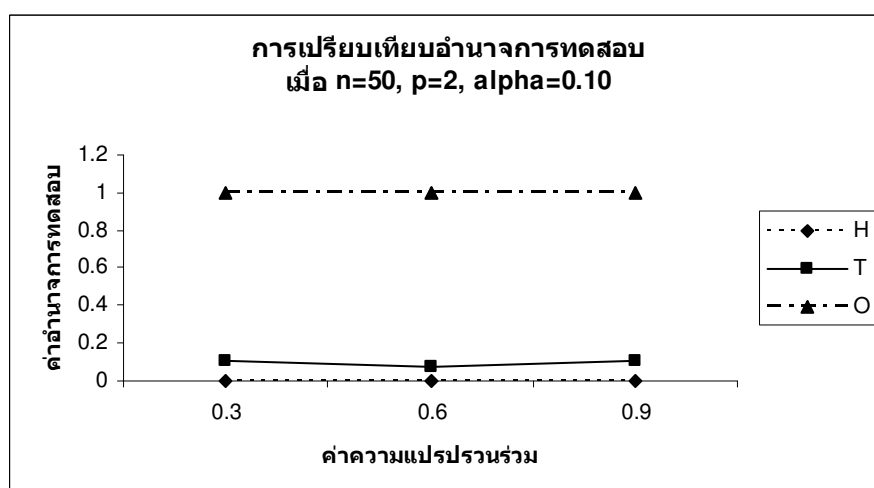
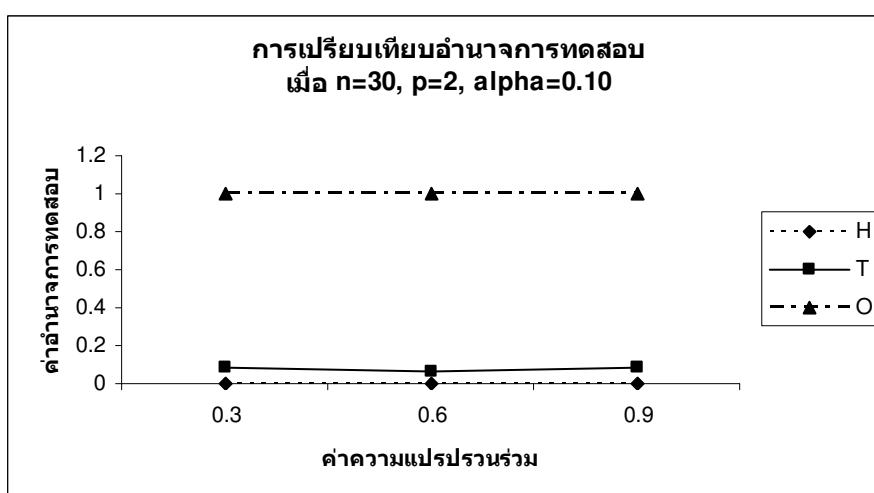
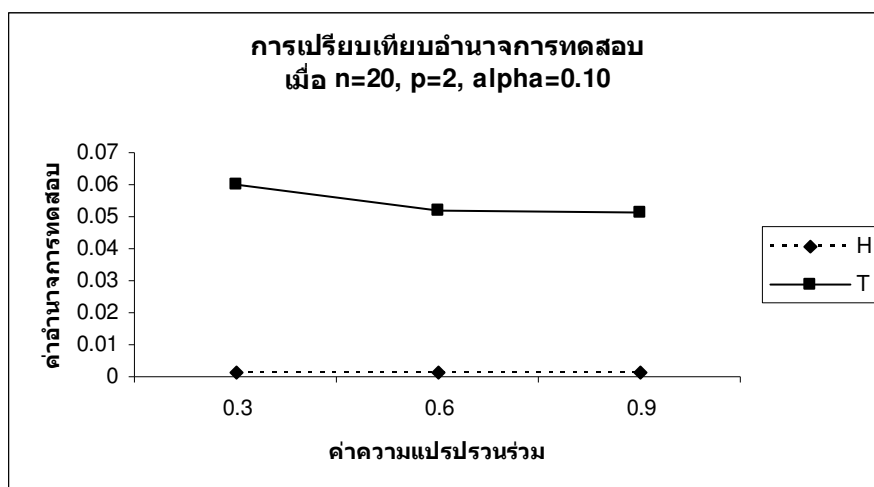
รวมเป็น 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และค่าความแปรปรวนรวมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ H ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ค่าความแปรปรวนรวมเป็น 0.3, 0.6 และ 0.9 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาคือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 32 และ 33



ภาพที่ 32 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 33 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสทิวเดนท-ที 2 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 26 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสวิตช์-ที่ 3 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.040	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.064	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.3$		50	0.000	0.078	0.999	O	T
(แบบที่ 1)	0.10	20	0.001	0.055	●	T	H
		30	0.000	0.080	0.999	O	T
		50	0.000	0.099	0.999	O	T
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.042	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.060	0.998	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.067	0.999	O	T
(แบบที่ 2)	0.10	20	0.000	0.051	●	T	-
		30	0.000	0.082	0.998	O	T
		50	0.000	0.089	1.000	O	T
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.042	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.9$		30	0.000	0.065	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.072	0.999	O	T
(แบบที่ 3)	0.10	20	0.000	0.063	●	T	-
		30	0.000	0.093	0.999	O	T
		50	0.000	0.090	0.999	O	T

ตารางที่ 26 (ต่อ)

ค่าความ แปรปรวน รวม	ระดับ นัยสำคัญ	ขนาด ตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.025	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.057	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		50	0.000	0.067	0.999	O	T
(แบบที่ 4)	0.10	20	0.000	0.037	●	T	-
		30	0.000	0.072	0.999	O	T
		50	0.000	0.085	0.999	O	T
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.037	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.058	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.073	0.999	O	T
(แบบที่ 5)	0.10	20	0.001	0.053	●	T	H
		30	0.000	0.077	0.999	O	T
		50	0.000	0.096	0.999	O	T
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.030	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.069	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.080	0.999	O	T
(แบบที่ 6)	0.10	20	0.001	0.044	●	T	H
		30	0.000	0.092	0.999	O	T
		50	0.000	0.096	0.999	O	T
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.029	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.066	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		50	0.000	0.086	0.999	O	T
(แบบที่ 7)	0.10	20	0.000	0.044	●	T	-
		30	0.000	0.084	0.999	O	T
		50	0.000	0.109	0.999	O	T

- หมายเหตุ: • หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ
- 1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1
 - 2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2
 - * หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน
 - หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 26 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงสทิวเคนท์-ที 3 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ระดับนัยสำคัญ 0.10

ขนาดตัวอย่าง 20 เมื่อค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 5 และ 6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 4 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

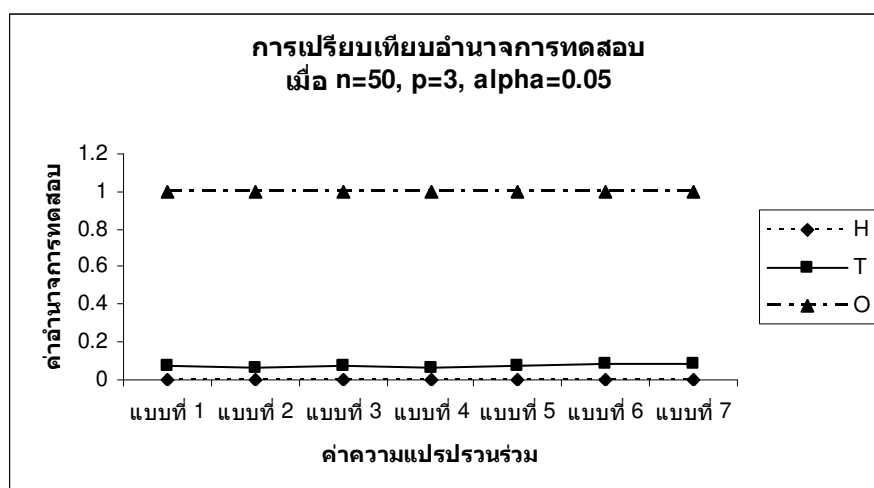
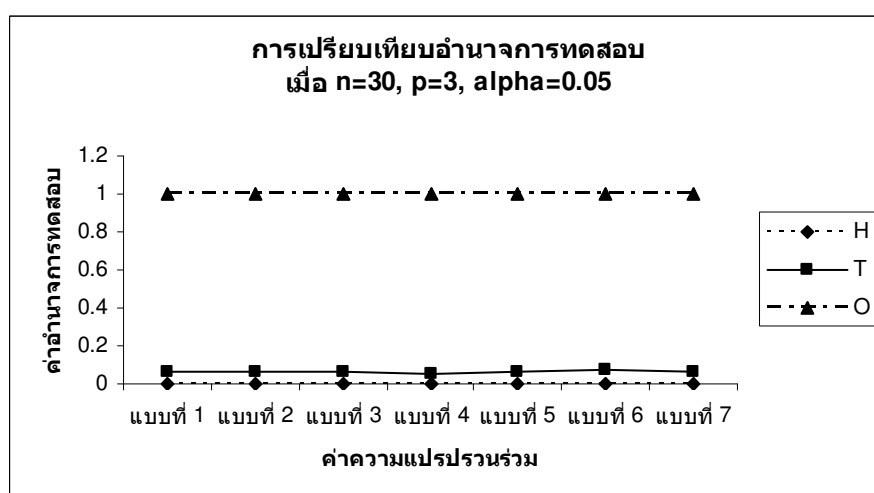
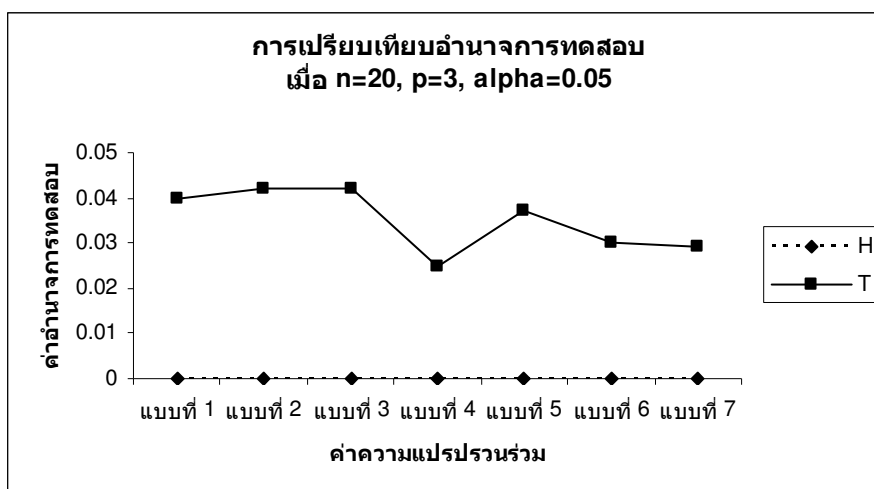
ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

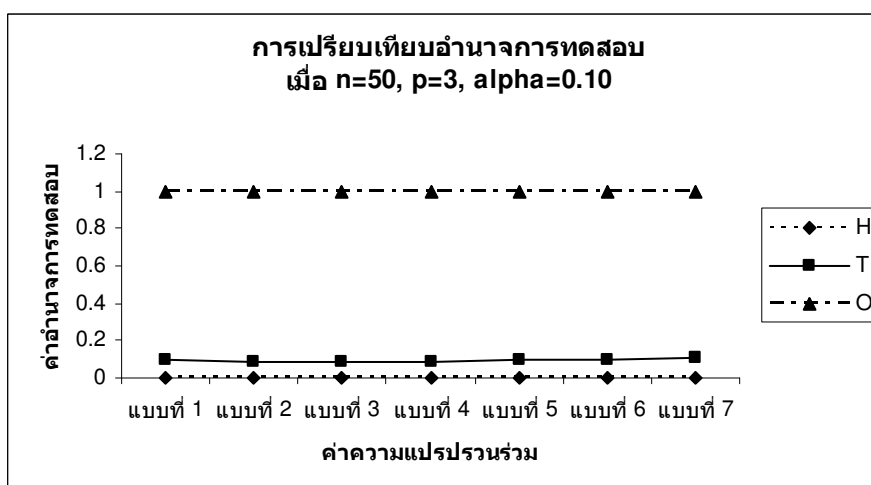
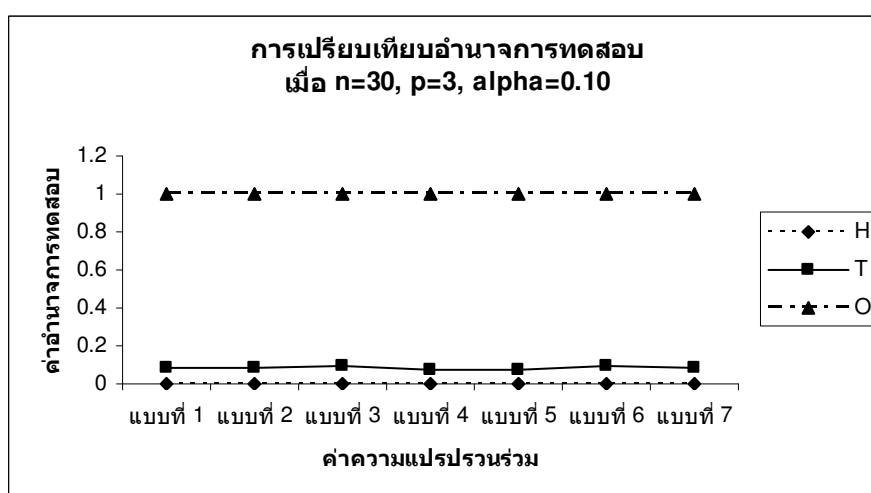
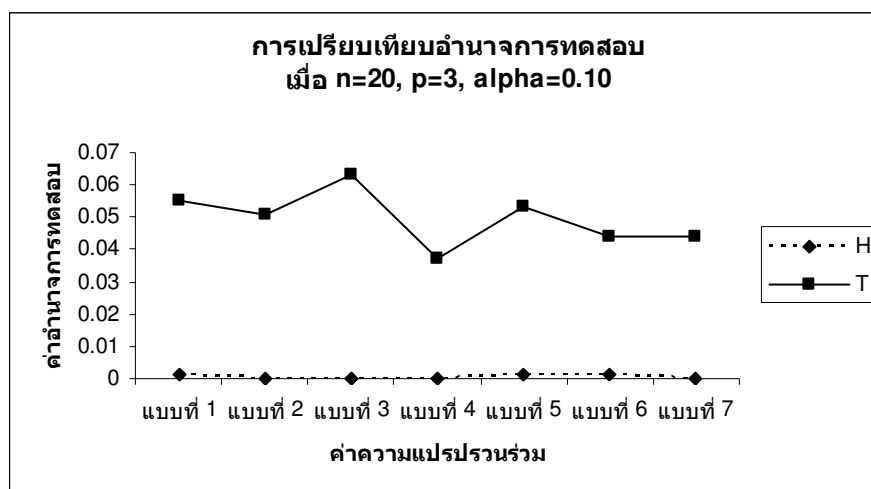
สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 1, 5 และ 6 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ H ส่วนที่ค่าความแปรปรวนร่วมเป็นแบบที่ 2, 3, 4 และ 7 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 34 และ 35



ภาพที่ 34 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 35 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสทิวเดนท-ที 3 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ตารางที่ 27 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธีที่ได้จากการทดลองในการทดสอบการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 4 ตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.019	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$	0.10	30	0.000	0.058	0.999	O	T
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.093	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.3$		20	0.000	0.027	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.3$	0.10	30	0.000	0.074	0.999	O	T
$\sigma_{34} = 0.3$		50	0.000	0.113	0.999	O	T
(แบบที่ 1)							
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.021	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$	0.10	30	0.000	0.064	0.999	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.096	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.6$		20	0.000	0.028	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.6$	0.10	30	0.000	0.079	0.999	O	T
$\sigma_{34} = 0.6$		50	0.000	0.116	1.000	O	T
(แบบที่ 2)							
$\sigma_{12} = 0.9$	0.05	20	0.000	0.024	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.9$	0.10	30	0.000	0.067	0.999	O	T
$\sigma_{14} = 0.9$		50	0.000	0.079	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$		20	0.000	0.035	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$	0.10	30	0.000	0.077	0.999	O	T
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.103	0.999	O	T
(แบบที่ 3)							

ตารางที่ 27 (ต่อ)

