RMUTP Research Journal, Vol. 8, No. 1, March 2014

# ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ
# Basic Knowledge of Graph Theory

**วงศกร เจริญพานิชเสรี[1]***

[1]อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะเทคโนโลยีสารสนเทศ มหาวิทยาลัยรังสิต จังหวัดปทุมธานี 12000

## บทคัดย่อ

ในบทความนี้ กราฟไม่ได้หมายถึงแผนภูมิแท่ง แผนภูมิวงกลม หรือสมการพาราโบลา แต่กราฟคือรูปที่ประกอบด้วยจุดและเส้นโดยกราฟจะอยู่ในลักษณะของภาพ โดยใช้จุดแทนจุดยอดแต่ละจุด และลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดถ้าจุดยอดทั้งสองนั้นมีความสัมพันธ์กัน ประโยชน์อย่างหนึ่งของกราฟ คือสามารถใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้ปัญหาต่าง ๆ ง่ายขึ้น ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาสะพานทั้ง 7 แห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก และปัญหา 4 สี ปัญหาสะพานทั้ง 7 แห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก คือ การหาวิธีเดินให้ทั่วทั้งเมืองโดยที่เดินผ่านทุกสะพานแค่เพียงครั้งเดียวเท่านั้น โดยเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ วาดกราฟเพื่อเป็นแบบจำลองของทั้ง 7 สะพาน และพิสูจน์ว่าไม่มีวิธีเดินดังกล่าว การพิสูจน์นี้จัดว่าเป็นบทความแรกในประวัติศาสตร์ของทฤษฎีกราฟ ปัญหา 4 สี คือ การหาว่าจริงหรือไม่ที่สามารถระบายสีแผนที่ โดยใช้สีไม่เกิน 4 สีเพื่อที่จะให้พื้นที่ที่อยู่ติดกันมีสีต่างกัน ปัญหานี้จัดได้ว่าเป็นปัญหาที่โด่งดังที่สุดปัญหาหนึ่งในทางทฤษฎีกราฟ

## Abstract

In this article, a graph is neither a bar chart, a pie chart, nor a parabola, but a figure consisting of points and lines. A graph is presented in a form of picture in which each point represents a vertex and a line represents an edge when two vertices have a relation. One advantage of graph is to be used as mathematical model which can simplify several problems; for example, Seven Bridges of Königsberg and Four colors problems. The Seven Bridges of Königsberg problem concerns with finding a walk through the city that would cross each bridge only once. Leonhard Euler had drawn a graph representing the seven bridges and proved that it is impossible to find the walk. This proof has been the first paper in the history of graph theory. In the four color case, the problem is whether a map could be colored using a maximum of four colors, but no two adjacent regions have the same color. This problem is one of the most famous theorems in the field of graph theory.

**คำสำคัญ** : กราฟ ทฤษฎีกราฟ จุดยอด เส้นเชื่อม

**Keywords** : Graph, Graph Theory, Vertex, Edge

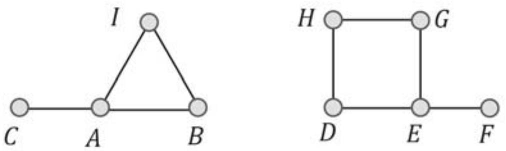
* *ผู้นิพนธ์ประสานงานไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ Wongsakorn.c@rsu.ac.th โทร. 08 9675 4549*

## 1. บทนำ

กราฟ คือ รูปที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดที่มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งนิยมนำมาใช้เป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์เพื่อที่จะทำให้สามารถศึกษาปัญหานั้น ๆ ได้ง่ายขึ้น โดยในบทความนี้จะเน้นไปที่วิธีการสร้างกราฟแทนปัญหาต่าง ๆ เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ตัวอย่าง 1 และตัวอย่าง 2 เป็นการนำกราฟมาประยุกต์ใช้ในโจทย์ปัญหาเพื่อให้มองภาพรวมและแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

