

การวิเคราะห์ความแข็งแรงแผ่นชั้นลามิเนทของวัสดุผสมพร้อมคานเสริมความแข็งแรงสำหรับ โครงสร้างปีกเครื่องบิน

Analyses of Composite Laminated Plates with Stiffeners for Aircraft Wing Structure

วรพล กอนันตชัย และบุญชัย วัจจะครากุล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล การบินและอวกาศ
บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถนนพหลโยธิน แขวงวงษ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800
โทร+66 2 913-2500 โทรสาร +66 2 587-4350

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์ทางสถิตยศาสตร์ ของชั้นลามิเนทแผ่นบางพร้อมคานเสริมความแข็งแรง สำหรับแบบจำลองโครงสร้างของปีกเครื่องบิน โดยใช้วิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ (Rayleigh-Ritz Method) ทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิก (Classical Plate Theory, CPT) ทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิกจะถูกกำหนดอยู่บนทฤษฎีชั้นวัสดุผสม และใช้ฟังก์ชันกระจัดแบบพหุนามในการวิเคราะห์ โปรแกรมการวิเคราะห์ถูกสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์แผ่นชั้นลามิเนทแบบสี่เหลี่ยมคางหมูที่เสริมคานความแข็งแรงภายใต้ภาระความดันคงที่และจับยึดแบบแน่นตรึงหนึ่งด้าน ผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ นี้สามารถนำมาใช้เพิ่มประสิทธิภาพสำหรับการประยุกต์ใช้ในการออกแบบปีกโครงสร้างเครื่องบินเบื้องต้น โดยการวิเคราะห์ชั้นลามิเนทนี้จะถูกใช้คำนวณการโก่งตัวและความเค้นบนปีกตัวอย่าง ผลการคำนวณจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ข้อกำหนดเดียวกันเพื่อแสดงให้เห็นระดับความแม่นยำของวิธีการนี้

คำสำคัญ: ชั้นวัสดุผสม วิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ ทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิก

Abstract

This study aimed to feature the static analyses of laminated plates with stiffeners for modeling aircraft wing structure by using Rayleigh-Ritz method and Classical plate theory (CPT). The Classical plate theory is based on the composite laminated plate theory and a polynomial displacement function was used and applied in this analysis. A computational tool had been developed for stiffened trapezoidal plate analyses subjected to uniform pressure load and clamped-free boundary condition. This Rayleigh-Ritz solution can be used to optimize algorithms for application in the

preliminary aircraft wing structure design. This laminated plate analysis is used to calculate the static deflections and a model wing stresses. The numerical results are compared with the results from a finite element program at the same configuration to illustrate typical accuracy levels of this method.

Keywords : composite plate, Rayleigh-Ritz method, classical plate theory

1. บทนำ

เทคโนโลยีการบินได้พัฒนาแบบก้าวกระโดด เครื่องบินแบบใหม่ๆ ได้ถูกสร้างขึ้นอย่างมากมาย ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้อะลูมิเนียมเป็นวัสดุหลักในการสร้าง แต่ปัจจุบันเทคโนโลยีวัสดุผสม (Composite material) ได้ถูกพัฒนามากขึ้น และได้ถูกนำไปใช้ในหลากหลายโครงสร้าง ซึ่งรวมทั้งในเครื่องบิน เพราะมีความแข็งแรง และน้ำหนักเบาเหมาะสมกับการใช้ใน โครงสร้างเครื่องบิน

การวิจัยในครั้งนี้จะวิเคราะห์ ความแข็งแรงของ โครงสร้างหลักของปีกเครื่องบินที่สร้างจากวัสดุผสมเพื่อ การออกแบบให้มีความแข็งแรง โดยจะวิเคราะห์ทาง สถิตยศาสตร์ (Static) เป็นหลักเพื่อศึกษาความเค้นที่ เกิดขึ้นภายในของ โครงสร้าง และการเสียรูปของ โครงสร้างเมื่อได้รับภาระแรงดัน โดยวิเคราะห์แผ่นชั้นลามิเนตวัสดุผสมของปีกเครื่องบินพร้อมคานเสริมความแข็งแรงซึ่งเปรียบเสมือนผิวและคาน โครงสร้างหลักของ ปีก (Spar) จำลองให้มีรูปร่างคล้ายกับโครงสร้างปีกเครื่องบิน ใช้การวิเคราะห์โครงสร้างกล่องวัสดุผสม (McCarthy et al., 1997) ในการวิเคราะห์โดยการเขียน โปรแกรมการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมวิเคราะห์ทาง คณิตศาสตร์ และนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ เปรียบเทียบกับ โปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite element Program) เพื่อ