ค่าความแปรปรวนรวม	ระดับนัยสำคัญ	ขนาดตัวอย่าง	แบบทดสอบ			อันดับ	
			H	T	O	1	2
$\sigma_{12} = 0.3$	0.05	20	0.000	0.025	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.3$		30	0.000	0.064	0.999	O	T
$\sigma_{14} = 0.3$		50	0.000	0.096	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.032	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.079	0.999	O	T
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.114	0.999	O	T
(แบบที่ 7)							
$\sigma_{12} = 0.6$	0.05	20	0.000	0.025	●	T	-
$\sigma_{13} = 0.6$		30	0.000	0.051	0.999	O	T
$\sigma_{14} = 0.6$		50	0.000	0.067	0.999	O	T
$\sigma_{23} = 0.9$	0.10	20	0.000	0.031	●	T	-
$\sigma_{24} = 0.9$		30	0.000	0.072	0.999	O	T
$\sigma_{34} = 0.9$		50	0.000	0.086	0.999	O	T
(แบบที่ 8)							

หมายเหตุ: ● หมายถึง ไม่ได้ทำการศึกษา เนื่องจากไม่มีค่าวิกฤตที่ใช้ในการเปรียบเทียบ

1 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 1

2 หมายถึง แบบทดสอบที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับ 2

* หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

- หมายถึง ไม่สามารถจัดลำดับได้ เนื่องจากค่าอำนาจการทดสอบเป็นศูนย์

จากตารางที่ 27 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงสทิวเคนต์-ที 4 ตัวแปร สามารถสรุปผลเกี่ยวกับค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี จำแนกตามระดับนัยสำคัญได้ดังนี้

ระดับนัยสำคัญ 0.05

ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้
ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้
ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้
ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

ระดับนัยสำคัญ 0.10

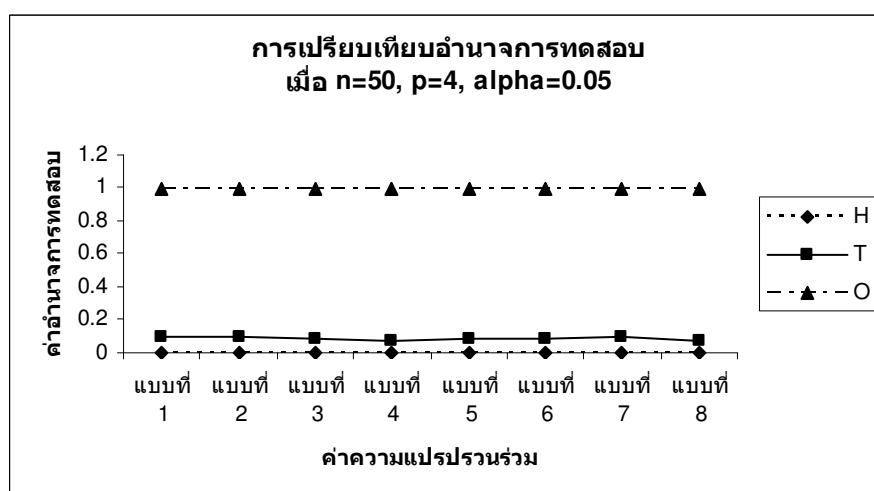
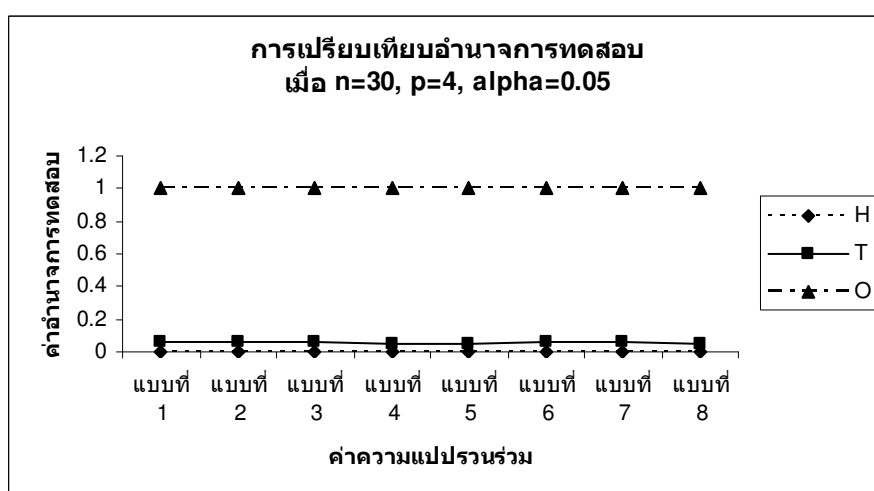
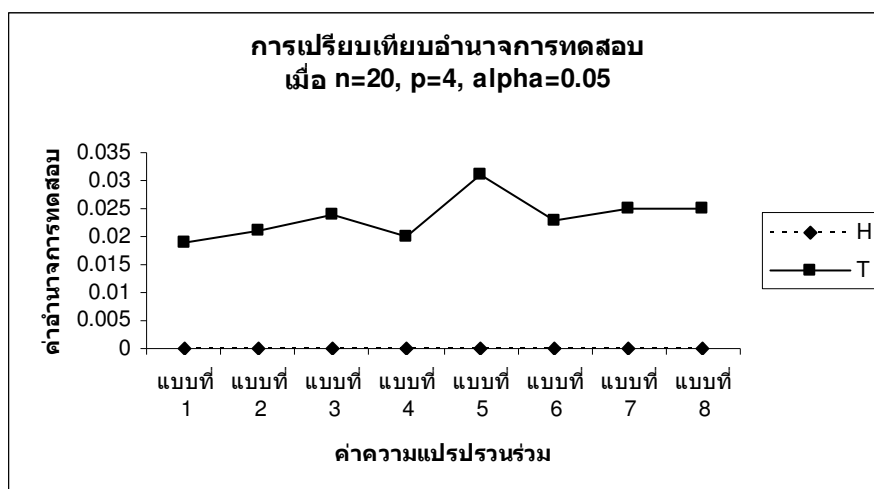
ขนาดตัวอย่าง 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ T ให้
ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด

ขนาดตัวอย่าง 30 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้
ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

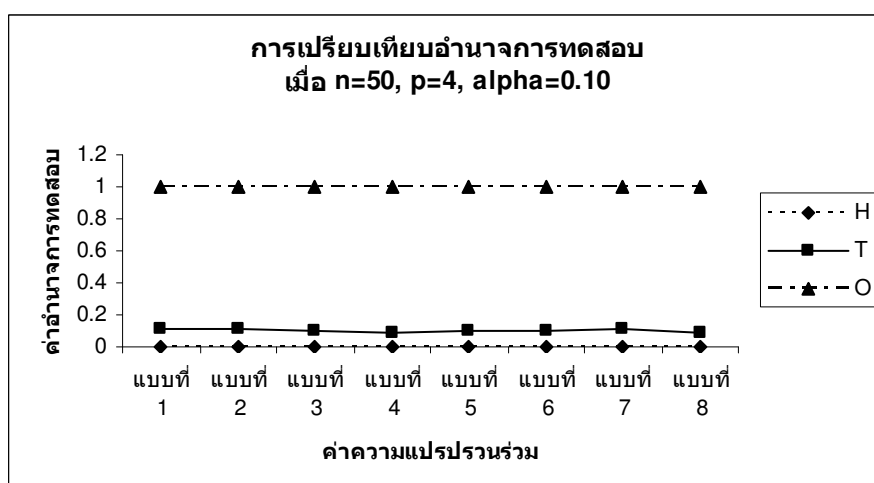
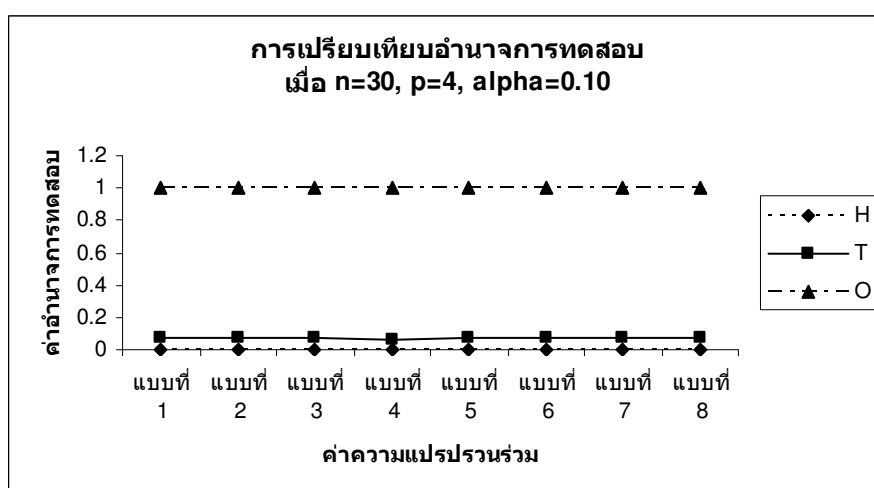
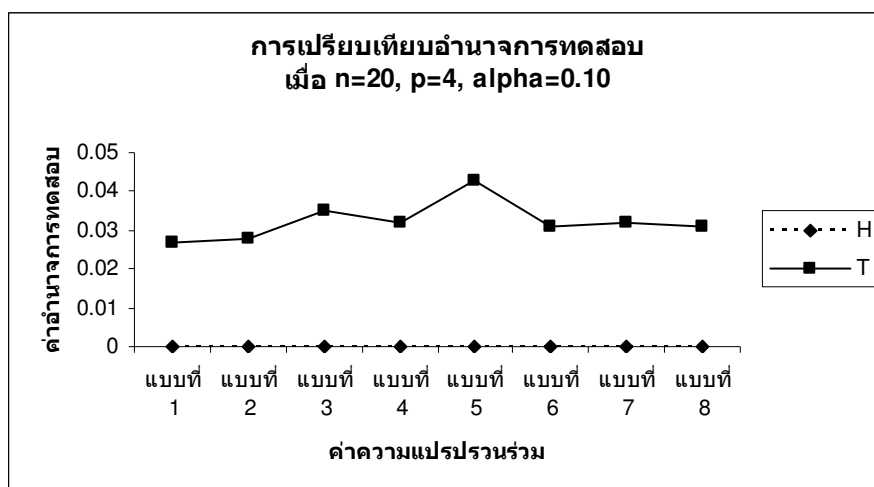
ขนาดตัวอย่าง 50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้
ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T

สรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง
สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ
50 ค่าความแปรปรวนร่วมทุกแบบที่ทำการทดลอง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด
รองลงมาก็คือสถิติทดสอบ T ที่ทุกระดับนัยสำคัญ

กราฟแสดงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบดังภาพที่ 36 และ 37



ภาพที่ 36 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง



ภาพที่ 37 แสดงการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบ 3 วิธี (H, T, O) สำหรับการแจกแจงสตีเวนส์-ที่ 4 ตัวแปร ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

วิจารณ์

จากการศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I error) และอำนาจการทดสอบ (Power of the test) ของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติ หลายตัวแปร 3 วิธี พบว่า

1. ในกรณีที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ดังนั้นสถิติทดสอบ T จึงเหมาะสำหรับข้อมูลขนาดเล็ก แต่ทั้งนี้ควรพิจารณาในเรื่องของจำนวนตัวแปร ความแปรปรวนร่วม ระดับนัยสำคัญ และการแจกแจงของข้อมูลร่วมด้วย
2. เมื่อประชากรมีการแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ดังนั้นสถิติทดสอบ T และ O จึงเหมาะสำหรับข้อมูลขนาดกลางและขนาดใหญ่ แต่ทั้งนี้ควรพิจารณาในเรื่องของจำนวนตัวแปร ความแปรปรวนร่วม ระดับนัยสำคัญ และการแจกแจงของข้อมูลร่วมด้วย
3. เมื่อประชากรมีการแจกแจงสตีเวนส์-ทีหลายตัวแปร กรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 และสถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 และ 4 ที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ดังนั้นสถิติทดสอบ O จึงเหมาะสำหรับข้อมูลขนาดกลางและขนาดใหญ่ แต่ทั้งนี้ควรพิจารณาในเรื่องของจำนวนตัวแปร ความแปรปรวนร่วม ระดับนัยสำคัญ และการแจกแจงของข้อมูลร่วมด้วย
4. เมื่อประชากรมีการแจกแจงลอการิธึมหรือการแจกแจงสตีเวนส์-ทีหลายตัวแปร กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ดังนั้นสถิติทดสอบ O จึงเหมาะสำหรับข้อมูลขนาดกลางและขนาดใหญ่ แต่ทั้งนี้ควรพิจารณาในเรื่องของจำนวนตัวแปร ความแปรปรวนร่วม ระดับนัยสำคัญ และการแจกแจงของข้อมูลร่วมด้วย

5. ในการศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี ทั้งในกรณีที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง พบว่า สถิติทดสอบ T ให้ผลการศึกษาที่สอดคล้องกับ เสาวลักษณ์ (2540) และจรรยา (2545) โดยสถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ไว้ได้ ทุกขนาดตัวอย่างและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ส่วนสถิติทดสอบ O ให้ผลการศึกษาที่สอดคล้องกับ เสาวลักษณ์ (2540) โดยสถิติทดสอบ O สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ไว้ได้ เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

6. ในการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบ 3 วิธี พบว่า สถิติทดสอบ T ให้ผลการศึกษาที่สอดคล้องกับ เสาวลักษณ์ (2540) โดยสถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดทุกขนาดตัวอย่างและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา และสถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดเมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ส่วนสถิติทดสอบ T ให้ผลการศึกษาที่สอดคล้องกับ จรรยา (2545) โดยสถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และ 50

ตัวอย่างการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร สำหรับข้อมูลคุณภาพน้ำเสีย ซึ่งเป็นข้อมูลจริง

ตัวอย่าง ข้อมูลตัวดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่ได้รับความอนุเคราะห์จากวิทยาลัยสิ่งแวดล้อม

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ซึ่งเป็นข้อมูลที่เกิดจากการติดตามคุณภาพน้ำเสียที่ผ่านการบำบัดจากระบบบำบัดน้ำเสียของโครงการศึกษาวิจัยและพัฒนาสิ่งแวดล้อมแหลมผักเบี้ยอันเนื่องมาจากพระราชดำริ ตำบลแหลมผักเบี้ย อำเภอบ้านแหลม จังหวัดเพชรบุรี ตั้งแต่เดือนตุลาคม พ.ศ. 2548 จนถึงเดือนมีนาคม พ.ศ. 2551 ได้ข้อมูลดังแสดงในตารางผนวกที่ ค1 ซึ่งผู้วิจัยนำข้อมูลนี้มาเพื่อศึกษาว่าข้อมูลชุดนี้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปรหรือไม่ โดยใช้วิธีการทดสอบที่ศึกษาในการวิจัยนี้ทั้ง 3 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของประชากร ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และจำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ได้แก่ อุณหภูมิของน้ำ (Temperature) ค่าออกซิเจนละลายน้ำ (DO: Dissolved Oxygen) และค่าความสกปรกของน้ำในรูปของบีโอดี (BOD: Biochemical Oxygen Demand)

สมมติฐานของการทดสอบ คือ

H_0 : ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

H_1 : ข้อมูลไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีข้อมูลพื้นฐานทางสถิติดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 29.78 \\ 5.9826667 \\ 18.242333 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.1582069 & 1.182469 & -0.977745 \\ 1.182469 & 5.2087237 & -3.387175 \\ -0.977745 & -3.387175 & 65.425246 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2045376 & -0.045994 & 0.0006755 \\ -0.045994 & 0.209017 & 0.0101338 \\ 0.0006755 & 0.0101338 & 0.0158194 \end{bmatrix}$$

1. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$H = \frac{e}{m} \sum_{i=1}^m k_i$$

โดยที่
$$e = \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1+(m-1)\bar{c}}, \quad \bar{c} = \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}$$

$$G = \frac{\sum_{i=1}^m k_i}{m}, \quad k_i = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_i) \right] \right\}^2; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt, \quad z = \frac{((1-W)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$W = \frac{(\sum a_i v_i)^2}{\sum (v_i - \bar{v})^2}, \quad \bar{v} = \frac{\sum v_i}{n}$$

เมื่อ $21 \leq n \leq 2000$

$$x = \ln(n) - 5$$

$$\lambda = 0.480385 + 0.318828x - 0.0241665x^3 + 0.00879701x^4 + 0.002989646x^5$$

$$\ln \mu = -1.91487 - 1.37888x - 0.04813209x^2 + 0.1066339x^3 - 0.03513666x^4 - 0.01504614x^5$$

$$\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807x - 0.331885x^2 + 0.1773538x^3 - 0.01638782x^4 - 0.03215018x^5 + 0.003852646x^6$$