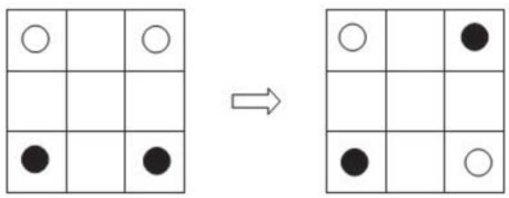
**ตัวอย่างที่ 1** ในประเทศหนึ่งมี 9 เมือง คือ เมือง $A, B, C, D, E, F, G, H$ และ $I$ มีถนนเชื่อมระหว่างเมืองต่อไปนี้ $A$-$C$, $I$-$B$, $I$-$A$, $A$-$B$, $G$-$E$, $G$-$H$, $E$-$F$, $D$-$E$ และ $H$-$D$ จงหาว่ามีเส้นทางเชื่อมระหว่างเมือง $C$-$D$ และ $D$-$F$ หรือไม่

เริ่มต้นโดยวาดกราฟที่มีจุดยอด 9 จุด ให้แต่ละจุดแทนเมืองแต่ละเมือง แล้วลากเส้นเชื่อมเมืองที่มีถนนเชื่อมถึงกัน




พบว่า ไม่มีเส้นทางเชื่อมระหว่างเมือง C และเมือง D แต่มีเส้นทางเชื่อมระหว่างเมือง D และเมือง F

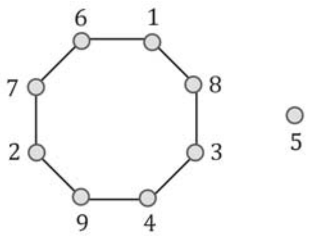
**ตัวอย่างที่ 2** มีม้าหมากรุกสีดำและสีขาวบนกระดานดังรูปซ้ายมือ ถามว่ามีวิธีการเดินม้าให้อยู่ในตำแหน่งดังรูปขวามือหรือไม่



เริ่มต้นโดยการกำหนดชื่อเพื่อเรียกทั้งเก้าช่องของตาราง โดยเรียกว่าช่อง 1, 2, 3, ..., 9 ดังรูป

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

เริ่มทำการวาดกราฟโดยวาดจุดยอด 9 จุด โดยจุดยอดแทนตารางแต่ละช่อง ทำการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด ถ้าทั้งสองจุดนั้นแทนช่องในตารางที่ม้าสามารถเดินได้ในหนึ่งครั้ง นั่นคือ มีเส้นเชื่อมระหว่างจุด 1 กับจุด 8, จุด 8 กับจุด 3, จุด 3 กับจุด 4, จุด 4 กับจุด 9, จุด 9 กับจุด 2, จุด 2 กับจุด 7, จุด 7 กับจุด 6 และจุด 6 กับจุด 1




สังเกตว่าเมื่อเริ่มต้นม้าสีขาวอยู่ตำแหน่งที่ 1 และ 3 ส่วนม้าสีดำอยู่ที่ 7 และ 9 ซึ่งถ้าพิจารณาจากกราฟ พบว่า จะอยู่ในลักษณะที่ม้าสีขาวอยู่ติดกับม้าสีขาว แต่ลักษณะม้าสุดท้ายที่เราต้องการมีม้าสีขาวอยู่ที่ตำแหน่ง 1 และ 9 ส่วนม้าที่สีดำอยู่ที่ตำแหน่ง 3 และ 7 ซึ่งอยู่สลับกัน เนื่องจากการเดินม้าแต่ละครั้ง คือ การเดินจากจุดยอดหนึ่งในกราฟไปยังจุดยอดที่อยู่ติดกันเท่านั้น ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่ม้าสีขาวและม้าสีดำจะสลับตำแหน่งกัน

## 2. บทนิยาม

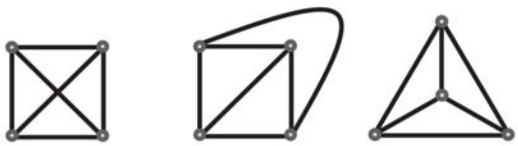
กราฟประกอบด้วยจุดยอด (Vertex, Vertices) และเส้นเชื่อม (Edge, Edges) ซึ่งจะเชื่อมจุดยอด 2 จุด ถ้ามีเส้นเชื่อมจุดยอด x และจุดยอด y เรากล่าวว่า x และ y อยู่ประชิดกัน (Adjacent) และเรียกจุดยอดที่อยู่บนปลายเส้นเชื่อมว่า เป็นจุดยอดที่อยู่ติดกัน (Incident) กับเส้นเชื่อมนั้น

