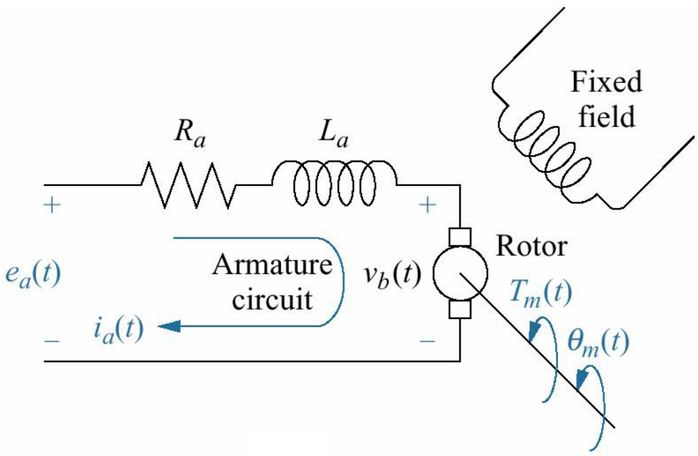
ทฤษฎีและความเข้าใจพื้นฐาน

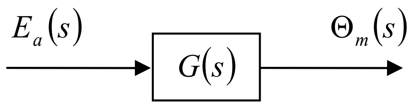
1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

ในส่วนนี้จะอธิบายเกี่ยวกับเรื่องการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง ซึ่งจะทำโดยใช้ความรู้และกฎทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ที่ได้มีการพัฒนามาแล้วมาใช้เขียนเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่หาขึ้นตามวิธีนี้ เราจะเรียกว่า Transfer Function ก็ได้

ตามที่ได้กล่าวมา มอเตอร์คืออุปกรณ์ที่สร้างการเคลื่อนที่ทางกลโดยใช้พลังงานไฟฟ้า เราจะหาค่าของ Transfer Function ของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยพิจารณาจากวงจรสมมูลแสดงในภาพที่ 5 และมี Block Diagram แสดงในภาพที่ 6



ภาพที่ 5 แสดงวงจรสมมูลของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง



ภาพที่ 6 แสดง Block Diagram ของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

จากภาพที่ 5 สนามแม่เหล็กถูกสร้างจากขดลวดเหนี่ยวนำโดยใช้ไฟฟ้ากระแสตรงขนาดคงที่ซึ่งเปรียบเสมือนแม่เหล็กถาวร ส่วนที่เคลื่อนที่ได้ของมอเตอร์เรียกว่าโรเตอร์จะประกอบด้วยขดลวดพันอยู่รอบๆเรียกขดลวดนี้ว่าขดลวดอาร์มาเจอร์ ในขดลวดนี้จะมีกระแส $i_a(t)$ ไหลอยู่ภายใน กระแสนี้จะวิ่งในขดลวดมีทิศทางตัดกับสนามแม่เหล็กที่สร้างจากแม่เหล็กถาวรทำให้เกิดแรงขึ้นตามสมการ

$$F = Bli_a(t) \tag{1}$$

เมื่อ B คือ ปริมาณความหนาแน่นของสนามแม่เหล็ก

l คือ ความยาวของขดลวด

ผลรวมของแรง F ทำให้เกิดเป็นแรงลัพธ์ของขดลวด แรงลัพธ์ดังกล่าวจะไปผลักให้โรเตอร์เกิดการเคลื่อนที่แบบหมุนต่อเนื่องกันไปก่อให้เกิดเป็นทอร์กของมอเตอร์ขึ้น

ภายในมอเตอร์ยังเกิดปรากฏการณ์อีกอย่างหนึ่งคือ ขณะเกิดการเคลื่อนที่ของโรเตอร์นั้นเปรียบเสมือนขดลวดอาร์มาเจอร์กำลังเคลื่อนที่ตัดกับสนามแม่เหล็กซึ่งจะก่อให้เกิดความต่างศักย์ขึ้นระหว่างปลายขดลวดมีความสัมพันธ์ตามสมการ

$$e = Blv \tag{2}$$

เมื่อ e คือ แรงดันไฟฟ้า

v คือ ความเร็วของขดลวด

เนื่องจากความเร็วของขดลวด v นี้จะมากหรือน้อยก็ขึ้นกับการหมุนของโรเตอร์ซึ่งขึ้นกับกระแส $i_a(t)$ ที่ไหลอยู่ภายในขดลวดอาร์มาเจอร์ ดังนั้นจากภาพที่ 5 และสมการ (2) สามารถสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $v_b(t)$ กับ $\theta_m(t)$ ได้คือ

$$v_b(t) = K_b\omega_m(t) = K_b\frac{d\theta_m(t)}{dt} \tag{3}$$

เมื่อ $v_b(t)$ คือ แรงดันที่เกิดขึ้นภายในขดลวดอาร์มาเจอร์หรือเรียกว่า Back Electromotive Force (Back emf)

$K_b(t)$ คือ ค่าคงที่ของ back emf

$\omega_m(t)$ คือ ความเร็วเชิงมุมของขดลวดอาร์มาเจอร์หรือความเร็วเชิงมุมของโรเตอร์

$\theta_m(t)$ คือ การกระจัดเชิงมุมของขดลวดอาร์มาเจอร์

เราสามารถหา Transfer Function ของระบบมอเตอร์ได้โดยเริ่มต้นจากการหา Laplace Transform ของสมการต่างๆแล้วนำไปแทนค่าตัวแปรระหว่างกันแสดงดังนี้ จากสมการ (3) สามารถหา Laplace Transformได้ดังนี้

$$V_b(s) = K_b s \Theta_m(s) \tag{4}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสภายในขดลวดอามาเจอร์ $i_a(t)$, แรงดันไฟฟ้าที่ใส่ให้กับขดลวดอาร์มาเจอร์ $e_a(t)$ และแรงดันที่เกิดขึ้นภายในขดลวดอาร์มาเจอร์ (back emf) $v_b(t)$ มีความสัมพันธ์กันตามกฎของ Kurchoff ดังนี้

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) = e_a(t) \tag{5}$$

เมื่อ R_a คือ ค่าความต้านทานของขดลวดอาร์มาเจอร์

L_a คือ ค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดอาร์มาเจอร์

จากสมการ (5) สามารถหา Laplace Transform ได้ดังนี้

$$R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + V_b(s) = E_a(s) \tag{6}$$

ทอร์กที่เกิดขึ้นมีความสัมพันธ์กับกระแสที่ไหลภายในขดลวดอามาเจอร์แสดงความสัมพันธ์หลังจากทำ Laplace Transform แล้วได้ผลดังนี้

$$T_m(s) = K_t I_a(s) \tag{7}$$

เมื่อ $T_m(s)$ คือ ทอร์กที่เกิดขึ้นภายในมอเตอร์

K_t คือ ค่าคงที่ของทอร์ก

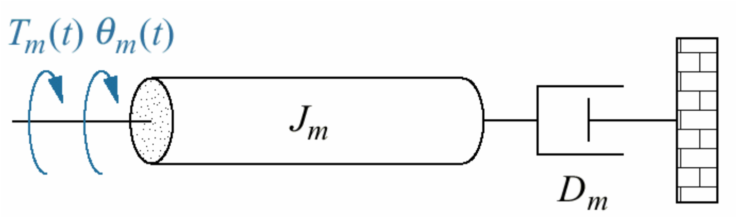
ค่า K_t นี้จะมากหรือน้อยขึ้นกับความแรงของสนามแม่เหล็กของแม่เหล็กถาวร เราสามารถปรับเปลี่ยนสมการ (7) ได้ผลดังนี้

$$I_a(s)=\frac{1}{K_t}T_m(s) \tag{8}$$

เพื่อที่จะหา Transfer Function ให้นำสมการ (8) ไปแทนค่าในสมการ (6) ได้ผลดังนี้

$$\frac{(R_a+L_a s)T_m(s)}{K_t}+K_b s\Theta_m(s)=E_a(s) \tag{9}$$

เนื่องจาก Transfer Function ที่เรากำลังจะหานี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Theta_m(s)$ และ $E_a(s)$ ดังนั้นเราต้องเขียน $T_m(s)$ ให้อยู่ในรูปของ $\Theta_m(s)$ ให้ได้ก่อน



ภาพที่ 7 รูปสมมูลภาระโหลดทางกลที่ต่อเชื่อมกับมอเตอร์

จากภาพที่ 7 แสดงรูปสมมูลภาระทางการกลที่ต่อเชื่อมกับมอเตอร์ J_m คือ Inertia ของโรเตอร์ D_m คือค่า Damping ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้สมการดังนี้

$$T_m(s)=\left(J_m s^2+D_m s\right)\Theta_m s \tag{10}$$

แทนค่าสมการ (10) ในสมการ (9) ได้ผลคือ

$$\frac{(R_a + L_a s)(J_m s^2 + D_m s)\Theta_m(s)}{K_t} + K_b s\Theta_m(s) = E_a(s) \tag{11}$$

สำหรับมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงส่วนใหญ่ค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดอาร์มาเจอร์ L_a จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าความต้านทานของขดลวดอาร์มาเจอร์ R_a จึงประมาณให้ L_a มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการ (11) จะได้เป็น

$$\left[\frac{R_a}{K_t}(J_m s + D_m) + K_b\right]s\Theta_m(s) = E_a(s) \tag{12}$$

สามารถย้ายข้างสมการเพื่อหา Transfer Function $\Theta_m(s)/E_a(s)$ ได้ดังนี้

$$G(s) = \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{\dfrac{K_t}{R_a J_m}}{s\left[s + \dfrac{1}{J_m}\left(D_m + \dfrac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} \tag{13}$$

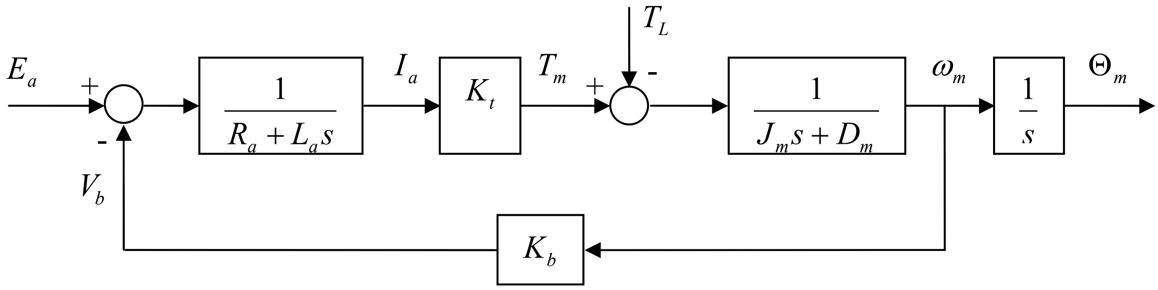
เพื่อความสะดวกจึงทำการเปลี่ยนตัวแปรจะได้

$$G(s) = \frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s(s+\alpha)} = G(s) \tag{14}$$

เมื่อ $K = \dfrac{K_t}{R_a J_m}$

$\alpha = \dfrac{1}{J_m}\left(D_m + \dfrac{K_t K_b}{R_a}\right)$

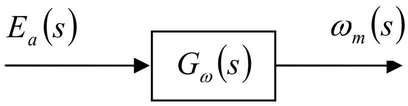
สมการ (14) เราเรียกว่า Transfer Function จาก $E_a(s)$ ไป $\Theta_m(s)$ ของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง เนื่องจากในบางครั้งถ้าเรามอง Transfer Function ของระบบ ให้อยู่ในรูปของ Block Diagram ที่แสดงรายละเอียดแยกย่อยออกมาก็อาจจะทำให้สะดวกในการทำความเข้าใจได้มากขึ้น เช่นในกรณีนี้เราสามารถเขียน Block Diagram ได้โดยตรงจากภาพที่ 5 เลย Block Diagram ที่ได้แสดงตามภาพที่ 8



ภาพที่ 8 Block Diagram แสดงรายละเอียดของ $G(s)$

จาก Transfer Function ของระบบมอเตอร์กระแสตรงเราจะเห็นว่าระบบดังกล่าวเป็นระบบเชิงเส้นกำลังสอง (Second-Order Linear System) มี Pole ของระบบ 2 ตัวอยู่ที่ตำแหน่ง 0 และ $-\alpha$ ตามลำดับ ข้อสังเกตเพิ่มเติมคือ ถ้าค่า L_a มีค่ามากเมื่อเทียบกับค่าความต้านทานของขดลวดอาร์มาเจอร์ R_a จนทำเราไม่สามารถประมาณค่า L_a ให้เท่ากับศูนย์ได้จะทำให้ Transfer Function ของระบบมอเตอร์กระแสตรงเป็นระบบกำลังสาม (Third-Order System)

ในงานวิจัยนี้จะทำการระบุเอกลักษณ์ของระบบมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตเป็นความต่างศักย์ $e_a(t)$ และสัญญาณเอาท์พุตเป็นความเร็วเชิงมุม $\omega_m(t)$ แสดงความสัมพันธ์ได้ดังรูป



ภาพที่ 9 แสดง Block Diagram ของระบบ

เราสามารถหา Transfer Function ได้โดยใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\omega_m(t) &= \frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}_m(t) \\
\omega_m(s) &= s\Theta_m(s)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

จากสมการ (15) จะได้ Transfer Function ดังนี้

$$G_{\omega}(s) = \frac{\omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s+\alpha} \tag{16}$$

จากสมการ (16) แสดง Transfer Function ของระบบมอเตอร์กระแสตรงเราจะเห็นว่าระบบดังกล่าวเป็นระบบกำลังหนึ่ง (First-Order System) มี Pole อยู่ที่ตำแหน่ง $-\alpha$ และจะเห็นได้ชัดว่า ถ้าค่า L_a มีค่ามากเมื่อเทียบกับค่าความต้านทานของขดลวดอาร์มาเจอร์ R_a ก็จะทำให้ Transfer Function ของระบบมอเตอร์กระแสตรงเป็นระบบกำลังสอง (Second-Order System)

พิจารณาแสดง Transfer Function ของระบบมอเตอร์กระแสตรงที่เป็นกำลังหนึ่ง มีตำแหน่งของ Pole ของระบบคือ $-\alpha$ เมื่อพิจารณาที่มาของ α จะเห็นว่าตัวแปรที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้จะมีผลให้ Pole ของระบบเปลี่ยนแปลงก็คือค่าของ J_m ซึ่งจะมีค่าแปรผันตรงกับน้ำหนักของโหลดที่ต่อเข้ากับแกนโรเตอร์ของมอเตอร์รวมกับน้ำหนักของแกนโรเตอร์เอง เมื่อ J_m มีค่ามากจะทำให้ Pole ของระบบอยู่ใกล้แกน $j\omega$ มากกว่าเมื่อ J_m มีค่าน้อย เมื่อ Pole ของระบบอยู่ใกล้แกน $j\omega$ มากก็จะทำให้ระบบมีผลตอบสนองลดลงกับค่าความถี่สูง นั่นหมายความว่าความเร็วของระบบที่จะพาตัวเองเข้าสู่ Set Point จะมีค่าลดลงหรือเรียกว่าจะใช้เวลามากขึ้น ถ้าเรามองในทางปฏิบัติ กรณีที่ J_m มีค่าน้อยก็แสดงว่าโรเตอร์ของมอเตอร์ของเรายังไม่ได้ต่อเข้ากับโหลดใดๆก็ย่อมจะควบคุมความเร็วของโรเตอร์ได้ง่ายกว่าเมื่อต่อเข้าไปกับโหลดแล้ว ยิ่งถ้าโหลดมีน้ำหนักมากคือ J_m มีค่ามากก็จะทำให้การควบคุมให้ระบบเข้าสู่ Set Point ก็ยิ่งทำได้ยากซึ่งก็เป็นไปในแนวทางเดียวกันกับทางทฤษฎี

2. <u>ผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบ</u>

เมื่อกล่าวถึงการหาผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบมักจะหมายถึงการใส่สัญญาณอินพุตชนิด Step ในโดเมนของเวลาให้กับระบบแล้วดูสัญญาณเอาท์พุตที่เกิดขึ้นในโดเมนของเวลาเรียกเอาท์พุตที่เกิดขึ้นนี้ว่า “ผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบ” หรือ “Step Response” ก็ได้ ผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบที่เกิดขึ้นเกิดมาจากผลตอบสนอง 2 ชนิดรวมกันคือ Forced Response และ Natural Response Forced Response จะมีผลให้เห็นได้ชัดในขณะที่ระบบเข้าสู่สภาวะ Steady State แล้ว และ Natural Response จะมีผลในขณะที่ระบบอยู่ในภาวะ Transient โดยทั่วไปแล้วเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะ Steady State แล้วจะเกิดเอาท์พุตที่เป็นค่าคงตัวคงที่ต่อเนื่องต่อไปซึ่งไม่ยากที่จะเข้าใจ แต่ในภาวะที่ระบบอยู่ในสภาวะ Transient สภาวะนี้จะเกิดการเปลี่ยนแปลงค่าเอาท์พุตอยู่ตลอดเวลา การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจะมีรูปแบบใดก็ขึ้นกับคุณสมบัติของระบบ ดังนั้นในการศึกษาผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบจะมุ่งเน้นไปในการศึกษาคุณสมบัติของระบบที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรภายในของระบบ

การศึกษาผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบสามารถทำได้โดยการแก้หาผลเฉลยของสมการผลต่างของระบบที่ถูกกระตุ้นโดยใช้สัญญาณอินพุตที่เป็น Step แล้วทำการวิเคราะห์ผลเฉลยดังกล่าว ในการศึกษาในวิชาควบคุมเราจะใช้ Transfer Function เป็นตัวแทนระบบซึ่งอยู่ในรูปของ Laplace Transform ทำให้เมื่อเราต้องการรู้ผลตอบสนองของระบบเราจึงต้องหา Inverse Laplace Transform ซึ่งอาจจะไม่สะดวกในการวิเคราะห์ที่ต้องการความรวดเร็ว ดังนั้นในทางปฏิบัติเราจะเริ่มศึกษาการศึกษาผลตอบสนองโดยดูจากการเปลี่ยนแปลงค่าภายใน Transfer Function โดยตรง ซึ่งภายใน Transfer Function จะมีค่าตัวแปรภายในที่เราต้องรู้จักดังนี้

- Pole ของ Transfer Function คือ ค่าของตัวแปรของ Laplace Transform s ที่ทำให้ Transfer Function มีค่าเท่ากับ Infinity หรือคือค่า Common Root ของตัวส่วนของ Transfer Function

- Zero ของ Transfer Function คือ ค่าของตัวแปรของ Laplace Transform s ที่ทำให้ Transfer Function มีค่าเท่ากับ 0 หรือคือค่า Common Root ของตัวเศษของ Transfer Function

การเปลี่ยนแปลงค่า Pole และ Zero ของระบบจะทำให้ผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบเปลี่ยนไป ผลตอบสนองนี้จะเปลี่ยนแปลงในรูปแบบใดก็ขึ้นกับ Order ของระบบด้วย เราจะศึกษาเฉพาะผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังหนึ่งและผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังสองเท่านั้น สำหรับระบบที่มีกำลังสูงกว่ากำลังสองจะมีผลตอบสนองทางด้านเวลาคล้ายกันกับระบบกำลังสองจึงมักจะประมาณเป็นระบบกำลังสองได้

2.1 ผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังหนึ่ง

ในการศึกษานี้จะสมมติให้ระบบกำลังหนึ่งเป็นแบบไม่มี Zero เนื่องจาก Zero ของระบบกำลังหนึ่งมีผลต่อผลตอบสนองของระบบในเรื่องของขนาดของสัญญาณเท่านั้นแต่ไม่มีผลต่อผลตอบสนองของระบบในเรื่องของรูปแบบของสัญญาณ (Norman S. Nise, 2004: 177) สมมติให้ Transfer Function ของระบบกำลังหนึ่งเป็นแบบไม่มี Zero $G(s)$ แสดงได้ดังนี้

$$G(s)=\frac{Ka}{s+a} \tag{17}$$

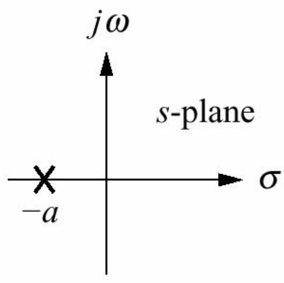
เมื่อระบบ $G(s)$ ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณอินพุตที่เป็น Step $R(s)=r/s$ โดย r คือขนาดของ Step ดังนั้นจะได้ผลตอบสนอง $C(s)$ แสดงได้ตามสมการนี้

$$C(s)=R(s)G(s)=\frac{rKa}{s(s+a)} \tag{18}$$

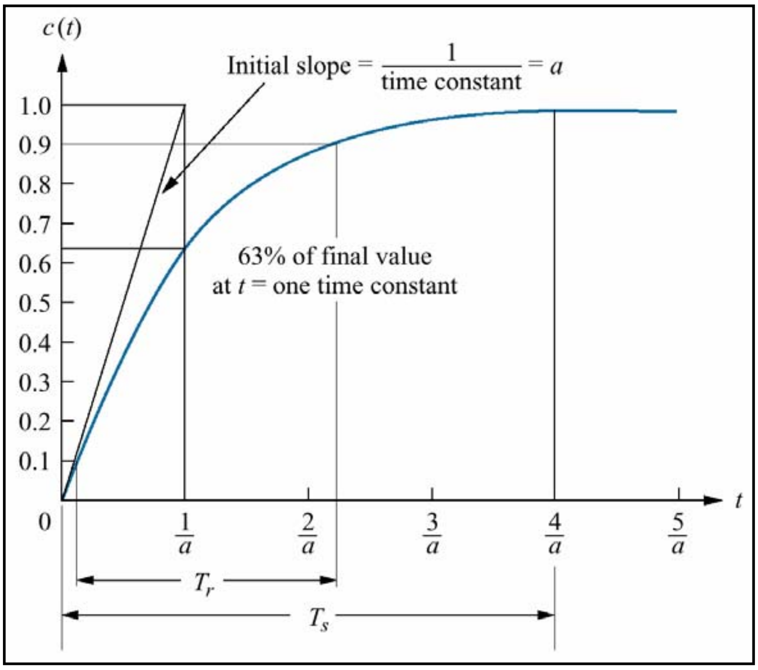
เราสามารถหาผลตอบสนองทางด้านเวลาได้โดยการทำ Inverse Laplace Transform ได้ผลดังนี้

$$c(t)=c_f(t)+c_n(t)=rKa-rKae^{-at} \tag{19}$$

จะเห็นว่า Pole ของสัญญาณอินพุต Unit Step คือ 0 เป็นตัวทำให้เกิดผลตอบสนองที่เรียกว่า Force Response $c_f(t)=rKa$ และ Pole ของระบบคือ $-a$ แสดงในภาพที่ 10 เป็นตัวทำให้เกิดผลตอบสนองที่เรียกว่า Natural Response $c_n(t)=-rKae^{-at}$ ผลรวมของผลตอบสนอง 2 ชนิดนี้คือ $c(t)$ ซึ่งจะมีการเปลี่ยนแปลงตามภาพที่ 11



ภาพที่ 10 แสดง Pole ของระบบกำลังหนึ่ง



ภาพที่ 11 แสดงผลตอบสนองของระบบกำลังหนึ่ง

จากสมการ (19) เมื่อพิจารณาระบบเข้าสู่สภาวะ Steady State คือที่ $t \to \infty$ แสดงได้ดังนี้

$$c(\infty) = c_f(\infty) + c_n(\infty) \tag{20}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} c_f(\infty) &= rKa \\ c_n(\infty) &= rKae^{-a\cdot\infty} = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

ดังนั้น

$$c(\infty) = c_f(\infty) \tag{22}$$

นั่นหมายความว่าเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะ Steady State ผลตอบสนองทางด้านเวลาที่ได้จะมาจาก Force Response เท่านั้น

จากภาพที่ 11 แสดงการเปลี่ยนแปลงของผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังหนึ่ง เราจะพบว่าการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะมีรูปแบบใดก็ขึ้นอยู่กับค่าของ a หรือเรียกว่าขึ้นอยู่กับตำแหน่ง Pole ของระบบนั่นเอง นั่นแสดงว่าระบบกำลังหนึ่งที่มีตำแหน่งของ Pole ต่างกันก็จะมีคุณสมบัติของระบบต่างกัน เราจึงกำหนดวิธีบอกคุณสมบัติของระบบกำลังหนึ่งโดยดูจากค่าต่างๆ 3 ชนิดดังนี้

1. Time Constant คือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้เอาท์พุตของระบบมีค่าเท่ากับ 63% ของของค่าเอาท์พุตที่ Steady State สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{gathered} c(t) = rKa - rKae^{-at} = rKa \times \frac{63}{100} \\ t = \frac{1}{a} \end{gathered} \tag{24}$$

เราจะเรียก $1/a$ นี้ว่า Time Constant ของผลตอบสนองของระบบซึ่งค่านี้จะเป็นค่าที่ทำให้ e^{-at} มีค่าลงลดเหลือ 37% เช่นกัน

2. Rise Time, T_r คือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้เอาท์พุตของระบบเปลี่ยนแปลงจาก 0.1 ถึง 0.9 ของค่าเอาท์พุตที่ Steady State แสดงได้ตามภาพที่ 11 หรือในอีกความหมายหนึ่งคือค่าเวลาที่ใช้ระหว่างการเปลี่ยนแปลงค่าเอาท์พุตของระบบจาก 10% ถึง 90% สามารถหาได้ดังนี้

$$T_r = \frac{2.2}{a} \tag{25}$$

3. Settling Time, T_s คือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้เอาท์พุตของระบบมีค่าอยู่ใน 2% ของค่าเอาท์พุตที่ Steady State แสดงได้ตามภาพที่ 11 หรือในอีกความหมายหนึ่งคือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้ค่าเอาท์พุตของระบบมีค่าความคลาดเคลื่อน Steady State ไม่เกิน 2% สามารถหาได้ดังนี้

$$T_s = \frac{4}{a} \tag{26}$$

จากสมการ (24), สมการ (25) และสมการ (26) จะเห็นได้ว่าค่า Time constant, T_r , และ T_s จะเปลี่ยนแปลงไปในรูปแบบใดก็ขึ้นอยู่กับตัวแปร a นั่นก็คือขึ้นอยู่กับค่า Pole ของระบบ ซึ่งเป็นคุณสมบัติเฉพาะของระบบนั้นๆ ดังนั้นเราจึงใช้ค่า 3 ชนิดนี้จะเป็นตัวแปรที่ใช้เป็นตัวอธิบายคุณสมบัติของระบบกำลังหนึ่งในสภาวะ Transient เพื่อที่ให้ผู้ออกแบบตัวควบคุมสามารถรู้ถึงการเปลี่ยนแปลงที่จะเกิดขึ้นต่อระบบเมื่อใส่ตัวควบคุมเพิ่มเข้าไปในระบบ

จากการศึกษาผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังหนึ่งจะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงค่า Pole ของระบบกำลังหนึ่งจะทำให้ระบบกำลังหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงผลตอบสนองในเรื่องของความเร็วของสัญญาณเท่านั้นแต่ไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงผลตอบสนองในเรื่องของรูปแบบของลักษณะสัญญาณ

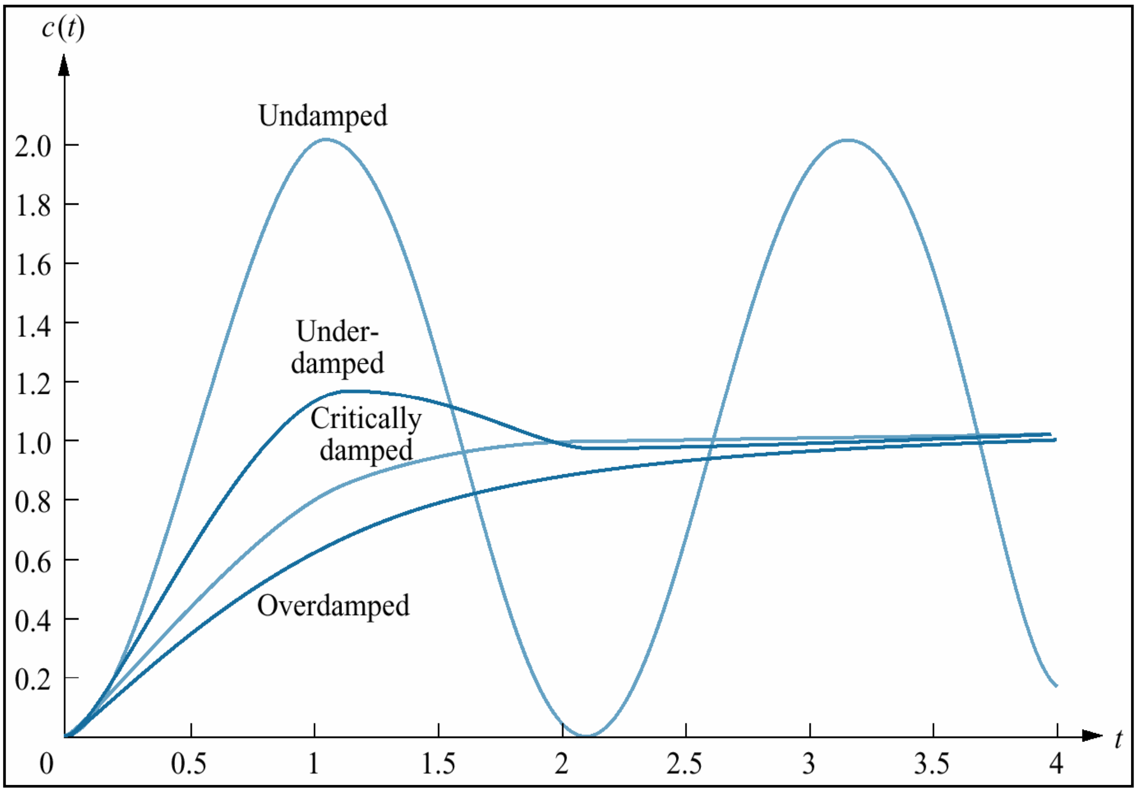
2.2 ผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังสอง

ในหัวข้อนี้เราจะทำการใช้การเปลี่ยนแปลงค่า Pole และ Zero ของระบบมาเป็นตัวแปรที่จะดูการเปลี่ยนแปลงผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบที่จะเปลี่ยนไป การเปลี่ยนแปลงผลตอบสนองทางด้านเวลาของระบบกำลังสองจะมีความซับซ้อนมากกว่าระบบกำลังหนึ่งตรงที่เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่า Pole และ Zero ของระบบกำลังสองจะทำให้ผลตอบสนองที่เกิดขึ้นมีการเปลี่ยนแปลงในเรื่องของความเร็วของสัญญาณและมีการเปลี่ยนแปลงในเรื่องของรูปแบบของลักษณะสัญญาณด้วย (Norman S. Nise, 2004: 186) ซึ่งสามารถสรุปได้ใจความดังนี้

เริ่มต้นที่การศึกษาการเปลี่ยนแปลงผลตอบสนองของระบบกำลังสองที่ยังไม่มี Zero $G(s)$ ก่อน แสดง Transfer Function ของระบบกำลังสองได้ตามสมการดังนี้

$$G(s)=\frac{Kb}{s^2+as+b} \tag{27}$$

ในระบบกำลังสองจะมีค่า Pole 2 ค่าซึ่งก็คือค่ารากของสมการตัวส่วนของ Transfer Function ตัวแปร a และ b ที่เปลี่ยนแปลงจะทำให้ค่า Pole ของระบบเปลี่ยนแปลงไปซึ่งการเปลี่ยนแปลง Pole ของระบบนี้จะทำให้เกิดสภาวะ Transient ที่ต่างกัน 4 รูปแบบเมื่อระบบ $G(s)$ ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณอินพุตที่เป็น Step $R(s)=r/s$ โดย r คือขนาดของ Step ดังนั้นจะได้ผลตอบสนอง $C(s)$ แสดงได้ตามสมการ (28) และแสดงผลตอบสนองที่ต่างกันได้ตามภาพที่ 12



ภาพที่ 12 แสดงผลตอบสนองของระบบกำลังสองที่ตำแหน่งของ Pole มีค่าต่างๆ

$$C(s)=R(s)G(s)=\frac{rKb}{s\left(s^2+as+b\right)} \tag{28}$$

ผลตอบสนองที่เกิดขึ้นจะมีรูปแบบต่างๆกันขึ้นกับค่าของ Pole ของระบบกำลังสอง ซึ่งจะแบ่งได้ 4 แบบดังนี้

1. เกิดผลตอบสนองแบบ Overdamped เมื่อ Pole ของระบบทั้ง 2 ตัวมีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าต่างกันคือ $-\sigma_1$ และ $-\sigma_2$ ซึ่งจะทำให้ผลตอบสนองมีค่าเป็นไปตามสมการดังนี้

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 e^{-\sigma_2 t} \tag{29}$$

2. เกิดผลตอบสนองแบบ Underdamped เมื่อ Pole ของระบบทั้ง 2 ตัวมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $-\sigma_d \pm j\omega_d$ ซึ่งจะทำให้ผลตอบสนองมีค่าเป็นไปตามสมการดังนี้

$$c(t) = Ae^{-\sigma_d t}\cos(\omega_d t - \phi) \tag{30}$$

3. เกิดผลตอบสนองแบบ Undamped เมื่อ Pole ของระบบทั้ง 2 ตัวมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีเฉพาะส่วนที่เป็นเชิงซ้อนคือ $\pm j\omega_1$ ซึ่งจะทำให้ผลตอบสนองมีค่าเป็นไปตามสมการดังนี้

$$c(t) = A\cos(\omega_1 t - \phi) \tag{31}$$

4. เกิดผลตอบสนองแบบ Critically Damped เมื่อ Pole ของระบบทั้ง 2 ตัวมีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากันคือ $-\sigma_1$ ซึ่งจะทำให้ผลตอบสนองมีค่าเป็นไปตามสมการดังนี้

$$c(t) = K_1 e^{-\sigma_1 t} + K_2 t e^{-\sigma_1 t} \tag{32}$$

เราจะเขียนระบบกำลังสองในรูปแบบทั่วไปโดยใช้ตัวแปร ζ (Damping Ratio) และ ω_n มาแทนได้ กำหนดค่า

$$b = \omega_n^2$$
$$a = \zeta\omega_n$$

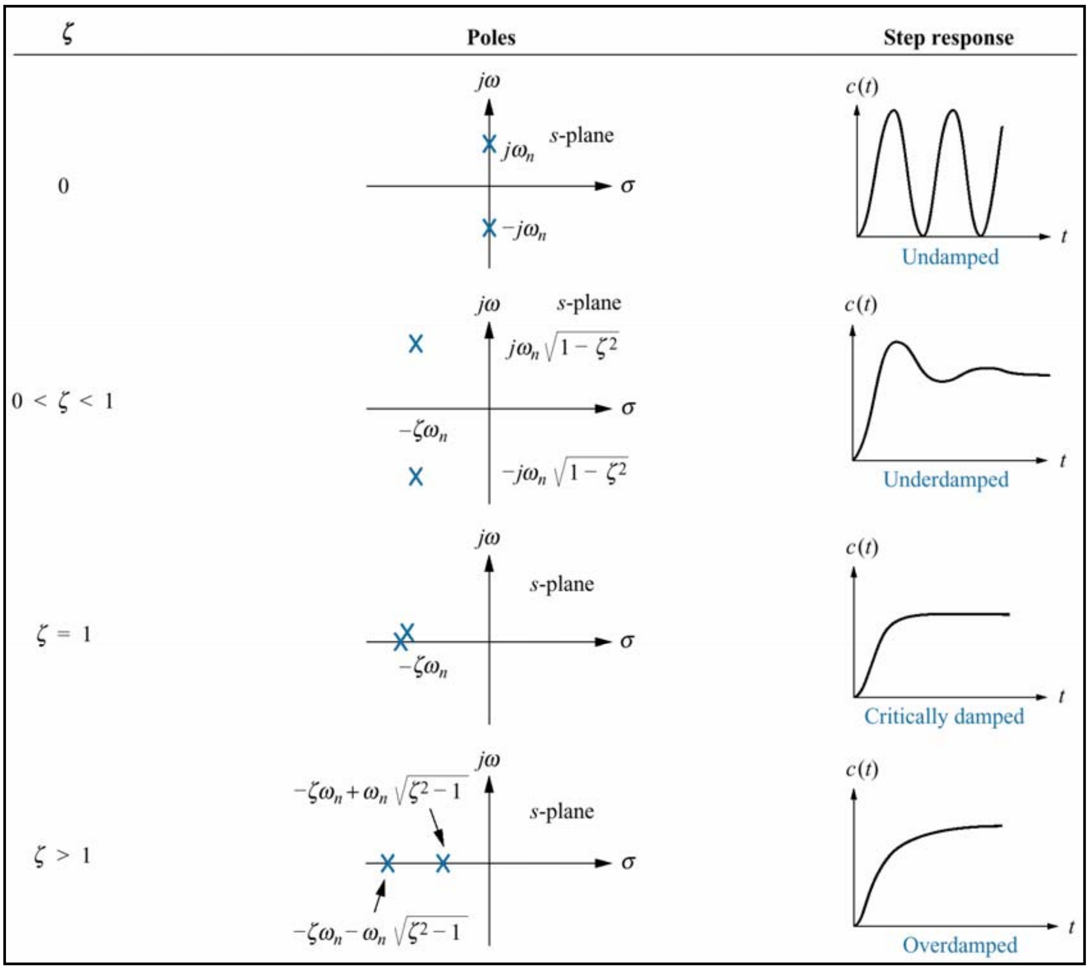
ด้วยการแทนค่าตัวแปร a และ b ลงในสมการ (28) แล้วจัดรูปจะได้สมการทั่วไปของระบบกำลังสองแสดงดังนี้

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{33}$$

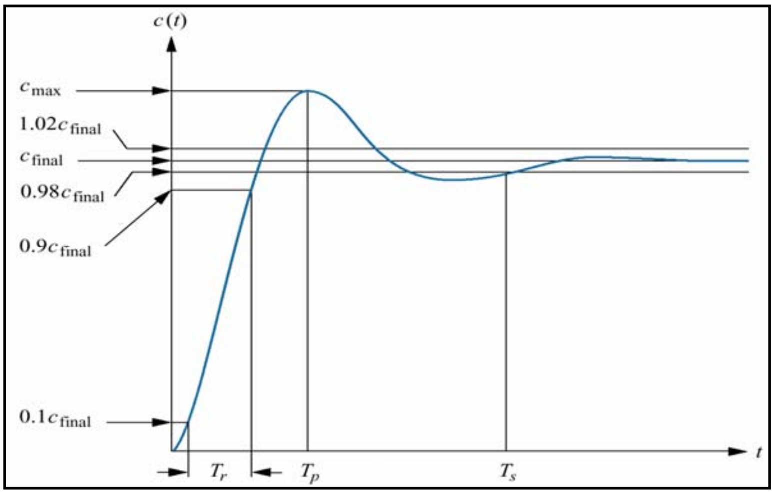
สามารถหา Pole ของระบบได้ดังนี้

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \tag{34}$$

ตำแหน่งของ Pole ที่เกิดจะขึ้นกับค่า ζ ซึ่งจะทำให้เกิดผลตอบสนองต่างกันแสดงในภาพที่ 13



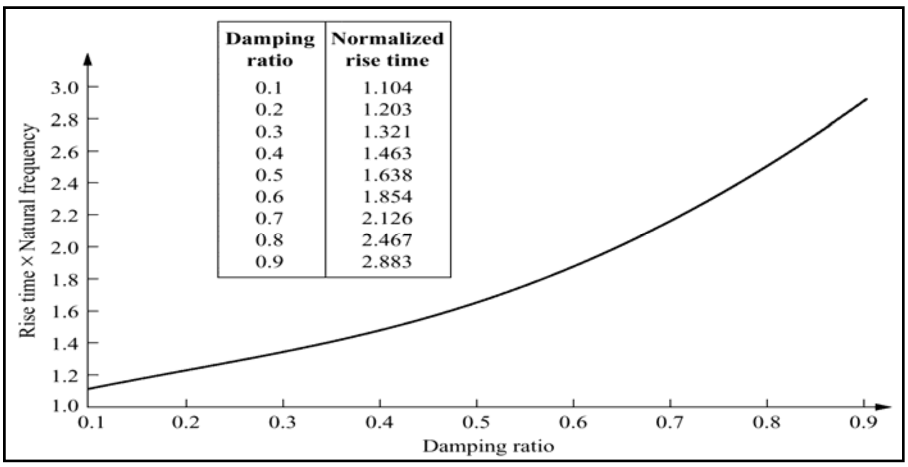
<u>ภาพที่ 13</u> แสดงผลตอบสนองของระบบกำลังสองที่ค่า ζ ต่างๆกัน



<u>ภาพที่ 14</u> แสดงผลตอบสนองของระบบกำลังสองแบบ Underdamped

เราจะกำหนดคุณสมบัติของระบบกำลังสองโดยการพิจารณาจากภาพที่ 14 ด้วยค่าต่างๆ 3 ชนิดดังนี้

1. Rise Time, T_r คือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้เอาท์พุตของระบบเปลี่ยนแปลงจาก 0.1 ถึง 0.9 ของค่าสุดท้ายของค่าเอาท์พุตแสดงได้ตามภาพที่ 14 หรือในอีกความหมายหนึ่งคือค่าเวลาที่ใช้ระหว่างการเปลี่ยนแปลงค่าเอาท์พุตของระบบจาก 10% ถึง 90% ในระบบกำลังสองเราไม่สามารถหาสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง T_r กับค่าตัวแปรอื่นๆได้โดยตรง แต่เราก็ยังสามารถแก้สมการเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง T_r กับ ζ โดยได้ผลสรุปเป็นภาพที่ 15



<u>ภาพที่ 15</u> แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเวลากับ ζ

2. Peak time, T_p คือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้เอาท์พุตของระบบมีค่าสูงสุดค่าแรก มีค่าดังนี้

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{35}$$

3. Percent Overshoot, $\%OS$ คือค่าเปอร์เซ็นต์ของขนาดของเอาท์พุตที่มีค่ามากที่สุดเทียบกับค่าเอาท์พุตที่ Steady State สามารถหาได้ดังนี้

$$\%OS = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100 \tag{36}$$

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} \tag{37}$$

4. Settling Time, T_s คือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้เอาท์พุตของระบบมีค่าอยู่ใน 2% ของค่าเอาท์พุตที่ Steady State แสดงได้ตามภาพที่ 14 หรือในอีกความหมายหนึ่งคือค่าเวลาที่ใช้เพื่อให้ค่าเอาท์พุตของระบบมีค่าความคลาดเคลื่อน Steady State ไม่เกิน 2% สามารถหาได้ดังนี้

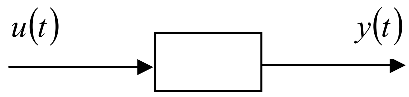
$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d} \tag{38}$$

3. LINEAR TIME-INVARIANT DISCRETE SYSTEM

ในการระบุเอกลักษณ์เราจะต้องทำการเก็บข้อมูลจากการทดลอง ข้อมูลจะถูกเก็บอยู่ในรูปของ Discrete ทำให้การวิเคราะห์และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลเหล่านั้นจะอยู่ในรูปของ Discrete เช่นกัน เราจึงจำเป็นที่จะต้องศึกษาสัญญาณต่างๆแบบ Discrete ในตอนนี้เราจะใช้ t เป็นตัวแปรของเวลาแบบ Discrete

3.1 Impulse Response

เมื่อเราใส่สัญญาณอินพุต $u(t)$ ให้กับระบบซึ่งจะทำให้เกิดสัญญาณเอาท์พุต $y(t)$ หรือเรียกว่าผลตอบสนองของระบบ แสดงตามภาพที่ 16



ภาพที่ 16 Block Diagram แสดงระบบทั่วไป

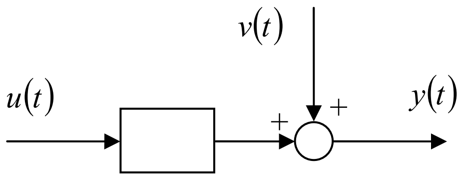
ถ้าระบบในภาพที่ 16 เป็นระบบเชิงเส้นไม่ขึ้นกับเวลา (Linear Time-Invariant System) เราจะสามารถเขียนสมการแทนระบบได้ดังนี้

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{39}$$

สมการ (39) เรียกว่า Impulse Response ของระบบ ในภายหลังเราจะเรียกสมการ (39) ว่า Transfer Function ของระบบ

3.2 Disturbances

จากภาพที่ 16 และสมการ (39) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาท์พุตของระบบ แสดงว่าเมื่อเราทราบค่าของสัญญาณอินพุตเราก็จะหาค่าของสัญญาณเอาท์พุตได้เสมอ แต่ในความจริงแล้วสัญญาณเอาท์พุตที่เกิดขึ้นไม่ได้เกิดจากระบบเพียงอย่างเดียว แต่มักจะประกอบไปสัญญาณรบกวน $v(t)$ เข้ามาปะปนเสมอ แสดงได้ตามภาพที่ 17

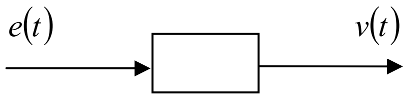


ภาพที่ 17 Block Diagram แสดงระบบแบบมีสัญญาณรบกวนเข้ามารบกวน

จากภาพที่ 17 เราสามารถปรับปรุงสมการ (39) เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง สัญญาณอินพุต $u(t)$, สัญญาณเอาท์พุต $y(t)$ และสัญญาณรบกวน $v(t)$ ได้ใหม่ดังนี้

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) + v(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

ในการศึกษาระบบใดๆเราจะสมมติให้สัญญาณรบกวน $v(t)$ สร้างขึ้นมาจากสัญญาณรบกวนสีขาว $e(t)$ ผ่านเข้าไปในระบบที่เรียกว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสัญญาณรบกวน $h(k)$ (Noise Model) แสดงตามภาพที่ 18



ภาพที่ 18 Block Diagram แสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสัญญาณรบกวน

จากภาพที่ 18 เราก็จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการ (41)

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{41}$$

สัญญาณรบกวนสีขาว $e(t)$ หมายถึงสัญญาณรบกวนแบบสุ่มที่มีค่า PDF และมีคุณสมบัติ คือ $E(e(t)) = 0$ และมีค่าความแปรปรวน (Variances) เท่ากับ λ ยังมีคุณสมบัติอื่นๆเพิ่มเติมอีก แสดงใน (Lennart Ljung, 1999: 22-23) เราจะสมมติให้ h เป็น Monic หมายถึง $h(0) = 1$

3.3 <u>Transfer Function</u>

เราจะกำหนดสัญลักษณ์เพิ่มเติมเพื่อให้การเขียนสมการต่างๆอยู่ในรูปที่กะทัดรัดขึ้น คือ Shift Operator q^n มีความหมายตามสมการดังนี้

$$q^n u(t) = u(t+n) \tag{42}$$

เราจะเรียก q^1 ว่า Forward Shift Operator แสดงความสัมพันธ์ดังนี้

$$qu(t) = q^1 u(t) = u(t+1) \tag{43}$$

และจะเรียก q^{-1} ว่า Backward Shift Operator แสดงความสัมพันธ์ดังนี้

$$q^{-1}u(t) = u(t-1) \tag{44}$$

เราจะนำ Shift Operator มาใช้เขียนกับสมการ (39) ซึ่งจะได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)\left(q^{-k}u(t)\right) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}\right]u(t) \\ &= G(q)u(t) \end{aligned} \tag{45}$$

จากสมการ (45) จะเห็นว่าเราได้กำหนดสัญลักษณ์เพิ่มเติมคือ $G(q)$ เรียกว่า Transfer Operator หรือเรียกว่า Transfer Function มีค่าตามสมการ (46)

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) q^{-k} \tag{46}$$

และเช่นเดียวกัน เราจะได้

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) q^{-k} \tag{47}$$

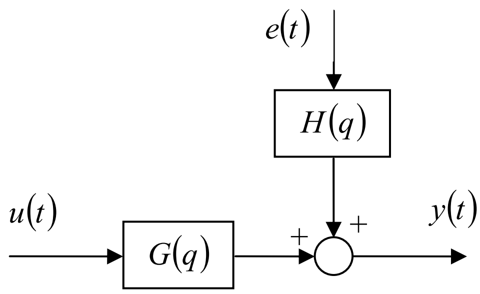
ทำให้เราสามารถเขียนสมการ (41) ได้ใหม่ดังนี้

$$v(t) = H(q) e(t) \tag{48}$$

ดังนั้นสมการ (40) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้

$$y(t) = G(q) u(t) + H(q) e(t) \tag{49}$$

สมการ (49) สามารถเขียนเป็น Block Diagram ได้ตามภาพที่ 19



<u>ภาพที่ 19</u> Block Diagram แสดงความสัมพันธ์ของระบบ LTI

ข้อสังเกตของสมการ (46) และสมการ (47) คือดัชนี k ของ $\sum$ ใน $H(q)$ เริ่มต้นที่ $k = 0$ แต่ใน $G(q)$ เริ่มต้นที่ $k = 1$

4. PREDICTION

เป้าหมายของหัวข้อนี้ก็คือการทำนายค่าของสัญญาณที่เวลาถัดไปโดยใช้ข้อมูลของสัญญาณที่เราเก็บได้ในอดีต หลักการของการทำนายค่าของสัญญาณจะสามารถนำไปใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ที่ดีสุดใน Model Structure ที่เราเลือกใช้ในการระบุเอกลักษณ์ได้ ดังนั้นวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการทำนายค่าของสัญญาณที่เวลาใดๆ จึงเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการเข้าใจวิธีการระบุเอกลักษณ์

เราจะเริ่มต้นทำความเข้าใจกับการทำนายค่าของสัญญาณ $v(t)$ ก่อนเพื่อที่จะนำไปสู่การทำนายค่าสัญญาณเอาท์พุตของ Model Structure $y(t)$ ได้ จากที่เราได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาท์พุตของระบบ LTI ที่อยู่ในรูปแบบ

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) = G(q)u(t) + v(t) \tag{50}$$

เราจะทำการทำนายค่าของสัญญาณ $v(t)$ ได้ก็ต้องรู้จักกับคุณสมบัติต่างๆที่ต้องมีใน Noise Model $H(q)$ ก่อน เริ่มจากการพิจารณา $v(t)$ ซึ่งเกิดมาจากสัญญาณรบกวนสีขาว $e(t)$ ผ่านเข้าไปใน Noise Model $H(q)$ แสดงตามสมการ

$$v(t) = H(q)e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{51}$$

สิ่งที่เราต้องสมมติ คือ Noise Model ต้อง Stable นั่นคือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{52}$$

สมการ (52) หมายความว่าผลรวมของขนาดของ $h(k)$ ต้องหาค่าได้ จากนั้นจากสมการ (48) ถ้าเรารู้ข้อมูล $v(s)$ ที่เวลา $s \le t$ เราจะสามารถหา $e(t)$ ได้ตามสมการดังนี้

$$e(t) = \widetilde{H}(q)v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{h}(k)v(t-k), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{53}$$

โดยที่ $\widetilde{H}(q)$ คือ Inverse ของ $H(q)$ แสดงว่าสมการ (53) เราจะสามารถหาค่า $e(t)$ ได้เมื่อ $h(k)$ ต้องสามารถหา Inverse ได้ จาก (Lennart Ljung, 1999: 22) เราสามารถสรุปได้ว่าถ้า $H(q)$ Stable แล้วเราก็จะสามารถหา Inverse ของ $H(q)$ ได้ซึ่งมีค่าตามสมการ (54) ดังนั้นจากสมการ (52) เราได้สมมติให้ $H(q)$ มีเสถียรภาพไว้แล้วจึงสามารถหาค่า $e(t)$ ได้

$$\widetilde{H}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{h}(k) q^{-k} = H^{-1}(q) = \frac{1}{H(q)} \tag{54}$$

กลับมาเข้าสู่เป้าหมายของเราคือ การทำนายค่าค่าของสัญญาณ $v(s)$ ณ ที่เวลา $s = t$ โดยใช้ข้อมูลที่เราเก็บได้ที่เวลา $s \le t-1$ ในกรณีนี้วิธีการที่เราใช้ทำนายเราจะเรียกว่า One-Step-Ahead Prediction of v ซึ่งสามารถทำได้โดย พิจารณาจากสมการ (51) ถ้ากำหนดให้ $H(q)$ เป็น Monic หมายถึง $h(0) = 1$ จะสามารถกระจายสมการได้ดังนี้

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e(t-k) = e(t) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k) e(t-k), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{55}$$

ด้วยหลักการของความน่าจะเป็น (Lennart Ljung, 1999: 22-23) จะได้

$$\hat{v}(t \mid t-1) = E\{e(t)\} + E\left\{\sum_{k=1}^{\infty} h(k) e(t-k)\right\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{56}$$

เมื่อ $\hat{v}(t \mid t-1)$ หมายถึงค่า $v(t)$ ที่ได้จากการทำนายโดยใช้ข้อมูลจาก $\{v(s) \mid s \le t-1\}$ จากคุณสมบัติของสัญญาณรบกวนสีขาว $e(t)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ดังนั้นจากสมการ (56) จะได้

$$\hat{v}(t \mid t-1) = E\left\{\sum_{k=1}^{\infty} h(k) e(t-k)\right\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{57}$$

จากสมการ (55) ทำให้เราเขียนสมการ (57) ได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{v}(t \mid t-1) &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} h(k) e(t-k) - e(t)\right\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \\ &= E\{H(q) e(t) - e(t)\} \end{aligned} \tag{58}$$

ด้วยคุณสมบัติของ Expectation $E\{\cdot\}$ จะได้

$$\hat{v}(t \mid t-1) = H(q)e(t) - e(t) = [H(q)-1]e(t) \tag{59}$$

จากสมการ (50) เราสามารถหาค่า $e(t)$ ได้โดยการย้ายข้างสมการ ดังนี้

$$e(t) = H^{-1}(q)y(t) - H^{-1}(q)G(q)u(t) \tag{60}$$

นำค่า $e(t)$ ที่ได้แทนในสมการ (50) ได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{v}(t \mid t-1) &= [H(q)-1]\left(H^{-1}(q)y(t) - H^{-1}(q)G(q)u(t)\right), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \\ &= \left[1 - H^{-1}(q)\right]\left[y(t) - G(q)u(t)\right] \end{aligned} \tag{61}$$

ขณะนี้เราสามารถทำนายค่า $\hat{v}(t \mid t-1)$ ได้แล้ว ต่อจากนี้เราจะทำการทำนายค่าของสัญญาณ $y(s)$ ณ ที่เวลา $s = t$ โดยใช้ข้อมูลที่เราเก็บได้ที่เวลา $s \le t-1$ ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้หลักการเดียวกันกับ One-Step-Ahead Prediction of v แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{y}(t \mid t-1) &= E\{y(t \mid t-1)\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots \\ &= G(q)u(t) + \hat{v}(t \mid t-1) \end{aligned} \tag{62}$$

แทนค่า $\hat{v}(t \mid t-1)$ จากสมการ (61) ลงในสมการ (62) ได้ผลดังนี้

$$\hat{y}(t \mid t-1) = G(q)u(t) + \left[1 - H^{-1}(q)\right]\left[y(t) - G(q)u(t)\right], \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{63}$$

ทำการจัดรูปตัวแปรใหม่จะได้ผลดังนี้

$$\hat{y}(t \mid t-1) = H^{-1}(q)G(q)u(t) + \left[1 - H^{-1}(q)\right]y(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{64}$$

สมการ (64) นี้เรียกว่าเป็นสมการของตัว Predictor จัดว่าเป็นสมการที่สำคัญในขั้นตอนการหาพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดของการระบุเอกลักษณ์เพราะเป็นสมการจะถูกนำไปใช้ในการสร้างตัว Predictor ของ Model Structure ที่เราได้เลือกไว้

5. MODELS OF LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

ตามที่เราได้ศึกษาในหัวข้อก่อนหน้านี้ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของระบบ LTI ให้อยู่ในรูปแบบของสมการดังนี้

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \tag{65}$$

โดยที่

$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k} \tag{66}$$

$$H(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \tag{67}$$

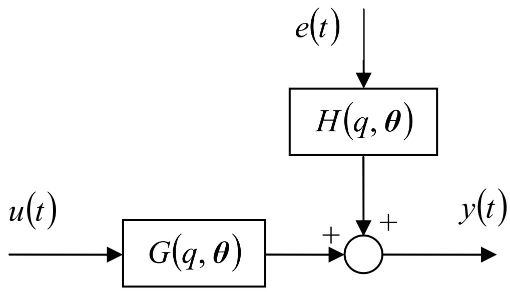
สำหรับในการระบุเอกลักษณ์แบบใช้พารามิเตอร์นั้น สิ่งที่เราต้องการหาคือค่าของตัวแปร $\boldsymbol{\theta}$ ที่สามารถทำให้พารามิเตอร์ของ Model Structure ที่เราเลือกนั้นดีที่สุด ดังนั้นจะเห็นได้ว่า Model Structure ที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะเป็นเช่นไรก็ขึ้นกับค่าของตัวแปร $\boldsymbol{\theta}$ เราจึงต้องปรับการเขียนสมการ (65) ใหม่เพื่อให้เหมาะสมดังนี้คือ

$$y(t) = G(q,\boldsymbol{\theta})u(t) + H(q,\boldsymbol{\theta})e(t) \tag{68}$$

และเช่นเดียวกันกับในสมการ (64) เราก็ต้องเขียนใหม่เป็น

$$\hat{y}(t \mid \boldsymbol{\theta}) = H^{-1}(q,\boldsymbol{\theta})G(q,\boldsymbol{\theta})u(t) + \left[1 - H^{-1}(q,\boldsymbol{\theta})\right]y(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{69}$$

จากสมการ (68) เราจะได้ Block Diagram แสดงในภาพที่ 20



<u>ภาพที่ 20</u> แผนภาพ Block Diagram ของระบบ LTI ตามสมการ (68)

ในภายหลังเราจะได้ศึกษา Model Structure แต่ละชนิด ถ้าเราต้องการทราบถึงการทำนายค่าของสัญญาณเอาท์พุตของ Model Structure ต่างๆเหล่านั้น เราสามารถทำได้โดยกำหนดตัวแปรใหม่ที่จำเป็นสำหรับการจัดรูป Model Structure นั้นให้อยู่ในแผนภาพ 19 หรือเรียกว่าให้อยู่ในรูปของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาท์พุตของระบบ LTI ตามสมการ (68) จากนั้นนำค่า $G(q,\boldsymbol{\theta})$ และ $H(q,\boldsymbol{\theta})$ มาแทนค่าในสมการ (69) เราก็จะได้ผลการทำนายแบบ One-Step-Ahead Prediction