1.1 เรียงลำดับข้อมูล $Y_i = X_i$ จากน้อยไปมาก

1.2 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_i ของ Y_i ดังตารางที่ 28

ตารางที่ 28 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_i ของ Y_i

i	Y_{li}	a_{30-i+1}	$a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li})$	$(Y_{li} - \bar{Y}_l)^2$
1	24.7	0.4254	4.12638	25.8064
2	25.9	0.2944	2.00192	15.0544
3	26.9	0.2487	1.44246	8.2944
4	26.9	0.2148	1.22436	8.2944
5	27.5	0.1870	0.8789	5.1984
6	27.6	0.1630	0.7335	4.7524
7	27.7	0.1415	0.566	4.3264
8	28	0.1219	0.41446	3.1684
9	28.2	0.1036	0.33152	2.4964
10	28.7	0.0862	0.22412	1.1664
11	29.1	0.0697	0.10455	0.4624
12	29.4	0.0537	0.0537	0.1444
13	29.5	0.0381	0.03048	0.0784
14	29.7	0.0227	0.01135	0.0064
15	29.8	0.0076	0.0000000	0.0004
16	29.8	0.0000	0.0000000	0.0004
17	30.2	0.0000	0.0000000	0.1764
18	30.3	0.0000	0.0000000	0.2704
19	30.4	0.0000	0.0000000	0.3844
20	30.6	0.0000	0.0000000	0.6724
21	31.3	0.0000	0.0000000	2.3104
22	31.4	0.0000	0.0000000	2.6244
23	31.4	0.0000	0.0000000	2.6244

ตารางที่ 28 (ต่อ)

i	Y_{li}	a_{30-i+1}	$a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li})$	$(Y_{li} - \bar{Y}_l)^2$
24	31.7	0.0000	0.0000000	3.6864
25	32.1	0.0000	0.0000000	5.3824
26	32.2	0.0000	0.0000000	5.8564
27	32.6	0.0000	0.0000000	7.9524
28	32.7	0.0000	0.0000000	8.5264
29	32.7	0.0000	0.0000000	8.5264
30	34.4	0.0000	0.0000000	21.3444
sum			12.1437	149.588

$$1.3 \text{ คำนวณค่า } W_l = \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{l(30-i+1)} - Y_{li}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} (Y_{li} - \bar{Y}_l)^2}$$

$$= \frac{(12.1437)^2}{149.588} = 0.9858374$$

$$1.4 \text{ คำนวณค่า } z = \frac{((1-W)^\lambda - \mu)}{\sigma}$$

$$\text{โดยที่ } x = \ln(n) - 5 \text{ เมื่อ } 20 < n \leq 2000$$

$$x = \ln(30) - 5$$

$$= -1.598803$$

$$\text{และ } \lambda = 0.480385 + 0.318828(x) + -0.0241665(x)^3$$

$$+ 0.00879701(x)^4 + 0.002989646(x)^5 \text{ เมื่อ } 20 < n \leq 2000$$

$$\lambda = 0.480385 + 0.318828(-1.598803)$$

$$- 0.0241665(-1.598803)^3 + 0.00879701(-1.598803)^4$$

$$+ 0.002989646(-1.598803)^5$$

$$= 0.095654$$

และ $\ln \mu = -1.91487 - 1.37888(x) + -0.04183209(x)^2$
 $+ 0.1066339(x)^3 - 0.03513666(x)^4 - 0.01504614(x)^5$
เมื่อ $20 < n \leq 2000$

$$\ln \mu = -1.91487 - 1.37888(-1.598803)$$

$$- 0.04183209(-1.598803)^2 + 0.1066339(-1.598803)^3$$

$$- 0.03513666(-1.598803)^4 - 0.01504614(-1.598803)^5$$

$$\mu = 0.722211$$

และ $\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807(x) - 0.331885(x)^2$
 $+ 0.1773538(x)^3 - 0.01638782(x)^4 - 0.03215018(x)^5$
 $+ 0.003852646(x)^6$ เมื่อ $20 < n \leq 2000$

$$\ln \sigma = -3.73538 - 1.015807(-1.598803)$$

$$- 0.331885(-1.598803)^2 + 0.1773538(-1.598803)^3$$

$$- 0.01638782(-1.598803)^4 - 0.03215018(-1.598803)^5$$

$$+ 0.003852646(-1.598803)^6$$

$$\sigma = 0.0336635$$

ดังนั้น $z_1 = \frac{(1 - 0.9858374)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = -1.684588$

1.5 คำนวณค่า $k_1 = \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_1) \right] \right\}^2$
 $= 2.1417106$

1.6 คำนวณค่า $Y_2 = X_2 - b_{21}X_1$

โดยที่ $b_{21} = \frac{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2)}{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2}$

$$= \frac{34.2916}{149.588} = 0.2292403$$

1.7 เรียงลำดับข้อมูล Y_2 จากน้อยไปมาก

1.8 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2 ดังตารางที่ 29

ตารางที่ 29 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_2 ของ Y_2

i	a_{30-i+1}	Y_{2i}	$a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i})$	$(Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2$
1	0.4254	-5.094577	4.0194813	122.70532
2	0.2944	-4.875222	2.2959247	117.89374
3	0.2487	-4.386158	1.7282475	107.51253
4	0.2148	-3.138614	1.1686126	83.197762
5	0.1870	-2.698146	0.6969963	75.356506
6	0.1630	-2.625981	0.5670874	74.108823
7	0.1415	-2.549957	0.4294812	72.805661
8	0.1219	-2.326564	0.3163553	69.043321
9	0.1036	-2.188906	0.2254664	66.774592
10	0.0862	-2.003057	0.1690228	63.77179
11	0.0697	-1.939665	0.1267358	62.763342
12	0.0537	-1.149197	0.0521141	50.863479
13	0.0381	-1.108437	0.0307429	50.283756
14	0.0227	-1.037324	0.0100145	49.280271
15	0.0076	-0.964109	0.0015266	48.257687
16	0.0000	-0.763234	0.0000000	45.507179
17	0.0000	-0.596158	0.0000000	43.280937
18	0.0000	-0.301538	0.0000000	39.491229
19	0.0000	-0.178729	0.0000000	37.962794
20	0.0000	-0.121361	0.0000000	37.259158

ตารางที่ 29 (ต่อ)

i	a_{30-i+1}	Y_{2i}	$a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i})$	$(Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2$
21	0.0000	-0.042236	0.0000000	36.299449
22	0.0000	-0.012589	0.0000000	35.943093
23	0.0000	0.2686387	0.0000000	32.650116
24	0.0000	0.4852464	0.0000000	30.221629
25	0.0000	0.8530821	0.0000000	26.312638
26	0.0000	1.0291069	0.0000000	24.537755
27	0.0000	2.3018542	0.0000000	13.548381
28	0.0000	2.5629674	0.0000000	11.694343
29	0.0000	2.9234356	0.0000000	9.3588949
30	0.0000	4.3541332	0.0000000	2.6521212
sum			11.837809	1541.3383

$$\begin{aligned}
 \text{1.9 ค่า } W_2 &= \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{2(30-i+1)} - Y_{2i}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} (Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2} \\
 &= \frac{(11.837809)^2}{1541.3383} = 0.0909169
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{1.10 ค่า } z_2 &= \frac{((1 - W_2)^\lambda - \mu)}{\sigma} \\
 &= \frac{(1 - 0.0909169)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = 7.9823303
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{1.11 ค่า } k_2 &= \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_2) \right] \right\}^2 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

1.12 คำนวณค่า $Y_3 = X_3 - b_{32}X_2 - b_{31}X_1$

$$\begin{aligned}
 \text{โดยที่ } b_{32} &= \frac{\sum_{i=1}^{30} (X_{2i} - \bar{X}_2)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{30} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2} \\
 &= \frac{-98.22809}{151.052978} = -0.650289 \\
 b_{31} &= \frac{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{3i} - \bar{X}_3)}{\sum_{i=1}^{30} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2} \\
 &= \frac{-28.3546}{149.588} = -0.189551
 \end{aligned}$$

1.13 เรียงลำดับข้อมูล Y_3 จากน้อยไปมาก

1.14 คำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3 ดังตารางที่ 30

ตารางที่ 30 แสดงการคำนวณค่าสถิติทดสอบ W_3 ของ Y_3

i	a_{30-i+1}	Y_{3i}	$a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i})$	$(Y_{3i} - \bar{Y}_3)^2$
1	0.4254	15.92862	13.509251	5.3532681
2	0.2944	17.012685	6.7956676	1.512036
3	0.2487	17.336541	5.3574134	0.8204598
4	0.2148	17.59604	4.3261156	0.4176957
5	0.1870	18.177437	3.3383649	0.0042116
6	0.1630	19.471669	2.4533943	1.5112662
7	0.1415	21.707598	1.7203063	12.008056
8	0.1219	22.423871	1.3477545	17.485256
9	0.1036	22.694195	1.1017467	19.819074
10	0.0862	23.262068	0.8369265	25.197732
11	0.0697	23.589122	0.5350561	28.588154
12	0.0537	24.010056	0.3719404	33.26663

ตารางที่ 30 (ต่อ)

i	a_{30-i+1}	Y_{3i}	$a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i})$	$(Y_{3i} - \bar{Y}_3)^2$
13	0.0381	24.870741	0.1894359	43.935784
14	0.0227	25.185321	0.0689037	48.205081
15	0.0076	25.222653	0.0057651	48.724858
16	0.0000	25.981214	0.0000000	59.89027
17	0.0000	28.220726	0.0000000	99.568323
18	0.0000	29.842811	0.0000000	134.57109
19	0.0000	30.936321	0.0000000	161.13731
20	0.0000	31.26568	0.0000000	169.60756
21	0.0000	32.971191	0.0000000	216.93926
22	0.0000	33.328816	0.0000000	227.60196
23	0.0000	33.480101	0.0000000	232.18958
24	0.0000	33.865239	0.0000000	244.07519
25	0.0000	34.523168	0.0000000	265.06557
26	0.0000	36.029656	0.0000000	316.38884
27	0.0000	37.736243	0.0000000	380.0125
28	0.0000	38.878211	0.0000000	425.83945
29	0.0000	40.095795	0.0000000	477.57377
30	0.0000	47.685204	0.0000000	866.88262
sum			41.958041	4564.1928

$$\begin{aligned}
 1.15 \text{ จำนวนค่า } W_3 &= \frac{\left[\sum_{i=1}^{30} a_{30-i+1} (Y_{3(30-i+1)} - Y_{3i}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{30} (Y_{3i} - \bar{Y}_3)^2} \\
 &= \frac{(41.958041)^2}{4564.1928} = 0.3857149
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.16 \text{ จำนวนค่า } z_3 &= \frac{\left((1-W_3)^\lambda - \mu\right)}{\sigma} \\
 &= \frac{(1-0.3857149)^{0.095654} - 0.722211}{0.0336635} = 6.8990786
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.17 \text{ จำนวนค่า } k_3 &= \left\{ \Phi^{-1} \left[\frac{1}{2} \Phi(-z_3) \right] \right\}^2 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.18 \text{ จำนวนค่า } G &= \frac{\sum_1^m k_i}{m} \\
 &= \frac{2.1417106 + 4 + 4}{3} \\
 &= 3.3805702
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.19 \text{ จำนวนค่า } \bar{c} &= \frac{\sum \sum c_{ij}}{(m^2 - m)}, \quad c_{ij} = \text{corr}(k_i, k_j) \\
 &= 1.7060157
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.20 \text{ จำนวนค่า } e &= \frac{2}{\text{var}(G)} = \frac{m}{1+(m-1)\bar{c}} \\
 &= \frac{3}{1+(3-1)(1.7060157)} = 0.6799589
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.21 \text{ จำนวนค่า } H &= \frac{e}{m} \sum_1^m k_i \sim \chi_e^2 \\
 H &= \frac{0.6799589}{3} (2.1417106 + 4 + 4) \\
 &= 2.2986487
 \end{aligned}$$

1.22 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ H ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก1 ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ (df) เท่ากับ 1 ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$H = 2.2986487 < 3.841$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

2. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$T = T_3 + T_4$$

$$\text{โดยที่ } T_3 = \frac{1}{6}nb_{1,p} \text{ และ } T_4 = \frac{1}{24}n[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2)]$$

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3, \quad b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2, \quad b_{2,p}^* = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4$$

$$D_{ii} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad D_{ij} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{S}_{ii} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)^2, \quad \mathbf{S}_{ij} = \sum_{t=1}^n (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)$$

คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 29.78 \\ 5.9826667 \\ 18.242333 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.1582069 & 1.182469 & -0.977745 \\ 1.182469 & 5.2087237 & -3.387175 \\ -0.977745 & -3.387175 & 65.425246 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2045376 & -0.045994 & 0.0006755 \\ -0.045994 & 0.209017 & 0.0101338 \\ 0.0006755 & 0.0101338 & 0.0158194 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2.1 \text{ ค่า } b_{1,p} &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^3 \\ b_{1,p} &= \frac{1}{(30)^2} \left[(1.9875591)^3 + (1.0762331)^3 + \dots + (7.4967495)^3 \right] \\ &= 2.1000201 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2 \text{ ค่า } b_{2,p} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{ii}^2 \\ b_{2,p} &= \frac{1}{30} \left[(1.9875591)^2 + (1.0762331)^2 + \dots + (7.4967495)^2 \right] \\ &= 14.503783 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.3 \text{ ค่า } b_{2,p}^* &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij}^4 \\ b_{2,p}^* &= \frac{1}{(30)^2} \left[(1.9875591)^4 + (1.0762331)^4 + \dots + (7.4967495)^4 \right] \\ &= 48.087131 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.4 \text{ ค่า } T_3 &= \frac{1}{6} n b_{1,p} \\ &= \frac{1}{6} (30) (2.1000201) = 10.5001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.5 \text{ ค่า } T_4 &= \frac{1}{24} n \left[b_{2,p}^* - 6b_{2,p} + 3p(p+2) \right] \\ &= \frac{1}{24} (30) \{ 48.087131 - 6(14.503783) + 3(3)(5) \} \\ &= 7.5805411 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.6 \text{ คำนวณค่า } T &= T_3 + T_4 \\
 &= 10.5001 + 7.5805411 \\
 &= 18.080641
 \end{aligned}$$

2.7 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ T ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก6 ที่จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$T = 18.080641 < 37.65$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

3. วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) \right]^2}{n(n-1)}$$

$$\text{โดยที่ } A \left(\Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{ij} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Psi_{ij} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j); i < j, \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})}{\left[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right]}$$

คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 29.78 \\ 5.9826667 \\ 18.242333 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 5.1582069 & 1.182469 & -0.977745 \\ 1.182469 & 5.2087237 & -3.387175 \\ -0.977745 & -3.387175 & 65.425246 \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2045376 & -0.045994 & 0.0006755 \\ -0.045994 & 0.209017 & 0.0101338 \\ 0.0006755 & 0.0101338 & 0.0158194 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.4493686 & -0.050969 & 0.0027547 \\ -0.050969 & 0.4539864 & 0.017761 \\ 0.0027547 & 0.017761 & 0.1244842 \end{bmatrix}$$

$$3.1 \text{ คำนวณค่า } \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})}{\left[(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) \right]}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.1855244 \\ 0.3236325 \\ -0.927816 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} -0.679364 \\ 0.6781454 \\ -0.280328 \end{bmatrix}$$

⋮

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{bmatrix} -0.34135 \\ 0.0705342 \\ 0.9372859 \end{bmatrix}$$

3.2 คำนวณค่า $\Psi_{i,j} = \cos^{-1}(\mathbf{D}_i' \mathbf{D}_j)$; $i < j$

$$\Psi_{1,2} = 1.2094609$$

$$\Psi_{1,3} = 1.2006679$$

$$\vdots$$

$$\Psi_{29,30} = 0.9036147$$

3.3 คำนวณค่า $O = \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[A\left(\Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2}\right) \right]^2}{n(n-1)}$

$$\text{โดยที่ } A\left(\Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2}, & \Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2} < 0 \\ 0, & \Psi_{i,j} - \frac{\pi}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$O = 0.4123371$$

3.4 เกณฑ์การตัดสินใจ

เปรียบเทียบค่าสถิติทดสอบ O ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤตในตารางผนวกที่ ก7 ที่ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 จำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ระดับนัยสำคัญ 0.05