กราฟสามารถแบ่งคร่าว ๆ ได้ 2 ชนิด ได้แก่ กราฟเชิงเดียว (Simple Graph) คือ กราฟที่ไม่มีวงวน และเส้นเชื่อมขนาน และมัลติกราฟ (Multigraph) คือ กราฟที่อาจมีวงวนหรือเส้นเชื่อมขนานได้ ซึ่งถ้ากล่าวถึงกราฟโดยทั่วไปจะหมายถึงกราฟเชิงเดียว

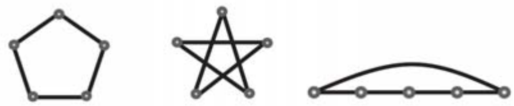
วงวน (Loop) เส้นเชื่อมขนาน (Multiple Edge)

ในทฤษฎีกราฟ ตำแหน่งจุดยอดและความยาวเส้นเชื่อมไม่มีความสำคัญ ดังนั้น เราสามารถวาดแผนภาพของกราฟอันหนึ่งได้หลายวิธี ตัวอย่างที่ 3 แสดงกราฟ 3 กราฟ ซึ่งถือว่าเป็นกราฟเดียวกัน ซึ่งก็คือ กราฟที่มีจุดยอด 4 จุดและมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทุกคู่ และตัวอย่างที่ 4 แสดงกราฟที่มีจุดยอด 5 จุด และแต่ละจุดเป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมสองเส้น

**ตัวอย่างที่ 3** แสดงกราฟที่มีจุดยอด 4 จุด และมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทุกคู่



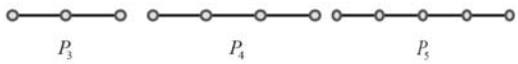
**ตัวอย่างที่ 4** แสดงกราฟที่มีจุดยอด 5 จุด และแต่ละจุดเป็นจุดปลายของเส้นเชื่อมสองเส้น



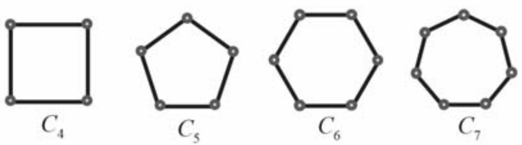
ในทฤษฎีกราฟมีกราฟหลายกลุ่มที่ได้รับการตั้งชื่อ เช่น วิถี (Path), วัฏจักร (Cycle), ต้นไม้ (Tree), กราฟสองส่วน (Bipartite Graph), กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) และกราฟบริบูรณ์ (Complete Graph)

วิถี (Path) ในกราฟ คือ ลำดับของจุดยอด ซึ่งจุดยอดแต่ละจุดจะมีเส้นเชื่อมเชื่อมจุดยอดในลำดับที่อยู่ติดกัน

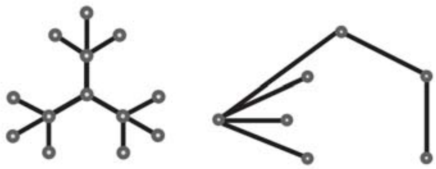
ใช้สัญลักษณ์ $P_n$ แทนวิถีที่มีจุดยอด n จุด




*วัฏจักร (Cycle)* คือ วิถีที่จุดยอดเริ่มเป็นจุดเดียวกับจุดยอดปลาย




ต้นไม้ (Tree) คือ กราฟที่สองจุดยอดใด ๆ จะมีวิถีเดินทางถึงกันได้เพียงวิถีเดียว หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เป็นกราฟที่ไม่มีวัฏจักรแต่เป็นกราฟที่เชื่อมต่อกันหมด