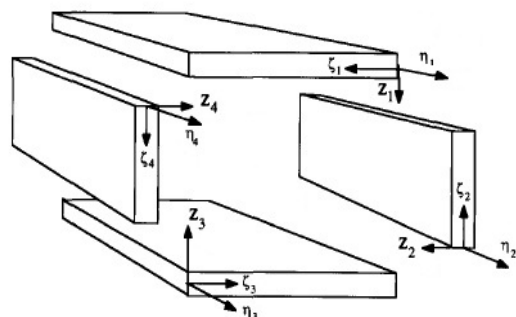
ตรวจสอบความถูกต้องทั้งการเสียรูปของ โครงสร้าง และ วิเคราะห์ความแข็งแรงของชั้นวัสดุผสม

2. วัตถุประสงค์

1. วิเคราะห์ความแข็งแรงของ โครงสร้างหลัก และการเสียรูปของปีกเครื่องบินซึ่งสร้างจากวัสดุผสม โดย วิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ และทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิกโดยมี ภาระแรงดัน (Pressure load) กระทำคงที่ โดยวิเคราะห์ ของโครงสร้างปีกเครื่องบิน ทั้งไม่เสริมคานความแข็งแรง ลีเสริมคานเสริมความแข็งแรง

2. นำผลที่ได้เปรียบเทียบกับผลของโปรแกรม ไฟไนท์เอลิเมนต์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์

3. อุปกรณ์และวิธีการ



รูปภาพที่ 1 โครงสร้างเสมือนของปีกเครื่องบินที่นำมาวิเคราะห์

วิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์และทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิก ที่นำมาใช้วิเคราะห์ความแข็งแรงและการเสียรูปต้องการรู้พลังงานทั้งหมดของระบบ ดังรูปภาพที่ 1 ซึ่งเปรียบเสมือนโครงสร้างของปีกเครื่องบิน และคานเสริมความแข็งแรงจะถูกใช้เป็นคานโครงสร้างหลักของปีกด้านหน้า, หลังและเสริมความแข็งแรงในด้านต่างๆ ที่ต้องการ โดยขอบเขตจะถูกกำหนดให้เป็นไปตามฟังก์ชันการเสียรูปแบบโพลิโนเมียล ซึ่งวิธีวิเคราะห์จะถูกอธิบายดังหัวข้อต่อไป

3.1 พลังงานของชั้นวัสดุผสมพร้อมคานเสริมความแข็งแรง (Strain Energy of Plate)

พลังงานของชั้นวัสดุผสม (Strain energy of composite Laminated plate) (Akavci et al., 2007) จะถูกกำหนดให้เป็นไปตามสภาวะความเค้นแบบระนาบ (Plane-stress condition) โดยจะเป็นไปตามสมการที่ 1

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz dy dx \quad (1)$$

โดย U_p คือพลังงานของชั้นวัสดุผสม $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ คือความเค้นและความเค้นเฉือนและ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ความเครียดและความเครียดเฉือนซึ่งทฤษฎีแผ่นบางแบบคลาสสิกจะกำหนดฟังก์ชันของความเครียดตามสมการที่ 2

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \\ k_x^0 &= -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}, k_y^0 = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ k_{xy}^0 &= -2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

โดย u, v และ w คือการเคลื่อนที่ในแกน x, y และ z ตามลำดับ, $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ และ γ_{xy}^0 คือความเค้นในแนวระนาบอ้างอิง (โดยทั่วไปคือระนาบกลาง), k_x^0, k_y^0, k_{xy}^0 คือความโค้งในแนวระนาบ

จากความสัมพันธ์ทั้งหมดสามารถเขียนสมการพลังงานของชั้นวัสดุผสมได้ตามสมการที่ 3

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \{ \varepsilon_i^0 \quad k_i^0 \} \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_i^0 \\ k_i^0 \end{Bmatrix} dx dy \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz \\ i, j &= 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (3)$$

โดย A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} คือสัมประสิทธิ์เฉพาะของชั้นวัสดุผสม, $[\bar{Q}_{ij}]$ คือค่าเมตริกซ์สติฟเนสของวัสดุผสม (Composite Stiffness Matrix) (Kollar and Springer, 2003) N คือจำนวนชั้นของวัสดุผสม

พลังงานของคานเสริมความแข็งแรง (Strain Energy of Stiffeners) จะถูกกำหนดตามสมการที่ 4

$$U_s = \frac{1}{2} E_s I_s \int_{L_s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

และพลังงานศักย์ (Potential energy) ของแรงดันตามสมการที่ 5

$$V = - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p(x, y) w^0 dy dx \quad (5)$$

ดังนั้นพลังงานศักย์เบ็ดเสร็จ (Total Potential Energy, Π) ซึ่งวัสดุผสมพร้อมคานเสริมความแข็งแรง เกิดจากการรวมพลังงานทั้งหมดในระบบ จะได้สมการที่ 6

$$\Pi = U_{p,i} + U_{s,i} + V_i \quad (6)$$

โดยการวิเคราะห์ด้วยวิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ (Reddy, 2002) ต้องเลือกฟังก์ชันกระจัดซึ่งประกอบด้วยตัวแปร α_{ij} ซึ่งเป็นตัวแปรที่บอกการรูปร่างของฟังก์ชันนั้นๆ และต้องมีความเหมาะสมกับขอบเขตที่ต้องการวิเคราะห์ จากนั้นทำการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรไม่ทราบค่า กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งไปตามสมการที่ 7

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{111}} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{imn}} = 0 \quad (7)$$

สุดท้ายจะได้เมตริกซ์ของตัวแปรทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 0 สมการที่ 8 ซึ่งสามารถหาค่าตัวแปรทั้งหมดได้

$$\begin{bmatrix} \alpha_{111} & \dots & \alpha_{i1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{im1} & \dots & \alpha_{imn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

3.2 ฟังก์ชันการกระจัด (Displacement function)

การเลือกฟังก์ชันจะเลือกฟังก์ชันการกระจัดแบบโพลิโนเมียลแบบยึดแน่นตรงหนึ่งด้าน ซึ่งเป็นไปตามสมการที่ 9

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_i(x) Y_j(y) \\ X_i(x) = \left(\frac{x}{a} \right)^{i-1}, Y_j(y) = \left(\frac{y}{b} \right)^{j+1} \quad (9)$$

โดย α_{ij} คือตัวแปรจากฟังก์ชันการกระจัดที่จะถูกแก้ด้วยวิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์

3.3 แบบจำลองของปีกและการเปลี่ยนแกนอ้างอิง

รูปจำลองของปีกจะใช้รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Giles, 1994), ตามรูปภาพที่ 2 ซึ่งคานเสริมความแข็งแรงจะถูกกำหนดให้อยู่ระยะระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) และจะเปลี่ยนแกนอ้างอิงสำหรับแบบจำลองของปีกจากแกน x-y ให้เป็นแกน $\xi-\eta$ ซึ่งเป็นแกนอ้างอิงบนพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูโดยสมการที่ 10

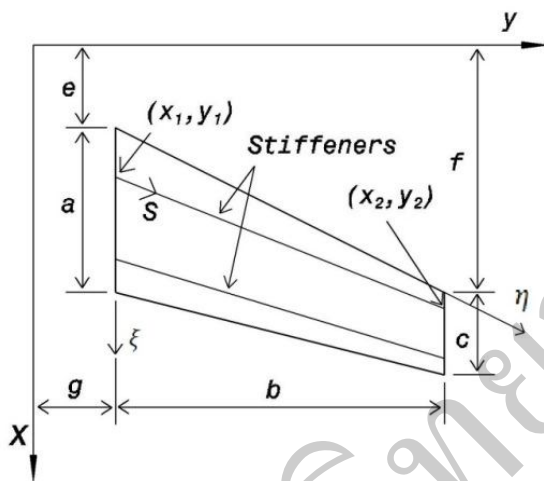
$$\begin{aligned} x &= e + a\xi + (f - e)\eta + (c - a)\xi\eta \\ y &= g + b\eta \\ dx dy &= [ab - (c - a)b\eta] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (10)$$

สำหรับคานเสริมความแข็งแรงกำหนดให้มี ความยาวเป็น L_s และพื้นที่หน้าตัดเป็น A_s และเปลี่ยนแกนอ้างอิงให้อยู่ในแนวแกนระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) โดยเป็นไปตามสมการที่ 11

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \left(\frac{s}{L_s} \right) (x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \left(\frac{s}{L_s} \right) (y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (11)$$

โดยฟังก์ชันของการกระจัดตลอดแนวความยาว
ของคานเสริมความแข็งแรงตามสมการที่ 12

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{dx}{ds} \right) \left(\frac{dy}{ds} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \quad (12)$$



รูปภาพที่ 2 แบบจำลองของปีกและแกนอ้างอิง

4. ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์

การวิเคราะห์ปีกดังตัวอย่างในรูปภาพที่ 3 โดยแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 4 ตัวอย่างที่มีโครงสร้างแตกต่างกัน คาน โครงสร้างหลักของปีกด้านหน้าหลังและคานเสริมความแข็งแรงให้ทำจากอะลูมิเนียมโดยคุณสมบัติทางกลของวัสดุให้เป็นไปตามตารางที่ 1 โดยโครงสร้างมีการรับภาระแรงดันคงที่ที่ 1000 N/m²

ตารางที่ 1 คุณสมบัติของวัสดุ

ชั้นวัสดุผสม	
Lay-up	[0 ₂ / 45 ₂ / 90 ₂ / 45 ₂]
E ₁ (GPa)	148
E ₂ (GPa)	9.65
G ₁₂ (GPa)	4.55
ν ₁₂	0.3
ความหนาของชั้นวัสดุ (mm)	0.1
คานเสริมความแข็งแรง	
พื้นที่หน้าตัด h x t (mm)	20 x 2
Modulus of elasticity	73.1
Poisson's ratio	0.33

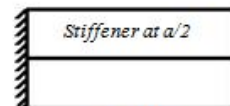
Geometry:

$$a=1, b=2, c=1, e=0, f=0$$

$$\text{Pressure} = 1000 \text{ N/m}^2$$



Case I

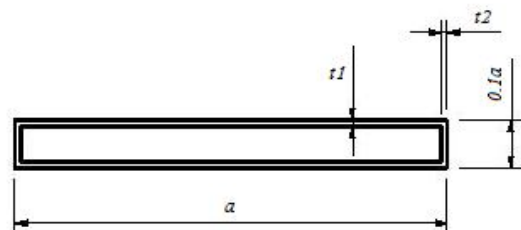
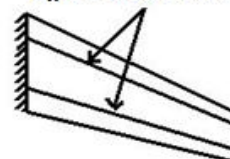


Case II

Geometry:

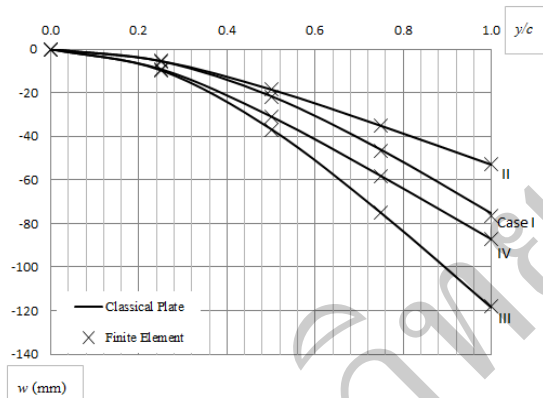
$$a=1, b=2, c=0.5, e=0, f=1$$

$$\text{Pressure} = 1000 \text{ N/m}^2$$

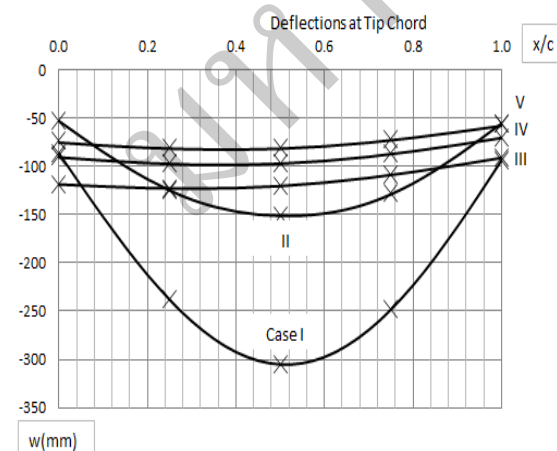


รูปภาพที่ 3 ปีกตัวอย่างและภาพหน้าตัดของปีกตัวอย่าง

ผลการวิเคราะห์การโก่งตัวโดยทำการพล็อตการโก่งตัวที่ชายหน้า (Leading Edge) ตามรูปภาพที่ 4 ซึ่งแสดงผลเปรียบเทียบระหว่างวิธีการเรย์ลี-ริทซ์ และการคำนวณจากโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์ โดยทุกตัวอย่างมีผลความแม่นยำที่ดีมาก โดยตัวอย่างที่ 2 มีการโก่งตัวลดลงเมื่อเทียบกับปีกตัวอย่างที่ 1 เนื่องจากการเสริมความเสริมความแข็งแรง และมีผลในทิศทางเดียวกันเหมือนตัวอย่างที่ 3 และ 4 รูปภาพที่ 5 แสดงให้เห็นถึงการโก่งตัวบริเวณปลายปีกของปีกตัวอย่างซึ่งมีความแม่นยำเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับผลการโก่งตัวในรูปภาพที่ 4



รูปภาพที่ 4 เปรียบเทียบการโก่งตัวที่ตำแหน่งกระชายหน้า



รูปภาพที่ 5 เปรียบเทียบการโก่งตัวบริเวณปลายปีก

ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบความเค้นที่โคนปีกตัวอย่าง

x/a	σ_x (Pa)	σ_x (Pa)	σ_x (Pa)	σ_x (Pa)	Error (%)
Case I					
0	2.00E5	7.91E5	6.67E5	2.63E6	74.71
0.25	6.57E6	6.29E6	2.19E7	2.11E7	4.35
0.5	7.09E6	6.77E6	2.36E7	2.26E7	4.42
0.75	4.26E6	4.06E6	1.42E7	1.37E7	4.61
1	2.11E5	6.77E5	7.02E5	2.29E6	68.90
Case II					
0	1.19E5	4.54E5	3.96E5	1.52E6	73.83
0.25	1.23E6	1.24E6	4.10E6	4.21E6	0.93
0.5	3.76E5	2.40E5	1.25E6	8.15E5	36.12
0.75	1.31E6	1.33E6	4.35E6	4.34E6	1.89
1	1.22E5	4.08E5	4.06E5	1.36E6	70.10
Case III					
0	1.93E5	7.06E5	6.42E5	2.35E6	72.71
0.25	3.67E6	3.54E6	1.22E7	1.17E7	3.60
0.5	5.51E6	5.31E6	1.84E7	1.76E7	3.66
0.75	4.33E6	4.22E6	1.44E7	1.39E7	2.57
1	150E5	5.50E5	5.01E5	1.64E6	72.71
Case IV					
0	1.01E5	3.78E5	3.38E5	1.30E6	73.18
0.25	1.82E5	1.98E4	6.08E5	9.90E4	89.17
0.5	9.71E5	9.79E5	3.24E6	3.39E6	0.76
0.75	1.68E5	5.62E3	5.61E5	1.07E5	96.66
1	7.74E4	2.44E5	2.58E5	7.98E5	68.26

ผลการวิเคราะห์ความเค้นจะทำการพล็อตความเค้นแนวแกน x และ y ที่บริเวณโคนปีกเปรียบเทียบวิธีการเรย์ลี-ริทซ์ และคำนวณจากโปรแกรมไฟไนท์เอลิเมนต์เช่นกัน โดยพบว่าชั้นวัสดุผสมมีความแตกต่างของความเครียดทั้ง 2 แนวแกนไม่เกิน 5% ยกเว้นแต่ส่วนที่เสริมความแข็งแรงทั้งคานโครงสร้างหลักของปีก

ด้านหน้า, ด้านหลัง มีความผิดพลาดสูงมาก ดังในตารางที่ 2 ซึ่งความผิดพลาดอาจเป็นผลมาจากวิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ไม่สามารถวิเคราะห์ ผลจากความเค้นตามเงื่อนไขตามขวาง (Transverse shear stress) และผลจากความเค้นผิวสัมผัส (Contact Stress)

5. บทสรุป

การวิเคราะห์ด้วยวิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์นั้นสามารถให้ผลการโก่งตัวที่แม่นยำสูงเมื่อเทียบกับการทำไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งสามารถเอาไปใช้ในการออกแบบปีกเครื่องบินเบื้องต้นได้ แต่อย่างไรก็ดีในแง่ของการวิเคราะห์ความแข็งแรงแล้วยังมีความผิดพลาดอยู่สูง สาเหตุอาจมาจากวิธีการเรย์ลีย์-ริทซ์ ไม่สามารถวิเคราะห์ผลจากความเค้นตามเงื่อนไขตามขวาง และผลจากความเค้นผิวสัมผัสและยังอาจจะมีสาเหตุอื่นๆ ซึ่งวิธีการวิเคราะห์ในบทความนี้ยังต้องศึกษาและพัฒนาวิธีการเพื่อพัฒนาความถูกต้องของการวิเคราะห์ต่อไป

6. เอกสารอ้างอิง

- Giles, G. L. (1994). Equivalent Plate Analysis of Aircraft Wing Box Structure with General Planform Geometry. *Journal of Aircraft*. Vol.26 N01, 1 January.
- Akavci, S. S. Yerli, H.R. and Dogan, A. (2007). The first order shear deformation theory for symmetrically laminated composite plates on elastic foundation. *The Arabian Journal for Science and Engineering*. Volume 32, Number 2B.

McCarthy, T. R. and Chattopadhyay, A. (1997). *A refined higher-order composite box beam theory*. Part B: Engineering. Volume 28, Issues 5-6, 523-534.

Kollar, L. P., and Springer, G. S. (2003). *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press.

Reddy, J.N. (2002). *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.