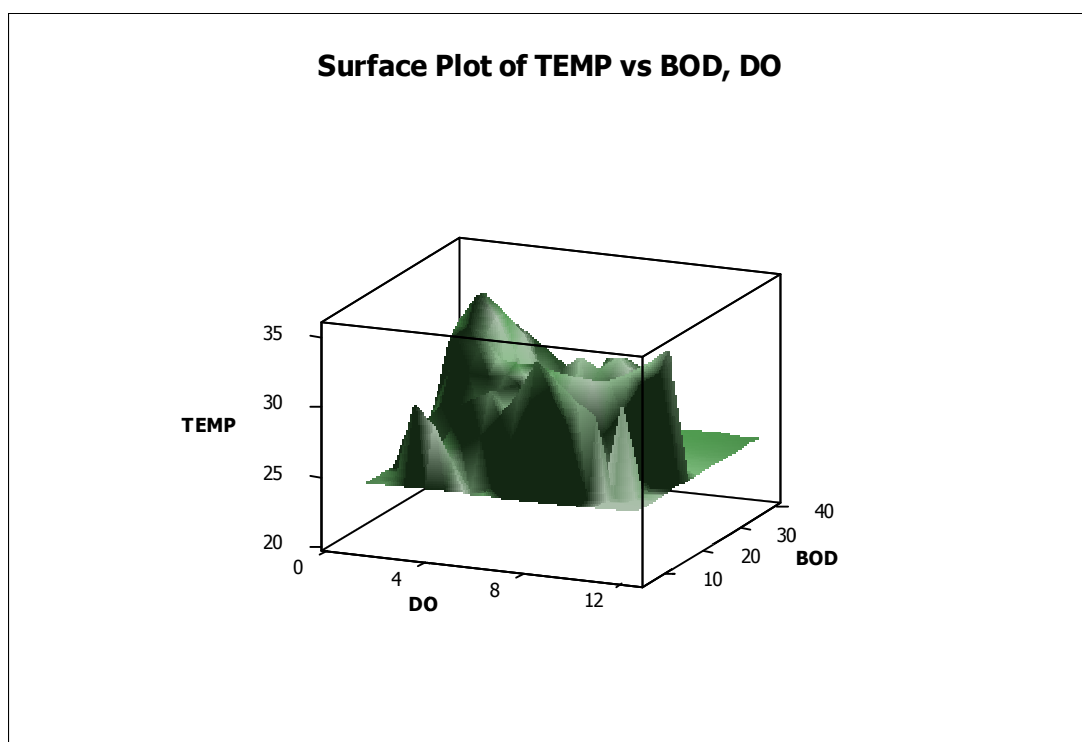
$$O = 0.4123371 < 0.4443$$

ดังนั้น ยอมรับสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูลมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติสามตัวแปร

การตรวจสอบข้อมูล

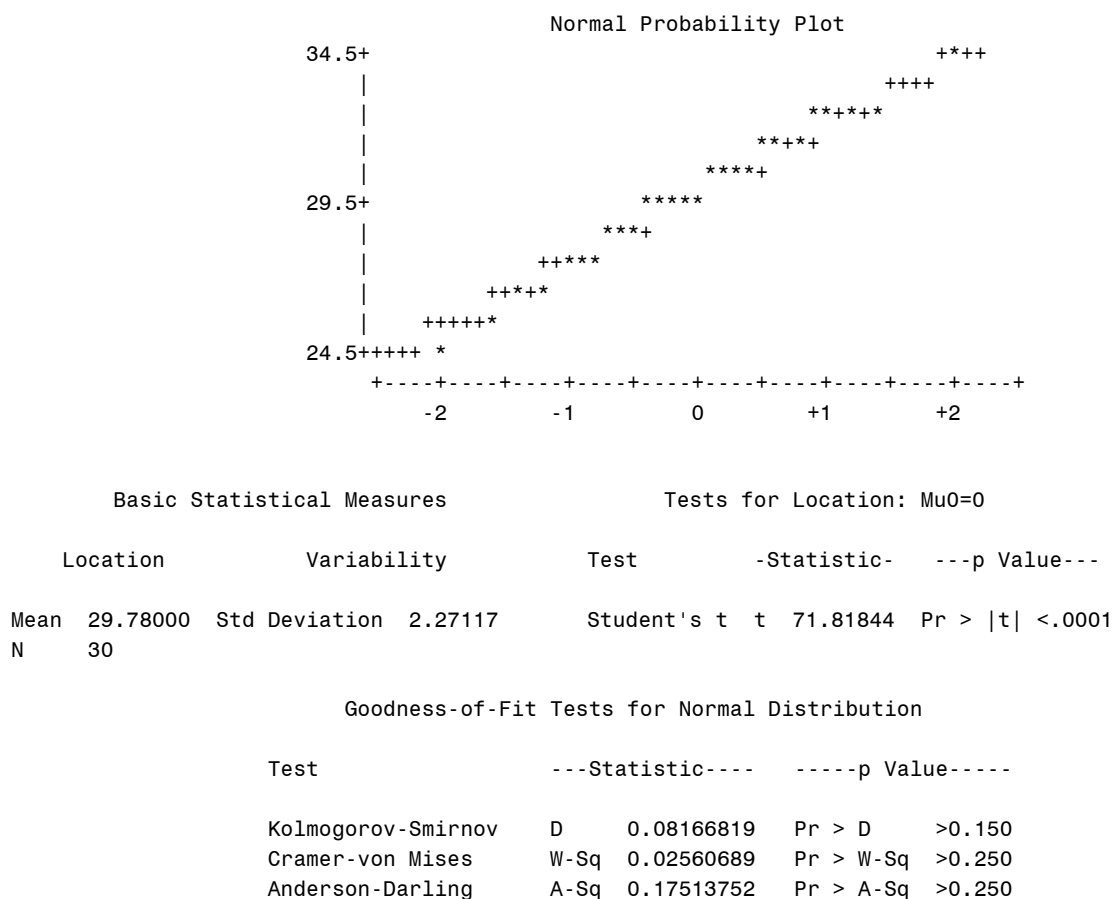
เมื่อนำข้อมูลมาพล็อตกราฟได้ดังนี้



ภาพที่ 38 แสดงข้อมูลตัวดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่ผ่านการบำบัดแล้วจำนวน 30 ตัวอย่าง

ในการตรวจสอบข้อมูลว่ามีการแจกแจงปกติสามตัวแปรหรือไม่ มีขั้นตอนดังนี้

1. ตรวจสอบการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปร x_1 โดยใช้ Normal Probability Plot



ภาพที่ 39 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_1

สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูล x_1 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

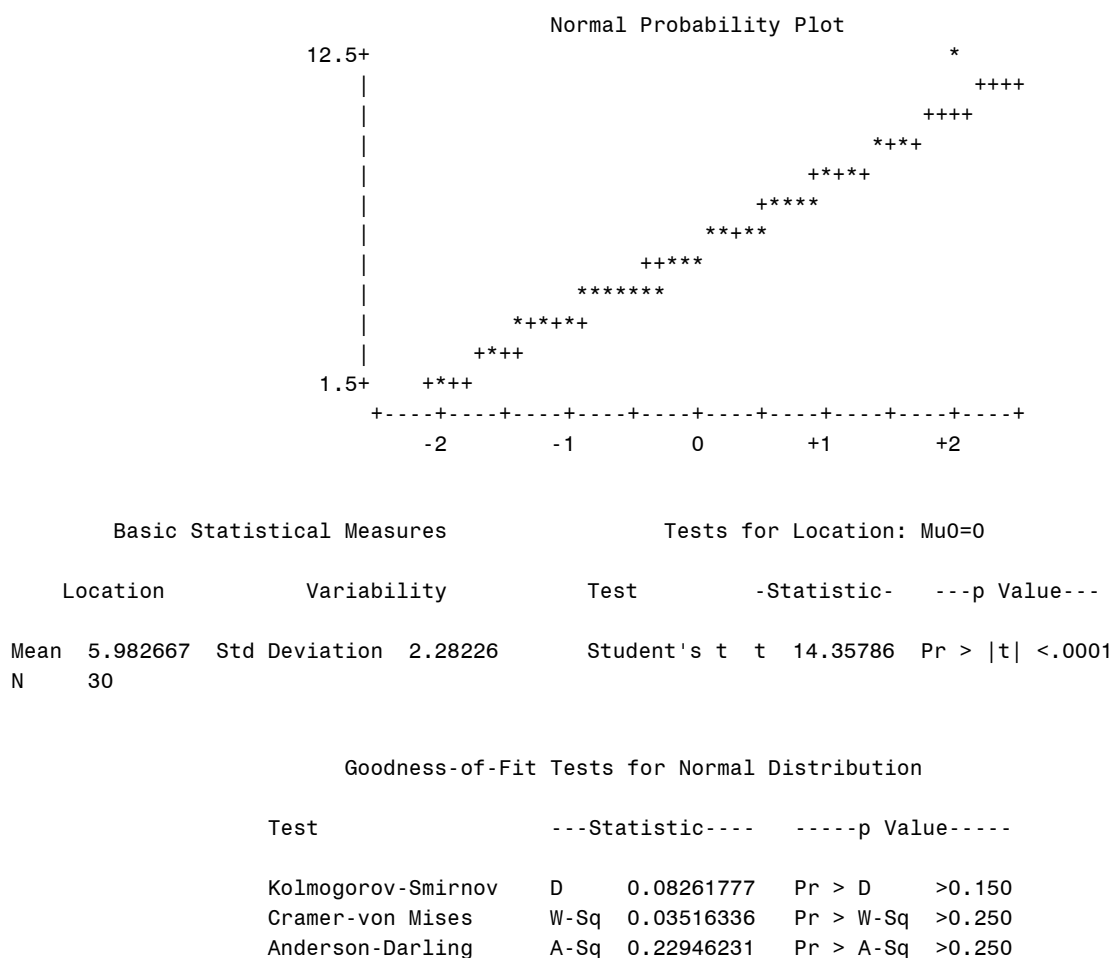
H_1 : ข้อมูล x_1 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

จากภาพที่ 39 โดยใช้สถิติทดสอบที่ ทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปร x_1 พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_1 มีค่าเท่ากับ 0.0001 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05 และใช้การทดสอบ Goodness-of-Fit Tests โดยดูจากสถิติของ Kolmogorov-Smirnov พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_1 มีค่าเท่ากับ 0.150 ซึ่งมีค่ามากกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05

ดังนั้น ปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูล x_1 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ แต่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงสวิตเดนท์-ที

2. ตรวจสอบการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปร x_2 โดยใช้ Normal Probability Plot



ภาพที่ 40 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_2

สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูล x_2 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

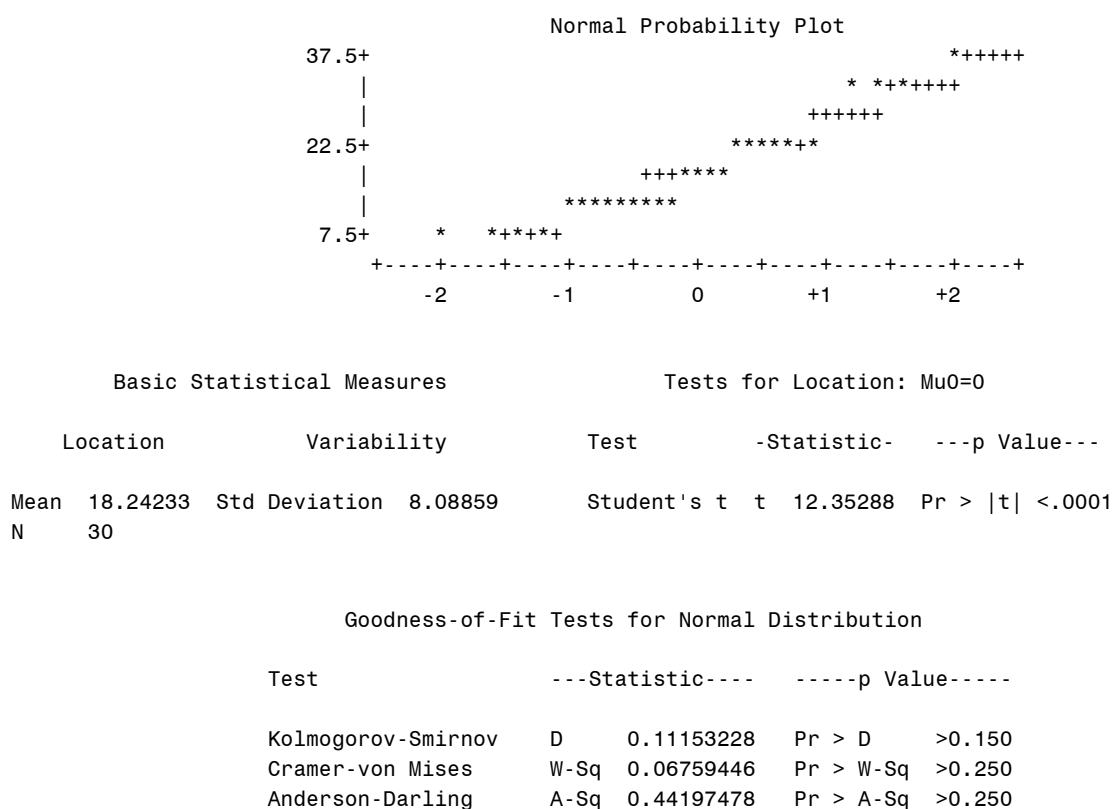
H_1 : ข้อมูล x_2 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

จากภาพที่ 40 โดยใช้สถิติทดสอบที่ ทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปร x_2 พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_2 มีค่าเท่ากับ 0.0001 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05 และใช้การทดสอบ Goodness-of-Fit Tests โดยดูจากสถิติของ Kolmogorov-Smirnov พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_2 มีค่าเท่ากับ 0.150 ซึ่งมีค่ามากกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05

ดังนั้น ปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูล x_2 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ แต่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงสทิวเดนต-ที

3. ตรวจสอบการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปร x_3 โดยใช้ Normal Probability Plot



ภาพที่ 41 แสดง Normal Probability Plot ของตัวแปร x_3

สมมติฐานของการทดสอบคือ

H_0 : ข้อมูล x_3 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

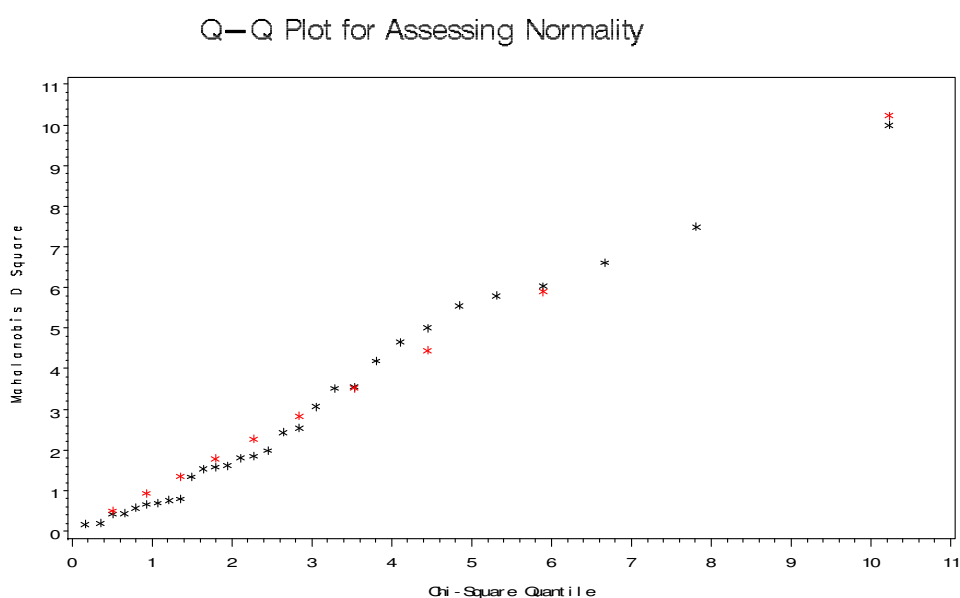
H_1 : ข้อมูล x_3 ไม่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

จากภาพที่ 41 โดยใช้สถิติทดสอบที่ ทดสอบการแจกแจงปกติของตัวแปร x_3 พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_3 มีค่าเท่ากับ 0.0001 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05 และใช้การทดสอบ Goodness-of-Fit Tests โดยดูจากสถิติของ Kolmogorov-Smirnov พบว่า ค่า p-value ของตัวแปร x_3 มีค่าเท่ากับ 0.150 ซึ่งมีค่ามากกว่าระดับนัยสำคัญที่ 0.05

ดังนั้น ปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

สรุปว่า ข้อมูล x_3 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ แต่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงสทิวเดนต-ที