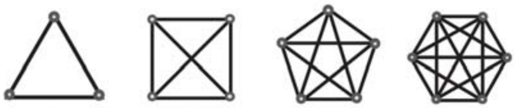


กราฟสองส่วน (Bipartite Graph) คือ กราฟที่เซตจุดยอดสามารถแบ่งได้เป็น 2 เซต ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน และจุดยอด 2 จุดใด ๆ ในเซตเดียวกัน จะไม่มีเส้นเชื่อมเชื่อมระหว่างกัน

กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete Bipartite Graph) คือ กราฟสองส่วนที่จุดยอดทุกจุดในเซตแรก เชื่อมโยงกับจุดยอดทุกจุดในเซตที่สองทุกจุด

$K_{3,3}$ $K_{2,3}$

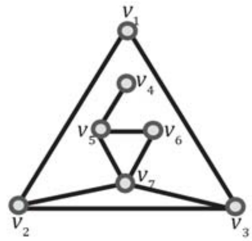
กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph) $K_n$ คือ กราฟที่มีจุดยอด n จุด โดยที่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทุกคู่



$K_3$ $K_4$ $K_5$ $K_6$

สิ่งที่น่าสนใจนอกจากประเภทต่าง ๆ ของกราฟแล้วยังมีศัพท์อีก 3 คำ ซึ่งทุกคนที่สนใจในทฤษฎีกราฟควรรู้ คือ คำว่า ดีกรี (Degree), กราฟย่อย (Subgraph) และกราฟเชื่อมโยง (Connected Graph)

ดีกรี (Degree) คือ จำนวนของเส้นเชื่อมที่อยู่ติดกับจุดยอดนั้น ๆ และเขียนแทนดีกรีของจุด v ด้วย d(v). เช่น



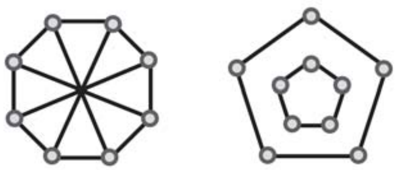

$d(v_1) = 2$ $d(v_2) = 3$ $d(v_3) = 3$ $d(v_4) = 1$
$d(v_5) = 3$ $d(v_6) = 2$ $d(v_7) = 4$

เรากล่าวว่า กราฟ H เป็นกราฟย่อย (Subgraph) ของกราฟ G ถ้าจุดยอดทุกจุดของ H เป็นจุดยอดของ G และเส้นเชื่อมทุกเส้นของ H เป็นเส้นเชื่อมของ G

$G$ $H_1$ $H_2$

เรากล่าวว่ากราฟ G เป็นกราฟเชื่อมโยง (Connected Graph) ถ้าจุดยอด 2 จุดใด ๆ สามารถเชื่อมได้ด้วย Path ใน G

กราฟที่ไม่เชื่อมโยง จะสามารถแบ่งออกเป็นส่วน ๆ ซึ่งแต่ละส่วน เรียกว่า องค์ประกอบ (Component) ของกราฟ



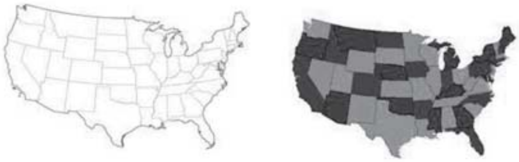
กราฟเชื่อมโยง กราฟไม่เชื่อมโยง

## 2. บทประยุกต์

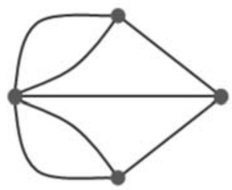
ในส่วนนี้เริ่มนำกราฟมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยเริ่มจากปัญหาที่น่าสนใจ 2 ปัญหา คือ ปัญหาสะพานทั้ง 7 แห่งเมืองเคอนิกส์ และปัญหา 4 สี

ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก (Seven Bridges of Königsberg) คือปัญหาที่ถามว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินผ่านให้ครบทั้ง 7 สะพาน ในเมืองนี้ โดยผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียว (วิกิพีเดีย, 2556)

ใน พ.ศ. 2279 (ค.ศ. 1736) เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ได้พิสูจน์ว่าไม่มีทางเป็นไปได้ โดยสร้างกราฟซึ่งแทนพื้นที่แต่ละส่วนด้วยจุดยอด และให้เส้นเชื่อมแต่ละเส้นแทนสะพาน จะได้ว่ากราฟนี้มีจุดยอด 4 จุดและเส้นเชื่อม 7 เส้น สังเกตว่าเมื่อเดินผ่านเส้นเชื่อมเข้าไปยังจุดใดจุดหนึ่งจำเป็นต้องมีการเดินออกเสมอ ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย นั่นหมายความว่า จะสามารถเดินตามเงื่อนไขดังกล่าวได้เมื่อกราฟมีจุดยอดดีกรีคี่อยู่ไม่เกิน 2 จุด แต่เนื่องจากกราฟดังกล่าว จุดยอดทั้ง 4 จุดมีดีกรีคี่ จึงทำให้ว่าไม่สามารถเดินข้ามทั้ง 7 สะพาน โดยที่ไม่ใช้สะพานซ้ำ ปัญหาสี่สี คือ ปัญหาที่ถามว่าจริงหรือไม่ที่สามารถใช้สี 4 สี ระบายแผนที่โดยที่พื้นที่ที่ติดกันได้รับสีต่างกันได้ (Wikipedia, 2013)



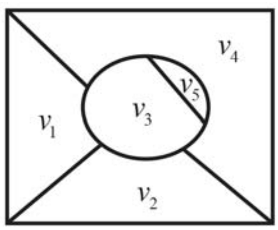
นักคณิตศาสตร์หลายคนทุ่มเทให้กับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้แต่กว่าจะมีผู้พิสูจน์ได้ก็ใช้เวลามากกว่า 1 ศตวรรษ ซึ่งวิธีการสร้างกราฟเพื่อเป็นแบบจำลองของปัญหานี้ คือ ให้จุดยอดแทนด้วยพื้นที่แต่ละส่วนและมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่แทนด้วยพื้นที่ที่อยู่ติดกันดังรูป



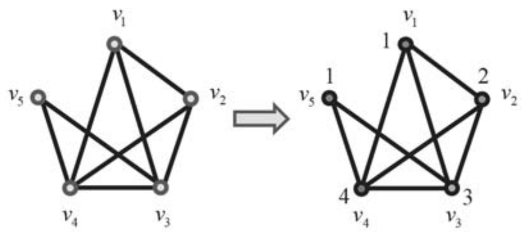
แล้วสุดท้ายคือพิสูจน์ให้ได้ว่าสามารถใช้สีเพียง 4 สีระบายจุดยอดทั้งหมดให้จุดยอดที่อยู่ติดกันมีสีต่างกันได้

ตัวอย่างที่ 5 และตัวอย่างที่ 6 เป็นคำถามนำทำนองเดียวกับปัญหา 4 สี คือ กำหนดแผนที่มาให้ และให้หาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จะสามารถระบายแผนที่โดยพื้นที่ที่อยู่ติดกันมีสีต่างกัน

**ตัวอย่างที่** 5 จงหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ระบายพื้นที่ในรูปพร้อมวิธีระบาย โดยพื้นที่ที่อยู่ติดกันต้องมีสีต่างกัน

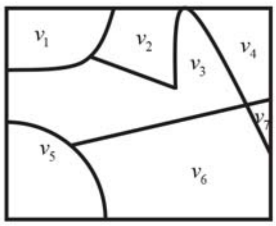


วิธีการเปลี่ยนเป็นโมเดลทางทฤษฎีกราฟ คือ แทนพื้นที่แต่ละส่วนด้วยจุดยอดและลากเส้นเชื่อมระหว่างพื้นที่ที่อยู่ติดกันแล้วจึงทำการระบายสี เนื่องจากจุด $v_1, v_2, v_3, v_4$ ต้องการสีที่แตกต่างกัน ดังนั้น การระบายสีจึงต้องใช้อย่างน้อย 4 สี ซึ่งในรูปสุดท้ายก็ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟนี้สามารถระบายตามเงื่อนไขได้โดยใช้สีไม่เกิน 4 สี สรุปว่าจำนวนสีที่น้อยที่สุดการระบายพื้นที่นี้ คือ 4 สี