4. ตรวจสอบการแจกแจงร่วมของตัวแปร x_1 , x_2 และ x_3 โดยใช้ Chi-square Plot



ภาพที่ 42 แสดง Chi-square Plot ของการแจกแจงปกติสามตัวแปร

จากภาพที่ 42 พบว่า ข้อมูลมีแนวโน้มเชิงเส้นตรง ดังนั้น ข้อมูลชุดนี้จึงมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการเปรียบเทียบเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (Type I error) และอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี คือ วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) และวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) ทั้งกรณีทราบค่าพารามิเตอร์และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง เพื่อหาผลสรุปว่าวิธีการทดสอบวิธีใดสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ และวิธีการทดสอบใดให้อำนาจการทดสอบสูงสุด โดยการจำลองข้อมูลตัวอย่างขนาด 20, 30 และ 50 ซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลขนาดเล็ก กลาง และใหญ่ ตามลำดับ กำหนดจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3 และ 4 และทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และ 0.10 โดยทำซ้ำ 1,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์

ส่วนที่ 1 กรณีทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

1.1 เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติ 2, 3 และ 4 ตัวแปร วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษา ทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา และวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50 ที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ส่วนวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 ที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และระดับนัยสำคัญ 0.10

1.2 เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ

1.2.1 การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบกรณี 2 ตัวแปร

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดทุกการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญ

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงลิกนอร์มอล และสถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงสตีเวนส์-ที

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงลิกนอร์มอล และสถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงสตีเวนส์-ที

1.2.2 การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบกรณี 3 ตัวแปร

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดสำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

1.2.3 การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบกรณี 4 ตัวแปร

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด
สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่าง
จากสถิติทดสอบ O สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่าง
จากสถิติทดสอบ O สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

ส่วนที่ 2 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง

2.1 เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1

เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติ 2, 3 และ 4 ตัวแปร วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติ
หลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) สามารถควบคุมความ
คลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ทุกขนาดตัวอย่างที่ศึกษา ทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา และวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 และ 50
ที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา และทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา ส่วนวิธีการทดสอบการแจกแจง
ปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภท
ที่ 1 ได้เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 ที่ทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

2.2 เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบ

2.2.1 การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบกรณี 2 ตัวแปร

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด
สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และสถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 เมื่อประชากรมีการแจกแจงลอการิธึม และสถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงสวิตเดนท-ที

2.2.2 การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบกรณี 3 ตัวแปร

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงลอการิธึม และสถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงสวิตเดนท-ที

2.2.3 การเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบกรณี 4 ตัวแปร

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 20 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 30 สถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุด สำหรับการแจกแจงและทุกระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 50 สถิติทดสอบ T ให้ค่าอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างจากสถิติทดสอบ O ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงลอการิธึมอล และสถิติทดสอบ O ให้ค่าอำนาจการทดสอบสูงสุดที่ทุกระดับนัยสำคัญเมื่อประชากรมีการแจกแจงสวิตเคนท์-ที

ตารางที่ 31 แสดงการเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และค่าอำนาจการทดสอบของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร 3 วิธี

p	n	α	Type I error		Power of the test			
			kp	uk	kp		uk	
			Normal	Normal	Lognormal	Student't	Lognormal	Student't
2	20	0.05	H, T	H, T	T	T	T	T
		0.10	H, T	H, T	T	T	T	T
	30	0.05	T, O	H, T, O	T*, O*	O	O	O
		0.10	T, O	H, T, O	T*, O*	O	O	O
	50	0.05	T, O	T, O	T*, O*	O	O	O
		0.10	T, O	H, T, O	T*, O*	O	T*, O*	O
3	20	0.05	T	T	T	T	T	T
		0.10	T	T	T	T	T	T
	30	0.05	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	O	O
		0.10	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	O	O
	50	0.05	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	T*, O*	O
		0.10	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	T*, O*	O
4	20	0.05	T	T	T	T	T	T
		0.10	T	T	T	T	T	T
	30	0.05	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	O	O
		0.10	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	O	O
	50	0.05	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	T*, O*	O
		0.10	T, O	T, O	T*, O*	T*, O*	T*, O*	O

หมายเหตุ:	p	หมายถึง จำนวนตัวแปร
	n	หมายถึง ขนาดตัวอย่าง
	α	หมายถึง ระดับนัยสำคัญ
	kp	หมายถึง กรณิที่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง
	uk	หมายถึง กรณิที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง
	Normal	หมายถึง การแจกแจงปกติหลายตัวแปร
	Lognormal	หมายถึง การแจกแจงล็อกนอร์มอลหลายตัวแปร
	Student't	หมายถึง การแจกแจงสตีวเดนท์-ทีหลายตัวแปร
	*	หมายถึง เมื่อทำการทดสอบแล้วค่าอำนาจการทดสอบของแบบทดสอบเท่ากัน

ข้อเสนอแนะ

1. ในการเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ทั้งในกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ควรใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) เนื่องจากสถิติทดสอบ T สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ สำหรับขนาดตัวอย่างค่าความแปรปรวนร่วม และระดับนัยสำคัญที่ศึกษาทั้งหมด และวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) ควรใช้เมื่อตัวอย่างขนาดกลางและใหญ่ สำหรับ 30 และ 50 ตามลำดับ ทุกค่าความแปรปรวนร่วม และระดับนัยสำคัญที่ศึกษาทั้งหมด ส่วนวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย J. P. Royston (H, 1983) สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้เมื่อจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2 สำหรับทุกค่าความแปรปรวนร่วมที่ศึกษา ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10

2. ในการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ทั้งกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ควรใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย K. V. Mardia และ J. T. Kent (T, 1991) เมื่อตัวอย่างขนาดเล็ก ($n = 20$) และควรใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรที่เสนอโดย Charles L. Dunn (O, 1995) เมื่อตัวอย่างขนาดกลางและใหญ่ แต่ทั้งนี้ต้องพิจารณาจำนวนตัวแปร ค่าความแปรปรวนร่วม และการแจกแจงของข้อมูลร่วมด้วย

3. ในการวิจัยครั้งนี้ศึกษาเฉพาะจำนวนตัวแปรเท่ากับ 2, 3 และ 4 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 30 และ 50 ทั้งกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจง ผู้สนใจอาจศึกษาเมื่อจำนวนตัวแปรมากกว่า 4 หรือที่ขนาดตัวอย่างอื่น ๆ ต่อไป

4. ในการศึกษาการเปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบของวิธีการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปรนี้ ศึกษาเฉพาะเมื่อประชากรมีการแจกแจงลีออนอร์มอลหลายตัวแปร และการแจกแจงสตีเวนส์-ทีหลายตัวแปร ซึ่งในการวิจัยครั้งต่อไปผู้สนใจอาจศึกษาเพิ่มเติมสำหรับการแจกแจงแบบอื่นๆ ทั้งกรณีทราบค่าและไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- กัลยา วาณิชยบัญชา. 2548. การวิเคราะห์ข้อมูลหลายตัวแปร. พิมพ์ครั้งแรก. ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- จรรยา เกศเกษมกุล. 2545. การเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- วรรณิ ธิไพศาล. 2538. พัฒนาการของแบบทดสอบภาวะสารูปสนธิ (พ.ศ. 2532-2536). วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.
- เสาวลักษณ์ สุนนางกูร. 2540. การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.
- อรศรี ทองเปี่ยม. 2540. การเปรียบเทียบกำลังการทดสอบของแบบทดสอบการแจกแจงปกติหลายตัวแปร. สารนิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.
- Baxter, M. J. 1999. On the Multivariate Normality of Data Arising from Lead Isotope Fields. **Journal of the Archaeological Science**. 26: 117-124.
- Chakak, A. and K. J. Koehler. 1995. A Strategy for Constructing Multivariate Distributions. **Communications in Statistics: Simulation and Computation**. 24 (3): 537-550.
- Cox, D. R. and N. J. H. Small. 1978. Testing Multivariate Normality. **Biometrika**. 65 (2): 263-272.
- Dunn, C. L. 1995. Critical Values and Powers for Tests of Uniformity of Directions Under Multivariate Normality. **Communication in Statistics: Theory and Methods**. 24 (10): 2541-2560.

- Hawkins, D. M. 1981. A New Test for Multivariate Normality and Homoscedasticity. **Technometrics**. 23 (1): 105-110.
- Johnson, R. A. and D. W. Wichern. 2002. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 5th ed. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Kariya, T., R. S. Tsay, N. Terui and H. Li. 1999. Tests for Multinormality with Applications to Time Series. **Communication in Statistics: Theory and Methods**. 28 (3&4): 519-536.
- Khattree, R. and D. N. Naik. 2000. **Multivariate Data Reduction and Discrimination with SAS[®] Software**. 1st ed. SAS Institute Inc., USA.
- Lin, C. C. and G. S. Mudholkar. 1980. A Simple Tests for Normality Against Asymmetric Alternatives. **Biometrika**. 67 (2): 455-461.
- Looney, S. W. 1995. How to Use Tests for Univariate Normality to Assess Multivariate Normality. **The American Statistician**. 49 (1): 64-70.
- Machado, S. G. 1983. Two Statistics for Testing for Multivariate Normality. **Biometrika**. 70 (3): 713-718.
- Mardia, K. V. 1970. Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications. **Biometrika**. 57 (3): 519-530.
- _____ and J.T. Kent. 1991. Rao Score Tests for Goodness of Fit and Independence. **Biometrika**. 78 (2): 355-363.
- Malkovich, J. F. and A. A. Afifi. 1973. On Tests for Multivariate Normality. **Journal of the American Statistical Association**. 68 (341): 176-179.

- Mudholkar, G. S., D. K. Srivastava and C. T. Lin. 1995. Some p -Variate Adaptations of the Shapiro-Wilk Test of Normality. **Communications in Statistics: Theory and Methods**. 24 (4): 953-985.
- _____, M. McDermott and D. K. Srivastava. 1992. A Test of p -Variate Normality. **Biometrika**. 79 (4): 850-854.
- Murota, K. and K. Takeuchi. 1981. The Studentized Empirical Characteristic Function and its Application to Test for the Shape of Distribution. **Biometrika**. 68 (1): 55-65.
- Naito, K. 1996. On Weighting the Studentized Empirical Characteristic Function for Testing Normality. **Communications in Statistics: Simulation and Computation**. 25 (1): 201-213.
- Ozturk, A. 1991. A General Algorithm for Univariate and Multivariate Goodness of Fit Tests Based on Graphical Representation. **Communications in Statistics: Theory and Methods**. 20 (10): 3111-3137.
- _____ and J. L. Romeu. 1992. A New Method for Assessing Multivariate Normality with Graphical Applications. **Communications in Statistics: Simulation and Computation**. 21 (1): 15-34.
- Royston, J. P. 1982. An Extension of Shapiro and Wilk's W Test for Normality to Large Samples. **Applied Statistics**. 31 (2): 115-124.
- Royston, J. P. 1983. Some Techniques for Assessing Multivariate Normality Based on the Shapiro-Wilk W . **Applied Statistics**. 32 (2): 121-133.
- Small, N. J. H. 1978. Plotting Squared Radii. **Biometrika**. 65 (3): 657-658.

Small, N. J. H. 1980. Marginal Skewness and Kurtosis in Testing Multivariate Normality.

Applied Statistics. 29 (1): 85-87.

Srivastava, M. S. 1984. A Measure of Skewness and Kurtosis and a Graphical Method for

Assessing Multivariate Normality. **Statistics and Probability Letters.** 2: 263-267.

Srivastava, M. S. and Hui, T. K. 1987. On Assessing Multivariate Normality. **Statistics and**

Probability Letters. 5: 15-18.

Srivastava, J. N. and M. K. Zaatar. 1973. A Monte Carlo Comparison of Four Estimators of the

Dispersion Matrix of a Bivariate Normal Population, Using Incomplete Data. **Journal of the American Statistical Association.** 68 (341): 180-183.

Thode, H. C. 2002. **Testing for Normality.** Marcel Dekker, Inc., New York.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ค่าวิกฤตสำหรับสถิติ H, T และ O

ตารางพื้นที่ ท.1 (ต่อ)

Degrees of Freedom	Upper Tail Areas (a)											
	.995	.99	.975	.95	.90	.75	.25	.10	.05	.025	.01	.005
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973	41.304	47.212	50.988	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.680	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.959	24.398	26.786	28.965	31.625	36.436	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.618
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291	50.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
46	25.041	26.657	29.160	31.439	34.215	39.220	52.056	58.641	62.830	66.617	71.201	74.437
47	25.775	27.416	29.956	32.268	35.081	40.149	53.127	59.774	64.001	67.821	72.443	75.704
48	26.511	28.177	30.755	33.098	35.949	41.079	54.196	60.907	65.171	69.023	73.683	76.969
49	27.249	28.941	31.555	33.930	36.818	42.010	55.265	62.038	66.339	70.222	74.919	78.231
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	42.942	56.334	63.167	67.595	71.420	76.154	79.490
51	28.735	30.475	33.162	35.600	38.560	43.874	57.401	64.295	68.669	72.616	77.385	80.747
52	29.481	31.246	33.968	36.437	39.433	44.808	58.468	65.422	69.832	73.810	78.616	82.001
53	30.230	32.018	34.776	37.276	40.308	45.741	59.534	66.548	70.993	75.002	79.843	83.253
54	30.981	32.793	35.586	38.116	41.183	46.676	60.600	67.673	72.153	76.192	81.069	84.502
55	31.735	33.570	36.398	38.958	42.060	47.610	61.665	68.796	73.311	77.380	82.292	85.749
56	32.490	34.350	37.212	39.801	42.937	48.546	62.729	69.919	74.468	78.567	83.513	86.994
57	33.248	35.131	38.027	40.646	43.816	49.482	63.793	71.040	75.624	79.752	84.733	88.236
58	34.008	35.913	38.844	41.492	44.696	50.419	64.857	72.160	76.778	80.936	85.950	89.477
59	34.770	36.698	39.662	42.339	45.577	51.356	65.919	73.279	77.931	82.117	87.166	90.715
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952

For larger values of degrees of freedom (DF) the expression $z = \sqrt{2\chi^2 - \sqrt{2(DF)}} - \sqrt{2(DF)}$ may be used and the resulting upper tail area can be obtained from the table of the standardized normal distribution (Table E.2).

ตารางผนวกที่ ก2 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ $\{a_{n-i+1}\}$ ของสถิติทดสอบ W_F

$i \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0.7071	0.6872	0.6646	0.6431	0.6233	0.6052	0.5888	0.5739	0.5601	0.5475	0.5359	0.5251	0.5150	0.5056	0.4968	0.4886
2		0.1677	0.2413	0.2806	0.3031	0.3164	0.3244	0.3291	0.3315	0.3325	0.3325	0.3318	0.3306	0.3290	0.3273	0.3253
3				0.0875	0.1401	0.1743	0.1976	0.2141	0.2260	0.2347	0.2412	0.2460	0.2495	0.2521	0.2540	0.2553
4						0.0561	0.0947	0.1224	0.1429	0.1586	0.1707	0.1802	0.1878	0.1939	0.1988	0.2027
5								0.0399	0.0695	0.0922	0.1099	0.1240	0.1353	0.1447	0.1524	0.1587
6										0.0303	0.0539	0.0727	0.0880	0.1005	0.1109	0.1197
7												0.0240	0.0433	0.0593	0.0725	0.0837
8														0.0196	0.0359	0.0496
9																0.0163

$i \backslash n$	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	0.4808	0.4734	0.4643	0.4590	0.4542	0.4493	0.4450	0.4407	0.4366	0.4328	0.4291	0.4254	0.4220	0.4188	0.4156	0.4127
2	0.3232	0.3211	0.3185	0.3156	0.3126	0.3098	0.3069	0.3043	0.3018	0.2992	0.2968	0.2944	0.2921	0.2898	0.2876	0.2854
3	0.2561	0.2565	0.2578	0.2571	0.2563	0.2554	0.2543	0.2533	0.2522	0.2510	0.2499	0.2487	0.2475	0.2463	0.2451	0.2439
4	0.2059	0.2085	0.2119	0.2131	0.2139	0.2145	0.2148	0.2151	0.2152	0.2151	0.2150	0.2148	0.2145	0.2141	0.2137	0.2132
5	0.1641	0.1686	0.1736	0.1764	0.1787	0.1807	0.1822	0.1836	0.1848	0.1857	0.1864	0.1870	0.1874	0.1878	0.1880	0.1882
6	0.1271	0.1334	0.1399	0.1443	0.1480	0.1512	0.1539	0.1563	0.1584	0.1601	0.1616	0.1630	0.1641	0.1651	0.1660	0.1667
7	0.0932	0.1013	0.1092	0.1150	0.1201	0.1245	0.1283	0.1316	0.1346	0.1372	0.1395	0.1415	0.1433	0.1449	0.1463	0.1475
8	0.0612	0.0711	0.0804	0.0878	0.0941	0.0997	0.1046	0.1089	0.1128	0.1162	0.1192	0.1219	0.1243	0.1265	0.1284	0.1301
9	0.0303	0.0422	0.0530	0.0618	0.0696	0.0764	0.0823	0.876	0.0923	0.0965	0.1002	0.1036	0.1066	0.1093	0.1118	0.1140
10		0.0140	0.0263	0.0368	0.0459	0.0539	0.0610	0.0672	0.0728	0.0778	0.0822	0.0862	0.0899	0.0931	0.0961	0.0988
11				0.0122	0.0228	0.0321	0.0403	0.0476	0.0540	0.0598	0.0650	0.0697	0.0739	0.0777	0.0812	0.0844
12						0.0107	0.0200	0.0284	0.0358	0.0424	0.0483	0.0537	0.0585	0.0629	0.0669	0.0706
13								0.0094	0.0178	0.0253	0.0320	0.0381	0.0435	0.0485	0.0530	0.0572
14										0.0084	0.0159	0.0227	0.0289	0.0344	0.0395	0.0441
15												0.0076	0.0144	0.0206	0.0262	0.0314
16														0.0068	0.0131	0.0187
17																0.0062

$i \backslash n$	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.4096	0.4068	0.4040	0.4015	0.3989	0.3964	0.3940	0.3917	0.3894	0.3872	0.3850	0.3830	0.3808	0.3789	0.3770	0.3751
2	0.2834	0.2813	0.2794	0.2774	0.2755	0.2737	0.2719	0.2701	0.2684	0.2667	0.2651	0.2635	0.2620	0.2604	0.2589	0.2574
3	0.2427	0.2415	0.2403	0.2391	0.2380	0.2368	0.2357	0.2345	0.2334	0.2323	0.2313	0.2302	0.2291	0.2281	0.2271	0.2260
4	0.2127	0.2121	0.2116	0.2110	0.2104	0.2098	0.2091	0.2085	0.2078	0.2072	0.2065	0.2058	0.2052	0.2045	0.2038	0.2032
5	0.1883	0.1883	0.1883	0.1881	0.1880	0.1878	0.1876	0.1874	0.1871	0.1868	0.1865	0.1862	0.1859	0.1855	0.1851	0.1847
6	0.1673	0.1678	0.1683	0.1686	0.1689	0.1691	0.1693	0.1694	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1695	0.1693	0.1692	0.1691
7	0.1487	0.1496	0.1505	0.1513	0.1520	0.1526	0.1531	0.1535	0.1539	0.1542	0.1545	0.1548	0.1550	0.1551	0.1553	0.1554
8	0.1317	0.1331	0.1344	0.1356	0.1366	0.1376	0.1384	0.1392	0.1398	0.1405	0.1410	0.1415	0.1420	0.1423	0.1427	0.1430
9	0.1160	0.1179	0.1196	0.1211	0.1225	0.1237	0.1249	0.1259	0.1269	0.1278	0.1286	0.1293	0.1300	0.1306	0.1312	0.1317
10	0.1013	0.1036	0.1056	0.1075	0.1092	0.1108	0.1123	0.1136	0.1149	0.1160	0.1170	0.1180	0.1189	0.1197	0.1205	0.1212
11	0.0873	0.0900	0.0924	0.0947	0.0967	0.0986	0.1004	0.1020	0.1035	0.1049	0.1062	0.1073	0.1085	0.1095	0.1105	0.1113
12	0.0739	0.0770	0.0798	0.0824	0.0848	0.0870	0.0891	0.0909	0.0927	0.0943	0.0959	0.0972	0.0986	0.0998	0.1010	0.1020
13	0.0610	0.0645	0.0677	0.0706	0.0733	0.0759	0.0782	0.0804	0.0824	0.0842	0.0860	0.0876	0.0892	0.0906	0.0919	0.0932
14	0.0484	0.0523	0.0559	0.0592	0.0622	0.0651	0.0677	0.0701	0.0724	0.0745	0.0765	0.0783	0.0801	0.0817	0.0832	0.0846
15	0.0361	0.0404	0.0444	0.0481	0.0515	0.0546	0.0575	0.0602	0.0628	0.0651	0.0673	0.0694	0.0713	0.0731	0.0748	0.0764
16	0.0239	0.0287	0.0331	0.0372	0.0409	0.0444	0.0476	0.0506	0.0534	0.0560	0.0584	0.0607	0.0628	0.0648	0.0667	0.0685
17	0.0119	0.0172	0.0220	0.0264	0.0305	0.0343	0.0379	0.0411	0.0442	0.0471	0.0497	0.0522	0.0546	0.0568	0.0588	0.0608
18		0.0057	0.0110	0.0158	0.0203	0.0244	0.0283	0.0318	0.0352	0.0383	0.0412	0.0439	0.0465	0.0489	0.0511	0.0532
19				0.0053	0.0101	0.0146	0.0188	0.0227	0.0263	0.0296	0.0328	0.0357	0.0385	0.0411	0.0436	0.0459
20						0.0049	0.0094	0.0136	0.0175	0.0211	0.0245	0.0277	0.0307	0.0335	0.0361	0.0386
21								0.0045	0.0087	0.0126	0.0163	0.0197	0.0229	0.0259	0.0288	0.0314
22										0.0042	0.0081	0.0118	0.0153	0.0185	0.0215	0.0244
23												0.0039	0.0076	0.0111	0.0143	0.0174
24														0.0037	0.0071	0.0104
25																0.0035

ที่มา: Shapiro S.S. and Wilk M.B. Biometrika, 1965, v.52, p.603.

ตารางผนวกที่ ก3 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ
แจกแจงปกติ 2 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม		ขนาดตัวอย่าง	ควอนไทล์ที่ 0.95	ควอนไทล์ที่ 0.90
1	0.3	20	77.1210	48.0069
0.3	1	30	71.0357	47.6447
		50	67.6146	46.4303
1	0.6	20	73.2246	46.0245
0.6	1	30	69.3128	45.2603
		50	63.4377	43.6548
1	0.9	20	72.2640	46.4400
0.9	1	30	69.0049	45.6706
		50	64.6682	44.5686

ตารางผนวกที่ ก4 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ
แจกแจงปกติ 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม			ขนาดตัวอย่าง	ควอนไทล์ที่ 0.95	ควอนไทล์ที่ 0.90
1	0.3	0.3	20	160.8392	113.3859
0.3	1	0.3	30	146.8789	107.9012
0.3	0.3	1	50	134.0195	101.3290
1	0.6	0.6	20	158.4294	109.3535
0.6	1	0.6	30	146.3631	104.3923
0.6	0.6	1	50	132.5978	100.4927
1	0.9	0.9	20	154.4133	108.9524
0.9	1	0.9	30	146.3530	103.5989
0.9	0.9	1	50	131.7322	99.4058
1	0.3	0.3	20	155.9561	110.3407
0.3	1	0.6	30	147.8931	106.9518
0.3	0.6	1	50	134.9641	100.4824
1	0.3	0.3	20	159.9558	111.3934
0.3	1	0.9	30	149.0520	107.3785
0.3	0.9	1	50	134.4757	100.9202
1	0.6	0.6	20	161.6813	112.3890
0.6	1	0.9	30	152.1025	108.2878
0.6	0.9	1	50	138.1303	102.6922
1	0.3	0.6	20	164.5226	113.1633
0.3	1	0.9	30	148.8410	108.0981
0.6	0.9	1	50	131.2143	100.6792

ตารางผนวกที่ ก5 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ
แจกแจงปกติ 4 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม				ขนาดตัวอย่าง	ควอนไทล์ที่ 0.95	ควอนไทล์ที่ 0.90
1	0.3	0.3	0.3	20	298.2553	216.4188
0.3	1	0.3	0.3	30	268.7970	202.3533
0.3	0.3	1	0.3	50	242.4996	190.5111
0.3	0.3	0.3	1			
1	0.6	0.6	0.6	20	287.3816	208.6053
0.6	1	0.6	0.6	30	263.1250	197.4450
0.6	0.6	1	0.6	50	235.2842	186.5615
0.6	0.6	0.6	1			
1	0.9	0.9	0.9	20	290.5006	210.6601
0.9	1	0.9	0.9	30	264.4477	198.2352
0.9	0.9	1	0.9	50	240.5798	188.4911
0.9	0.9	0.9	1			
1	0.3	0.3	0.3	20	288.0855	213.2758
0.3	1	0.6	0.6	30	262.6300	200.5916
0.3	0.6	1	0.6	50	236.7953	187.1133
0.3	0.6	0.6	1			
1	0.6	0.6	0.6	20	290.6592	212.8360
0.6	1	0.3	0.3	30	266.4274	199.5342
0.6	0.3	1	0.6	50	236.5643	186.6284
0.6	0.3	0.6	1			
1	0.6	0.6	0.6	20	293.9961	213.9188
0.6	1	0.6	0.6	30	264.2889	203.1208
0.6	0.6	1	0.3	50	240.3749	189.9412
0.6	0.6	0.3	1			

ตารางผนวกที่ ก5 (ต่อ)

เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม				ขนาดตัวอย่าง	ควอนไทล์ที่ 0.95	ควอนไทล์ที่ 0.90
1	0.3	0.3	0.3	20	289.7241	212.2870
0.3	1	0.9	0.9	30	264.0717	202.1889
0.3	0.9	1	0.9	50	236.4674	188.1344
0.3	0.9	0.9	1			
1	0.6	0.6	0.6	20	289.8601	208.2135
0.6	1	0.9	0.9	30	264.0389	200.3812
0.6	0.9	1	0.9	50	238.9288	190.8322
0.6	0.9	0.9	1			

ตารางผนวกที่ ก6 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ T ในการทดสอบการ
แจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

p	df	ควอนไทล์ที่ 0.95	ควอนไทล์ที่ 0.90
2	9	16.92	14.68
3	25	37.65	34.38
4	55	73.31	68.79
5	105	129.91	123.94
6	182	214.47	206.83
7	294	334.98	325.47

ที่มา: Mardia K. V. Biometrika, 1991, v.24, p.356.

ตารางผนวกที่ ก7 แสดงค่าควอนไทล์ที่ 0.95 และ 0.90 ของสถิติทดสอบ O ในการทดสอบการ
แจกแจงปกติหลายตัวแปร

p	n	ควอนไทล์ที่ 0.95	ควอนไทล์ที่ 0.90
2	30	0.8207	0.8045
	50	0.8216	0.8120
	70	0.8220	-
	100	0.8220	-
3	30	0.4443	0.4357
	50	0.4538	0.4487
	70	0.4580	-
	100	0.4610	-
4	30	0.2904	0.2849
	50	0.3035	0.3003
	70	0.3090	-
	100	0.3130	-
5	30	0.2087	0.2048
	50	0.2237	0.2213
	70	0.2300	-
	100	0.2340	-
6	30	0.1587	0.1557
	50	0.1745	0.1728
	70	0.1810	-
	100	0.1860	-

ที่มา: Charles L. Dunn. Communication in Statistics: Part A Theory and Method, 1995, v.24,
p.2548.

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างโปรแกรม SAS ที่ใช้ในงานวิจัย

ตัวอย่างโปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นโปรแกรม SAS ซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

1. โปรแกรมการจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงลอการิธึมหลายตัวแปร และการแจกแจงสทิวเดนท-ทีหลายตัวแปร
2. โปรแกรมการคำนวณค่าสถิติทดสอบ H , T และ O ในกรณีทราบค่าพารามิเตอร์ และไม่ทราบค่าพารามิเตอร์

การเขียนโปรแกรมต่างๆ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1 โปรแกรมการจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงลอการิธึม 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์

```
dm 'log' clear; dm 'output' clear;
proc iml;
  do i = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3, 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 1};
    mu = {0, 0, 0};
    sig_inv = inv(sigma);
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu), n, 1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed, n, p));
    xx = z*g+m;
    x = exp(xx);
    print x;
  end;
quit;
```

1.2 โปรแกรมการจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงสทิวเดนท-ที 3 ตัวแปร กรณีทราบค่าพารามิเตอร์

```
dm 'log' clear; dm 'output' clear;
proc iml;
  do i = 1 to 1000;
    call randseed(19);
    x = j(20, 3, .);
    call randgen(x, 'T', 20);
    print x;
  end;
quit;
```

```

dm 'log' clear; dm 'output' clear;

*****;
***** generate data for normal distribution 3 variables *****;
*****;

proc iml;
  do ii = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3, 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 1};
    mu = {0, 0, 0};
    sig_inv = inv(sigma);
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu), n, 1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed, n, p));
    y = z*g+m;

*****;
***** calculate H statistics for 3 variables *****;
*****;

    n = nrow(y);
    p = ncol(y);
    ybar = (1/n)*t(y)*j(n, 1, 1);
    q = i(n)-(1/n)*j(n, n, 1);
    s = (1/(n-1))*t(y)*q*y;
    s_inv = inv(sigma);
    ybar_t = t(mu);
    y_b = repeat(ybar_t, n, 1);
    if n=20 then a =
{0.4734, 0.3211, 0.2565, 0.2085, 0.1686, 0.1334, 0.1013, 0.0711, 0.0422, 0.0140, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n=30 then a =
{0.4254, 0.2944, 0.2487, 0.2148, 0.1870, 0.1630, 0.1415, 0.1219, 0.1036, 0.0862, 0.0697, 0.0537, 0.0381, 0.0227, 0.0076, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n=50 then a =
{0.3751, 0.2574, 0.2260, 0.2032, 0.1847, 0.1691, 0.1554, 0.1430, 0.1317, 0.1212, 0.1113, 0.1020, 0.0932, 0.0846, 0.0764, 0.0685, 0.0608, 0.0532, 0.0459, 0.0386, 0.0314, 0.0244, 0.0174, 0.0104, 0.0035, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n<=20 then x = log(n)-3;
    if 20<n<=2000 then x = log(n)-5;
    if 6<n<=20 then lamda = 0.118898+0.133414*x+0.327907*(x**2);
    if 20<n<=2000 then lamda = 0.480385+0.318828*x-
0.0241665*(x**3)+0.00879701*(x**4)+0.002989646*(x**5);
    if 6<n<=20 then lnmu = -0.37542-0.492145*x-1.124332*(x**2)-0.199422*(x**3);
    if 20<n<=2000 then lnmu = -1.91487-1.37888*x-0.04183209*(x**2)+0.1066339*(x**3)-
0.03513666*(x**4)-0.01504614*(x**5);
    if 6<n<=20 then lnsig = -3.15805+0.729399*x+3.01855*(x**2)+1.558776*(x**3);
    if 20<n<=2000 then lnsig = -3.73538-1.015807*x-0.331885*(x**2)+0.1773538*(x**3)-
0.01638782*(x**4)-0.03215018*(x**5)+0.003852646*(x**6);
    x1 = y[1:n, 1:1]-y_b[1:n, 1:1];
    x2 = y[1:n, 2:2]-y_b[1:n, 2:2];
    x3 = y[1:n, 3:3]-y_b[1:n, 3:3];
    x_1 = y[1:n, 1:1];
    x_2 = y[1:n, 2:2];
    x_3 = y[1:n, 3:3];
    x_11 = repeat(x_1, 1, 3);
    x_22 = repeat(x_2, 1, 3);
    x_33 = repeat(x_3, 1, 3);
    mu = exp(lnmu);
    sig = exp(lnsig);
    /*Y1=X1*/
    call sort(y, {1 3}, {3});
    av_1 = y[n:1, 1:1]-v[1:n, 1:1];

```

```

ay1 = a#ay_1;
say1 = sum(ay1[,]);
y_yb = y[1:n,1:1];
y_yb2 = y_yb##2;
sy_yb2 = sum(y_yb2[,]);
w1 = (say1**2)/sy_yb2;
u1 = (1-w1)**lamda;
z1 = (u1-mu)/sig;
k_1 = (1/2)*probnorm(-z1);
k_11 = inv(probnorm(k_1));
k1 = k_11**2;
/*b21*/
x12 = x1#x2;
sx12 = sum(x12[,]);
b_21 = sx12/sy_yb2;
/*Y2=X2-b21X1*/
y2 = x_22-(b_21)#(x_11);
y22 = y2[1:n,2:2];
sy2 = sum(y22[,]);
sy22 = repeat(sy2,n,1);
call sort (y2,{1 3},{3});
ay_2 = y2[n:1,2:2]-y2[1:n,2:2];
ay2 = a#ay_2;
say2 = sum(ay2[,]);
y2_22 = y2[1:n,2:2];
y2_2 = y2_22##2;
sy2_2 = sum(y2_2[,]);
/*W2*/
w2 = (say2**2)/sy2_2;
u2 = (1-w2)**lamda;
z2 = (u2-mu)/sig;
k_2 = (1/2)*probnorm(-z2);
k_22 = inv(probnorm(k_2));
k2 = k_22**2;
/*b31,b32*/
y_ybb = y[1:n,2:2];
y_ybb2 = y_ybb##2;
sy_ybb2 = sum(y_ybb2[,]);
x13 = x1#x3;
x23 = x2#x3;
sx13 = sum(x13[,]);
sx23 = sum(x23[,]);
b_31 = sx13/sy_yb2;
b_32 = sx23/sy_ybb2;
/*Y3=X3-b32X2-b31X1*/
y3 = x_33-(b_32)#(x_22)-(b_31)#(x_11);
y33 = y3[1:n,3:3];
sy3 = sum(y33[,]);
sy33 = repeat(sy3,n,1);
call sort (y3,{1 3},{3});
ay_3 = y3[n:1,3:3]-y3[1:n,3:3];
ay3 = a#ay_3;
say3 = sum(ay3[,]);
y3_22 = y3[1:n,3:3];
y3_2 = y3_22##2;
sy3_2 = sum(y3_2[,]);
/*W3*/
w3 = (say3**2)/sy3_2;
u3 = (1-w3)**lamda;
z3 = (u3-mu)/sig;
k_3 = (1/2)*probnorm(-z3);
k_33 = inv(probnorm(k_3));
k3 = k_33**2;
/*G*/
G = (k1+k2+k3)/p;
/*Compute Correlation Matrix*/
c1 = vecdiag(sigma);
c2 = 1/sqrt(c1);
c3 = diag(c2);
corr = diag(c2)*sigma*diag(c2);
/*cij=corr(ki,kj)*/
x = log(n);
new = 0.21364+0.015124*(x**2)-0.0018034*(x**3);

```

```

do i = 1 to p;
  do j = i+1 to p;
    corr_ij = corr[i:i,j:j];
    c_ij = ((abs(corr_ij))**lamda)*(1-(mu*(abs(corr_ij))*(1-
(abs(corr_ij))**mu)/new);
    count = count//c_ij;
    sum_c = sum(count[,]);
  end;
end;
/*e,H*/
e = p/(1+(p-1)*sum_c);
H = e*G;
print H;
end;
quit;

```

2.2 โปรแกรมคำนวณค่าสถิติทดสอบ H ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ ที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 3

```

dm 'log' clear; dm 'output' clear ;

*****
***** generate data for normal distribution 3 variables *****
*****

proc iml;
  do i = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3, 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 1};
    mu = {0, 0, 0};
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu), n, 1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed, n, p));
    y = z*g+m;

*****
***** calculate H statistics for 3 variables *****
*****

    n = nrow(y);
    p = ncol(y);
    y_bar = (1/n)*t(y)*j(n, 1, 1);
    q = i(n)-(1/n)*j(n, n, 1);
    s = (1/(n-1))*t(y)*q*y;
    s_inv = inv(s);
    ybar_t = t(y_bar);
    y_b = repeat(ybar_t, n, 1);
    if n=20 then a =
{0.4734, 0.3211, 0.2565, 0.2085, 0.1686, 0.1334, 0.1013, 0.0711, 0.0422, 0.0140, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n=30 then a =
{0.4254, 0.2944, 0.2487, 0.2148, 0.1870, 0.1630, 0.1415, 0.1219, 0.1036, 0.0862, 0.0697, 0.0537, 0.0381, 0.0227, 0.0076, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n=50 then a =
{0.3751, 0.2574, 0.2260, 0.2032, 0.1847, 0.1691, 0.1554, 0.1430, 0.1317, 0.1212, 0.1113, 0.1020, 0.0932, 0.0846, 0.0764, 0.0685, 0.0608, 0.0532, 0.0459, 0.0386, 0.0314, 0.0244, 0.0174, 0.0104, 0.0035, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n<=20 then x = log(n)-3;
    if 20<n<=2000 then x = log(n)-5;
    if 6<n<=20 then lamda = 0.118898+0.133414*x+0.327907*(x**2);
    if 20<n<=2000 then lamda = 0.480385+0.318828*x-
0.0241665*(x**3)+0.00879701*(x**4)+0.002989646*(x**5);
    if 6<n<=20 then lnmu = -0.37542-0.492145*x-1.124332*(x**2)-0.199422*(x**3);
    if 20<n<=2000 then lnmu = -1.91487-1.37888*x-0.04183209*(x**2)+0.1066339*(x**3)-
0.03513666*(x**4)-0.01504614*(x**5);
    if 6<n<=20 then lnsig = -3.15805+0.729399*x+3.01855*(x**2)+1.558776*(x**3);

```



```

if 20<n<=2000 then lnsig = -3.73538-1.015807*x-0.331885*(x**2)+0.1773538*(x**3)-
0.01638782*(x**4)-0.03215018*(x**5)+0.003852646*(x**6);
x1 = y[1:n,1:1]-y_b[1:n,1:1];
x2 = y[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
x3 = y[1:n,3:3]-y_b[1:n,3:3];
x_1 = y[1:n,1:1];
x_2 = y[1:n,2:2];
x_3 = y[1:n,3:3];
x_11 = repeat(x_1,1,3);
x_22 = repeat(x_2,1,3);
x_33 = repeat(x_3,1,3);
mu = exp(lnmu);
sig = exp(lnsig);
/*Y1=X1*/
call sort (y,{1 3},{3});
ay_1 = y[n:1,1:1]-y[1:n,1:1];
ay1 = a#ay_1;
say1 = sum(ay1[,]);
y_yb = y[1:n,1:1]-y_b[1:n,1:1];
y_yb2 = y_yb##2;
sy_yb2 = sum(y_yb2[,]);
w1 = (say1**2)/sy_yb2;
u1 = (1-w1)**lamda;
z1 = (u1-mu)/sig;
k_1 = (1/2)*probnorm(-z1);
k_11 = inv(probnorm(k_1));
k1 = k_11**2;
/*b21*/
x12 = x1#x2;
sx12 = sum(x12[,]);
b_21 = sx12/sy_yb2;
/*Y2=X2-b21X1*/
y2 = x_22-((b_21)#(x_11));
y22 = y2[1:n,2:2];
sy2 = sum(y22[,]);
sy22 = repeat(sy2,n,1);
call sort (y2,{1 3},{3});
ay_2 = y2[n:1,2:2]-y2[1:n,2:2];
ay2 = a#ay_2;
say2 = sum(ay2[,]);
y2_22 = y2[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
y2_2 = y2_22##2;
sy2_2 = sum(y2_2[,]);
/*W2*/
w2 = (say2**2)/sy2_2;
u2 = (1-w2)**lamda;
z2 = (u2-mu)/sig;
k_2 = (1/2)*probnorm(-z2);
k_22 = inv(probnorm(k_2));
k2 = k_22**2;
/*b31,b32*/
y_ybb = y[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
y_ybb2 = y_ybb##2;
sy_ybb2 = sum(y_ybb2[,]);
x13 = x1#x3;
x23 = x2#x3;
sx13 = sum(x13[,]);
sx23 = sum(x23[,]);
b_31 = sx13/sy_yb2;
b_32 = sx23/sy_ybb2;
/*Y3=X3-b32X2-b31X1*/
y3 = x_33-((b_32)#(x_22))-((b_31)#(x_11));
y33 = y3[1:n,3:3];
sy3 = sum(y33[,]);
sy33 = repeat(sy3,n,1);
call sort (y3,{1 3},{3});
ay_3 = y3[n:1,3:3]-y3[1:n,3:3];
ay3 = a#ay_3;
say3 = sum(ay3[,]);
y3_22 = y3[1:n,3:3]-y_b[1:n,3:3];
y3_2 = y3_22##2;
sy3_2 = sum(y3_2[,]);
/*W3*/

```

```

w3 = (say3**2)/sy3_2;
u3 = (1-w3)**lamda;
z3 = (u3-mu)/sig;
k_3 = (1/2)*probnorm(-z3);
k_33 = inv(probnorm(k_3));
k3 = k_33**2;
/*G*/
G = (k1+k2+k3)/p;
/*Compute Correlation Matrix*/
c1 = vecdiag(s);
c2 = 1/sqrt(c1);
c3 = diag(c2);
corr = diag(c2)*s*diag(c2);
/*cij=corr(ki,kj)*/
x = log(n);
new = 0.21364+0.015124*(x**2)-0.0018034*(x**3);
do ii = 1 to p;
  do j = ii+1 to p;
    corr_ij = corr[ii:ii,j:j];
    c_ij = ((abs(corr_ij))**lamda)*(1-(mu*(abs(corr_ij))*(1-
(abs(corr_ij))**mu))/new);
    count = count//c_ij;
    sum_c = sum(count[,]);
  end;
end;
/*e,H*/
e = p/(1+(p-1)*sum_c);
H = e*G;
print H;
end;
quit;

```

2.3 โปรแกรมคำนวณค่าสถิติทดสอบ H ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณี ทราบค่าพารามิเตอร์ ที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 4

```

dm 'log' clear; dm 'output' clear;

*****
***** generate data for normal distribution 4 variables *****
*****

proc iml;
  do ii = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3 0.3, 0.3 1 0.3 0.3, 0.3 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 0.3 1};
    mu = {0,0,0,0};
    sig_inv = inv(sigma);
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu),n,1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed,n,p));
    y = z*g+m;

*****
***** calculate H statistics for 4 variables *****
*****

    n = nrow(y);
    p = ncol(y);
    ybar = (1/n)*t(y)*j(n,1,1);
    q = i(n)-(1/n)*j(n,n,1);
    s = (1/(n-1))*t(y)*q*y;
    s_inv = inv(sigma);
    ybar_t = t(mu);
    y_b = repeat(ybar_t,n,1);

```

```

if n=20 then a =
{0.4734,0.3211,0.2565,0.2085,0.1686,0.1334,0.1013,0.0711,0.0422,0.0140,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
if n=30 then a =
{0.4254,0.2944,0.2487,0.2148,0.1870,0.1630,0.1415,0.1219,0.1036,0.0862,0.0697,0.0537,0.0381,0.0227,0.0076,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
if n=50 then a =
{0.3751,0.2574,0.2260,0.2032,0.1847,0.1691,0.1554,0.1430,0.1317,0.1212,0.1113,0.1020,0.0932,0.0846,0.0764,0.0685,0.0608,0.0532,0.0459,0.0386,0.0314,0.0244,0.0174,0.0104,0.0035,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
if n<=20 then x = log(n)-3;
if 20<n<=2000 then x = log(n)-5;
if 6<n<=20 then lamda = 0.118898+0.133414*x+0.327907*(x**2);
if 20<n<=2000 then lamda = 0.480385+0.318828*x-0.0241665*(x**3)+0.00879701*(x**4)+0.002989646*(x**5);
if 6<n<=20 then lnmu = -0.37542-0.492145*x-1.124332*(x**2)-0.199422*(x**3);
if 20<n<=2000 then lnmu = -1.91487-1.37888*x-0.04183209*(x**2)+0.1066339*(x**3)-0.03513666*(x**4)-0.01504614*(x**5);
if 6<n<=20 then lnsig = -3.15805+0.729399*x+3.01855*(x**2)+1.558776*(x**3);
if 20<n<=2000 then lnsig = -3.73538-1.015807*x-0.331885*(x**2)+0.1773538*(x**3)-0.01638782*(x**4)-0.03215018*(x**5)+0.003852646*(x**6);
x1 = y[1:n,1:1]-y_b[1:n,1:1];
x2 = y[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
x3 = y[1:n,3:3]-y_b[1:n,3:3];
x4 = y[1:n,4:4]-y_b[1:n,4:4];
x_1 = y[1:n,1:1];
x_2 = y[1:n,2:2];
x_3 = y[1:n,3:3];
x_4 = y[1:n,4:4];
x_11 = repeat(x_1,1,4);
x_22 = repeat(x_2,1,4);
x_33 = repeat(x_3,1,4);
x_44 = repeat(x_4,1,4);
mu = exp(lnmu);
sig = exp(lnsig);
/*Y1=X1*/
call sort (y,{1 4},{4});
ay_1 = y[n:1,1:1]-y[1:n,1:1];
ay1 = a#ay_1;
say1 = sum(ay1[,]);
y_yb = y[1:n,1:1];
y_yb2 = y_yb#2;
sy_yb2 = sum(y_yb2[,]);
w1 = (say1**2)/sy_yb2;
u1 = (1-w1)**lamda;
z1 = (u1-mu)/sig;
k_1 = (1/2)*probnorm(-z1);
k_11 = inv(probnorm(k_1));
k1 = k_11**2;
/*b21*/
x12 = x1#x2;
sx12 = sum(x12[,]);
b_21 = sx12/sy_yb2;
/*Y2=X2-b21X1*/
y2 = x_22-((b_21)#(x_11));
y22 = y2[1:n,2:2];
sy2 = sum(y22[,]);
sy22 = repeat(sy2,n,1);
call sort (y2,{1 4},{4});
ay_2 = y2[n:1,2:2]-y2[1:n,2:2];
ay2 = a#ay_2;
say2 = sum(ay2[,]);
y2_22 = y2[1:n,2:2];
y2_2 = y2_22#2;
sy2_2 = sum(y2_2[,]);
/*W2*/
w2 = (say2**2)/sy2_2;
u2 = (1-w2)**lamda;
z2 = (u2-mu)/sig;
k_2 = (1/2)*probnorm(-z2);
k_22 = inv(probnorm(k_2));
k2 = k_22**2;
/*b31,b32*/

```

```

y_ybb = y[1:n,2:2];
y_ybb2 = y_ybb##2;
sy_ybb2 = sum(y_ybb2[,]);
x13 = x1#x3;
x23 = x2#x3;
sx13 = sum(x13[,]);
sx23 = sum(x23[,]);
b_31 = sx13/sy_ybb2;
b_32 = sx23/sy_ybb2;
/*Y3=X3-b32X2-b31X1*/
y3 = x_33-((b_32)#(x_22))-((b_31)#(x_11));
y33 = y3[1:n,3:3];
sy3 = sum(y33[,]);
sy33 = repeat(sy3,n,1);
call sort (y3,{1 4},{4});
ay_3 = y3[n:1,3:3]-y3[1:n,3:3];
ay3 = a#ay_3;
say3 = sum(ay3[,]);
y3_22 = y3[1:n,3:3];
y3_2 = y3_22##2;
sy3_2 = sum(y3_2[,]);
/*W3*/
w3 = (say3**2)/sy3_2;
u3 = (1-w3)**lamda;
z3 = (u3-mu)/sig;
k_3 = (1/2)*probnorm(-z3);
k_33 = inv(probnorm(k_3));
k3 = k_33**2;
/*b41,b42,b43*/
y_ybbb = y[1:n,3:3];
y_ybbb2 = y_ybbb##2;
sy_ybbb2 = sum(y_ybbb2[,]);
x14 = x1#x4;
x24 = x2#x4;
x34 = x3#x4;
sx14 = sum(x14[,]);
sx24 = sum(x24[,]);
sx34 = sum(x34[,]);
b_41 = sx14/sy_ybb2;
b_42 = sx24/sy_ybbb2;
b_43 = sx34/sy_ybbb2;
/*Y4=X4-b43X3-b42X2-b41X1*/
y4 = x_44-((b_43)#(x_33))-((b_42)#(x_22))-((b_41)#(x_11));
y44 = y4[1:n,4:4];
sy4 = sum(y44[,]);
sy44 = repeat(sy4,n,1);
call sort (y4,{1 4},{4});
ay_4 = y4[n:1,4:4]-y4[1:n,4:4];
ay4 = a#ay_4;
say4 = sum(ay4[,]);
y4_22 = y4[1:n,4:4];
y4_2 = y4_22##2;
sy4_2 = sum(y4_2[,]);
/*W4*/
w4 = (say4**2)/sy4_2;
u4 = (1-w4)**lamda;
z4 = (u4-mu)/sig;
k_4 = (1/2)*probnorm(-z4);
k_44 = inv(probnorm(k_4));
k4 = k_44**2;
/*G*/
G = (k1+k2+k3+k4)/p;
/*Compute Correlation Matrix*/
c1 = vecdiag(sigma);
c2 = 1/sqrt(c1);
c3 = diag(c2);
corr = diag(c2)*sigma*diag(c2);
/*cij=corr(ki,kj)*/
x = log(n);
new = 0.21364+0.015124*(x**2)-0.0018034*(x**3);
do i = 1 to p;
  do j = i+1 to p;
    corr_ij = corr[i:i,j:j];

```

```

        c_ij = ((abs(corr_ij))**lamda)*(1-(mu*(abs(corr_ij))*(1-
(abs(corr_ij))**mu)/new);
        count = count//c_ij;
        sum_c = sum(count[,]);
    end;
end;
/*e,H*/
e = p/(1+(p-1)*sum_c);
H = e*G;
print H;
end;
quit;

```

2.4 โปรแกรมคำนวณค่าสถิติทดสอบ H ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ ที่มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 4

```

dm 'log' clear; dm 'output' clear ;

*****
***** generate data for normal distribution 4 variables *****
*****

proc iml;
do i = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3 0.3, 0.3 1 0.3 0.3, 0.3 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 0.3 1};
    mu = {0, 0, 0, 0};
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu), n, 1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed, n, p));
    y = z*g+m;

*****
***** calculate H statistics for 4 variables *****
*****

    n = nrow(y);
    p = ncol(y);
    y_bar = (1/n)*t(y)*j(n, 1);
    q = i(n)-(1/n)*j(n, n, 1);
    s = (1/(n-1))*t(y)*q*y;
    s_inv = inv(s);
    ybar_t = t(y_bar);
    y_b = repeat(ybar_t, n, 1);
    if n=20 then a =
{0.4734, 0.3211, 0.2565, 0.2085, 0.1686, 0.1334, 0.1013, 0.0711, 0.0422, 0.0140, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n=30 then a =
{0.4254, 0.2944, 0.2487, 0.2148, 0.1870, 0.1630, 0.1415, 0.1219, 0.1036, 0.0862, 0.0697, 0.0537, 0.0381, 0.0227, 0.0076, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n=50 then a =
{0.3751, 0.2574, 0.2260, 0.2032, 0.1847, 0.1691, 0.1554, 0.1430, 0.1317, 0.1212, 0.1113, 0.1020, 0.0932, 0.0846, 0.0764, 0.0685, 0.0608, 0.0532, 0.0459, 0.0386, 0.0314, 0.0244, 0.0174, 0.0104, 0.0035, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
    if n<=20 then x = log(n)-3;
    if 20<n<=2000 then x = log(n)-5;
    if 6<n<=20 then lamda = 0.118898+0.133414*x+0.327907*(x**2);
    if 20<n<=2000 then lamda = 0.480385+0.318828*x-0.0241665*(x**3)+0.00879701*(x**4)+0.002989646*(x**5);
    if 6<n<=20 then lnmu = -0.37542-0.492145*x-1.124332*(x**2)-0.199422*(x**3);
    if 20<n<=2000 then lnmu = -1.91487-1.37888*x-0.04183209*(x**2)+0.1066339*(x**3)-0.03513666*(x**4)-0.01504614*(x**5);
    if 6<n<=20 then lnsig = -3.15805+0.729399*x+3.01855*(x**2)+1.558776*(x**3);
    if 20<n<=2000 then lnsig = -3.73538-1.015807*x-0.331885*(x**2)+0.1773538*(x**3)-0.01638782*(x**4)-0.03215018*(x**5)+0.003852646*(x**6);
    x1 = y[1:n, 1:1]-y_b[1:n, 1:1];

```

```

x2 = y[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
x3 = y[1:n,3:3]-y_b[1:n,3:3];
x4 = y[1:n,4:4]-y_b[1:n,4:4];
x_1 = y[1:n,1:1];
x_2 = y[1:n,2:2];
x_3 = y[1:n,3:3];
x_4 = y[1:n,4:4];
x_11 = repeat(x_1,1,4);
x_22 = repeat(x_2,1,4);
x_33 = repeat(x_3,1,4);
x_44 = repeat(x_4,1,4);
mu = exp(lnmu);
sig = exp(lnsig);
/*Y1=X1*/
call sort (y,{1 4},{4});
ay_1 = y[n:1,1:1]-y[1:n,1:1];
ay1 = a#ay_1;
say1 = sum(ay1[,]);
y_yb = y[1:n,1:1]-y_b[1:n,1:1];
y_yb2 = y_yb##2;
sy_yb2 = sum(y_yb2[,]);
w1 = (say1**2)/sy_yb2;
u1 = (1-w1)**lamda;
z1 = (u1-mu)/sig;
k_1 = (1/2)*probnorm(-z1);
k_11 = inv(probnorm(k_1));
k1 = k_11**2;
/*b21*/
x12 = x1#x2;
sx12 = sum(x12[,]);
b_21 = sx12/sy_yb2;
/*Y2=X2-b21X1*/
y2 = x_22-((b_21)#(x_11));
y22 = y2[1:n,2:2];
sy2 = sum(y22[,]);
sy22 = repeat(sy2,n,1);
call sort (y2,{1 4},{4});
ay_2 = y2[n:1,2:2]-y2[1:n,2:2];
ay2 = a#ay_2;
say2 = sum(ay2[,]);
y2_22 = y2[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
y2_2 = y2_22##2;
sy2_2 = sum(y2_2[,]);
/*W2*/
w2 = (say2**2)/sy2_2;
u2 = (1-w2)**lamda;
z2 = (u2-mu)/sig;
k_2 = (1/2)*probnorm(-z2);
k_22 = inv(probnorm(k_2));
k2 = k_22**2;
/*b31,b32*/
y_ybb = y[1:n,2:2]-y_b[1:n,2:2];
y_ybb2 = y_ybb##2;
sy_ybb2 = sum(y_ybb2[,]);
x13 = x1#x3;
x23 = x2#x3;
sx13 = sum(x13[,]);
sx23 = sum(x23[,]);
b_31 = sx13/sy_yb2;
b_32 = sx23/sy_ybb2;
/*Y3=X3-b32X2-b31X1*/
y3 = x_33-((b_32)#(x_22))-((b_31)#(x_11));
y33 = y3[1:n,3:3];
sy3 = sum(y33[,]);
sy33 = repeat(sy3,n,1);
call sort (y3,{1 4},{4});
ay_3 = y3[n:1,3:3]-y3[1:n,3:3];
ay3 = a#ay_3;
say3 = sum(ay3[,]);
y3_22 = y3[1:n,3:3]-y_b[1:n,3:3];
y3_2 = y3_22##2;
sy3_2 = sum(y3_2[,]);
/*W3*/

```

```

w3 = (say3**2)/sy3_2;
u3 = (1-w3)**lamda;
z3 = (u3-mu)/sig;
k_3 = (1/2)*probnorm(-z3);
k_33 = inv(probnorm(k_3));
k3 = k_33**2;
/*b41,b42,b43*/
y_ybbb = y[1:n,3:3]-y_b[1:n,3:3];
y_ybbb2 = y_ybbb#2;
sy_ybbb2 = sum(y_ybbb2[,]);
x14 = x1#x4;
x24 = x2#x4;
x34 = x3#x4;
sx14 = sum(x14[,]);
sx24 = sum(x24[,]);
sx34 = sum(x34[,]);
b_41 = sx14/sy_yb2;
b_42 = sx24/sy_ybb2;
b_43 = sx34/sy_ybbb2;
/*Y4=X4-b43X3-b42X2-b41X1*/
y4 = x_44-((b_43)#(x_33))-((b_42)#(x_22))-((b_41)#(x_11));
y44 = y4[1:n,4:4];
sy4 = sum(y44[,]);
sy44 = repeat(sy4,n,1);
call sort (y4,{1 4},{4});
ay_4 = y4[n:1,4:4]-y4[1:n,4:4];
ay4 = a#ay_4;
say4 = sum(ay4[,]);
y4_22 = y4[1:n,4:4]-y_b[1:n,4:4];
y4_2 = y4_22#2;
sy4_2 = sum(y4_2[,]);
/*W4*/
w4 = (say4**2)/sy4_2;
u4 = (1-w4)**lamda;
z4 = (u4-mu)/sig;
k_4 = (1/2)*probnorm(-z4);
k_44 = inv(probnorm(k_4));
k4 = k_44**2;
/*G*/
G = (k1+k2+k3+k4)/p;
/*Compute Correlation Matrix*/
c1 = vecdiag(s);
c2 = 1/sqrt(c1);
c3 = diag(c2);
corr = diag(c2)*s*diag(c2);
/*cij=corr(ki,kj)*/
x = log(n);
new = 0.21364+0.015124*(x**2)-0.0018034*(x**3);
do ii = 1 to p;
  do j = ii+1 to p;
    corr_ij = corr[ii:ii,j:j];
    c_ij = ((abs(corr_ij))**lamda)*(1-(mu*(abs(corr_ij)))*((1-
(abs(corr_ij))**mu))/new);
    count = count//c_ij;
    sum_c = sum(count[,]);
  end;
end;
/*e,H*/
e = p/(1+(p-1)*sum_c);
H = e*G;
print H;
end;
quit;

```

2.5 โปรแกรมคำนวณค่าสถิติทดสอบ T ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณี ทราบค่าพารามิเตอร์

```
dm 'log' clear; dm 'output' clear;

*****
***** generate data for normal distribution 3 variables *****
*****

proc iml;
  do i = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3, 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 1};
    mu = {0,0,0};
    sig_inv = inv(sigma);
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu),n,1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed,n,p));
    x = z*g+m;

*****
***** calculate T statistics for 3 variables *****
*****

    n = nrow(x);
    p = ncol(x);
    xbar = (1/n)*t(x)*j(n,1,1);
    tx = t(x);
    nx_bar = mu#j(p,n,1);
    xx = tx-nx_bar;
    s_inv = inv(sigma);
    txx = t(xx);
    g_matrix = txx*s_inv*xx;
    betalhat = (sum(g_matrix#g_matrix#g_matrix))/(n*n);
    beta2hat = trace(g_matrix#g_matrix)/n;
    beta2qhat = (sum(g_matrix#g_matrix#g_matrix))/(n*n);
    t3 = n*betalhat/6;
    t4 = n*(beta2qhat-(6*beta2hat)+((3*p)*(p+2)))/24;
    t=t3+t4;
    print t;
  end;
quit;
```

2.6 โปรแกรมคำนวณค่าสถิติทดสอบ O ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปร กรณี ทราบค่าพารามิเตอร์

```
dm 'log' clear; dm 'output' clear;

*****
***** generate data for normal distribution 3 variables *****
*****

proc iml;
  do ii = 1 to 1000;
    seed = 19;
    n = 20;
    sigma = {1 0.3 0.3, 0.3 1 0.3, 0.3 0.3 1};
    mu = {0,0,0};
    p = nrow(sigma);
    m = repeat(t(mu),n,1);
    g = root(sigma);
    z = normal(repeat(seed,n,p));
```



```

x = z*g+m;

*****
***** calculate O statistics for 3 variables *****
*****

n = nrow(x);
p = ncol(x);
s_inv = inv(sigma);
s_inv1 = inv(root(sigma));
rs_inv = t(s_inv1);
tx = t(x);
nx_bar = mu#j(p,n,1);
xx = tx-nx_bar;
do i = 1 to n;
  xxx = xx[1:p,i:i];
  sxx = rs_inv*xxx;
  xsx = sqrt(t(xxx)*s_inv*xxx);
  d = sxx/xsx;
end;
do i = 1 to n-1;
  x1 = xx[1:p,i:i];
  sx1 = rs_inv*x1;
  xsx1 = sqrt(t(x1)*s_inv*x1);
  d_i=sx1/xsx1;
  do j = i+1 to n;
    x2 = xx[1:p,j:j];
    sx2 = rs_inv*x2;
    xsx2 = sqrt(t(x2)*s_inv*x2);
    d_j = sx2/xsx2;
    sv = arcos(t(d_i)*d_j);
    a = sv-(3.141592654/2);
    if a < 0 then aa = (sv-(3.141592654/2))**2;
    if a >= 0 then aa = 0;
    count = count//aa;
    suma = sum(count[,]);
  end;
end;
o = (4*suma)/(n*(n-1));
print o;
end;
quit;

```

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างข้อมูลจริงที่นำมาวิเคราะห์ด้วยสถิติทั้ง 3 วิธี คือ H, T และ O

ตัวอย่าง ข้อมูลตัวดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่ได้รับความอนุเคราะห์จากวิทยาลัยสิ่งแวดล้อม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ซึ่งเป็นข้อมูลที่เกิดจากการติดตามคุณภาพน้ำเสียที่ผ่านการบำบัดจากระบบบำบัดน้ำเสียของ โครงการศึกษาวิจัยและพัฒนาสิ่งแวดล้อมแหลมผักเบี้ยอันเนื่องมาจากพระราชดำริ ตำบลแหลมผักเบี้ย อำเภอบ้านแหลม จังหวัดเพชรบุรี ตั้งแต่เดือนตุลาคม พ.ศ. 2548 จนถึงเดือนมีนาคม พ.ศ. 2551 โดยการศึกษาติดตามประสิทธิภาพการบำบัดน้ำเสียของระบบบำบัด ซึ่งใช้เทคโนโลยีตามแนวพระราชดำริของ พระบาทสมเด็จพระเจ้าอยู่หัวฯ คือใช้วิธีธรรมชาติช่วยธรรมชาติในการบำบัดน้ำเสีย โดยในการศึกษาคุณภาพน้ำต้องมีการพิจารณาจากตัวดัชนีร่วมกัน ทั้งทางด้านกายภาพ เคมี และชีวภาพ รวมถึงสภาพสิ่งแวดล้อมขณะเก็บตัวอย่างน้ำ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์และแสดงถึงสถานภาพของคุณภาพของน้ำนั้นๆ โดยตัวดัชนีชี้วัดที่แสดงในตารางผนวกที่ ค1 เป็นตัวดัชนีชี้วัดเพียงบางส่วนของศึกษานี้ ซึ่งได้แก่ อุณหภูมิของน้ำ (Temperature) มีหน่วยเป็น $^{\circ}\text{C}$ ค่าออกซิเจนละลายน้ำ (DO: Dissolved Oxygen) มีหน่วยเป็น mg/l และค่าความสกปรกของน้ำในรูปของบีโอดี (BOD: Biochemical Oxygen Demand) มีหน่วยเป็น mg/l ซึ่งผู้วิจัยนำข้อมูลนี้มาเพื่อศึกษาว่าข้อมูลชุดนี้มาจากการที่มีการแจกแจงปกติ 3 ตัวแปรหรือไม่ โดยใช้แบบทดสอบที่ศึกษาในการวิจัยนี้ทั้ง 3 วิธี ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 กรณีไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ของประชากร ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีจำนวนตัวแปรเท่ากับ 3 ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30

ตารางผนวกที่ ค1 แสดงข้อมูลตัวดัชนีชี้วัดคุณภาพน้ำที่ผ่านการบำบัดแล้วจำนวน 30 ตัวอย่าง

i	Month & Year	Temperature (x_1)	DO (x_2)	BOD (x_3)
1	October 2005	30.6	7.5	7.5
2	November 2005	26.9	9.09	13
3	December 2005	29.4	4.8	14
4	January 2006	32.2	7.08	11
5	February 2006	29.5	6.75	16
6	March 2006	28.7	5.43	24
7	April 2006	31.4	4.5	30
8	May 2006	31.3	2.3	8.5
9	June 2006	32.7	6.9	14.5

ตารางผนวก ก1 (ต่อ)

i	Month & Year	Temperature (x_1)	DO (x_2)	BOD (x_3)
10	July 2006	29.8	6.71	13.25
11	August 2006	29.7	5.7	21.6
12	September 2006	30.3	4.32	16.67
13	October 2006	30.2	4.92	13.5
14	November 2006	27.7	3.8	11.75
15	December 2006	30.4	4.78	16
16	January 2007	24.7	5.62	9
17	February 2007	27.6	8.89	6
18	March 2007	29.8	7.1	21
19	April 2007	31.4	9.5	23.9
20	May 2007	31.7	8.12	12.3
21	June 2007	34.4	12.24	19
22	July 2007	32.6	6.71	19.3
23	August 2007	32.1	4.22	24.5
24	September 2007	32.7	3.11	20
25	October 2007	29.1	7.7	24
26	November 2007	26.9	3.84	10
27	December 2007	28	6.24	24.5
28	January 2008	25.9	4.9	32
29	February 2008	28.2	1.37	31.5
30	March 2008	27.5	5.34	39

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นางสาวเพ็ญแข สุพัฒน์ศักดิ์สกุล
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 21 กรกฎาคม 2518
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	พ.ศ.2540 วิทยาศาสตรบัณฑิต (สถิติ) มหาวิทยาลัยนเรศวร
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	เจ้าหน้าที่โครงการศึกษาวิจัยและพัฒนาสิ่งแวดล้อม แหลมผักเบี้ยอันเนื่องมาจากพระราชดำริ
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	วิทยาลัยสิ่งแวดล้อม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-