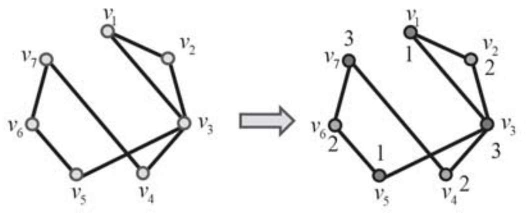


**หมายเหตุ** นิยมใช้ตัวเลขแทนสี

**ตัวอย่างที่ 6** จงหาจำนวนสีที่น้อยที่สุดที่ระบายพื้นที่ในรูปพร้อมวิธีระบาย โดยพื้นที่ที่อยู่ติดกันต้องมีสีต่างกัน



วิธีการเปลี่ยนเป็นโมเดลทางทฤษฎีกราฟ คือ แทนพื้นที่แต่ละส่วนด้วยจุดยอดและลากเส้นเชื่อมระหว่างพื้นที่ที่อยู่ติดกันแล้วจึงทำการระบายสี เนื่องจากจุด $v_1, v_2, v_3$ ต้องการสีที่แตกต่างกัน ดังนั้น การระบายสีจึงต้องใช้อย่างน้อย 3 สี ซึ่งในรูปสุดท้ายก็ได้แสดงให้เห็นว่ากราฟนี้สามารถระบายตามเงื่อนไขได้โดยใช้สีไม่เกิน 3 สี สรุปว่าจำนวนสีที่น้อยที่สุดการระบายพื้นที่นี้คือ 3 สี



## 3. ทฤษฎีบทและบทประยุกต์

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทและบทแทรกบางอย่างในทฤษฎีกราฟซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

**ทฤษฎีบท 1** ผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

พิสูจน์ เนื่องจากเส้นเชื่อมแต่ละเส้นมีจุดปลายสองจุด ซึ่งการลากเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นจะทำให้ผลรวมดีกรีของทุกจุดยอดในกราฟเพิ่มขึ้นเส้นละสอง เริ่มต้นจากกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมมีผลรวมดีกรีเป็นศูนย์ กราฟที่มีเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นมีผลรวมดีกรีเป็นสอง กราฟที่มีเส้นเชื่อมสองเส้นมีผลรวมดีกรีเป็นสี่ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

**บทแทรก 2** ผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ เนื่องจากผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม จะได้ว่าผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจำนวนคู่เสมอ

**บทแทรก 3** จำนวนของจุดยอดที่มีดีกรีคี่ต้องมีเป็นจำนวนคู่เสมอ

พิสูจน์ สมมติให้จำนวนของจุดยอดที่มีดีกรีคี่จะได้ว่าผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดของกราฟเป็นจำนวนคี่ เกิดข้อขัดแย้ง

**ตัวอย่างที่ 7** ในประเทศแห่งหนึ่งมีเมืองอยู่ 100 เมือง และมีถนน 4 สายที่ผ่านเข้าออกแต่ละเมือง จงหาว่ามีจำนวนถนนในประเทศนี้ทั้งหมดกี่สาย

พิจารณากราฟที่มีจุดยอด 100 จุด และแต่ละจุดมีดีกรีเท่ากับสี่ จะได้ว่า กราฟนี้มีเส้นเชื่อม 200 เส้น

**ตัวอย่างที่ 8** มีนักเรียน 30 คนในชั้นเรียนหนึ่ง เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีคน 9 คนที่แต่ละคนมีเพื่อน 3 คน, มี 11 คนที่มีเพื่อน 4 คน และมี 10 คนที่มีเพื่อน 5 คน

พิจารณากราฟที่มีจุดยอด 30 จุด ถ้ามีจุดยอด 9 จุดที่แต่ละจุดมีดีกรี 3, จุดยอด 11 จุดที่มีดีกรี และจุดยอด 10 จุดที่มีดีกรี 5 จะได้ว่าผลรวมดีกรีของจุดยอดทั้งหมดคือ 9 x 3 + 11 x 4 + 10 x 5 = 121 ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะผลรวมดีกรีต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

**ตัวอย่างที่ 9** เป็นไปได้หรือไม่ที่จะลากส่วนของเส้นตรง 9 เส้นในระนาบโดยให้แต่ละเส้นตัดกับส่วนของเส้นตรงอื่น 3 จุดพอดี

ให้จุดยอดแต่ละจุดแทนเส้นตรงแต่ละเส้น ถ้าเส้นตรงคู่ใดตัดกันให้ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่แทนเส้นตรงคู่นั้น

นั่นคือดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดคือจำนวนเส้นตรงที่ตัดกับเส้นตรงที่แทนด้วยจุดยอดดังกล่าว จะได้ว่าผลรวมดีกรีเท่ากับ 9 x 3 = 27 เป็นไปไม่ได้ เพราะผลรวมดีกรีต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

**ตัวอย่างที่ 10** ประเทศหนึ่งมี 15 เมือง แต่ละเมืองมีถนนเชื่อมเมืองอื่นอย่างน้อย 7 เมือง จงแสดงว่าประชาชนในประเทศนี้ สามารถเดินทางจากเมืองใดเมืองหนึ่งไปยังเมืองที่ต้องการได้เสมอ

สร้างกราฟที่มีจุดยอด 15 จุด แทนเมืองทั้ง 15 เมือง ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดที่แทนเมืองที่มีถนนเชื่อมถึงกัน

สมมติว่ากราฟนี้ไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง ดังนั้น กราฟนี้สามารถแบ่งเป็นกราฟย่อย 2 กราฟได้ โดยที่กราฟย่อยแต่ละกราฟไม่มีจุดยอดซ้ำกัน และไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดในกราฟย่อยทั้ง 2 กราฟ เนื่องจากแต่ละจุดมีดีกรีอย่างน้อย 7 จึงได้ว่าในแต่ละกราฟย่อยมีจุดยอดอย่างน้อย 8 จุด เกิดข้อขัดแย้งเพราะกราฟนี้มีจุดยอดเพียง 15 จุดเท่านั้น

## 4. สรุป

ในบทความนี้เพียงนำเสนอความรู้เบื้องต้นของทฤษฎีกราฟเท่านั้น ในความเป็นจริงแล้วทฤษฎีกราฟเป็นวิชาที่มีการศึกษาอย่างกว้างขวาง รวมทั้งมีการประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา เช่น การวางเครือข่ายสาธารณูปโภค คอมพิวเตอร์เน็ตเวิร์ก การประยุกต์ขึ้นอยู่กับผู้ใช้งานว่าต้องการสร้างโมเดลเพื่อจำลองปัญหาใด บางครั้งเพียงแค่สร้างโมเดลทางทฤษฎีกราฟขึ้นมาก็ช่วยให้หาคำตอบของปัญหาได้ทันทีดังตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 แต่ในบางครั้งก็ต้องอาศัยความรู้ในทฤษฎีกราฟมาช่วย ดังตัวอย่างที่ 6, ตัวอย่างที่ 7, ตัวอย่างที่ 8 และตัวอย่างที่ 9

## 5. เอกสารอ้างอิง

วิกิพีเดีย. 2556. สะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก. แหล่งข้อมูล: **http://th.wikipedia.org/wiki/สะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองเคอนิกส์แบร์ก**

Kenneth A., Wolfgang H. 1977. Every Planar Map is Four Colorable Part I. Discharging, **Illinois Journal of Mathematics** 21, 429-490.

Kenneth A., Wolfgang H., John K. 1977. Every Planar Map is Four Colorable Part II. Reducibility, **Illinois Journal of Mathematics** 21, 491-567.

Kenneth A., Wolfgang H. 1977. Solution of the Four Color Map Problem, **Scientic American,** 237(4), 108-12.

West D.B. 2001. **Introduction to Graph Theory,** Prentice Hall, New Jersey.

Wikipedia. 2013. Four color theorem. แหล่งข้อมูล: **http://en.wikipedia.org/wiki/Four_col_theorem**

Wikipedia. 2013. Graph theory. แหล่งข้อมูล: **http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory**