



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์)

ปริญญา

การสอนคณิตศาสตร์

การศึกษา

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง

การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

โรงเรียนจุฬารัตนราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

The Study of Ability in Learning Mathematics on Conic Section of Mathayomsuksa
Four Students Learning by K-W-D-L Technique at Princess Chulabhorn's College
Nakhon Si Thammarat School

นามผู้วิจัย

นางสาวเสาวนีย์ บุญแก้ว

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์สิริพร ทิพย์คง, Ed.D.)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชานนท์ จันทรา, ศษ.ด.)

หัวหน้าภาควิชา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุดารัตน์ สารสว่าง, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา ชีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่

เดือน

พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

The Study of Ability in Learning Mathematics on Conic Section of Mathayomsuksa Four
Students Learning by K-W-D-L Technique at Princess Chulabhorn's College
Nakhon Si Thammarat School

โดย

นางสาวเสาวนีย์ บุญแก้ว

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์)

พ.ศ. 2554

เสาวนีย์ บุญแก้ว 2554: การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ปรินญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (การสอนคณิตศาสตร์) สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชาการศึกษา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์สิริพร ทิพย์คง, Ed.D. 172 หน้า

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L 2) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L และ 3) ศึกษาความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 34 คน จากจำนวน 3 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 105 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 17 แผน แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย และแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย การวิเคราะห์ข้อมูลใช้การคำนวณค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน การทดสอบค่าที และนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ตารางและการบรรยาย

ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ทั้งสี่ขั้นตอน คือ ขั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ ขั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา ขั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา และขั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ โดยเฉลี่ยทั้งหมดอยู่ในระดับดี 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียนอย่างน้อยมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 4) นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยกับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

ลายมือชื่อนิติ

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Saowanee Bunkaew 2011: The Study of Ability in Learning Mathematics on Conic Section of Mathayomsuksa Four Students Learning by K-W-D-L Technique at Princess Chulabhorn's College Nakhon Si Thammarat School. Master of Education (Teaching Mathematics), Major Field: Teaching Mathematics, Department of Education. Thesis Advisor: Associate Professor Siriporn Thipkong, Ed.D. 172 pages.

The purposes of research were 1) to study students' ability in solving mathematics problems on Conic Section of mathayomsuksa four students learning by K-W-D-L Technique, 2) to study students' mathematics learning achievement on Conic Section of mathayomsuksa four students learning by K-W-D-L Technique, and 3) to study students' opinions related to learning by K-W-D-L Technique on Conic Section.

The population was mathayomsuksa four students at Princess Chulabhorn's College Nakhon Si Thammarat School in the second semester of the academic year 2010. The sample group was 34 mathayomsuksa four students of one classroom by cluster random sampling from 3 classrooms of 105 students at Princess Chulabhorn's College Nakhon Si Thammarat School in the second semester of the academic year 2010. The instruments in data collection consisted of 17 lesson plans on Conic Section, mathematics learning achievement test on Conic Section, the ability test on solving mathematics problems on Conic Section, and students' opinions questionnaire toward learning by K-W-D-L Technique on Conic Section. Percentage, mean, standard deviation, and t-test were used for analyzing data and presented by tables with their corresponding descriptions.

The research findings revealed that 1) the students had abilities in solving mathematics problems on Conic Section all 4 steps: K (what we know), W (what we want), D (what we do), and L (what we learn) with the total average of the "good" level, 2) the mathematics learning achievement after learning was higher than before learning at the .05 level of significance, 3) the mathematics learning achievement after learning was higher than 60% at the .05 level of significance, and 4) almost all students agreed with learning by K-W-D-L Technique on Conic Section.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จอย่างสมบูรณ์ได้ ด้วยความกรุณาช่วยเหลือ คุณแล และให้คำแนะนำอย่างสูงยิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร. สิริพร ทิพย์คง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชานนท์ จันทรา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ดร. ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์ ประธานการสอบ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรพรรณ ต้นบรรจง ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก และผู้เชี่ยวชาญทุกท่าน ในการให้คำแนะนำปรึกษา ตลอดจนตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง อันเป็นประโยชน์สูงสุดในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้บริหาร โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช คณาจารย์ และขอบคุณนักเรียน ที่ให้ความร่วมมือในการทดลองหาประสิทธิภาพเครื่องมือในการวิจัย และเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้เป็นอย่างดี ขอขอบคุณเพื่อนนิสิตปริญญาโทสาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ และเพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือเป็นกำลังใจตลอดระยะเวลาในการศึกษาจนสำเร็จ

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้แก่ผู้วิจัยด้วยความปรารถนาดีเสมอมา รวมถึงผู้เขียนตำรา เอกสาร บทความต่าง ๆ ที่ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าและนำมาอ้างอิงในงานวิจัยครั้งนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณคุณพ่อประพร บุญแก้ว คุณแม่สมจิตต์ บุญแก้ว คุณครู อาจารย์ และญาติพี่น้อง ผู้ให้ความรักให้ความสนับสนุนและส่งเสริมให้ผู้วิจัยได้รับความสำเร็จในการศึกษาตลอดมา

เสาวนีย์ บุญแก้ว

กุมภาพันธ์ 2554

สารบัญ

	หน้า
สารบัญตาราง	(3)
สารบัญภาพ	(4)
บทที่ 1 บทนำ	1
ความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	5
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
ขอบเขตของการวิจัย	5
นิยามศัพท์	8
บทที่ 2 การตรวจเอกสาร	11
การสอนคณิตศาสตร์	12
การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	16
การจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L	28
กิจกรรมกลุ่ม	32
การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้	37
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	49
สมมติฐานการวิจัย	51
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	52
ประชากร	52
กลุ่มตัวอย่าง	52
เครื่องมือและการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	52
การเก็บรวบรวมข้อมูล	59
การวิเคราะห์ข้อมูล	60

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์	64
ผลการวิจัย	65
ข้อวิจารณ์	74
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	79
สรุปผลการวิจัย	79
ข้อเสนอแนะ	86
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	88
ภาคผนวก	94
ภาคผนวก ก ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย	95
ภาคผนวก ข ตารางวิเคราะห์ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย	149
ภาคผนวก ค แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย	151
ภาคผนวก ง แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย	157
ภาคผนวก จ แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียน รู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย	166
ภาคผนวก ฉ รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ	170
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	172

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
2.1	แผนผัง K-W-D-L	30
4.1	คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งประกอบด้วย วงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา	66
4.2	คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ในแต่ละขั้นตอน	67
4.3	การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการเรียน และหลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย	70
4.4	การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย กับเกณฑ์ 60%	70
4.5	ผลการสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วย เทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย	71
ตารางผนวกที่		
ข1	ตารางวิเคราะห์ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย	150

สารบัญญภาพ

ภาพที่

หน้า

2.1

แผนภาพแสดงกระบวนการแก้ปัญหา

19



บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล มีระบบแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาและนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ในการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา, 2551) ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ บุญทัน อยู่ชมบุญ (2529) ที่ว่า คณิตศาสตร์เป็นเครื่องนำไปสู่ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ เทคนิค เศรษฐกิจ และสังคม ตลอดจนเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาค้นคว้าวิจัยทุกประเภท และความเจริญในวิทยาการทุกแขนงต้องอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด และเป็นที่ยอมรับว่าคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยที่สำคัญที่สุดในการพัฒนาคุณภาพของมนุษย์ จนมีผู้กล่าวว่า “ความสามารถทางคณิตศาสตร์มีความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับการเป็นพลเมืองของชาติ” เพราะว่าการศึกษาคณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาความคิดเห็นของผู้เรียนให้สามารถคิดอย่างเป็นระบบ มีเหตุผล และสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ การที่รัฐจัดให้มีการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับประถมศึกษาขึ้นไป จึงถือว่าเป็นการวางรากฐานที่สำคัญที่สุด

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งในกลุ่มทักษะซึ่งมีความสำคัญและเป็นเครื่องมือของการเรียนรู้ในการแก้ปัญหาและการดำรงชีวิต จุดประสงค์ทั่วไปของการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อต้องการให้ผู้เรียนมีความรู้ ความเข้าใจ มีทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์สามารถทำได้ คิดตามขั้นตอนอย่างมีเหตุผลและเป็นระเบียบ (วรรณิ โสมประยูร, 2543) คณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมที่ประกอบด้วย การสังเกต การตั้งสมมุติฐาน การใช้หลักปรัชญา และตรรกวิทยา มีการสังเกตและวัดได้เป็นปริมาณ เป็นตัวเลข คณิตศาสตร์ต้องอาศัยวิธีการทางวิทยาศาสตร์ เพราะต้องเข้าใจ ต้องสังเกต ต้องสืบเสาะหาข้อมูล มีการแยกแยะข้อมูล รู้จักคิดและต้องใช้วิจารณญาณเพื่อหาความจริง โดยแท้จริงแล้วคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่จะถ่ายทอดความนึกคิดหรือแนวความคิดกันได้ไม่ถนัดนัก ดังนั้นจึงต้องใช้ภาษาที่เป็นเครื่องมือในการถ่ายทอดความนึกคิดหรือแนวความคิดต่าง ๆ ที่ได้จากการสังเกตสิ่งแวดล้อมที่อยู่รอบ ๆ ตัว โดยฝึกให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต มีความคิดรอบคอบ เป็น

คนมีเหตุผล ขอมรับความคิดเห็นของผู้อื่น การที่คณิตศาสตร์ช่วยปลูกฝังคุณธรรมต่าง ๆ ดังกล่าวมาแล้วนี้ ถือว่าเป็นเรื่องที่มีความสำคัญมาก (มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช, 2534)

เนื่องด้วยคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการดำรงชีวิต เพราะคณิตศาสตร์ทำให้บุคคลรู้จักคิด และใช้เหตุผลในการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการนำไปสู่ความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาการแขนงต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเทคโนโลยีต่าง ๆ ตามที่กล่าวมาแล้วนั้น แต่อย่างไรก็ตามในปัจจุบันพบว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ทุกระดับชั้นนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ ซึ่งปัญหานี้สืบเนื่องมาเป็นเวลานาน สาเหตุต่าง ๆ อาจมาจากตัวหลักสูตร ตัวผู้เรียน ครู หรือสภาพแวดล้อมอื่น ๆ (สมวงษ์ แปลงประสพโชค, สมเดช บุญประจักษ์, และ จรรยา ภู่อุดม, 2549) ดังเห็นได้จากผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินั้นพื้นฐานของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2552 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2553) สรุปผลได้ดังนี้

ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6	ได้คะแนนคณิตศาสตร์เฉลี่ยร้อยละ 35.88
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	ได้คะแนนคณิตศาสตร์เฉลี่ยร้อยละ 26.05
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	ได้คะแนนคณิตศาสตร์เฉลี่ยร้อยละ 28.06

จากผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินั้นพื้นฐานพบว่า นักเรียนได้คะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ไม่ถึงร้อยละ 50 ซึ่งถือว่าอยู่ในเกณฑ์ขั้นต่ำ ปัญหาดังกล่าวอาจมาจากหลายสาเหตุ แต่สาเหตุหนึ่งอาจมาจากตัวนักเรียน คือ นักเรียนวิเคราะห์โจทย์ปัญหาไม่ได้ ขาดการคิดอย่างมีเหตุผล และการคิดอย่างเป็นระบบ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533) ที่ว่า นักเรียนส่วนใหญ่พัฒนาได้ดีในด้านทักษะการคำนวณ แต่จะมีข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาของทั้งครูและนักเรียน เนื่องจากการแก้โจทย์ปัญหาเป็นทักษะขั้นสูง นักเรียนต้องอาศัยความรู้ ความเข้าใจ ตลอดจนทักษะทางคณิตศาสตร์หลายอย่าง นักเรียนจึงมีความบกพร่องในเรื่องนี้ ดังนั้นการฝึกทักษะการแก้ปัญหาให้กับเด็กจึงมีความจำเป็นมากต่อการจัดการเรียนการสอน ให้เด็กได้มีโอกาสเผชิญกับการแก้ปัญหา ครูจึงเป็นบุคคลสำคัญผู้หนึ่งที่จะปลูกฝังความรู้ในเรื่องการแก้ปัญหาให้แก่เด็ก เพื่อให้เด็กได้เตรียมตัวเผชิญกับปัญหาและทราบขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา (วาริ ธีระจิตร, 2541) นอกจากนี้ สิริพร ทิพย์คง (2536) ได้กล่าวว่าในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์มีเป้าหมายสำคัญ 2 ประการคือ ให้นักเรียนรู้จักวิธีการคิด และมีทักษะกระบวนการในการแก้ปัญหา การฝึกให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาท่าง

คณิตศาสตร์ในชั้นเรียนจะเป็นรากฐานสำคัญที่นำไปสู่การพัฒนาวิธีการคิดและเสริมสร้างทักษะในการคิดแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริงได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงเป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์เพราะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ข้อมูล ทำให้รู้ข้อเท็จจริงอันเป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นต่อการดำรงชีวิตประจำวันของมนุษย์

การแก้ปัญหามีความสำคัญและจำเป็นในการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนั้นครูจึงควรฝึกให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจในขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาโดยเลือกรูปแบบ กลวิธี เทคนิคต่าง ๆ ในการแก้ปัญหามาใช้ในการจัดการเรียนการสอน ที่ทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบและถูกต้อง

เทคนิคการสอนรูปแบบหนึ่งที่ครูสามารถนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อแก้ปัญหาคือ การสอนโดยใช้นวัตกรรม K-W-D-L ซึ่งเทคนิค K-W-D-L นี้จะฝึกให้นักเรียนคิดวิเคราะห์โจทย์ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน ละเอียดถี่ถ้วน ทำให้นักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาได้อย่างชัดเจน นอกจากนี้ยังฝึกให้นักเรียนหาวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย อันจะส่งผลให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ในประสบการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ และเกิดประสิทธิผล ซึ่งเทคนิค K-W-D-L นี้ Shaw, Chambliss, and Chessin (1997) อาจารย์แห่งมหาวิทยาลัยมิสซิสซิปปี ประเทศสหรัฐอเมริกา ได้นำมาประยุกต์ใช้กับวิชาคณิตศาสตร์โดยได้เสนอขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ไว้ 4 ขั้นตอน ซึ่งมาจากคำถามดังนี้

ขั้นที่ 1 K (what we know) รู้อะไรหรือโจทย์บอกอะไรบ้าง

ขั้นที่ 2 W (what we want) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร หรือ โจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง

ขั้นที่ 3 D (what we do) เราทำอะไร อย่างไร

ขั้นที่ 4 L (what we learn) เราเรียนรู้อะไร หรือคำตอบที่ได้ และบอกวิธีคิดคำตอบอย่างไร

จากการที่ผู้วิจัยได้ศึกษาการนำเทคนิค K-W-D-L มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้พบว่า นักการศึกษาได้มีการนำกิจกรรมกลุ่มมาใช้ควบคู่กับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โดยแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 3-4 คน ที่ประกอบด้วยนักเรียนที่เรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน

คละกัน ซึ่งการเรียนการสอนแบบกลุ่มนั้นเป็นกิจกรรมที่ใช้กลุ่มเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ โดยให้นักเรียนมีโอกาสเข้าร่วมกิจกรรมอย่างทั่วถึง และมีโอกาสได้ปฏิสัมพันธ์กันในกลุ่ม ได้ปรึกษาแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและประสบการณ์ซึ่งกันและกัน ส่วนผู้สอนคอยจัดประสบการณ์การเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ค้นพบคำตอบหรือการเรียนรู้ตามเป้าหมาย รวมทั้งให้ผู้เรียนได้วิเคราะห์เกี่ยวกับกระบวนการต่าง ๆ และแนวทางในการนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวัน (ทิสนา แจมมณี, 2537)

ด้วยเหตุผลข้างต้นจะเห็นว่า เทคนิค K-W-D-L เป็นเทคนิคการสอนแก้ปัญหาในรูปแบบหนึ่ง ที่เน้นให้นักเรียนจัดลำดับความคิดในการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ เป็นขั้นตอน และเมื่อนำกิจกรรมกลุ่มเข้ามามีส่วนร่วมในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ก็จะช่วยให้นักเรียนมีโอกาสแลกเปลี่ยนประสบการณ์และความคิดเห็นของแต่ละคนออกมา ซึ่งจะส่งผลให้การเรียนรู้เรื่องการแก้ปัญหาประสบความสำเร็จมากขึ้น ดังนั้นการนำเทคนิค K-W-D-L มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จึงเป็นทางเลือกหนึ่งที่ครูสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนกับนักเรียน เพื่อเป็นการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหานักเรียนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

สำหรับสาระการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งประกอบด้วย วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญ และเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นที่สูงขึ้น เช่น แคลคูลัส นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานของศาสตร์อื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ ดาราศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น และเนื้อหาในเรื่องภาคตัดกรวยนั้นเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาที่นักเรียนต้องใช้ทักษะและกระบวนการในการแก้ปัญหา ดังนั้นถ้าครูมีเทคนิคการสอนที่นำมาจัดระบบความคิดของนักเรียนในการเรียนให้เป็นขั้นตอนก็จะทำให้นักเรียนมีทักษะและกระบวนการในการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพได้ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่ศึกษาเรื่องการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-L-D มาใช้ในการสอนเรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
3. เพื่อศึกษาความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์ในการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เพื่อพัฒนาความสามารถทางการเรียนของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น
2. เป็นแนวทางสำหรับผู้เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาในการนำผลการวิจัยไปใช้

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากร ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช
2. กลุ่มตัวอย่าง ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 จำนวน 1 ห้อง จำนวนนักเรียน 34 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จากจำนวนทั้งหมด 3 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 105 คน
3. สารระการเรียนรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในงานวิจัยครั้งนี้คือ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

4. ระยะเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย ใช้เวลาทั้งหมด 19 คาบ
คาบละ 50 นาที ดังนี้

คาบที่ 1 ทดสอบก่อนการเรียน

คาบที่ 2 การเลื่อนแกนทางขนาน

คาบที่ 3 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

คาบที่ 4 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

คาบที่ 5 สมบัติของวงกลม โจทย์ปัญหาในรูปแบบทั่วไปและรูปแบบมาตรฐานของสมการ
วงกลม

คาบที่ 6 สมบัติของวงกลม โจทย์ปัญหาในรูปแบบทั่วไปและรูปแบบมาตรฐานของสมการ
วงกลม (ต่อ)

คาบที่ 7 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

คาบที่ 8 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ (ต่อ)

คาบที่ 9 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

คาบที่ 10 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) (ต่อ)

คาบที่ 11 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

คาบที่ 12 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ (ต่อ)

คาบที่ 13 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

คาบที่ 14 พาราโบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) (ต่อ)

คาบที่ 15 ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$

คาบที่ 16 ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ (ต่อ)

คาบที่ 17 ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

คาบที่ 18 ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) (ต่อ)

คาบที่ 19 ทดสอบหลังการเรียน

5. ตัวแปรที่ศึกษาในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

5.1 ตัวจัดกระทำ คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

5.2 ตัวแปรตาม คือ

5.2.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

5.2.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

5.2.3 ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

นิยามศัพท์

เทคนิค K-W-D-L หมายถึง วิธีการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 4 ขั้นตอน ซึ่งมาจากคำถามดังนี้

ขั้นที่ 1 K (what we know) เรารู้อะไรบ้างในสิ่งที่เรียนหรือโจทย์บอกอะไรบ้าง

ขั้นที่ 2 W (what we want) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร หรือ โจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง

ขั้นที่ 3 D (what we do) เราต้องทำอะไรบ้างเพื่หาคำตอบตามที่โจทย์ต้องการ หรือสิ่งที่ต้องการรู้

ขั้นที่ 4 L (what we learn) เราเรียนรู้อะไรบ้าง สรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ หรือบอกวิธีคิดอย่างไรและได้คำตอบอะไรบ้าง

การจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่นำเทคนิค K-W-D-L มาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเรื่อง ภาคตัดกรวย โดยนำแผนผัง K-W-D-L มาใช้ในขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ดังนี้

1. ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ครูทบทวนความรู้เดิม

2. ขั้นสอนเนื้อหา

2.1 ครูนำเสนอเนื้อหาใหม่แก่นักเรียนทั้งชั้นเรียน

2.2 ครูและนักเรียนร่วมวิเคราะห์โจทย์และแก้ปัญหาโดยใช้แผนผัง K-W-D-L ซึ่งมาจากคำถามต่อไปนี้

K (what we know) เรารู้อะไรบ้างในสิ่งที่เรียนหรือโจทย์บอกอะไรบ้าง

W (what we want) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร หรือโจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง

D (what we do) เราต้องทำอะไรบ้างเพื่อหาคำตอบตามที่โจทย์ต้องการ หรือสิ่งที่ต้องการรู้

L (what we learn) เราเรียนรู้อะไร สรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ หรือบอกวิธีคิดอย่างไรและได้คำตอบอะไร

2.3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้จากการแก้โจทย์ปัญหา

2.4 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้การแก้ปัญหาด้วยเทคนิค K-W-D-L

3. ขั้นสรุปบทเรียนและวัดผลประเมินผล

3.1 ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ทั้งหมดที่ได้จากการเรียนในคาบเรียนนั้น ๆ

3.2 ครูวัดผลและประเมินผลจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยพิจารณาจากการตอบคำถามของนักเรียน การร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด เป็นต้น

ความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการเข้าใจมโนคติเรื่อง ภาคตัดกรวย และความสามารถในการนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาดังต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเรื่อง ภาคตัดกรวย โดยพิจารณาจากการตรวจใบงาน แบบฝึกหัด คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ และคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
เรื่อง ภาคตัดกรวย หมายถึง ความรู้สึกรักและความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อเรียนเรื่อง ภาคตัดกรวย
โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ซึ่งวัดจากแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่
ผู้วิจัยสร้างขึ้น



บทที่ 2

การตรวจเอกสาร

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยนำเสนอตามลำดับดังนี้

1. การสอนคณิตศาสตร์

1.1 หลักการสอนคณิตศาสตร์

1.2 เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์

2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.2 กระบวนการและขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.3 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3. การจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

3.1 ความหมายของเทคนิค K-W-D-L

3.2 ขั้นตอนการสอนโดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

4. กิจกรรมกลุ่ม

4.1 ความหมายของกิจกรรมกลุ่ม

4.2 จุดมุ่งหมายของกิจกรรมกลุ่ม

4.3 ขั้นตอนในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม

4.4 ประโยชน์ของการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

- 5.1 ความหมายของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้
- 5.2 วัตถุประสงค์ของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้
- 5.3 หลักการของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้
- 5.4 รูปแบบของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้
- 5.5 เครื่องมือการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้
- 5.7 ประโยชน์ของการวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

- 6.1 งานวิจัยในประเทศ
- 6.2 งานวิจัยต่างประเทศ

การสอนคณิตศาสตร์

หลักการสอนคณิตศาสตร์

สิริพร ทิพย์คง (2545) กล่าวว่า ครูจำเป็นต้องทราบหลักการสอนคณิตศาสตร์และนำสิ่งเหล่านี้ไปใช้ในการสอนเพื่อช่วยให้นักเรียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจมีความรู้และประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งพอสรุปหลักการสอนคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

1. สอนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปหานามธรรม
2. สอนจากสิ่งที่อยู่ใกล้ตัวนักเรียนก่อนสอนสิ่งที่อยู่ไกลตัวนักเรียน
3. สอนจากเรื่องง่ายก่อนการสอนเรื่องยาก
4. สอนตรงตามเนื้อหาที่ต้องการสอน
5. สอนให้คิดไปตามลำดับขั้นตอนอย่างมีเหตุผล

6. สอนด้วยอารมณ์ขัน ทำให้นักเรียนเกิดความเพลิดเพลินโดยครูอาจใช้ เกม ปริศนา เพลง
7. สอนด้วยหลักจิตวิทยา สร้างแรงจูงใจ เสริมกำลังใจให้กับนักเรียน โดยการใช้คำพูด
8. สอนโดยการนำไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น เช่น วิชาวิทยาศาสตร์เกี่ยวกับการเพิ่มจำนวนของแมลงหวี่ ซึ่งอาจต้องอาศัยความรู้เรื่องเลขยกกำลัง

ยุพิน พิพิธกุล (2539) กล่าวถึงหลักการสอนคณิตศาสตร์โดยสรุปได้ดังนี้ การสอนควรสอนจากเรื่องง่ายไปสู่เรื่องยาก สอนจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม สอนให้สัมพันธ์ความคิด โดยการรวบรวมเรื่องที่มีเหมือนกันเข้ากันเป็นหมวดหมู่ เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจและจำได้แม่นยำขึ้น มีการเปลี่ยนวิธีสอนที่ไม่ซ้ำซากและน่าเบื่อ สอนให้สนุกสนานและน่าสนใจโดยอาจมีกลอน เพลง การเล่าเรื่อง การทำภาพประกอบ การ์ตูน สอดแทรกเพื่อทำให้นักเรียนน่าสนใจ โดยใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่มต้น เพื่อเป็นแรงจูงใจที่จะเรียน ควรสอนให้ผ่านประสาทสัมผัส ซึ่งผู้เรียนจะต้องตาหูฟัง มือเขียน ปากตอบ และผู้สอนก็ต้อง ตาหูฟัง มือเขียน ปากถาม นอกจากนี้ผู้สอนควรคำนึงถึงประสบการณ์เดิม และทักษะเดิมของนักเรียนที่มีอยู่ กิจกรรมใหม่ควรต่อเนื่องกับกิจกรรมเดิม เรื่องที่สัมพันธ์กันก็ควรสอนไปพร้อม ๆ กัน สอนให้นักเรียนเห็นโครงสร้าง ไม่ใช่เน้นแต่เนื้อหา ในการสอนต้องคำนึงถึงหลักสูตรและเลือกเนื้อหาเพิ่มเติมให้เหมาะสม ไม่ควรยากเกินไป เพราะผู้สอนบางคนชอบให้โจทย์ยาก ๆ เกินหลักสูตรซึ่งอาจทำให้ผู้เรียนเกิดความย่อท้อ ควรสอนให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติ และสามารถหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง ซึ่งการยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างจนนักเรียนเห็นแบบรูป ก็จะช่วยให้นักเรียนหาข้อสรุปได้ นอกจากนี้ผู้สอนก็ควรมีอารมณ์ขัน เพื่อสร้างบรรยากาศในห้องเรียนให้น่าเรียนยิ่งขึ้นและผู้สอนก็ต้องแสวงหาความรู้เพิ่มเติมเพื่อที่จะนำสิ่งแปลกใหม่มาถ่ายทอดให้ผู้เรียน รวมทั้งผู้สอนต้องเป็นผู้ที่มีความศรัทธาในอาชีพ จึงจะทำให้สอนได้ดี

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวิ (2542) ได้กล่าวถึงหลักการสอนคณิตศาสตร์พอสรุปได้ดังนี้ ควรให้นักเรียนเข้าใจพื้นฐานของคณิตศาสตร์ นั่นคือ รู้จักใช้ความคิดริเริ่ม รู้เหตุผล และรู้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความเข้าใจอย่างเดียวนั้นไม่เพียงพอต่อการเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องมีทักษะความชำนาญ กล่าวคือ มีทักษะการสังเกต มีความคิดลำดับเหตุผล สื่อความหมายได้ดีถ้วน มีความมั่นใจ แม่นยำ รวดเร็ว ผู้สอนใช้ยุทธวิธีการสอน โดยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ เข้าใจและค้นพบด้วยตนเอง เกิดความคิดสร้างสรรค์ นอกจากนี้เน้นให้ผู้เรียนรู้คุณค่าของคณิตศาสตร์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้

จากที่กล่าวมาข้างต้นพอจะสรุปได้ว่า หลักการสอนคณิตศาสตร์ควรสอนให้นักเรียนรู้โครงสร้างของคณิตศาสตร์ มีเหตุผล และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ โดยสอนจากเรื่องง่ายไปสู่เรื่องยาก สอนตรงตามเนื้อหาโดยเรื่องเดียวกันก็ควรจัดไว้เป็นหมวดหมู่เดียวกัน และควรสอนไปสัมพันธ์กับวิชาอื่น โดยเน้นให้ผู้เรียนรู้คุณค่าของคณิตศาสตร์และนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน นอกจากนี้ครูควรสอนด้วยอารมณ์ขันเพื่อช่วยให้บรรยากาศในห้องเรียนน่าสนใจยิ่งขึ้น

เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์

เทคนิค หมายถึง ศิลปะ กลวิธี (ราชบัณฑิตยสถาน, 2546)

ยุพิน พิพิธกุล (2539) ได้กล่าวถึงเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์พอสรุปได้ดังนี้ “เทคนิค” หมายถึง ศิลปะหรือกลวิธีเฉพาะวิชานั้น ๆ ดังนั้นเทคนิคจึงสอดแทรกอยู่ในขณะที่ดำเนินการสอน ไม่แยกอยู่โดยอิสระเป็นเครื่องช่วยเสริมการสอนให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ เพลิดเพลิน สนุกสนาน เรียนคณิตศาสตร์ด้วยความไม่น่าเบื่อหน่าย ทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ผู้สอนที่มีเทคนิค มักจะพยายามหาศิลปะวิธีต่าง ๆ มาช่วยสอน เช่น การยกตัวอย่างได้ทันที่ ยกตัวอย่างจากชีวิตประจำวัน ยกตัวอย่างจากสิ่งแวดล้อม การใช้เพลง เกม ปริศนา การ์ตูนหรือคำประพันธ์ประเภทร้อยกรอง ก็ถือว่าเป็นเทคนิคทั้งสิ้น ครูคณิตศาสตร์ควรจะได้เสาะแสวงหาเทคนิคต่าง ๆ เหล่านี้เสริมการสอนของตน เทคนิคต่าง ๆ ที่ครูคณิตศาสตร์ควรจะนำมาใช้ดังเช่น เทคนิคการยกตัวอย่างและการแก้โจทย์ปัญหา เทคนิคการใช้วัสดุอุปกรณ์การสอน เทคนิคการสร้างและใช้ภาพประกอบการสอน และเทคนิคในด้านนันทนาการ เป็นต้น

ประพนธ์ จำเริญ (2551) ได้กล่าวถึงเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ พอสรุปได้ดังนี้ เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์มีความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับครู มีเทคนิคการสอนหลายอย่างทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ ทำให้เข้าใจคณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย เชื่อมโยงและนำมาใช้ในการดำรงชีวิตได้ ซึ่งมีดังนี้

1. เทคนิคการสอนตามแนววิถีพุทธ เทคนิคนี้ผู้สอนเปรียบสติปัญญาของมนุษย์ออกเป็น 4 ระดับเหมือนบัว 4 เหล่า ได้แก่ เหล่าที่ 1 บัวพื้นน้ำ คือพวกที่ฉลาดมาก เหล่าที่ 2 บัวเสมอน้ำ คือพวกที่ฉลาดพอสมควร เหล่าที่ 3 บัวใต้น้ำ คือ พวกที่ฉลาดปานกลาง เหล่าที่ 4 บัวในดิน คือ พวกที่โง่เขลา การสอนตามแนววิถีพุทธนี้ผู้สอนจะทำการสอน 4 ครั้งในแต่ละสาระ โดยครั้งที่ 1 เป็นการสอนพวกบัวเหล่าที่ 1 เพียงแค่ให้ศึกษาไปความรู้ พิจารณาตัวอย่างหรืออธิบายตัวอย่างเพียงเล็กน้อย

ก็เกิดความรู้แล้ว สอนครั้งที่ 2 เป็นการสอนพวกบัวเหล่าที่ 2 ครูเพิ่มเติมหรืออธิบายหรือยกตัวอย่างเพิ่มเติมจึงเกิดการเรียนรู้โดยปล่อยให้พวกเหล่าที่ 1 ทำล่วงหน้าไปก่อนด้วยตนเองแล้วตรวจสอบความถูกต้อง สอนครั้งที่ 3 เป็นการสอนพวกบัวเหล่าที่ 3 ครูยกตัวเพิ่มแล้วอธิบายอย่างละเอียด โดยปล่อยให้บัวเหล่าที่ 1 และเหล่าที่ 2 ทำล่วงหน้าไปก่อน แล้วตรวจสอบความถูกต้องตามไปด้วย สอนครั้งที่ 4 เป็นการสอนพวกบัวเหล่าที่ 4 ในครั้งนี้จะเหลือนักเรียนเพียงไม่กี่คน ครูจะสอนให้คิดทีละขั้นทำทีละตอน ซึ่งให้เห็นทีละบรรทัดช้า ๆ หรืออาจให้พวกบัวเหล่าที่ 1 มาช่วยสอน การสอนด้วยวิธีนี้นักเรียนทุกคนจะประสบความสำเร็จในการเรียนทุกคน ต่างกันที่เวลาในการทำให้เกิดการเรียนรู้ เมื่อนักเรียนทำได้ ทำเป็น ก็จะเกิดความสุข มีความมั่นใจในตนเอง ภูมิใจในผลงาน

2. เทคนิคการสร้างองค์ความรู้ มีขั้นตอนดังนี้

2.1 การสร้างองค์ความรู้ก่อนเรียน เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้ก่อนจะเรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่ง โดยเชื่อมโยงกับประสบการณ์เดิม ประสบการณ์ในชีวิตจริง ฝึกให้นักเรียนได้ค้นพบความรู้ด้วยตนเอง

2.2 การสร้างองค์ความรู้ระหว่างเรียน เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นระหว่างการเรียนการสอนเรื่องใดเรื่องหนึ่ง

2.3 การสร้างองค์ความรู้หลังเรียน เป็นการสร้างองค์ความรู้หลังจากเรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่งจบแล้ว

3. เทคนิคการใช้สื่อการเรียนรู้ การใช้สื่อการเรียนรู้เพื่อช่วยสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ครูต้องรู้จักเลือกใช้สื่อการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาที่จะสอน ซึ่งอาจเป็นสื่อรูปธรรม สื่อกึ่งรูปธรรม และสื่อนามธรรม หากครูเลือกใช้สื่อไม่เหมาะสมก็จะทำให้เกิดปัญหาได้ทันที การใช้สื่อการเรียนรู้จึงต้องใช้ให้เหมาะสมกับเนื้อหาสาระและเวลา และเมื่อนักเรียนเข้าใจดีแล้วไม่จำเป็นต้องใช้สื่ออีกต่อไป ครูควรใช้สื่อช่วยให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไปสู่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นนามธรรม

4. เทคนิคการสร้างความคงทนทางคณิตศาสตร์ เป้าหมายที่สำคัญของการสอนคณิตศาสตร์คือ สอนแล้วนักเรียนมีความคงทนในการเรียนรู้ สามารถนำความรู้ที่เรียนมาแล้วไปใช้อย่างถูกต้องตลอดเวลา ดังนั้นเมื่อสอนเนื้อหาใดจบแล้วอย่าผ่านแล้วผ่านเลย ต้องหมั่นให้นักเรียน

กลับไปทบทวนอยู่เสมอ วิธีการก็คือครูต้องทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมสำหรับทบทวนไว้ใช้เอง เลือกเฉพาะที่มีความจำเป็นสำหรับการนำไปใช้

5. เทคนิคการเลือกวิธีสอน การสอนคณิตศาสตร์ในแต่ละครั้งครูต้องมีเทคนิคในการเลือกวิธีสอนมาใช้ให้เหมาะสมกับเนื้อหา สามารถบูรณาการวิธีสอนหลายวิธีเข้าด้วยกันเพราะการสอนเนื้อหาใดเนื้อหาหนึ่งอาจใช้วิธีการสอนหลายวิธีร่วมกันเพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ ครูไม่ควรยึดติดกับวิธีสอนเพียงวิธีเดียว

6. เทคนิคการเลือกจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการพัฒนาสมองทั้งสองซีก สมองมนุษย์มีสองซีก ทำหน้าที่แตกต่างกัน เนื้อหาคณิตศาสตร์โดยส่วนใหญ่จะเน้นพัฒนาสมองซีกซ้าย ซึ่งก่อนที่จะมาสู่ซีกซ้ายครูควรจัดกิจกรรมโดยการผ่านสมองซีกขวาก่อน

7. เทคนิคการใช้ ICT ในการสอนคณิตศาสตร์ ปัจจุบันเทคโนโลยีสารสนเทศเข้ามามีบทบาทในการเรียนการสอนมากขึ้น ครูสอนคณิตศาสตร์ต้องปรับเปลี่ยนวิธีการสอนให้ทันสมัยอยู่ตลอดเวลาโดยใช้เครือข่ายคอมพิวเตอร์สำหรับเป็นเครื่องมือในการเสาะแสวงหาความรู้ ความรู้สามารถค้นเพิ่มเติมได้ตลอดเวลา การเรียนไม่จำกัดอยู่ภายในห้องเรียนเท่านั้น การฝึกให้นักเรียนได้รู้จักค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง จะเป็นแนวทางในการฝึกให้นักเรียนได้เรียนรู้ตลอดชีวิต

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า เทคนิคการสอนเป็นกลวิธีหนึ่งที่สอดแทรกในการดำเนินการสอน ซึ่งการสอนเนื้อหาในแต่ละเรื่องอาจใช้เทคนิคที่แตกต่างกัน เทคนิคการสอนที่เหมาะสมกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้แก่ เทคนิคการยกตัวอย่าง เทคนิคการแก้โจทย์ปัญหา เทคนิคการใช้สื่อการสอน เทคนิคนันทนาการ เทคนิคการสร้างองค์ความรู้ และเทคนิคการใช้ ICT เป็นต้น

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

Krulik and Rudnick (1988) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์ที่บุคคลไม่คุ้นเคยมาก่อน โดยต้องใช้ความรู้ ทักษะกระบวนการ และความเข้าใจในการที่จะหาคำตอบให้ได้มา

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวิ (2542) ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าเป็น สภาพการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ซึ่งต้องการหาคำตอบ คำตอบที่ได้จะเกี่ยวข้องกับ ปริมาณด้วย ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีมากมายหลายชนิด เช่น ปัญหาที่ปรากฏในหนังสือเรียนทั่ว ๆ ไป ปัญหาให้ค้นหา ปัญหาให้พิสูจน์

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ ต้องการคำตอบซึ่งบุคคลต้องใช้สาระความรู้ และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทาง หรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้คิดหาคำตอบไม่คุ้นเคยกับสถานการณ์นั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด สถานการณ์หรือคำถามข้อใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ ขึ้นอยู่กับ บุคคลผู้คิดหาคำตอบ บางสถานการณ์อาจเป็นปัญหาสำหรับบางคน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับ คนอื่น ๆ ก็ได้

สิริพร ทิพย์คง (ม.ป.ป.) กล่าวว่า ปัญหาคือ คำถามที่ต้องการคำตอบ ปัญหาของคน ๆ หนึ่ง อาจไม่ใช่ปัญหาของคนหนึ่ง ในการแก้ปัญหานักเรียนจะต้องมีการวางแผน รู้จักวิธีเลือกความคิด รวบรวม ทักษะ และหลักการที่นักเรียนได้เรียนไปแล้วมาใช้ให้เหมาะสม ในการแก้ปัญหานั้น ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือ สถานการณ์ที่ต้องการคำตอบ โดยที่ผู้ตอบไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที แต่ต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ และทักษะในการแก้ปัญหามารวมเข้าด้วยกันเพื่อกำหนด แนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบนั้น ๆ

กระบวนการและขั้นตอนการแก้ปัญหามathematics

เนื่องจากการแก้ปัญหามathematicsเป็นการดำเนินการอย่างเป็นระบบ ที่มีความเชื่อมโยงระหว่างข้อมูล ที่มีอยู่ในปัญหากับผู้แก้ปัญหามathematics ดังนั้นจึงจำเป็นต้องดำเนินการตามขั้นตอนเพื่อที่จะได้มาซึ่งคำตอบที่มีประสิทธิภาพ รวมทั้งวิธีการแก้ปัญหามathematicsที่หลากหลาย ซึ่งได้มีผู้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหามathematics ดังนี้

Polya (1957) ได้กล่าวถึงกระบวนการแก้ปัญหามathematicsไว้ 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) เป็นขั้นที่ต้องทำความเข้าใจกับ สัญลักษณ์ต่าง ๆ และพิจารณาว่าปัญหามathematicsต้องการอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง มีเงื่อนไขอะไรบ้างที่

กำหนดมาให้และเพียงพอที่จะแก้ปัญหาหรือไม่ ซึ่งนักเรียนจะต้องพิจารณาปัญหาอย่างตั้งใจ ซ้ำแล้วซ้ำอีกจนกระทั่งสามารถสรุปออกมาได้

2. **ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา (Devising a plan)** ขั้นตอนนี้เป็นขั้นที่ต้องพิจารณาจะแก้ปัญหาวัยวิธีใด และแก้อย่างไร โดยต้องมองความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ในปัญหาอย่างชัดเจนก่อน สิ่งที่ต้องการหา มีความสัมพันธ์กับข้อมูลที่ให้มาอย่างไร ซึ่งขั้นนี้เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปัญหาร่วมกับประสบการณ์ของผู้แก้ปัญหาที่มีอยู่แล้ว มากำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน (Carrying out the plan)** เป็นขั้นที่ต้องลงมือปฏิบัติตามแผนการที่วางไว้ในขั้นที่ 2 เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาที่ต้องการ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจนแล้วลงมือปฏิบัติ ซึ่งเป็นขั้นการใช้ทักษะในการคิดคำนวณ หรือเลือกวิธีการคิดคำนวณที่เหมาะสม

4. **ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ (Looking back)** เป็นขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ โดยผู้แก้ปัญหามองย้อนกลับไปยังขั้นตอนต่าง ๆ ที่ผ่านมาเพื่อพิจารณาความถูกต้องที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นของคำตอบและขั้นตอนการแก้ปัญหา หากพบว่าไม่ถูกต้องขั้นตอนใดก็ปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้อง

Krulik and Rudnick (1984) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาไว้ 5 ขั้นตอนดังนี้

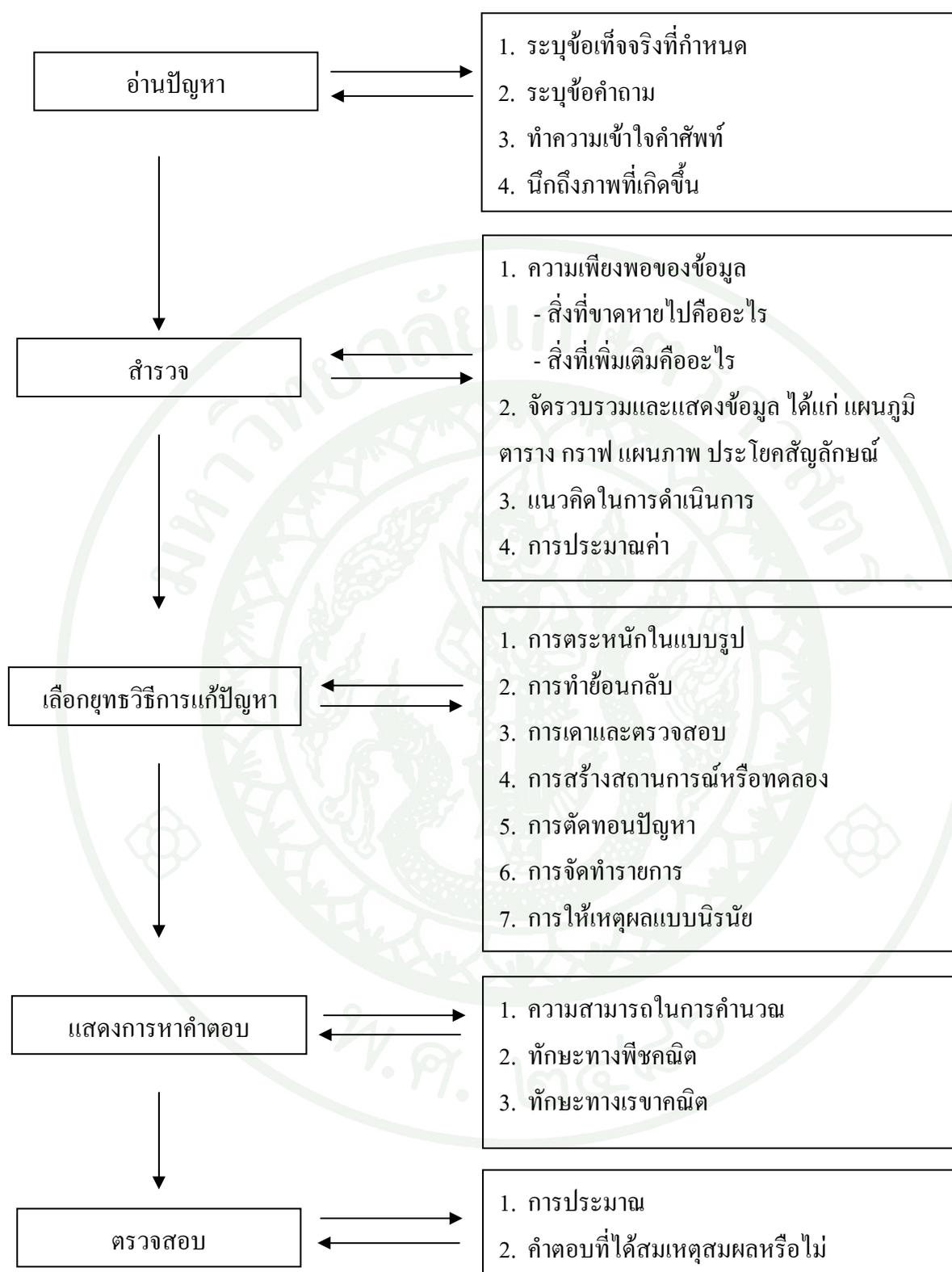
ขั้นที่ 1 อ่านปัญหา (Read the problem)

ขั้นที่ 2 สำรวจ (Explore)

ขั้นที่ 3 เลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา (Select a strategy)

ขั้นที่ 4 แสดงการหาคำตอบ (Solve the problem)

ขั้นที่ 5 ทบทวน มองย้อนกลับ ขยายผลการแก้ปัญหา (Review, look back, extend the solution) โดยมีการอธิบายด้วยแผนภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 2.1 แผนภาพแสดงกระบวนการแก้ปัญหา

ที่มา: Krulik and Rudnick (1984)

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวิ (2542) ได้สรุปกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มี 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 วิเคราะห์ปัญหา ทำความเข้าใจปัญหาโดยอาศัยทักษะการแปลความหมาย การวิเคราะห์ข้อมูล โจทย์ถามอะไรและให้ข้อมูลอะไรบ้าง จำแนกแยกแยะสิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาให้แยกออกจากกัน

ขั้นที่ 2 การวางแผนแก้ปัญหา จะสมมติสัญลักษณ์อย่างไร จะต้องหาว่าข้อมูลต่าง ๆ เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันอย่างไร สิ่งที่ไม่รู้เกี่ยวข้องกับสิ่งที่รู้แล้วอย่างไร หาวิธีการแก้ปัญหาโดยนำกฎเกณฑ์ หลักการ ทฤษฎีต่าง ๆ ประกอบกับข้อมูลที่มีอยู่แล้วเสนอออกมาในรูปของวิธีการ

ขั้นที่ 3 การคิดคำนวณหาคำตอบที่ถูกต้อง เป็นขั้นที่ต้องคำนวณคิดหาคำตอบที่ถูกต้อง สมบูรณ์ที่สุดของปัญหา โดยวิธีการตามแผนที่วางไว้ จะต้องรู้จักวิธีการคำนวณที่เหมาะสม ตลอดจนตรวจสอบวิธีการและคำตอบด้วย

ทิสนา เขมมณี (2548) ได้กล่าวถึง วิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ ว่ามีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นสังเกต โดยให้นักเรียนได้ศึกษาข้อมูล รับรู้และทำความเข้าใจในปัญหาจนสามารถสรุป และตระหนักในปัญหานั้น ๆ ได้

ขั้นที่ 2 วิเคราะห์ โดยให้นักเรียนได้อภิปราย หรือแสดงความคิดเห็นเพื่อแยกแยะประเด็นปัญหา สภาพ สาเหตุ และลำดับความสำคัญของปัญหา

ขั้นที่ 3 สร้างทางเลือก โดยให้นักเรียนแสวงหาทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย ซึ่งอาจมีการทดลอง ค้นคว้า ตรวจสอบ เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการทำกิจกรรมกลุ่มและควรมีการกำหนดหน้าที่ในการทำงานให้แก่กันด้วย

ขั้นที่ 4 เก็บข้อมูลประเมินทางเลือก โดยนักเรียนปฏิบัติตามแผนงาน และบันทึกการปฏิบัติงาน เพื่อรายงานและตรวจสอบความถูกต้องของทางเลือก

ขั้นที่ 5 สรุป โดยนักเรียนสังเคราะห์ความรู้ด้วยตนเองซึ่งอาจจัดทำในรูปของรายงาน

จากที่กล่าวมาข้างต้นพอจะสรุปได้ว่าขั้นตอนการแก้ปัญหาที่มีขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นอ่านทำความเข้าใจ วิเคราะห์ปัญหา
2. ขั้นวางแผน สร้างทางเลือกในการแก้ปัญหา
3. ขั้นคิดคำนวณหาคำตอบ
4. ขั้นตรวจสอบและสรุปคำตอบ

ยุทธวิธีในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์

ยุทธวิธีในการแก้ปัญหเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนมีความก้าวหน้าในการแก้ปัญหา ซึ่งยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นก็มีอยู่มากมาย ในการเลือกยุทธวิธีมาใช้นั้นก็ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของปัญหา และความสามารถของผู้แก้ปัญห ซึ่งยุทธวิธีในการแก้ปัญหามีผู้เสนอไว้ดังนี้

Kennedy and Tips (1994) ได้เสนอยุทธวิธีการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การค้นหาแบบรูป (Look for pattern)
2. ใช้รูปแบบ (Use a model)
3. ใช้การวาดภาพหรือแผนผัง (Use a drawing or diagram)
4. การแสดงออก (Act it out)
5. สร้างตารางและ/หรือกราฟ (Construct a table and / or a graph)
6. การเดาและตรวจสอบ (Guess and check)
7. แจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด (Account for all possibilities)

8. ทำปัญหาให้เข้าใจง่ายขึ้นหรือแยกปัญหาออกเป็นส่วนย่อย ๆ (Simplify or break into)

9. การทำย้อนกลับ (Work backward)

10. เปลี่ยนมุมมองของปัญหา (Change your point of view)

ยุพิน พิพิธกุล (2539) ได้กล่าวถึงยุทธวิธีในการแก้ปัญหามาดังนี้

1. วิธีการคาดคะเนหรือเดา การลองเดาเสียก่อนเพื่อจะได้หาสิ่งที่จะต้องอ้างอิงต่อไป
2. ควรทำให้เป็นอย่างง่าย ทำโจทย์ให้เป็นกรณีง่าย ๆ เท่าที่จะทำได้ แล้วค้นหารูปแบบและความสัมพันธ์ เพื่อขยายไปยังเรื่องที่ซับซ้อนต่อไป
3. การทดลอง ใช้การทดลองเพื่อแก้ปัญห เช่น ใช้การทอดลูกเต๋า สร้างรูป วัด คำนวณ คอยสังเกตดูว่าผลจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร เป็นการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลมาพิจารณา
4. การสร้างแผนภาพ เป็นวิธีการที่ดี เช่น จะสอนเรื่องสมการก็เขียนภาพประกอบจะช่วยให้โจทย์ปัญหาเป็นรูปธรรมที่เห็นได้ชัดเจน ซึ่งจะช่วยให้มองเห็นแนวทางในการคิด
5. การทำตาราง จะช่วยให้มองเห็นข้อมูลที่เหมือนกันหรือต่างกัน หรือแตกต่าง เห็นแบบรูปได้ชัดเจน อันจะนำไปสู่การสรุปการแก้ปัญหาก็ได้
6. การเขียนกราฟ กราฟเป็นสิ่งที่แทนข้อมูลต่าง ๆ ช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล เห็นแนวทางของสิ่งที่น่าจะเป็นไปได้

ฉวีวรรณ เสวตมัลย์ (2544) ได้สรุปยุทธวิธีการแก้ปัญหามาดังนี้

1. กำหนดคุณลักษณะของปัญหา (Characterize the problem) อะไรคือสิ่งที่กำหนด อะไรคือสิ่งที่ต้องการ อะไรขาดหายไป ท่านกำลังค้นหอะไรอยู่ ข้อมูลที่จำเป็นกำหนดมาให้หรือไม่ จงดูตัวอย่างหลาย ๆ ข้อ มีกรณีพิเศษใดหรือไม่ ที่กำหนดขอบข่ายของคำตอบที่เป็นไปได้ ท่านสามารถ

ทำปัญหานั้นให้ง่ายลง โดยใช้ประโยชน์จากการสมมาตรหรือทำข้อความ “โดยไม่สูญเสียความเป็นกรณีทั่วไป” เพื่อย่อโจทย์ทั้งข้อให้เป็นกรณีเฉพาะได้หรือไม่

2. ท่านเคยเห็นปัญหานี้มาก่อนหรือไม่ (Have you seen this before?) หรือท่านเคยเห็นปัญหานี้ในรูปแบบที่แตกต่างไปเพียงเล็กน้อยไหม ถ้าเคย ท่านสามารถถ่ายทอดไปสู่ปัญหานี้ แล้วใช้วิธีการบางตอนที่เคยแก้ปัญหาคเดิม มาใช้ได้หรือไม่ จงตั้งปัญหาที่คล้ายคลึงกันที่มีตัวแปรน้อยกว่าและแก้โดย “การคล้าย” เงื่อนไขในข้อหนึ่งหรือมากกว่านั้น ท่านสามารถเรียนรู้อะไรเกี่ยวกับปัญหาคเดิมบ้างหรือไม่

3. ค้นหาแบบรูป (Look for a pattern) โดยการพิจารณาลักษณะโดยภาพรวมของอนุกรม $1 + 2 + \dots + 100$ หนุ่มน้อย Carl Friedrich Gauss ก็สร้างรูปแบบนี้ได้ $1 + 100 = 2 + 99 = \dots = 101$ ความเข้าใจหยั่งรู้นี้ได้นำไปสู่การสังเกตทันทีว่า จำนวนอีก 50 คู่ เช่นนี้ก็สามารถสร้างขึ้นมาได้ โจทย์การหาผลบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 ก็กลายเป็นงานหาผลคูณอย่างง่าย $50 \times 101 = 5,050$

4. การทำให้ง่ายลง (Simplification) บางครั้งความสัมพันธ์หรือรูปแบบง่าย ๆ อาจถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบหรือนิพจน์ที่ “ยุ่งเหยิง” จงพยายามแทนค่ารูปที่ยุ่งเหยิงด้วยสัญลักษณ์ง่าย ๆ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ที่อยู่เบื้องหลัง การจัดพจน์ในการพิมพ์ที่ซับซ้อนเสียใหม่อาจจะนำไปสู่ผลสำเร็จปลายทางเดียวกัน

5. การตัดทอน (Reduction) ปัญหาของท่านสามารถแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่จะแก้ได้ง่ายขึ้นหรือไม่

6. การทำย้อนกลับ (Work backwards) เมื่อท่านพยายามพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ท่านทราบอยู่แล้วว่าเป็นจริง อาจจะง่ายขึ้นถ้าเริ่มต้นทำจากข้อสรุปขึ้นไปอย่างมีเหตุผล

7. จัดทำรายการ (Make a list) ถ้าท่านใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มันอาจจะเป็นไปได้ที่จะจัดทำรายการทั้งหมดของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทุกชั้นของกระบวนการบางอย่าง ถ้าท่านสนใจในผลลัพธ์ใดโดยเฉพาะของกระบวนการนั้น มันก็ควรจะรวมอยู่ในรายการทั้งหมดนั้น

8. สถานการณ์จำลองและแบบจำลอง (Simulation and modeling) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อาจสร้างได้โดยการเลียนแบบกระบวนการที่ซับซ้อนในคณิตศาสตร์ หรือ โลกแห่งความเป็นจริงนั้น ถ้าผลที่ได้รับโดยใช้สถานการณ์จำลองถูกต้องแม่นยำแล้ว สถานการณ์จำลองนั้นคือความสำเร็จ

9. ตรรกศาสตร์ทางการ (Formal Logic) อุปนัยทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพในคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่นเดียวกับเทคนิคที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยอ้อม (indirect prove) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันว่าเป็นการพิสูจน์แบบ Contrapositive ด้วย

10. คำตอบของท่านมีความหมายหรือไม่ ตรวจสอบคำตอบของท่านโดยใช้สามัญสำนึกและการให้เหตุผลแบบมีทางเลือก

11. ข้อสุดท้าย เมื่อใดก็ตามที่ท่านพยายามจะแก้ปัญหา จงค้นหาวิธีหลาย ๆ วิธี เพื่อเป็นตัวแทนลักษณะของปัญหา จงสร้างรูป และระบุชื่อประกอบ จัดทำรายการคุณลักษณะ เขียนรายการแสดงความสัมพันธ์ เป็นต้น ยิ่งท่านมีวิธีแทนปัญหาได้มากเท่าใด ก็ยังมีแนวโน้มที่ท่านจะค้นพบความสัมพันธ์ที่แอบแฝงอยู่ ซึ่งเป็นกุญแจไขไปสู่คำตอบได้มากเท่านั้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550) ได้กล่าวถึงยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดังนี้

1. ยุทธวิธีการเดาและการตรวจสอบ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ยุทธวิธีการเดาและการตรวจสอบเป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ปัญหากำหนดให้ ผสมผสานกับประสบการณ์เดิมที่เกี่ยวข้องนำมาใช้เป็นกรอบในการคาดเดาคำตอบของปัญหา แล้วตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องของการเดาครั้งแรก ๆ ใช้เป็นข้อมูลในการสร้างกรอบในการเดาครั้งต่อไปที่มีความชัดเจนขึ้นและเข้าถึงคำตอบของปัญหาได้เร็วขึ้น การเดาต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดาเข้าใกล้คำตอบที่ต้องการมากที่สุด

2. ยุทธวิธีประมาณคำตอบ ในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการคิดคำนวณ เมื่อกำหนดแนวทางและวิธีการคิดคำนวณได้แล้ว ในการหาคำตอบอาจใช้การประมาณค่าจำนวนต่าง ๆ ให้มีค่าใกล้เคียงจำนวนเต็มหน่วย จำนวนเต็มสิบ จำนวนเต็มร้อย หรือจำนวนเต็มอื่น ๆ แล้วแต่กรณี และประมาณคำตอบจากการคิดคำนวณอย่างคร่าว ๆ ซึ่งสามารถดำเนินการได้ค่อนข้างรวดเร็วกว่าการคิดคำนวณ

ตรง ๆ บันทึกราคำตอบที่ได้จากการประมาณนี้ไว้ คำตอบที่ได้จากการประมาณจะช่วยให้มองเห็นภาพของคำตอบที่ต้องการและสามารถนำมาเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากการคำนวณตามปกติ เพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้ของคำตอบ และในปัญหาบางปัญหา ผลจากการประมาณคำตอบสามารถนำมาใช้เป็นข้อมูลในการหาคำตอบที่ต้องการได้

3. ยุทธวิธีการเขียนภาพหรือแผนภาพ ศักยภาพในการแก้ปัญหาของนักเรียนมีข้อจำกัดจนกระทั่งเมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เด็กเล็กก่อนข้างมีความยากลำบากในการใช้สัญลักษณ์เพื่อแก้ปัญหา ทางเลือกที่ดีทางหนึ่งที่เป็นรูปธรรมมากกว่าคือ การใช้ภาพและแผนภาพสำหรับเด็กเล็กสามารถใช้ภาษาที่แทนด้วยรูปภาพในการบันทึกข้อสนเทศที่เกี่ยวกับการปัญหา เมื่อเด็กมีวุฒิภาวะสูงขึ้น สิ่งแทนด้วยรูปภาพและแผนภาพจะเปลี่ยนไปเป็นตัวเลขและนิพจน์อย่างอื่นทางคณิตศาสตร์ การเขียนภาพหรือแผนภาพช่วยให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น และบางครั้งสามารถหาคำตอบของปัญหาได้โดยตรงจากการเขียนภาพหรือแผนภาพนั้น

4. ยุทธวิธีการสร้างตัวแบบ ตัวแบบพบอยู่มากมายในคณิตศาสตร์ ตัวแบบมีประโยชน์สำหรับการแก้ปัญหาที่คุ้นเคยและไม่คุ้นเคย นักเรียนควรจะได้รับ การกระตุ้นให้ใช้ตัวแบบที่เหมาะสมในการทำความเข้าใจและกำหนดแนวคิดในการแก้ปัญหา เราสามารถใช้สิ่งต่าง ๆ ในการสร้างตัวแบบของสถานการณ์ปัญหา

5. ยุทธวิธีการลงมือปฏิบัติ การลงมือทำเป็นยุทธวิธีแก้ปัญหาประเภทหนึ่งที่เป็นไปตามธรรมชาติ โดยปกติอาจทำคร่าว ๆ ก่อน ไม่เน้นความละเอียดและประณีต เพื่อให้เห็นภาพรวมของงานที่ทำ เป็นยุทธวิธีที่ดีที่ทำให้นักเรียนได้คิดผ่านการกระทำและทำให้มองเห็นภาพของสถานการณ์ที่เป็นรูปธรรมเข้าใจง่าย

6. ยุทธวิธีแจกแจงรายการหรือการสร้างตาราง การแจกแจงรายการเป็นการนำเสนอสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา ได้แก่ ข้อมูลที่กำหนดกรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจากข้อมูลที่กำหนด โดยนำเสนอให้เป็นระบบ มีระเบียบ ครบถ้วนเป็นหมวดหมู่ ป้องกันการเสนอซ้ำซ้อน อาจนำเสนอในรูปแบบตาราง เพื่อให้การพิจารณาใช้ประโยชน์จากข้อมูลทำได้สมบูรณ์ การแจกแจงรายการอาจนำเสนออย่างครบถ้วนทุกประเด็น เมื่อมีกรณีต่าง ๆ ที่จะนำเสนอมีจำนวนจำกัดหรืออาจนำเสนอเพียงบางรายการที่จำเป็นและเพียงพอต่อการหาคำตอบของปัญหาก็ได้

7. ยุทธวิธีสร้างตาราง เป็นการจัดกระทำกับข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาให้เป็นระบบระเบียบ โดยนำมาเขียนลงในตารางช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล ซึ่งนำไปสู่การหาคำตอบที่ต้องการ การใช้ยุทธวิธีสร้างตารางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีประเด็นที่ควรพิจารณาดังนี้

- 7.1 สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- 7.2 สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี
- 7.3 สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด (หรือมากกว่า)
- 7.4 สร้างตารางเพื่อค้นหาแนวโน้มทั่วไปของความสัมพันธ์

8. ยุทธวิธีค้นหาแบบรูป แบบรูปเป็นสิ่งที่ปรากฏอยู่ในธรรมชาติและเป็นสิ่งที่มีมนุษย์สร้างขึ้น แบบรูปเป็นสาระสำคัญที่เด่นชัดในคณิตศาสตร์ การค้นหาและการใช้แบบรูปสามารถประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เด็กเล็ก ๆ สามารถค้นหาและพรรณนาแบบรูปได้จากการร้อยลูกปัด การเล่นไม้บล็อก ในระดับประถมศึกษาเด็กสามารถค้นหาและอธิบายแบบรูปของจำนวน เช่น $2, 4, 6, 8, \dots$; $30, 27, 24, 21, \dots$ นักเรียนที่มีวุฒิภาวะสูงกว่าจะทำกิจกรรมเกี่ยวกับแบบรูปที่เป็นนามธรรมและมีความซับซ้อนได้ดีกว่า

9. ยุทธวิธีเปลี่ยนมุมมอง การเปลี่ยนมุมมองดูเหมือนว่าเป็นการเปลี่ยนแนวทางการคิดมากกว่าที่จะเป็นยุทธวิธี ยุทธวิธีนี้บางทีเรียก “หยุดคิดก่อน” (breaking out) เพราะว่ามีผู้แก้ปัญหาต้องหยุดคิดมองปัญหาให้รอบด้านหาวิธี หามุมมองของปัญหาใหม่ ซึ่งอาจแปลกแยกไปจากวิธีปกติธรรมดา

10. ยุทธวิธีนี้ถึงปัญหาที่คล้ายกัน เมื่อเผชิญกับปัญหา สิ่งหนึ่งที่ผู้แก้ปัญหาคควรกระทำคือการพิจารณาว่าปัญหานี้คล้ายกับที่เคยแก้มาก่อนหรือไม่ ถ้าเป็นปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่เคยแก้มาก่อน หรือมีบางส่วนของปัญหาคคล้ายกับปัญหาที่เคยแก้มาก่อน ผู้แก้ปัญหาคต้องคิดทบทวนถึงวิธีการหรือยุทธวิธีที่เคยใช้แล้วพิจารณาเพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่กำลังเผชิญอยู่

11. ยุทธวิธีทำปัญหาให้ง่ายหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย ปัญหาบางปัญหาคดูเหมือนเป็นปัญหาใหม่ อาจเป็นด้วยขนาดของจำนวนหรือความซับซ้อนของปัญหา การทำปัญหาให้ง่ายลงจะช่วยให้สามารถกำหนดแนวคิดการแก้ปัญหาและนำแนวคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหาคที่กำหนดได้ วิธีการหนึ่งใน

การทำปัญหาให้ง่ายคือการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วน ๆ หรือเริ่มด้วยปัญหาที่มีระดับความซับซ้อนน้อยลง การทำปัญหาให้ง่ายสามารถนำมาใช้เพื่อให้สามารถค้นหาแบบรูปของคำตอบได้

12. ยุทธวิธีใช้ตัวแปร การแก้ปัญหาคด้วยวิธีนี้กระทำโดยสมมติตัวแปรแทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า สร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ตามเงื่อนไขที่ปัญหากำหนดกับตัวแปรที่สมมติขึ้น แล้วพิจารณาหาคำตอบของปัญหาจากความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้น ปัญหาบางปัญหาสามารถสร้างความสัมพันธ์ในรูปสมการที่สอดคล้องกับปัญหาได้ การแก้ปัญหาลักษณะนี้ทำโดยแก้สมการ แล้วพิจารณาความเป็นไปได้จากคำตอบของสมการนั้น

13. ยุทธวิธีให้เหตุผล การให้เหตุผลในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ เป็นการใชข้อมูลต่าง ๆ ที่กำหนดในปัญหาผนวกกับข้อความรู้ที่ทราบมาก่อนเป็นเหตุบังคับไปสู่ผลซึ่งเป็นคำตอบของปัญหา และมักใช้ร่วมกับยุทธวิธีอื่น ๆ

14. ยุทธวิธีทำย้อนกลับ ยุทธวิธีทำย้อนกลับเป็นยุทธวิธีเฉพาะซึ่งสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหา โดยที่การแก้ปัญหเริ่มต้นจากสิ่งที่ปัญหากำหนดให้แล้วหาความเชื่อมโยงไปสู่ปัญหาที่ต้องการทำได้ค่อนข้างยาก แต่ว่าการเริ่มต้นพิจารณาสิ่งที่ปัญหาต้องการแล้วหาความเชื่อมโยงย้อนกลับไปสู่สิ่งที่ปัญหากำหนดให้ทำได้ง่ายกว่า เป็นยุทธวิธีที่มีคุณค่าสำหรับนักเรียนในการเรียนรู้ เป็นวิธีการที่ชาญฉลาดในการช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะการให้เหตุผลเป็นยุทธวิธีที่ใช้การคิดวิเคราะห์จากผลไปหาเหตุ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปยุทธวิธีการแก้ปัญหได้ว่า ยุทธวิธีการปัญหาเป็นแนวทางการแก้ปัญหที่ผู้แก้ปัญหสามารถนำมาใช้เพื่อให้การแก้ปัญหานั้นสำเร็จได้ด้วยดี ซึ่งมีวิธีดังนี้ การค้นหาแบบรูป การเดาหรือคาดคะเน การใช้แผนภาพหรือตาราง การเปลี่ยนมุมมอง การแจกแจงเป็นกรณีย่อย ๆ การดำเนินการแบบย้อนกลับ และการใช้ตัวแปร ซึ่งยุทธวิธีการแก้ปัญหแต่ละวิธีอาจจะเหมาะกับปัญหาใดปัญหาหนึ่ง แต่อาจจะไม่เหมาะกับอีกปัญหาหนึ่ง ดังนั้นต้องเลือกใช้ให้เหมาะสม

การจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

ความหมายของเทคนิค K-W-D-L

วัชรรา เล่าเรียนดี (2553) ได้กล่าวว่าเทคนิค K-W-D-L หมายถึง เทคนิคที่ช่วยชี้นำการคิดแนวทางในการอ่านและหาคำตอบของคำถามสำคัญต่าง ๆ จากเรื่องนั้น และยังสามารถนำไปใช้ในการเรียนรู้ และเร้าความสนใจเป็นอย่างดี ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. K (What we **know**) เรารู้อะไรหรือใจหัดบออะไรเราบ้าง
2. W (What we **want** to know) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร
3. D (What we **do**) เรามีวิธีการอย่างไรบ้าง หรือมีวิธีการดำเนินการเพื่อหาคำตอบอย่างไร
4. L (What we **learned**) เราเรียนรู้้อะไรบ้าง

Shaw *et al.* (1997) อาจารย์แห่งมหาวิทยาลัยมิสซิสซิปปี ประเทศสหรัฐอเมริกา ได้นำเทคนิค K-W-L ของ Ogle ที่พัฒนาขึ้นสำหรับช่วยการอ่านเพื่อความเข้าใจ เป็นเทคนิคที่ชี้แนะให้ผู้อ่านใช้ขั้นตอนเช่นเดียวกับผู้อ่านที่เชี่ยวชาญแล้ว โดยได้นำมาประยุกต์ใช้กับวิชาคณิตศาสตร์และได้เสนอขั้นตอนการเรียนรู้ไว้ 4 ขั้นตอน มาจากคำถามดังนี้

ขั้นที่ 1 K (what we know) รู้้อะไรหรือใจหัดบออะไรบ้าง

ขั้นที่ 2 W (what we want) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร หรือใจหัดให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง

ขั้นที่ 3 D (what we do) เราทำอะไร อย่างไร

ขั้นที่ 4 L (what we learn) เราเรียนรู้้อะไร หรือคำตอบที่ได้ และบอกวิธีคิดคำตอบอย่างไร

ขั้นตอนการสอนโดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

Shaw *et al.* (1997) ได้นำเทคนิค K-W-L-D มาใช้ในการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยมีขั้นตอน 4 ขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งกลุ่มนักเรียนช่วยกันหาสิ่งที่รู้เกี่ยวกับโจทย์ สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ โดยใช้บัตรกิจกรรมเทคนิค K-W-D-L

ขั้นที่ 2 นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปราย เพื่อหาสิ่งที่ต้องการเรียนรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับโจทย์ หาความสัมพันธ์ของโจทย์ และกำหนดวิธีการในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 นักเรียนช่วยกันดำเนินการเพื่อแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 4 นักเรียนแต่ละกลุ่มสรุปเป็นความรู้ที่ได้จากการแก้โจทย์ปัญหา โดยให้ตัวแทนกลุ่มออกมาออกมานำเสนอความคิดในการแก้โจทย์ปัญหา และสรุปเป็นความรู้ที่ได้จากการเรียน

วัชรรา เล่าเรียนดี (2553) กล่าวถึงขั้นตอนการสอน โดยใช้เทคนิค K-W-D-L ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นนำ

- 1.1 ทบทวนความรู้เดิม
- 1.2 แจกจุดประสงค์การเรียนรู้
- 1.3 เร้าความสนใจด้วยเกมคณิตศาสตร์

2. ขั้นสอนเนื้อหาใหม่

2.1 ครูนำเสนอโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนทั้งชั้น แล้วให้นักเรียนร่วมกันอ่านโจทย์และแก้ปัญหา ตามแผนผัง K-W-D-L ดังนี้

K คือ ครูและนักเรียนร่วมกันหาสิ่งที่โจทย์บอให้ทราบ

W คือ ครูและนักเรียนร่วมกันหาสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวางแผนการแก้ปัญหา

D คือ ครูและนักเรียนร่วมกันดำเนินการแก้ปัญหทาง

L คือ ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปการแก้ปัญหา

2.2 นักเรียนฝึกปฏิบัติเป็นกลุ่มย่อย โดยครูคอยแนะนำ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม และแก้โจทย์ปัญหาตามบัตรกิจกรรม K-W-D-L

3. ขั้นฝึกทักษะโดยอิสระ นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากแบบฝึกหัดที่ครูสร้างขึ้น โดยเป็น โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่เรียน และสถานการณ์อื่น ๆ

4. ขั้นสรุปบทเรียนและวัดประเมินผล นักเรียนทำแบบทดสอบประจำหน่วยการเรียนรู้ มีการสอนซ่อมเสริมเมื่อนักเรียนยังไม่เข้าใจ

นอกจากขั้นตอนของเทคนิค K-W-D-L ดังกล่าว ในการใช้เทคนิค K-W-D-L ในการสอน คณิตศาสตร์ครูต้องเตรียมแผนผังหรือตาราง K-W-D-L โดยครูและนักเรียนร่วมกันเรียนรู้ทำความเข้าใจ โดยมีแผนผังหรือตาราง K-W-D-L ประกอบให้เห็นชัดเจนทุกคนด้วยในการร่วมมือกันฝึก และทำแบบฝึกหัด นอกจากนี้นักเรียนจะต้องมีแผนผังหรือตาราง K-W-D-L ของตัวเองเพื่อเติม ข้อความเช่นกัน แต่ควรให้ใช้ร่วมกัน 2 คนต่อ 1 ชุด จะเหมาะสมเพื่อเสริมการทำงานร่วมกัน แผนผัง K-W-D-L แสดงไว้ดังตาราง

ตารางที่ 2.1 แผนผัง K-W-D-L

K	W	D	L
โจทย์บอกอะไรบ้าง	โจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีอะไรได้บ้าง	ดำเนินการตาม กระบวนการแก้ โจทย์ปัญหา	คำตอบที่ได้ และ บอกวิธีคิด คิดคำตอบอย่างไร
1.....	สิ่งที่โจทย์ต้องการ	แสดงวิธีทำ	คำตอบ.....
2.....	ทราบคือ	วิธีที่ 1	
3.....	สรุปขั้นตอนที่ใช้
	วิธีการแก้ปัญหาคือ	วิธีที่ 2
	
	

ที่มา: วัชรรา เล่าเรียนดี (2553)

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญดังนี้

1. ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ครูทบทวนความรู้เดิม

2. ขั้นสอนเนื้อหา

2.1 ครูนำเสนอเนื้อหาใหม่แก่นักเรียนทั้งชั้นเรียน

2.2 ครูและนักเรียนร่วมวิเคราะห์โจทย์และแก้ปัญหาโดยใช้แผนผัง K-W-D-L ซึ่งมาจากคำถามต่อไปนี้

K (what we **know**) เรารู้อะไรบ้างในสิ่งที่เรียนหรือโจทย์บอกอะไรบ้าง

W (what we **want**) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร หรือ โจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง

D (what we **do**) เราต้องทำอะไรบ้างเพื่อหาคำตอบตามที่โจทย์ต้องการ หรือสิ่งที่ต้องการรู้

L (what we **learn**) เราเรียนรู้อะไร สรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ หรือบอกวิธีคิดอย่างไรและได้คำตอบอะไร

2.3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้จากการแก้โจทย์ปัญหา

2.4 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้การแก้ปัญหาด้วยเทคนิค K-W-D-L

3. ขั้นสรุปบทเรียนและวัดผลประเมินผล

3.1 ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ทั้งหมดที่ได้จากการเรียนในคาบเรียนนั้น ๆ

3.2 ครูวัดผลและประเมินผลจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยพิจารณาจากการตอบคำถามของนักเรียน การร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด เป็นต้น

กิจกรรมกลุ่ม

ความหมายของกิจกรรมกลุ่ม

ศุภวดี บุญวงศ์ (2527) ให้ความหมายของกิจกรรมกลุ่มว่า กิจกรรมกลุ่ม หมายถึง การร่วมกันวางแผน การแลกเปลี่ยนประสบการณ์ระหว่างสมาชิกภายในกลุ่ม หรือสมาชิกต่อกลุ่มหรือกลุ่มต่อสมาชิก ซึ่งมีผู้นำกลุ่มที่ได้รับการฝึกฝนมาเป็นอย่างดี ช่วยส่งเสริมสนับสนุนให้สมาชิกมีการปฏิสัมพันธ์ (Interaction) โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้สมาชิกได้พัฒนาบุคลิกภาพที่เป็นประโยชน์ต่อการทำงานกลุ่ม ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการทำงานกลุ่ม และกลุ่มประสบความสำเร็จในการทำงานครั้งนั้น ๆ ด้วย

ทิสนา เขมมณี (2545) กล่าวถึงกิจกรรมกลุ่มว่า การทำงานกลุ่ม หมายถึง การที่บุคคลตั้งแต่ 2 คนขึ้นไปร่วมกันปฏิบัติงานอย่างใดอย่างหนึ่งโดยมีเป้าหมายร่วมกัน และทุกคนในกลุ่มมีบทบาทในการดำเนินงานของกลุ่ม มีการติดต่อสื่อสารประสานงานและตัดสินใจร่วมกันเพื่อให้งานบรรลุความสำเร็จตามเป้าหมายเพื่อประโยชน์ร่วมกันของกลุ่ม

คมเพชร ฉัตรสุกกุล (2546) กล่าวถึงกิจกรรมกลุ่มว่า การทำงานกลุ่ม หมายถึง การนำเอาประสบการณ์มาวางแผนและแลกเปลี่ยนซึ่งกันและกัน เพื่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการในสมาชิกแต่ละคน และการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มโดยส่วนรวม ผู้นำจะสามารถทำงานให้มีประสิทธิภาพก็ต่อเมื่อเขาได้เรียนรู้วิธีการที่จะช่วยอำนวยความสะดวก (Facilitate) ให้เกิดปฏิสัมพันธ์อย่างสร้างสรรค์ระหว่างสมาชิกแต่ละคนโดยวิธีการดังกล่าว แล้วประสบการณ์ในกลุ่มจะทำให้เกิดพัฒนาการในตัวบุคคล ทุกคนและกลุ่มก็จะดำเนินไปด้วยความสำเร็จตามจุดมุ่งหมายที่วางไว้

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า กิจกรรมกลุ่ม หมายถึง การรวมตัวของคนตั้งแต่ 2 คนขึ้นไปเพื่อปฏิบัติงานที่มีเป้าหมายร่วมกัน โดยสมาชิกในกลุ่มมีการติดต่อแลกเปลี่ยนประสบการณ์ซึ่งกันและกัน เพื่อให้งานดำเนินไปด้วยความสำเร็จ

จุดมุ่งหมายของกิจกรรมกลุ่ม

คมเพชร นัตรศุกกุล (2546) ได้กล่าวถึงจุดมุ่งหมายของกิจกรรมกลุ่มได้ดังนี้

1. เพื่อสร้างความเข้าใจตนเองอย่างถูกต้อง โดยปกติบุคคลทั่วไปอาจจะคิดว่าตนเองมีความเข้าใจในตัวเอง ไม่จำเป็นที่จะต้องให้คนอื่นช่วยชี้แจงว่า ตนเป็นคนอย่างไร ในทางจิตวิทยาแล้วมนุษย์ย่อมเข้าใจในตนเอง แต่ในบางด้านก็อาจจะไม่เข้าใจตนเองได้ดีเท่าที่ควร อาจจะเป็นไปตามลักษณะของคำพังเพยของคนไทยที่กล่าวว่า “เส้นผมบังภูเขา” ซึ่งหมายความว่า เรื่องบางอย่างซึ่งเป็นเรื่องเล็ก ๆ น้อย ๆ อาจจะไม่เป็นที่เข้าใจเลย เปรียบเสมือน “ผงเข้าตาตนเองแล้วเอาออกไม่ได้” ดังนั้นจะเห็นได้ว่ารายละเอียดบางอย่างของตน มนุษย์อาจไม่รู้ทั้งหมด เป็นสาเหตุของการไม่เข้าใจตนเองอย่างถูกต้อง

2. เพื่อสร้างความเข้าใจในบุคคลอื่น มนุษย์มีความต้องการจะอยู่ร่วมกันอย่างมีความสุข ปัจจัยที่สำคัญประการหนึ่ง คือ ความเข้าใจในสมาชิกของกลุ่ม ความเข้าใจบุคคลอื่นย่อมจะทำให้เกิดการยอมรับพฤติกรรมที่บุคคลแสดงออกมา ดังนั้นในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกันของกลุ่มสมาชิก จะเปิดโอกาสให้สมาชิกเกิดการเรียนรู้ลักษณะต่าง ๆ ของแต่ละคนได้เป็นอย่างดี

3. เพื่อสร้างความสามารถในการทำงานร่วมกันระหว่างสมาชิก ในการทำงานร่วมกันระหว่างสมาชิก นอกจากจะอาศัยความรู้ ความสามารถ และประสบการณ์ของสมาชิกแต่ละคนแล้ว สิ่งที่สำคัญและมีความหมายต่อความสำเร็จของกลุ่มเป็นอย่างดีก็คือ ความร่วมมือถึงแม้ว่าสมาชิกทุกคนจะมีความสามารถเป็นเลิศในด้านต่าง ๆ ก็ตาม แต่ถ้าขาดการร่วมมือที่ดีจะทำให้การทำงานของกลุ่มไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร ดังนั้นการทำกิจกรรมกลุ่มจึงมีจุดมุ่งหมายที่จะเสริมสร้างคุณลักษณะที่ดีให้แก่สมาชิกในกลุ่ม ให้มีทักษะที่จำเป็นในการทำงานกับบุคคลอื่น

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า กิจกรรมกลุ่มมีจุดมุ่งหมายที่จะพัฒนาส่งเสริมบุคคลเพื่อสร้างความเข้าใจในตนเองและผู้อื่น ในการทำงานร่วมกันระหว่างสมาชิกภายในกลุ่มด้วยกัน ตลอดจนเรียนรู้ และแลกเปลี่ยนประสบการณ์ที่จะแก้ไขและปรับปรุงพัฒนาตนเองในด้านต่าง ๆ

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม

Joyce and Weil (2004) ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาที่สืบสวน โดยใช้กระบวนการกลุ่มซึ่งผู้เรียนต้องร่วมมือกันแก้ปัญหาโดยสรุปได้ดังนี้

1. นักเรียนพบสถานการณ์ที่เป็นปัญหา
2. นักเรียนสำรวจปฏิบัติการต่อสถานการณ์
3. นักเรียนกำหนดงานที่จะศึกษา จัดระเบียบสิ่งที่จะศึกษา
4. ศึกษาโดยอิสระและศึกษาเป็นกลุ่ม
5. นักเรียนวิเคราะห์ความก้าวหน้าและวิเคราะห์กระบวนการ
6. ย้อนกลับไปดูกิจกรรมอีกครั้ง

ศุภวดี บุญวงศ์ (2527) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มดังนี้

1. ขั้นพบปัญหาและพยายามทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่สมาชิกในกลุ่มช่วยกันทำความเข้าใจกับปัญหาให้ชัดเจน หากคำตอบให้ได้ว่า ปัญหานั้นคืออะไร
2. ขั้นการรวบรวมข้อมูล เป็นขั้นที่สมาชิกพยายามหาข้อมูลมาสนับสนุนให้ปัญหานั้นชัดเจนและง่ายแก่การนำไปแก้ไข
3. ขั้นการวิเคราะห์หาสาเหตุ เป็นขั้นที่สมาชิกพิจารณากันถึงสาเหตุที่น่าจะเป็นไปได้ของปัญหานั้น ซึ่งอาจจะมีหลาย ๆ สาเหตุก็ได้ ทั้งนี้เพื่อช่วยหาวิธีแก้ไขและช่วยในการดำเนินการแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น
4. ขั้นการระดมความคิด สมาชิกจะช่วยกันแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับวิธีแก้ปัญหานั้น ๆ และนำความคิดเห็นเหล่านั้นมาพิจารณาว่าสามารถทำได้หรือไม่
5. ขั้นการอภิปรายวิธีแก้ไข ขั้นนี้สมาชิกจะช่วยกันวิจารณ์วิธีการแก้ไขปัญหาที่เสนอแนะกันมาชี้ให้เห็นข้อดี ข้อเสีย แล้วนำมาจัดอันดับจากวิธีที่ดีที่สุด เป็นไปได้มากที่สุดไปหาวิธีที่น่าจะเป็นไปได้น้อยที่สุด

6. ขั้นการวางแผนแก้ไขปัญหอย่างละเอียด สมาชิกจะร่วมกันวางแผนเกี่ยวกับขั้นตอนในการแก้ปัญหา หน้าที่ของสมาชิกแต่ละคน เพื่อจะได้สะดวกในการปฏิบัติ

7. ขั้นปฏิบัติการ สมาชิกจะเริ่มลงมือปฏิบัติงานตามหน้าที่ที่ตกลงกันได้และควรร่วมมือช่วยเหลือซึ่งกันและกันด้วย ไม่ใช่ปฏิบัติเฉพาะหน้าที่ของตัวเองเท่านั้น

8. ขั้นการประเมิน ขั้นนี้ตามความเป็นจริงแล้วจะต้องทำเป็นระยะ ๆ แทรกไปทุกขั้นตอน เพื่อให้งานสำเร็จบริบูรณ์ขึ้น ไม่ใช่ประเมินผลแต่เพียงขั้นสุดท้าย สิ่งที่กลุ่มควรประเมินผล เช่น วิธีการทำงาน สัมพันธภาพระหว่างสมาชิก ผลงาน เป็นต้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น พอจะสรุปได้ว่าการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มมีขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นพบปัญหา สมาชิกในกลุ่มร่วมกันทำความเข้าใจในปัญหาให้ชัดเจน
2. ขั้นการเก็บข้อมูล สมาชิกในกลุ่มนำข้อมูลมาสนับสนุน เพื่อให้การแก้ปัญหาชัดเจนขึ้น
3. ขั้นระดมความคิด เป็นขั้นตอนในการหาข้อเท็จจริงและวิธีการแก้ปัญหาร่วมกัน
4. ขั้นวางแผนและแก้ปัญหอย่างละเอียด เป็นการกำหนดแนวทางการปฏิบัติและหาทางเลือกในการแก้ปัญหา
5. ขั้นปฏิบัติการ สมาชิกเริ่มลงมือปฏิบัติตามหน้าที่ที่ตกลงกัน
6. ขั้นประเมินผล เป็นขั้นการประเมินตามสภาพจริง เป็นระยะ ๆ โดยจะแทรกอยู่ทุกขั้นตอนของการทำกิจกรรม

ประโยชน์ของการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

หฤทัย อติชาตพงศ์ (ม.ป.ป.) กล่าวถึงประโยชน์ของการทำงานกลุ่มดังนี้

1. ช่วยให้อาจารย์เข้าใจกระบวนการของการทำงานร่วมกัน และนำไปประยุกต์ใช้กับเพื่อนร่วมงานและนักเรียนในการแนะแนวหมู่
2. ช่วยให้ผู้รู้จักเลือก รู้จักวางจุดมุ่งหมาย และการเสนอแนะตลอดจนการประเมินผลในการแก้ปัญหาในโครงการที่กระทำ และสามารถดำเนินการตาม โครงการต่อไปได้ดี
3. ช่วยให้ผู้สมาชิกเกิดความรู้สึกไวต่อปฏิกิริยาโต้ตอบภายในกลุ่ม เพื่อเขาจะได้รับรู้ในเรื่องความรับผิดชอบของหัวหน้า ของสมาชิกดีขึ้น การโต้ตอบอย่างดี จะช่วยให้กลุ่มพัฒนาอย่างกว้างขวาง และได้แหล่งเรียนรู้ของแต่ละคนในกลุ่มที่แสดงออกมา
4. ช่วยให้ผู้พัฒนาได้ทั้งความรู้ และทักษะ ในสังคมประชาธิปไตย เมื่อใช้หลักของพลังกลุ่มจะช่วยให้เกิดสิ่งเหล่านี้คือ
 - ก. เพิ่มกลไกในด้านความรู้สึกของสมาชิก ว่าอะไรกำลังเกิดขึ้นในกลุ่ม และกระตุ้นให้เขาปรารถนาจะรับหน้าที่หัวหน้า และหน้าที่ของสมาชิกอย่างมีประสิทธิภาพ
 - ข. ช่วยให้ผู้สมาชิกรู้จักปลดปล่อยแหล่งความรู้ในตัวเองให้มากยิ่งขึ้นภายในกลุ่ม
 - ค. ทำให้หัวหน้ารู้สึกรับผิดชอบมากขึ้น ในการช่วยให้กลุ่มพัฒนาการ

กาญจนา ไชยพันธุ์ (2549) กล่าวถึงประโยชน์ของกระบวนการกลุ่มพอสรุปได้ดังนี้

1. ช่วยพัฒนาในตัวบุคคล ซึ่งกระบวนการกลุ่มช่วยสนองความต้องการของบุคคลได้ โดยสนองความต้องการขั้นพื้นฐานทั้งร่างกายและจิตใจ เช่น ความต้องการเป็นส่วนหนึ่งของกลุ่ม ความปลอดภัย และความต้องการที่ยอมรับจากกลุ่ม นอกจากนี้กระบวนการกลุ่มยังช่วยสร้างพัฒนาการด้านอารมณ์และสังคม โดยฝึกให้ผู้สมาชิกรู้จักเก็บอารมณ์ ช่วยพัฒนาด้านทัศนคติ ความสนใจและความสามารถ ช่วยพัฒนาคุณค่าด้านอาชีพ เช่น ผู้บริหารบางคนไม่กล้าแสดงออก แต่เมื่อมาอยู่ในกลุ่ม กลุ่มก็จะมีกิจกรรมฝึกการกล้าแสดงออก ฝึกความเป็นผู้นำ การกล้าตัดสินใจ กระบวนการกลุ่มยังช่วยพัฒนาด้านความรู้และทักษะต่าง ๆ เช่น การเป็นผู้รู้จักฟัง รู้จักให้ข้อมูลต่าง ๆ แก่สมาชิก ในการฟังนี้เองทำให้เกิดความรู้ที่เพิ่มขึ้น

2. กระบวนการกลุ่มมีคุณค่าในการวินิจฉัย เช่น เมื่อเราให้สมาชิกในกลุ่มมาเป็นผู้นำ ถ้าสมาชิกเกิดความประหม่า ไม่กล้าพูด ไม่กล้าแสดงออก ผู้ดำเนินการก็สามารถวินิจฉัยได้ว่าเขาอายและไม่สามารถปรับตัวได้ ดังนั้นต้องหาวิธีการใช้กิจกรรมที่ทำให้เขาพัฒนาตนเองได้
 3. กระบวนการกลุ่มมีคุณค่าในการบำบัด ในวงการแพทย์ได้นำเอากระบวนการกลุ่มมาใช้บำบัดผู้ป่วยทางจิต โดยเรียกว่า “จิตบำบัดหมู่”
 4. กระบวนการกลุ่มมีคุณค่าในวงการศึกษ โดย John Dewey จากคำพูดของเขาที่ว่า การเรียนรู้ทำให้เด็กได้ลงมือทำ (Learning by doing) จึงกลายเป็นหลักการศึกษที่เน้นการรวมกลุ่มเพื่อการเรียนรู้ การรวมกลุ่มเพื่อการทำงานและการทำกิจกรรมเสริมหลักสูตร ดังนั้นในการจัดกิจกรรมดังกล่าวกระบวนการกลุ่มจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการทำงานร่วมกัน
- จากที่กล่าวมาสามารถสรุปประโยชน์ของการร่วมกิจกรรมกลุ่มได้ว่า กิจกรรมกลุ่มทำให้เข้าใจกระบวนการทำงานร่วมกัน ทำให้สมาชิกในกลุ่มมีปฏิริยาโต้ตอบระหว่างกัน ทำให้ได้แหล่งเรียนรู้ของสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มที่แสดงออกมา หลักของกิจกรรมกลุ่มทำให้เกิดสังคมประชาธิปไตย และสร้างความกล้าแสดงออกและความเป็นผู้นำของสมาชิกในกลุ่ม

การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

ความหมายของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

ยุพิน พิพิธกุล (2539) ได้กล่าวถึง การวัดผลและการประเมินผลไว้ ดังนี้

การวัดผล (Measurement) หมายถึง เครื่องมือที่ใช้ตรวจสอบเพื่อต้องการทราบคุณภาพ จำนวนหรือปริมาณในสิ่งที่ต้องการวัดนั้น เมื่อพูดถึงการวัดผลเรามักมุ่งไปที่การออกข้อสอบเพียงอย่างเดียว ซึ่งความจริงแล้วการวัดผลมีความหมายกว้างกว่านั้น เราจะต้องถามตัวเราว่าเราจะวัดอะไร เช่น ถ้าต้องการวัดทางด้านสติปัญญาหรือวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเราก็ออกข้อสอบ แต่ถ้าต้องการวัดทางด้านอารมณ์ จิตใจ เราก็อาจจะใช้การสังเกต หรือต้องการวัดทางด้านกรกระทำทางกาย เราก็ให้ลงมือปฏิบัติ เป็นต้น

การวัดผลนักเรียนนั้นครูไม่ควรมุ่งทางด้านสติปัญญาแต่เพียงอย่างเดียว ควรจะได้ใช้การสังเกต จดบันทึกเอาไว้ และจะต้องดูความรับผิดชอบของนักเรียนด้วยเครื่องมือที่จะใช้วัดนั้นมีหลายประการ เช่น การสังเกต การสัมภาษณ์ การใช้แบบสอบถาม การบันทึกพฤติกรรม การมอบหมายงานให้ทำ การศึกษารายบุคคล การบันทึกระเบียบวินัย ฯลฯ และประการสุดท้ายที่ใช้กันเป็นส่วนมากก็คือ การออกข้อสอบ

การประเมินผล (Evaluation) หมายถึง การนำผลจากการวัดมาสรุปหรือตีค่าการประเมินผลนั้นจะต้องอาศัยการวัด เช่น เราออกข้อสอบวัดผลได้คะแนนมาแล้วก็เอาคะแนนนั้นมาตีค่าว่าได้หรือตก ซึ่งเรียกว่า การประเมิน การประเมินผลที่ดีนั้นจะต้องอาศัยพื้นฐานจากการวัดผลที่ดีด้วย ในการวัดผลนักเรียนนั้นควรมีการวัดหลาย ๆ วิธี จะต้องวัดให้ต่อเนื่องให้ครอบคลุมทั่วถึง เมื่อนำผลการวัดทั้งหลายมารวมสรุปก็จะทำให้การประเมินผลใกล้เคียงความจริงยิ่งขึ้น

ลิตริพร ทิพย์คง (2545) ได้ให้ความหมายของการวัดผลและการประเมินผลไว้ว่า การวัดผล หมายถึง การตรวจสอบหรือค้นหาสิ่งที่ครูผู้สอนต้องการตรวจสอบนั้นว่ามีปริมาณและคุณภาพมากน้อยเพียงใด และการประเมินผล หมายถึง การนำผลจากการวัดต่าง ๆ มาประมวลชี้ขาดในขั้นสรุปหรือขั้นของการตัดสินใจ

กังวล เทียนกัณฑ์เทศน์ (2536) ได้กล่าวถึง การวัดและการประเมินผลไว้ดังนี้

การวัด หมายถึง กระบวนการบอกปริมาณหรือคุณภาพของสิ่งหนึ่งเป็นตัวเลข หรือสัญลักษณ์ใด ๆ ที่ตกลงกันไว้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของสิ่งที่จะวัด และวัตถุประสงค์ของการวัดการประเมินผล เป็นการนำผลของการวัด มาเทียบกับเกณฑ์ แล้วจึงลงความเห็นและตัดสินใจ

การวัดและการประเมินผล เป็นกระบวนการที่ต่อเนื่องกัน เพราะการวัดเป็นไปเพื่อการประเมินว่า ดีเลว เก่งหรืออ่อนเพียงใด สิ่งใดบ้างที่ต้องแก้ไขปรับปรุงพัฒนา ถ้าเป็นผลของการเรียนรู้ก็จะต้องเทียบกับวัตถุประสงค์ ว่าการเรียนรู้นั้นบรรลุวัตถุประสงค์เพียงใด สอนซ่อมเสริมหรือเรียนซ้ำ ผ่าน ไม่ผ่าน เลื่อนชั้น ไม่เลื่อนชั้น การวัดผลจึงเป็นไปเพื่อการประเมินผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551) ได้กล่าวถึง การวัดผลและการประเมินผลไว้ ดังนี้

การวัดผล (Measurement) หมายถึง กระบวนการกำหนดจำนวนเพื่อใช้เป็นเกณฑ์การวัด โดยใช้เครื่องมือวัด เพื่อศึกษา ค้นหา หรือตรวจสอบคุณลักษณะของบุคคล ผลงาน หรือสิ่งใดสิ่งหนึ่งเพื่อให้ได้ข้อมูลที่มีความหมายแทนปริมาณหรือคุณภาพของคุณลักษณะที่จะวัดเป็นตัวเลขอย่างมีกฎเกณฑ์

การประเมินผล (Evaluation) หมายถึง การรวบรวมและเรียบเรียงข้อมูลที่ได้จากการวัดผลมาใช้ในการตัดสินใจ ด้วยการหาข้อสรุป ตัดสิน และประเมินค่าโดยการเทียบกับเกณฑ์ที่กำหนด

การวัดผลและประเมินผล เป็นกระบวนการที่ช่วยให้ผู้เรียนทราบถึงความสามารถของตนเอง และเกิดแรงจูงใจในการพัฒนาตนเอง รวมทั้งสามารถวินิจฉัยและแก้ไขข้อบกพร่องได้ถูกต้อง สำหรับผู้สอนทำให้ทราบว่าจัดการเรียนรู้บรรลุวัตถุประสงค์หรือไม่ สามารถวินิจฉัยผู้เรียนและช่วยเหลือให้พัฒนาตามศักยภาพ รวมทั้งปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า การวัดผลและประเมินผลเป็นส่วนหนึ่งของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ต้องดำเนินการควบคู่ไปกับเรียนการสอน จึงมีความสำคัญต่อการเรียนการสอน เพราะการวัดผลและประเมินผลเป็นกระบวนการหนึ่งที่ช่วยให้ครูได้ข้อมูลสารสนเทศในการปรับเปลี่ยนการเรียนการสอน ซึ่งเป็นการสะท้อนให้เห็นถึงคุณภาพของครูและผู้เรียนตลอดจนเป็นข้อมูลที่จะนำไปปรับเปลี่ยนการจัดการเรียนรู้ของครูและส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนาและการเรียนรู้อย่างเต็มศักยภาพ

วัตถุประสงค์ของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้กล่าวว่า วัตถุประสงค์ที่สำคัญของการวัดผลและประเมินผล คือ

1. เพื่อบ่งชี้ว่านักเรียนมีทักษะและความรู้ที่สำคัญเพียงพอหรือไม่
2. เพื่อบ่งชี้ระดับสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนของนักเรียนแต่ละคน
3. เพื่อวินิจฉัยจุดเด่นหรือจุดด้อยของนักเรียน โดยสังเกตจากผลการเรียนของนักเรียนที่แสดงออกมาให้ครูผู้สอนเห็น

4. เพื่อพัฒนาและปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546) ได้กล่าวว่า การวัดผลและการประเมินผล เป็นกระบวนการที่ต้องทำควบคู่ไปกับการจัดการเรียนการสอน โดยมีจุดประสงค์ 3 ประการดังนี้

1. เพื่อการวินิจฉัยความรู้พื้นฐานและทักษะที่จำเป็นของนักเรียน ซึ่งอาจประเมินได้ 2 ขั้นตอน ดังนี้

1.1 ประเมินก่อนเรียน เป็นการประเมินความรู้พื้นฐานและทักษะจำเป็นที่นักเรียนควรมีก่อนการเรียนรายวิชา บทเรียนหรือหน่วยการเรียนรู้ใหม่ ข้อมูลที่ได้จากการวัดผลและประเมินผลจะช่วยให้ผู้สอนนำไปใช้เพื่อ 1) จัดกลุ่มนักเรียนและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ตรงตามความถนัด ความสนใจ และความสามารถของนักเรียน และ 2) วางแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยครูผู้สอนพิจารณาเลือกผลการเรียนรู้ที่คาดหวังให้เหมาะสมกับความรู้ความสามารถของนักเรียนด้วยการเลือกเนื้อหาสาระ กิจกรรม แบบฝึกหัด อุปกรณ์ และสื่อการเรียนรู้ต่างๆ ที่เหมาะสม และตรงตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้

1.2 ประเมินระหว่างเรียน เป็นการประเมินเพื่อวินิจฉัยนักเรียนในระหว่างการเรียน ข้อมูลที่ได้จะช่วยให้ผู้สอนนำไปใช้เพื่อ 1) ศึกษาพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียนเป็นระยะ ๆ ว่านักเรียนมีพัฒนาการเพิ่มขึ้นเพียงใด ถ้าพบว่านักเรียนไม่มีพัฒนาการเพิ่มขึ้นครูผู้สอนจะได้หาทางแก้ไขได้ทันทั่วทั้งที่ และ 2) ปรับปรุงกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน ถ้าพบว่านักเรียนไม่เข้าใจ บทเรียนใดก็จะได้จัดให้เรียนซ้ำ หรือนักเรียนเรียนรู้บทใดได้เร็วกว่าที่กำหนดก็จะได้ปรับเปลี่ยนวิธีการเรียนการสอน นอกจากนี้ยังช่วยให้ทราบจุดเด่นและจุดด้อยของนักเรียนแต่ละคนด้วย

2. เพื่อใช้ผลการประเมินในการตัดสินผลการเรียนของนักเรียนเป็นการตรวจสอบผลการเรียนรู้ของนักเรียนตามสาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง และใช้ผลการทดสอบเพื่อตัดสินผลการเรียนและให้ระดับคะแนนของรายวิชานั้น รวมทั้งนำผลการเรียนรู้นี้ดังกล่าวไปใช้เพื่อแนะแนวทางการศึกษาต่อ

3. เพื่อใช้ผลการประเมินเป็นข้อมูลสารสนเทศในการวางแผนบริหารจัดการศึกษาของสถานศึกษา การกำหนดนโยบาย และการพัฒนาหลักสูตรต่าง ๆ

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า วัตถุประสงค์ที่สำคัญของการวัดผลและประเมินผล คือ เพื่อวินิจฉัยความรู้และทักษะที่จำเป็นของนักเรียนว่านักเรียนมีความรู้และทักษะที่สำคัญเพียงพอหรือไม่ เพื่อป้องกันระดับสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนของนักเรียนแต่ละคน ทำให้รู้ว่านักเรียนแต่ละคนมีจุดเด่นจุดด้อยตรงไหน และสามารถนำผลที่ได้ไปพัฒนาและปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

หลักการของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้ให้หลักการของการวัดผลและประเมินผล ดังนี้

1. เน้นการนำผลการประเมินมาใช้เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอนมากกว่าตัดสินใจการสอบได้ สอบตกของนักเรียน
2. คำนึงถึงพื้นฐานความรู้ประสบการณ์และลักษณะของนักเรียนในระดับชั้นที่เรียนอยู่
3. จัดดำเนินการให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของการเรียนการสอน ดำเนินการอย่างมีระบบและผสมผสาน
4. ประเมินนักเรียนทั้งทางด้านสติปัญญา จิตใจ อารมณ์และสังคม
5. บอกแนวทางการประเมินและเกณฑ์ในการตัดสิน ตลอดจนแนวทางในการปฏิบัติของนักเรียนให้นักเรียนทราบล่วงหน้า
6. ให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการวัดผลและประเมินผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551) ได้กล่าวถึง หลักการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. การประเมินผลต้องกระทำอย่างต่อเนื่อง และควบคู่ไปกับกระบวนการเรียนการสอน ผู้สอนควรใช้งานหรือกิจกรรมคณิตศาสตร์เป็นสิ่งเร้าให้ผู้เรียนเข้าไปมีส่วนร่วมในการเรียนรู้และใช้การถามคำถาม นอกจากการถามเพื่อตรวจสอบและส่งเสริมความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาแล้ว ควร

ถามคำถามเพื่อตรวจสอบและส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้วย เช่น การถามคำถามในลักษณะ “นักเรียนแก้ปัญหาได้อย่างไร” “ใครสามารถคิดหาวิธีการนอกเหนือไปจากนี้ได้” “นักเรียนคิดอย่างไรกับวิธีการที่เพื่อนเสนอ” การกระตุ้นด้วยคำถามซึ่งเน้นกระบวนการคิดทำให้เกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนด้วยกัน และระหว่างผู้เรียนกับผู้สอน ผู้เรียนมีโอกาสได้พูดแสดงความคิดเห็นของตน แสดงความเห็นพ้องและโต้แย้ง เปรียบเทียบวิธีการของตนกับของเพื่อนเพื่อเลือกวิธีการที่ดีในการแก้ปัญหา ด้วยหลักการเช่นนี้ ทำให้ผู้สอนสามารถใช้คำตอบของผู้เรียนเป็นข้อมูลเพื่อตรวจสอบเกี่ยวกับความรู้ความเข้าใจ และทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน

2. การประเมินผลต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์และเป้าหมายการเรียนรู้ จุดประสงค์และเป้าหมายการเรียนรู้ในที่นี้เป็นจุดประสงค์และเป้าหมายที่กำหนดไว้ในระดับชั้นเรียน ระดับสถานศึกษา และระดับชาติ ในลักษณะของสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ที่ประกาศไว้ในหลักสูตร เป็นหน้าที่ของผู้สอนที่ต้องประเมินผลตามจุดประสงค์และเป้าหมายการเรียนรู้เหล่านี้ เพื่อให้สามารถบอกได้ว่าผู้เรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามมาตรฐานที่กำหนดหรือไม่

ผู้สอนต้องแจ้งจุดประสงค์และเป้าหมายการเรียนรู้ในแต่ละเรื่องให้ผู้เรียนทราบ เพื่อให้ผู้เรียนเตรียมพร้อมและปฏิบัติตนให้บรรลุจุดประสงค์และเป้าหมายที่กำหนด

3. การประเมินผลทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญเท่าเทียมกับการวัดความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยง และการมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ต้องปลูกฝังให้เกิดขึ้นกับผู้เรียน เพื่อการเป็นพลเมืองที่มีคุณภาพ รู้จักแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ปรับตัวและดำรงชีวิตอย่างมีความสุข

ผู้สอนต้องออกแบบงานหรือกิจกรรมซึ่งส่งเสริมให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (การประเมินกระบวนการทางคณิตศาสตร์อาจใช้วิธีการสังเกต สัมภาษณ์ หรือตรวจสอบคุณภาพผลงานเพื่อประเมินความสามารถของผู้เรียน) งานหรือกิจกรรมการเรียนรู้บางกิจกรรมอาจครอบคลุมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์หลายด้าน งานหรือกิจกรรมจึงควรมีลักษณะต่อไปนี้

- สารในงานหรือกิจกรรมมีการเชื่อมโยงความรู้หลายเรื่อง
- ทางเลือกในการดำเนินงานหรือแก้ปัญหาได้หลายวิธี
- เงื่อนไขหรือสถานการณ์ปัญหามีลักษณะเป็นปัญหาปลายเปิด ที่ให้ผู้เรียนที่มีความสามารถต่างกันมีโอกาสแสดงกระบวนการคิดตามความสามารถของตน
- งานหรือกิจกรรมต้องเอื้ออำนวยให้ผู้เรียนได้ใช้กระบวนการสื่อสารสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอในรูปแบบการพูด การเขียน การวาดรูป เป็นต้น
- งานหรือกิจกรรมต้องใกล้เคียงสภาพจริงหรือสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริง เพื่อให้ผู้เรียนตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์

4. การประเมินผลการเรียนรู้ต้องนำไปสู่ข้อมูลสารสนเทศเกี่ยวกับผู้เรียนรอบด้าน การประเมินผลการเรียนรู้มิใช่เป็นเพียงการให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบในช่วงเวลาที่กำหนดเท่านั้น แต่ควรใช้เครื่องมือวัดและวิธีการวัดที่หลากหลาย เช่น การทดสอบ การสังเกต การสัมภาษณ์ การมอบหมายงานให้ทำเป็นการบ้าน การทำโครงงาน การเขียนบันทึกโดยผู้เรียน การให้ผู้เรียนจัดทำแฟ้มสะสมงานของตนเอง หรือการให้ผู้เรียนประเมินตนเอง การใช้เครื่องมือวัดและวิธีการที่หลากหลายจะทำให้ผู้สอนมีข้อมูลรอบด้านเกี่ยวกับผู้เรียน เพื่อนำไปตรวจสอบกับจุดประสงค์ และเป้าหมายการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ เป็นหน้าที่ของผู้สอนที่ต้องเลือกและใช้เครื่องมือวัดและวิธีการที่เหมาะสมในการตรวจสอบการเรียนรู้

5. การประเมินผลการเรียนรู้ต้องเป็นกระบวนการที่ช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นในการปรับปรุงความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตน การประเมินผลที่ดีโดยเฉพาะการประเมินผลระหว่างเรียนต้องทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้น คิดปรับปรุงข้อบกพร่องและพัฒนาความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนเองให้สูงขึ้นเป็นหน้าที่ของผู้สอนที่ต้องสร้างเครื่องมือวัดหรือวิธีการที่ท้าทาย และส่งเสริมกำลังใจแก่ผู้เรียนในการขวนขวายเรียนรู้เพิ่มขึ้น

การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการประเมินตนเอง ด้วยการสร้างงานหรือกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมบรรยากาศให้เกิดการไตร่ตรองถึงความสำเร็จหรือความล้มเหลวในการทำงาน

ของตนเองได้อย่างอิสระ เป็นวิธีการหนึ่งที่ช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้น ในการปรับปรุงและพัฒนาความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตน

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปหลักการของการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ว่า การประเมินผลต้องกระทำอย่างต่อเนื่อง และควบคู่ไปกับกระบวนการเรียนการสอน โดยคำนึงถึงพื้นฐานความรู้ประสบการณ์และลักษณะของนักเรียนในระดับชั้นที่เรียนอยู่ การประเมินผลต้องสอดคล้องกับจุดประสงค์และเป้าหมายการเรียนรู้และรวมถึงการประเมินนักเรียนทั้งทางด้านสติปัญญา จิตใจ อารมณ์และสังคม และนอกจากนี้ต้องบอกแนวทางการประเมินและเกณฑ์ในการตัดสิน ตลอดจนแนวทางในการปฏิบัติของนักเรียนให้นักเรียนทราบล่วงหน้า

รูปแบบของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สิริพร ทิพย์คง (2545) กล่าวว่า การวัดผลและประเมินผลสามารถทำได้หลายรูปแบบ ดังนี้

1. การสังเกต (Observation)

ครูสังเกตจากความสนใจของนักเรียน ความกระตือรือร้นในการตอบคำถามของนักเรียน การทำกิจกรรมในห้องเรียน การทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง การทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน การทำงานกลุ่ม ซึ่งควรพิจารณาจากการอภิปรายภายในกลุ่ม การยอมรับฟังความคิดเห็นซึ่งกันและกัน การแสดงบทบาทผู้นำ การอธิบายแนวคิด การช่วยเหลือซึ่งกันและกัน เป็นต้น

2. การเขียนอนุทิน (Writing journal)

การเขียนอนุทินเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคนได้สะท้อนความคิด แสดงความรู้สึกในเรื่องที่นักเรียนได้เรียนไปแล้ว เช่น การให้นักเรียนเขียนว่าวันนี้ในชั่วโมงคณิตศาสตร์นักเรียนรู้อะไรบ้าง ทำไมนักเรียนจึงคิดว่าการเรียนคณิตศาสตร์นั้นมีประโยชน์ นักเรียนนำความรู้คณิตศาสตร์เรื่องใดไปใช้ให้เป็นประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้และการให้นักเรียนเขียนอธิบายแนวคิดในการแก้โจทย์ปัญหา

3. การสัมภาษณ์ (Interview)

การสัมภาษณ์นักเรียน ครูอาจทำได้อย่างเป็นทางการหรือไม่เป็นทางการ โดยดูจากแบบฝึกหัด การบ้าน โครงการที่นักเรียนทำว่านักเรียนมีความเข้าใจในเรื่องที่นักเรียนเรียนไปหรือไม่ นักเรียนสามารถอธิบายงานที่นักเรียนทำได้ชัดเจนเพียงใด นักเรียนแก้ปัญหาในเรื่องนั้นอย่างไร เช่น ในการแก้โจทย์ปัญหาร้อยละ นักเรียนได้รับส่วนลดครั้งแรก 20 % เมื่อนักเรียนจ่ายเงินสด นักเรียนได้รับส่วนลดอีก 15 % นักเรียนจะคิดคำนวณอย่างไร เป็นต้น

4. การตรวจแบบฝึกหัด (Checking exercise)

การตรวจแบบฝึกหัดที่นักเรียนทำ จะทำให้ครูทราบผลการเรียนของนักเรียนและความรับผิดชอบในการทำงาน ในกรณีที่นักเรียนตรวจสอบการทำงานของตนเองด้วยการทำสื่อสิ่งพิมพ์ ครูควรตรวจดูอีกครั้งหนึ่งว่า งานที่นักเรียนทำมีความถูกต้องและสมบูรณ์เพียงใดเพื่อช่วยพัฒนาและช่วยเหลือนักเรียนมากขึ้น

5. การทำแบบทดสอบ (Doing test)

สำหรับการวัดผลและประเมินผลด้วยแบบทดสอบ ครูผู้สอนควรคำนึงถึงลักษณะของแบบทดสอบ ขั้นตอนในการสร้างแบบทดสอบ การนำแบบทดสอบไปใช้และการวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ ดังนั้นครูผู้ออกแบบทดสอบควรเป็นผู้ที่มีความรู้ในเนื้อหาที่จะออกแบบทดสอบเป็นอย่างดี ทราบจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหาที่สอนนั้นซึ่งช่วยให้ออกข้อสอบได้ตรงตามจุดประสงค์และครอบคลุมเนื้อหาได้ครบถ้วน รู้จักชนิดและรูปแบบของแบบทดสอบ มีความรู้เกี่ยวกับลักษณะของแบบทดสอบที่ดี มีทักษะในการใช้ภาษา สามารถเขียนคำถามได้กะทัดรัดและชัดเจน

6. การประเมินแฟ้มงาน (Portfolio Assessment)

การประเมินแฟ้มงาน เป็นวิธีการประเมินตามสภาพจริงวิธีหนึ่งที่นักการศึกษาในปัจจุบันให้ความสนใจมาก สำนักทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ (2539) ได้ให้ความหมายของแฟ้มงานว่า “แฟ้มงาน” คือ การสะสมงานอย่างมีจุดมุ่งหมายเพื่อแสดงถึงความก้าวหน้าและสัมฤทธิ์ผลของนักเรียนในส่วนหนึ่งหรือหลายส่วนของการเรียนรู้ในวิชา การรวบรวมผลงาน

จะต้องครอบคลุมถึงการที่นักเรียนมีส่วนร่วมในการเลือกเนื้อหา เกณฑ์การคัดเลือก และเกณฑ์การตัดสินใจให้ระดับคะแนน รวมทั้งเป็นหลักฐานที่จะสะท้อนการประเมินตนเองของนักเรียน

เครื่องมือการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551) ได้กล่าวว่า เครื่องมือการวัดผลและประเมินผลมีหลายชนิด ผู้ใช้ต้องพิจารณาเลือกเครื่องมือให้เหมาะสมเพื่อให้ได้ข้อมูลที่มีประสิทธิภาพตรงกับจุดมุ่งหมาย เครื่องมือวัดผลและประเมินผล มีดังนี้

1. แบบทดสอบ (Test) เป็นแบบทดสอบวัดพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัย จิตพิสัย และทักษะพิสัย ที่ผู้สอนสร้างขึ้นเอง หรือเป็นแบบทดสอบมาตรฐาน ได้แก่ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ แบบทดสอบวัดความถนัด และแบบทดสอบวัดบุคลิกภาพ

2. แบบสอบถาม (Questionnaire) เป็นเครื่องมือที่มุ่งเก็บข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริงต่าง ๆ ความรู้สึก หรือความคิดเห็นของผู้ตอบ ได้แก่ แบบสอบถามปลายปิด และแบบสอบถามปลายเปิด

3. แบบสัมภาษณ์ (Interview) เป็นเครื่องมือที่ใช้กระบวนการสื่อความหมายระหว่างผู้สัมภาษณ์กับผู้ถูกสัมภาษณ์

4. แบบสังเกต (Observation) เป็นการเก็บข้อมูลด้วยการจดบันทึกพฤติกรรมของผู้ถูกสังเกตในสถานการณ์ใดสถานการณ์หนึ่ง ได้แก่ แบบสังเกตโดยตรง และแบบสังเกตโดยอ้อม

5. แบบตรวจสอบรายการ (Checklist) เป็นเครื่องมือที่เหมาะสมกับการประเมินผลเกี่ยวกับกระบวนการดำเนินงาน และผลผลิต จากการศึกษาปฏิบัติงานของผู้เรียน หรืออาจใช้ในการตรวจสอบการเข้าร่วมกิจกรรมหรือการแสดงออกของพฤติกรรมที่สนใจก็ได้

6. แบบบันทึก (Anecdotal) เป็นเครื่องมือสำหรับบันทึกพฤติกรรมของผู้เรียน เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นและเกี่ยวข้องกับผู้เรียนในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ

7. สังคมมิติ (Sociometry) เป็นเครื่องมือที่ใช้ศึกษาความสัมพันธ์ของผู้เรียนที่อยู่ร่วมกันว่ามีความพึงพอใจหรือไม่พึงพอใจซึ่งกันและกันอย่างไร

8. แฟ้มสะสมงาน (Portfolio) เป็นการเก็บรวบรวมผลงานหรือหลักฐานเกี่ยวกับความก้าวหน้าในการเรียนรู้วิชาใดวิชาหนึ่งหรือหลายวิชาอย่างมีระบบระเบียบและมีความหมายตรงตามสภาพจริง

ประโยชน์ของการวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการวัดผลและประเมินผล ดังนี้

1. ช่วยให้ครูทราบพฤติกรรมของนักเรียนก่อนทำการสอน เพื่อเป็นประโยชน์ในการจัดการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับนักเรียน และพฤติกรรมก่อนเข้าเรียนยังสามารถใช้เป็นพื้นฐานในการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของนักเรียนอันเนื่องมาจากการสอน
2. ช่วยให้ครูได้ปรับปรุงเป้าหมายของการสอนให้เหมาะสมกับสภาพความเป็นจริงของนักเรียนแต่ละคน
3. ช่วยให้ครูทราบว่านักเรียนได้เรียนรู้และบรรลุผลตามจุดมุ่งหมายของการสอนเพียงใด
4. ช่วยให้ครูทราบถึงข้อบกพร่องของครูจะต้องปรับปรุงแก้ไข โดยเฉพาะวิธีการสอน
5. ช่วยเพิ่มแรงจูงใจ กระตุ้นให้นักเรียนมีความต้องการในการเรียนรู้มากขึ้น
6. ช่วยให้นักเรียนได้ทราบจุดเด่นและจุดด้อยของตนเองในการเรียนเนื้อหาแต่ละเรื่อง
7. ใช้เป็นข้อมูลประกอบการประเมินผลการใช้หลักสูตรหรือโปรแกรมการศึกษา

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2551) กล่าวถึงประโยชน์ของการวัดผลและประเมินผล ดังนี้

1. ด้านผู้เรียน ทำให้ผู้เรียนมีความกระตือรือร้น คิดปรับปรุงข้อบกพร่อง พัฒนาความสามารถ และเรียนอย่างมีจุดหมาย

2. ด้านผู้สอน ทำให้ผู้สอนได้ทราบผลการเรียนรู้ของผู้เรียน เพื่อนำผลไปปรับปรุงพัฒนา และส่งเสริมให้ผู้เรียน ได้เรียนรู้อย่างเต็มศักยภาพ และนำผลไปปรับปรุงกระบวนการจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

3. ด้านการบริหาร ทำให้ทราบผลการเรียนรู้เป็นรายชั้นและรายช่วงชั้น แล้วนำผลนั้นไปเป็นแนวทางในการวางแผนบริหารจัดการศึกษาของสถานศึกษาเพื่อปรับปรุงพัฒนาการเรียนการสอนและปรับปรุงพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนให้ได้มาตรฐานตามที่สถานศึกษากำหนด

4. ด้านผู้ปกครอง ทำให้ผู้ปกครองได้ทราบระดับความสามารถในการเรียนรู้ของผู้เรียน และเพื่อปรับปรุง ส่งเสริม สนับสนุน หรือพัฒนาให้เต็มศักยภาพ

5. ด้านการแนะแนว ทำให้ผู้เกี่ยวข้องทุกฝ่ายได้ใช้เป็นข้อมูลประกอบการให้คำปรึกษา แนะนำกับผู้เรียนอย่างเหมาะสม

6. ด้านการวิจัย ทำให้ผู้เกี่ยวข้องมีข้อมูลไปใช้ในการทำวิจัย เพื่อพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ต่อไปได้

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปประโยชน์ของการวัดผลและประเมินผลได้ว่า การวัดผลและประเมินผลทำให้ผู้สอนได้ทราบผลการเรียนรู้ของผู้เรียน เพื่อนำผลไปปรับปรุงพัฒนาการเรียนการสอน ช่วยเพิ่มแรงจูงใจ กระตุ้นให้นักเรียนมีความต้องการในการเรียนรู้มากขึ้น และทำให้นักเรียนได้ทราบจุดเด่นและจุดด้อยของตนเองในการเรียนเนื้อหาแต่ละเรื่อง และสามารถนำข้อมูลที่ได้ไปใช้ในการวางแผนบริหารจัดการศึกษาของสถานศึกษาเพื่อปรับปรุงพัฒนาการเรียนการสอนและปรับปรุงพัฒนาคุณภาพของผู้เรียนให้ได้มาตรฐานตามที่สถานศึกษากำหนด

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในประเทศ

วีรศักดิ์ เลิศโสภา (2544) ได้ศึกษาผลการใช้เทคนิคการสอน เค ดับเบิลยู ดี แอล ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ผลการวิจัยพบว่า 1) คะแนนเฉลี่ยการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้เทคนิคการสอน เค ดับเบิลยู ดี แอล สูงกว่านักเรียนที่เรียนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ตามปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 และ 2) นักเรียนพึงพอใจต่อการสอนโดยใช้เทคนิคการสอน เค ดับเบิลยู ดี แอล ในระดับมาก

นิรันดร์ แสงกุหลาบ (2547) ได้เปรียบเทียบผลการเรียนรู้เรื่อง โจทย์ปัญหาทศนิยมและร้อยละของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่จัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค เค ดับเบิลยู ดี แอล และตามแนว สสวท. ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลการเรียนรู้ เรื่อง โจทย์ปัญหาทศนิยมและร้อยละของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่จัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค เค ดับเบิลยู ดี แอล และตามแนว สสวท. แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยผลการเรียนรู้เรื่อง โจทย์ปัญหาทศนิยมและร้อยละของนักเรียนที่จัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค เค ดับเบิลยู ดี แอล สูงกว่าผลการเรียนรู้ของนักเรียนที่จัดการเรียนรู้ตามแนว สสวท. และ 2) นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เห็นด้วยในระดับมากต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค เค ดับเบิลยู ดี แอล และนักเรียนเห็นด้วยในระดับปานกลางต่อการจัดการเรียนรู้ตามแนว สสวท.

นิยม เกรียวท่าทราย (2548) ได้ศึกษาการพัฒนาผลการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาการหาพื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลการเรียนรู้เรื่อง โจทย์ปัญหาการหาพื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 2) ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL โดยภาพรวมอยู่ในระดับปานกลาง นักเรียนเห็นด้วยมากเป็นอันดับ 1 คือ ด้านประโยชน์ที่ได้รับ โดยเห็นว่าทำให้นักเรียนได้มีการช่วยเหลือกัน และฝึกให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์อย่างเป็นขั้นตอน รองลงมาคือ ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้และเข้าใจวิธีการแก้โจทย์ปัญหาที่หลากหลาย นักเรียนชอบขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค KWDL และ

ลำดับสุดท้าย ด้านบรรยากาศในการจัดการเรียนการสอน นักเรียนมีความกระตือรือร้น สนุกสนาน ในการเรียนรู้

อดิเรก เฉลียวฉลาด (2550) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาร้อยละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้เทคนิค K-W-D-L กับการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาร้อยละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิค K-W-D-L สูงกว่าการสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 2) เจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิค K-W-D-L สูงกว่าการสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

Shaw *et al.* (1997) ได้ทำการศึกษา การเรียนแบบร่วมมือในการแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิค K-W-D-L กับนักเรียนเกรด 4 ปรากฏว่านักเรียนที่ใช้วิธีการเรียนแบบร่วมมือที่แก้ปัญหาคด้วยเทคนิค K-W-D-L ได้ระดับคะแนนสูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้ใช้การเรียนแบบร่วมมือ นอกจากนี้นักเรียนที่เรียนแบบร่วมมือโดยใช้เทคนิค K-W-D-L มีความสามารถในการทำงานร่วมกัน การใช้เหตุผลในการอธิบายดีกว่า และมีเจตคติทางบวกต่อการเรียน

Alice and Armoyr -Thomas (1997) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในกลุ่มเล็ก โดยการสำรวจพฤติกรรมที่มีบทบาทในกระบวนการคิด ความเข้าใจ และระดับความสามารถในการแก้ปัญหา จากการศึกษาให้นักเรียนเกรด 7 จำนวน 27 คน ที่มีความสามารถแตกต่างกัน โดยสังเกตจากการทำงานกลุ่ม จำนวน 6 กลุ่ม พบว่า ในการประเมินการทำงานช่วงแรกแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของพฤติกรรมการเรียนรู้และกระบวนการคิดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยข้อมูลนั้นได้จากการสังเกตการทำงานกลุ่มของนักเรียน และจากการสัมภาษณ์นักเรียน ซึ่งมีผลชี้ให้เห็นว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในกลุ่มเล็ก ส่งผลให้อารมณ์ ความเชื่อ และทัศนคติของนักเรียนมีการเปลี่ยนแปลงต่อพฤติกรรมการเรียนรู้ และกระบวนการคิดที่เกิดขึ้นภายในกลุ่มในทางที่ดี

Fuchs and Fuchs (2002) ได้ศึกษากระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ไร้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ (MD: mathematics disabilities) และนักเรียนที่ไร้ความสามารถทางการอ่าน (RD: reading disabilities) โดยทดลองกับนักเรียนเกรด 4 จำนวน สองกลุ่ม (n=18 MD; n=22 MD+RD) โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มดำเนินขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลจากการทดลองทั้งสองกลุ่มปรากฏว่า ความแตกต่างในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่ม MD และกลุ่ม MD+RD ขึ้นอยู่กับระดับของโจทย์ปัญหา (ปัญหาเกี่ยวกับเลขคณิต ปัญหาที่มีความซับซ้อน และปัญหาที่เกี่ยวกับชีวิตประจำวัน) และความสำคัญของงานนั้น ๆ สำหรับปัญหาเกี่ยวกับเลขคณิต นั้นระดับความแตกต่างของความสามารถในการทำงานและการแก้ปัญหานั้นใกล้เคียงกัน แต่ทางด้านความซับซ้อนของปัญหาและปัญหาที่เกี่ยวกับชีวิตประจำวันมีความแตกต่างของการแก้ปัญหามากกว่าการดำเนินการ

จากงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การจัดการเรียนการสอนที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานสำคัญที่ทำให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิดที่มีเหตุผล มีความเข้าใจ กล้าตัดสินใจ และทำให้ผลการเรียนดีขึ้น โดยครูจะเป็นผู้ที่เลือกกิจกรรมการเรียนการสอนที่ช่วยให้นักเรียนพัฒนาศักยภาพทางด้านทักษะและกระบวนการแก้ปัญหา อันจะส่งผลให้นักเรียนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน และทำให้การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น

สมมติฐานการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L หลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L หลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60%

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 34 คน ที่ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จากจำนวนทั้งหมด 3 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 105 คน

เครื่องมือและการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 4 ชุด ดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
3. แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
4. แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

โดยมีรายละเอียดในการสร้างเครื่องมือ ดังนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

มีขั้นตอนการดำเนินการสร้าง ดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตร คำอธิบายรายวิชา จุดประสงค์การเรียนรู้ ของสาระการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย จากเอกสารประกอบการสอน แบบเรียน คู่มือครู และเอกสารอื่น ๆ ซึ่งประกอบด้วย หัวข้อต่อไปนี้

- 1.1 วงกลม
- 1.2 วงรี
- 1.3 พาราโบลา
- 1.4 ไฮเพอร์โบลา

2. ศึกษาทฤษฎี หลักการ และแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

3. ดำเนินการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย ให้ครอบคลุมเนื้อหาและ สอดคล้องกับตัวชี้วัด โดยแบ่งเป็นออกเป็น 17 แผน ใช้เวลาแผนละ 50 นาที ดังนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 การเลื่อนแกนทางขนาน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 สมบัติของวงกลม โจทย์ปัญหาารูปแบบทั่วไปและรูปแบบ มาตรฐานของสมการวงกลม

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 สมบัติของวงกลม โจทย์ปัญหาารูปแบบทั่วไปและรูปแบบ มาตรฐานของสมการวงกลม (ต่อ)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ (ต่อ)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) (ต่อ)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ (ต่อ)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13 พาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) (ต่อ)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ (ต่อ)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 17 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) (ต่อ)

4. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง เหมาะสม แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขตามที่ได้รับข้อเสนอแนะ

5. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขเสร็จแล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อพิจารณาตรวจสอบความเหมาะสม สอดคล้องของจุดประสงค์ เนื้อหา และความเหมาะสมของกิจกรรมการเรียนรู้ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องตามที่ได้รับข้อเสนอแนะ

6. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขที่สมบูรณ์แล้วไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เป็นแบบทดสอบก่อนการเรียนและหลังการเรียน ซึ่งประกอบด้วย 2 ตอน คือ ตอนที่ 1 แบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ และตอนที่ 2 แบบทดสอบแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 2 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยมีขั้นตอนการดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตร สาระการเรียนรู้ วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย และสร้างตารางวิเคราะห์ข้อสอบเพื่อกำหนดอัตราส่วนของเนื้อหาและจำนวนข้อสอบในแต่ละเนื้อหา และพฤติกรรมที่ต้องการวัด ได้แก่ ความรู้ความจำ ความเข้าใจ และการนำไปใช้

2. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ตามแนวทางที่ได้กำหนดไว้ในตารางวิเคราะห์ข้อสอบ โดยเป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 4 ข้อ

3. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อพิจารณาความถูกต้องเหมาะสม และความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับจุดประสงค์การเรียนรู้ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขตามที่ได้รับข้อเสนอแนะ

4. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขเสร็จแล้ว เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อพิจารณาความสอดคล้องของเนื้อหา และประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบในแต่ละข้อคำถามกับเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อนำไปหาค่าดัชนีความสอดคล้อง IOC (Index of Item Object Congruence) จากนั้นนำแบบทดสอบมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะ และคัดเลือกข้อสอบที่มีความเหมาะสมโดยพิจารณาข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป ซึ่งผลจากการประเมินพบว่า ข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 4 ข้อ มีค่า IOC อยู่ระหว่าง 0.66 ถึง 1.00

5. นำแบบทดสอบที่ผ่านการวิเคราะห์ความสอดคล้อง และปรับปรุงแก้ไขเสร็จแล้ว ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 จำนวนนักเรียน 87 คน จำนวน 3 ห้องเรียน แล้วนำมาวิเคราะห์ค่าดัชนีความง่าย (p) ค่าดัชนีอำนาจจำแนก (x) และสัมประสิทธิ์ความเที่ยงของแบบทดสอบ

6. คัดเลือกข้อสอบที่ครอบคลุมเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ และพฤติกรรมที่ต้องการวัด ที่มีค่าดัชนีความง่ายอยู่ในเกณฑ์ระหว่าง 0.2 ถึง 0.8 และค่าดัชนีอำนาจจำแนกอยู่ในเกณฑ์ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป โดยเป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ และแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 2 ข้อ จากการหาคุณภาพของแบบทดสอบพบว่า แบบทดสอบมีค่าดัชนีความง่ายอยู่ระหว่าง 0.30 ถึง 0.65 ค่าดัชนีอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.40 ถึง 0.58 และสัมประสิทธิ์ความเที่ยงของแบบทดสอบเท่ากับ 0.83 และนำไปใช้ทดสอบกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย มีลักษณะเป็นแบบฝึกหัดแสดงวิธีทำ ที่ให้นักเรียนนำขั้นตอนของเทคนิค K-W-D-L มาใช้ในการแก้ปัญหา เรื่อง ภาคตัดกรวย มีจำนวน 4 ชุด ในแต่ละชุดมีจำนวน 2 ข้อ โดยใช้เวลาในการทำ 15 นาที หลังจากสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละเรื่องดังนี้ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ซึ่งผู้วิจัยมีขั้นตอนการดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาสาระการเรียนรู้ ความคิดรวบยอด และจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จากเอกสารประกอบการสอน คู่มือครู หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อกำหนดเนื้อหาในแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ให้คลุมเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้

2. กำหนดประเด็นและเกณฑ์การให้คะแนนที่ต้องการวัดนักเรียนจากการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โดยแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แต่ละข้อมีคะแนนตั้งแต่ 0 ถึง 9 คะแนน ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ส่วน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ส่วนที่ 1 ชั้น K สิ่งที่ต้องกำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ รู้อะไรหรือโจทย์บอกอะไรบ้าง โดยมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ซึ่งกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

2 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ และสามารถเขียนสรุปความรู้เป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้

1 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถเขียนได้เฉพาะสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้

0 คะแนน หมายถึง นักเรียนไม่สามารถเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้

ส่วนที่ 2 ชั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา โจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง โดยมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ซึ่งกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

2 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถเขียนสิ่งที่โจทย์ถามได้ และสามารถบอกวิธีการแก้ปัญหาที่จะนำมาสู่คำตอบที่ถูกต้องได้

1 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถเขียนได้เฉพาะสิ่งที่โจทย์ถามเท่านั้น

0 คะแนน หมายถึง นักเรียนไม่สามารถเขียนได้ว่าโจทย์ต้องการอะไร

ส่วนที่ 3 ชั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา ทำอะไร อย่างไร โดยมีคะแนนเต็ม 3 คะแนน ซึ่งกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

3 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถแสดงวิธีการหาคำตอบได้ทั้งหมดและครบถ้วนสมบูรณ์

2 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถแสดงวิธีการหาคำตอบได้ทั้งหมด แต่เกิดการผิดพลาดจากขั้นตอนการคิดคำนวณในบางส่วน

1 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถแสดงวิธีการหาคำตอบได้เพียงบางส่วน แต่ยังไม่ครบถ้วนสมบูรณ์

0 คะแนน หมายถึง นักเรียนไม่สามารถแสดงการแก้ปัญหาจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้

ส่วนที่ 4 ชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ เรียนรู้อะไร สรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้หรือบอกวิธีคิดอย่างไร และได้คำตอบอะไร โดยมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ซึ่งกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

2 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถเขียนสรุปคำตอบจากสิ่งที่โจทย์ถามได้ และสามารถสรุปความรู้เป็นความคิดรวบยอดจากการหาคำตอบได้

1 คะแนน หมายถึง นักเรียนสามารถเขียนสรุปคำตอบจากสิ่งที่โจทย์ถามได้เพียงบางส่วน

0 คะแนน หมายถึง นักเรียนไม่สามารถเขียนสรุปคำตอบและผลของการแก้ปัญหาได้

3. สร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยมีลักษณะเป็นโจทย์ปัญหาให้นักเรียนแสดงวิธีทำ จำนวน 2 ข้อต่อ 1 ชุด ซึ่งมีทั้งหมด 4 ชุด ได้แก่ เรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

4. นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย เสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อพิจารณาความถูกต้องเหมาะสม แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะ และเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ท่าน เพื่อพิจารณาความชัดเจนของข้อคำถาม เกณฑ์การให้คะแนน และความครอบคลุมของเนื้อหา แล้วนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย มาปรับปรุงแก้ไขให้เหมาะสม

5. นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ที่ได้รับการแก้ไขปรับปรุงแล้วไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ซึ่งผู้วิจัยมีขั้นตอนการดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษารูปแบบการสร้างแบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์
2. ศึกษาองค์ประกอบและขั้นตอนการจัดการเรียนการสอน เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เพื่อนำมากำหนดประเด็น ข้อคำถามเกี่ยวกับความคิดเห็นของนักเรียน
3. สร้างข้อคำถามให้ครอบคลุมประเด็นคำตอบที่ต้องการ ได้แก่ ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ด้านการวัดผลและประเมินผล ด้านครูผู้สอน และด้านสื่อการเรียนรู้ ตลอดจนข้อเสนอแนะอื่น ๆ
4. นำแบบสอบถามความคิดเห็นเสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อพิจารณาความถูกต้องเหมาะสม ครอบคลุมประเด็นของคำตอบที่ต้องการ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะ
5. นำแบบสอบถามที่ปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1. นำหนังสือขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลการทำวิจัย จากภาควิชาการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ไปติดต่อผู้อำนวยการ โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช เพื่อขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล จากนั้นผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ได้สร้างไว้
2. นำแบบสอบก่อนการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย มาทำการทดสอบก่อนการเรียนในคาบเรียนที่ 1 กับกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้เวลาในการทดสอบ 50 นาที

3. ดำเนินการสอนสาระการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยใช้การจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 17 คาบ คาบละ 50 นาที

4. นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนทำหลังจากดำเนินการสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละเรื่องดังนี้ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา โดยใช้เวลา 15 นาที

5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ให้นักเรียนทำหลังจากดำเนินการสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้เวลาทดสอบ 50 นาที

6. ให้นักเรียนทำแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

7. นำผลการทดสอบก่อนการเรียนและหลังการเรียนมาเปรียบเทียบกัน และเปรียบเทียบคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนเทียบกับเกณฑ์ 60%

การวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ มีดังนี้

1. ค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่
 - 1.1 ค่าร้อยละ
 - 1.2 ค่าเฉลี่ย (\bar{x})
 - 1.3 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ได้แก่

2.1 ค่าดัชนีความสอดคล้องจากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยการใช้ค่า IOC

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC คือ ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับจุดประสงค์
 $\sum R$ คือ ผลรวมของคะแนนการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
 N คือ จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

2.2 ค่าดัชนีความง่าย (p)

$$p = \frac{R_U + R_L}{2n}$$

เมื่อ p คือ ดัชนีความง่าย
 R_U คือ จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มสูง
 R_L คือ จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มต่ำ
 n คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมดในกลุ่มสูงหรือกลุ่มต่ำ

2.3 ค่าดัชนีอำนาจจำแนก (r)

$$r = \frac{R_U - R_L}{n}$$

เมื่อ r คือ ดัชนีอำนาจจำแนก
 R_U คือ จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มสูง
 R_L คือ จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มต่ำ
 n คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมดในกลุ่มสูงหรือกลุ่มต่ำ

2.4 ค่าสัมประสิทธิ์ความเที่ยงของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ใช้สัมประสิทธิ์แอลฟาของ Cronbach

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k s_i^2}{s^2} \right)$$

เมื่อ	α	คือ	สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น
	k	คือ	จำนวนข้อในแบบทดสอบ
	s_i^2	คือ	ความแปรปรวนของข้อมูลแต่ละข้อ
	s^2	คือ	ความแปรปรวนของข้อมูลทั้งฉบับของผู้ถูกวัดทั้งหมด

3. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการเรียนและหลังการเรียน
ของกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้ matched-pairs t-test

4. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการเรียนกับเกณฑ์ 60%
โดยใช้ one sample t-test

5. ประเมินแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยใช้
ค่าร้อยละและค่าเฉลี่ย ซึ่งพิจารณาจากคะแนนแต่ละขั้นตอน โดยทำการประเมินทั้งหมด 4 เรื่อง
โดยในแต่ละเรื่องมีคะแนนตั้งแต่ 0 ถึง 18 คะแนน และกำหนดเกณฑ์การประเมินดังนี้

ช่วงคะแนน 80-100 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ระดับดีมาก

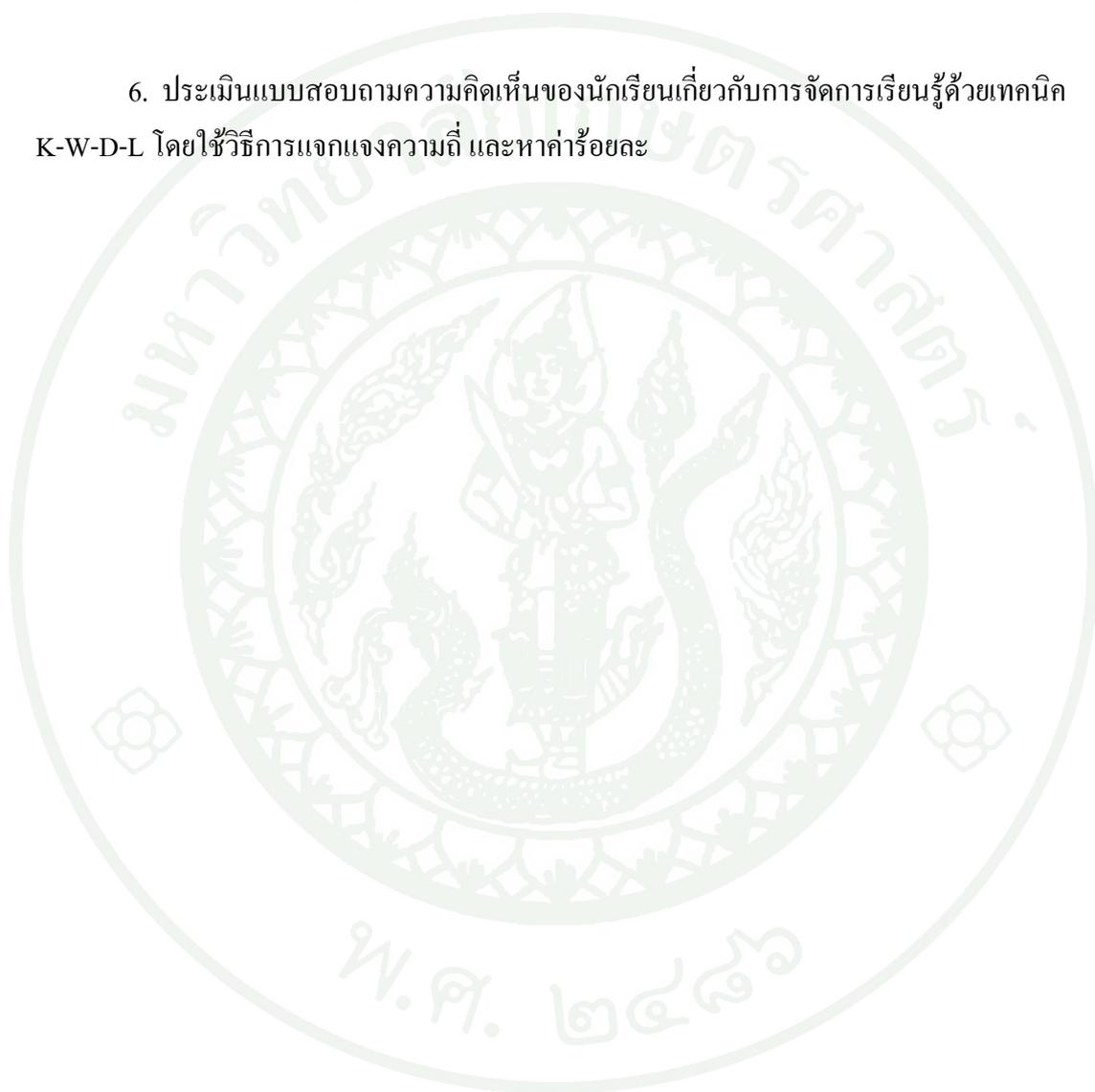
ช่วงคะแนน 70-79 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ระดับดี

ช่วงคะแนน 60-69 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ระดับปานกลาง

ช่วงคะแนน 50-59 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับน้อย

ช่วงคะแนน 0-49 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับต้องปรับปรุง

6. ประเมินแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โดยใช้วิธีการแจกแจงความถี่ และหาค่าร้อยละ



บทที่ 4

ผลการวิจัยและข้อวิจารณ์

การวิจัย เรื่อง การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนฝึกการแก้โจทย์ปัญหาโดยการคิดวิเคราะห์ โจทย์อย่างเป็นขั้นตอน ละเอียด ถี่ถ้วนและชัดเจน ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ชี้นำเข้าสู่บทเรียน ครูทบทวนความรู้เดิม

2. ชี้นสอนเนื้อหา

2.1 ครูนำเสนอเนื้อหาใหม่แก่นักเรียนทั้งชั้นเรียน

2.2 ครูและนักเรียนร่วมวิเคราะห์ โจทย์และแก้ปัญหาโดยใช้แผนผัง K-W-D-L ซึ่งมาจากคำถามต่อไปนี้

K (what we **know**) เรารู้อะไรบ้างในสิ่งที่เรียนหรือ โจทย์บอกอะไรบ้าง

W (what we **want**) เราต้องการรู้ ต้องการทราบอะไร หรือ โจทย์ให้หาอะไร มีวิธีการอย่างไร ใช้วิธีการอะไรบ้าง

D (what we **do**) เราต้องทำอะไรบ้างเพื่อหาคำตอบตามที่ โจทย์ต้องการ หรือสิ่งที่ต้องการรู้

L (what we **learn**) เราเรียนรู้อะไรบ้าง สรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ หรือบอกวิธีคิดอย่างไรและได้คำตอบอะไรบ้าง

2.3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปความรู้ที่ได้จากการแก้โจทย์ปัญหา

2.4 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้การแก้ปัญหาด้วยเทคนิค K-W-D-L

3. ขั้นสรุปบทเรียนและวัดผลประเมินผล

3.1 ครูให้นักเรียนสรุปความรู้ทั้งหมดที่ได้จากการเรียนในคาบเรียนนั้น ๆ

3.2 ครูวัดผลและประเมินผลจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยพิจารณาจากการตอบคำถามของนักเรียน การร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด เป็นต้น

ผลการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

ตอนที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

ตอนที่ 3 ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

ตอนที่ 1 ผลการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

การวิเคราะห์ผลการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช จากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หลังจากสอนจบเนื้อหาในแต่ละหัวข้อของเรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งประกอบด้วยเรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา โดย

ในแต่ละเรื่องมีจำนวน 2 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยโดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งประกอบด้วย วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา (คะแนนเต็มเรื่องละ 18 คะแนน)

ค่าสถิติ	เรื่อง				ค่าเฉลี่ยรวม
	วงกลม	วงรี	พาราโบลา	ไฮเพอร์โบลา	
ค่าเฉลี่ย	14.00	12.35	14.12	14.30	13.66
ร้อยละ	77.78	68.63	78.43	79.41	76.06

จากตารางที่ 4.1 เมื่อพิจารณาโดยภาพรวมพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการแก้ปัญหาอยู่ในระดับดี โดยได้คะแนนเฉลี่ย 13.66 คิดเป็นร้อยละ 76.06 และเมื่อพิจารณาความสามารถในการแก้ปัญหาในแต่ละเรื่อง พบว่า เรื่องที่นักเรียนได้คะแนนเฉลี่ยสูงสุด คือ ไฮเพอร์โบลา โดยได้คะแนนเฉลี่ย 14.30 คิดเป็นร้อยละ 79.41 ซึ่งอยู่ในระดับดี รองลงมาคือ พาราโบลา ได้คะแนนเฉลี่ย 14.12 คิดเป็นร้อยละ 78.43 ซึ่งอยู่ในระดับดีเช่นเดียวกัน ในขณะที่คะแนนต่ำสุดคือ วงรี ซึ่งได้คะแนนเฉลี่ย 12.35 คิดเป็นร้อยละ 68.63 และอยู่ในระดับปานกลาง โดยประเด็นของปัญหาที่สำคัญที่พบในการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในแต่ละเรื่องพบว่า การทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่องวงกลม นักเรียนบางคนไม่สามารถจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ การแก้ปัญหาเรื่องวงรีพบว่า นักเรียนบางคนไม่สามารถแยกแยะได้ว่า โจทย์สมการวงรีที่กำหนดมาให้เป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้งหรือเป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน และนักเรียนบางคนไม่สามารถจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ การแก้ปัญหาเรื่องพาราโบลา พบว่า นักเรียนบางคนไม่สามารถแยกแยะได้ว่า โจทย์สมการพาราโบลาที่กำหนดมาให้เป็นพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งหรือเป็นพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน และการแก้ปัญหาเรื่องไฮเพอร์โบลาพบว่า มีนักเรียนบางคนเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาไม่ถูกต้อง นอกจากนี้พบว่าการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งสี่เรื่อง นักเรียนมีข้อผิดพลาดในด้านการคิดคำนวณ เช่น การบวกลบจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ การใช้สมบัติการเท่ากัน และการใช้สมบัติการแจกแจง เป็นต้น

ตารางที่ 4.2 คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ในแต่ละขั้นตอน (คะแนนรวมในแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหา มาจากคะแนนแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จำนวน 2 ข้อ)

ความสามารถในการแก้ปัญหา		เรื่อง				ค่าเฉลี่ย
		วงกลม	วงรี	พาราโบลา	ไฮเพอร์โบลา	
K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และความรู้เดิมที่ใช้ (คะแนนรวม 4 คะแนน)	ค่าเฉลี่ย	3.59	3.09	3.47	3.76	3.48
	ร้อยละ	89.70	77.21	86.76	94.12	86.95
W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ และวิธีการแก้ปัญหา (คะแนนรวม 4 คะแนน)	ค่าเฉลี่ย	3.53	3.15	3.53	3.71	3.48
	ร้อยละ	88.24	78.68	88.24	92.65	86.95
D ดำเนินการแก้ปัญหา (คะแนนรวม 6 คะแนน)	ค่าเฉลี่ย	4.18	3.68	4.47	4.35	4.17
	ร้อยละ	69.12	61.27	74.51	72.55	69.36
L สรุปผลของการแก้ปัญหา และคำตอบที่ได้ (คะแนนรวม 4 คะแนน)	ค่าเฉลี่ย	2.74	2.44	2.65	2.56	2.60
	ร้อยละ	68.38	61.03	66.18	63.97	64.89

จากตารางที่ 4.2 แสดงผลการประเมินจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ในแต่ละขั้นตอน พบว่า ชั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ และชั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา มีคะแนนเท่ากัน โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.48 คิดเป็นร้อยละ 86.95 ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก รองลงมาคือ ชั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา ได้คะแนนเฉลี่ย 4.17 คิดเป็นร้อยละ 69.36 ซึ่งอยู่ในระดับปานกลาง ส่วนชั้นที่มีคะแนนเฉลี่ยต่ำที่สุดคือ ชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ โดยได้คะแนนเฉลี่ย 2.60 คิดเป็นร้อยละ 64.89 ซึ่งอยู่ในระดับปานกลาง และปัญหาที่พบคือ นักเรียนสรุปคำตอบผิด และเขียนสรุปความรู้ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง นอกจากนี้มีนักเรียนบางคนที่ไม่เขียนสรุปความรู้ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา

เมื่อพิจารณาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ในแต่ละขั้นตอน พบว่า

ขั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ นักเรียนส่วนใหญ่สามารถวิเคราะห์โจทย์ปัญหาได้ดีมาก คือสามารถเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และสามารถนำความรู้ที่เรียนมาเขียนสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ถูกต้อง โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.48 คิดเป็นร้อยละ 86.95 ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก และในขั้นตอนนี้พบว่า เรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดคือ ไฮเพอร์โบลา โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.76 คิดเป็นร้อยละ 94.12 รองลงมาคือ วงกลม ได้คะแนนเฉลี่ย 3.59 คิดเป็นร้อยละ 89.70 และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ วงรี ซึ่งได้คะแนนเฉลี่ย 3.09 คิดเป็นร้อยละ 77.21 ปัญหาที่พบจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา คือ นักเรียนบางคนเขียนได้เฉพาะสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ แต่ไม่สามารถเขียนสรุปความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ เช่น นักเรียนไม่สามารถแยกแยะได้ว่า โจทย์สมการวงกลมที่กำหนดมาให้เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ หรือจุด (h, k) โจทย์สมการวงรีที่กำหนดมาให้เป็นสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน โจทย์สมการพาราโบลาที่กำหนดมาให้เป็นสมการพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน และ โจทย์สมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดมาให้เป็นสมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน เป็นต้น

ขั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา นักเรียนส่วนใหญ่สามารถเขียนสิ่งที่โจทย์ถาม และบอกวิธีการแก้ปัญหาที่จะได้มาซึ่งคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.48 คิดเป็นร้อยละ 86.95 เช่นเดียวกับขั้น K ซึ่งอยู่ในระดับดีมาก และในขั้นตอนนี้พบว่า เรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดคือ ไฮเพอร์โบลา โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.71 คิดเป็นร้อยละ 92.65 รองลงมาคือ วงกลมและพาราโบลาซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากันคือ 3.53 คิดเป็นร้อยละ 88.24 และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ วงรี โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.15 คิดเป็นร้อยละ 78.68 โดยปัญหาที่พบคือ นักเรียนบางคนเขียนสิ่งที่โจทย์ถามได้แต่เขียนวิธีการแก้ปัญหาได้ไม่ครบสมบูรณ์ ตัวอย่างเช่น ในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่องวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) โจทย์ต้องการให้หาส่วนประกอบของวงรี ได้แก่ จุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอด และจุดปลายแกนโท ดังนั้นวิธีการแก้ปัญหานักเรียนต้องหาจุดศูนย์กลางของวงรีคือจุด (h, k) หาค่า $a, b,$ และ c แต่นักเรียนบางคนเขียนวิธีการแก้ปัญหเฉพาะการหาจุดศูนย์กลางของวงรี หรือ หาค่า $a, b,$ และ c เท่านั้น

ขั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยได้คะแนนเฉลี่ย 4.17 คิดเป็นร้อยละ 69.36 ซึ่งแสดงว่านักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง เมื่อพิจารณาการดำเนินการแก้ปัญหาเรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา พบว่า พาราโบลาเป็นเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุด โดยได้คะแนนเฉลี่ย

4.47 คิดเป็นร้อยละ 74.51 รองลงมาคือ ไฮเพอร์โบล่า ได้คะแนนเฉลี่ย 4.35 คิดเป็นร้อยละ 72.55 และเรื่องที่ทำให้นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำสุดคือ วงรี โดยได้คะแนนเฉลี่ย 3.68 คิดเป็นร้อยละ 61.27 สำหรับในขั้นตอนดำเนินการแก้ปัญหาพบว่า นักเรียนต้องนำความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ และกำลังสองสมบูรณ์มาใช้ในการแก้ปัญหาค้าง และจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาค้างของนักเรียนทั้งสี่เรื่อง ปัญหาที่พบคือ นักเรียนบางคนมีข้อผิดพลาดในด้านการคิดคำนวณ เช่น การถอดรากที่สอง การบวกลบจำนวนเต็ม เป็นต้น และนักเรียนบางคนเขียนสูตรเรขาคณิตวิเคราะห์ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาค้างไม่ได้ เช่น สูตรการหารระยะทางระหว่างจุดสองจุด สูตรการหารระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และสูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด เป็นต้น นอกจากนี้ นักเรียนบางคนไม่สามารถจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้

ขั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ นักเรียนส่วนใหญ่เขียนสรุปคำตอบจากสิ่งที่โจทย์ถาม และสามารถเขียนสรุปความรู้เป็นความคิดรวบยอดจากการหาคำตอบได้ ซึ่งขั้นตอนนี้ เป็นขั้นตอนที่ต้องอาศัยข้อมูลจากขั้นตอนต่าง ๆ ก่อนหน้านี้นำมาใช้ในการเขียนสรุปคำตอบ แต่ปัญหาที่พบจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาค้างทางคณิตศาสตร์เรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบล่า คือ นักเรียนทำขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งผิด ทำให้ขั้นสรุปผลของการแก้ปัญหาค้างผิดพลาดไปด้วย สำหรับขั้นตอนนี้ได้คะแนนเฉลี่ย 2.60 คิดเป็นร้อยละ 64.89 ซึ่งอยู่ในระดับปานกลาง และพบว่าเรื่องที่ทำให้นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดคือ วงกลม โดยได้คะแนนเฉลี่ย 2.74 คิดเป็นร้อยละ 68.38 รองลงมาคือ พาราโบลา ได้คะแนนเฉลี่ย 2.65 คิดเป็นร้อยละ 66.18 และเรื่องที่ทำให้นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำสุดคือ วงรี โดยได้คะแนนเฉลี่ย 2.44 คิดเป็นร้อยละ 61.03

ตอนที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนการเรียน แล้วนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปใช้ดำเนินการสอนกับนักเรียน เมื่อสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ผู้วิจัยได้ทำการทดสอบหลังการเรียนโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งเป็นฉบับเดียวกับแบบทดสอบก่อนการเรียน และได้ผลดังนี้

2.1 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนการเรียน และหลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย

ตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการเรียนและหลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย (คะแนนเต็ม 20 คะแนน)

คะแนน	n	\bar{x}	S.D.	t
ก่อนการเรียน	34	3.18	1.218	18.646*
หลังการเรียน	34	13.32	2.671	

* นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ($t_{33}(0.95) = 1.6924$)

จากตารางที่ 4.3 แสดงว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L หลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.2 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย กับเกณฑ์ 60%

ตารางที่ 4.4 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย กับเกณฑ์ 60% (คะแนนเต็ม 20 คะแนน คิดเป็น 12 คะแนน)

คะแนน	n	\bar{x}	ร้อยละ	S.D.	t
หลังการเรียน	34	13.32	66.62	2.671	2.889*

* นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ($t_{33}(0.95) = 1.6924$)

จากตารางที่ 4.4 แสดงว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L สูงกว่าเกณฑ์ 60% อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยได้คะแนนเฉลี่ย 13.32 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 66.62

ตอนที่ 3 ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
เรื่อง ภาคตัดกรวย

ตารางที่ 4.5 ผลการสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค
K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (n = 34)				
		เห็น ด้วย อย่างยิ่ง	เห็น ด้วย	ไม่ แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้						
1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค	จำนวน	20	14	-	-	-
K-W-D-L ช่วยให้นักเรียนคิดอย่างเป็นระบบ	ร้อยละ	58.82	41.18	-	-	-
และมีขั้นตอนที่ชัดเจนในการแก้ปัญหา						
2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค	จำนวน	21	13	-	-	-
K-W-D-L ทำให้นักเรียนมีความรอบคอบในการ	ร้อยละ	61.76	38.24	-	-	-
แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความมั่นใจใน						
การหาคำตอบ						
3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค	จำนวน	12	22	-	-	-
K-W-D-L เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความ	ร้อยละ	35.29	64.71	-	-	-
ความคิดเห็นร่วมกัน						
4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค	จำนวน	21	13	-	-	-
K-W-D-L ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องที่	ร้อยละ	61.76	38.24	-	-	-
เรียนมากขึ้น						
ด้านการวัดผลและประเมินผล						
5. การทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา	จำนวน	17	14	3	-	-
ทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนทราบข้อบกพร่อง	ร้อยละ	50.00	41.18	8.82	-	-
ของตนเอง เพื่อนำไปปรับปรุง แก้ไขและพัฒนา						
ตนเองต่อไป						
6. การทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา	จำนวน	15	16	3	-	-
ทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนมีความต้องการที่	ร้อยละ	44.12	47.06	8.82	-	-
จะพัฒนาตนเองอย่างต่อเนื่อง						

ตารางที่ 4.5 (ต่อ)

ข้อความ		ระดับความคิดเห็น (n = 34)				
		เห็น ด้วย อย่างยิ่ง	เห็น ด้วย	ไม่ แน่ใจ	ไม่เห็น ด้วย	ไม่เห็น ด้วย อย่างยิ่ง
7. เกณฑ์การประเมินผล มีความชัดเจน เหมาะสมและยุติธรรม	จำนวน	15	19	-	-	-
	ร้อยละ	44.12	55.88	-	-	-
8. จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบวัดผล สัมฤทธิ์มีความเหมาะสมกับเวลาที่ใช้สอบ	จำนวน	15	18	1	-	-
	ร้อยละ	44.12	52.94	2.94	-	-
ด้านครูผู้สอน						
9. ครูผู้สอนเอาใจใส่และมีความเป็นกันเองกับ นักเรียน ทำให้ส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนรู้ ได้เป็นอย่างดี	จำนวน	18	16	-	-	-
	ร้อยละ	52.94	47.06	-	-	-
10. ครูผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อ สงสัย และคอยช่วยเหลือให้นักเรียนให้เข้าใจ บทเรียนอย่างเต็มความสามารถ	จำนวน	19	15	-	-	-
	ร้อยละ	55.88	44.12	-	-	-
11. ครูผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดง ความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและค้นพบความรู้ด้วย ตนเอง	จำนวน	16	18	-	-	-
	ร้อยละ	47.06	52.94	-	-	-
12. ครูผู้สอนปฏิบัติตนเป็นแบบอย่างที่ดีและ เหมาะสมกับบทบาทหน้าที่ของครูผู้สอน	จำนวน	20	14	-	-	-
	ร้อยละ	58.82	41.18	-	-	-
ด้านสื่อการเรียนรู้						
13. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้ สอดคล้องกับเนื้อหาสาระ	จำนวน	18	16	-	-	-
	ร้อยละ	52.94	47.06	-	-	-
14. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ช่วยส่งเสริมให้ นักเรียนเข้าใจขั้นตอนการแก้ปัญหาและทักษะ การแก้ปัญหาได้ดี	จำนวน	15	19	-	-	-
	ร้อยละ	44.12	55.88	-	-	-
15. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ช่วยส่งเสริมให้ นักเรียนมีความเข้าใจในบทเรียนมากขึ้น	จำนวน	20	13	1	-	-
	ร้อยละ	58.82	38.23	2.94	-	-

จากตารางที่ 4.5 พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยกับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค
K-W-D-L เรื่อง ภาวะคัดกรวย โดยพิจารณาเป็นรายด้านดังนี้

ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ทำให้นักเรียนมีความรอบคอบในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความมั่นใจในการหาคำตอบ และกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องที่เรียนมากขึ้น คิดเป็นร้อยละ 61.76 และรองลงมาคือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ช่วยให้นักเรียนคิดอย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนที่ชัดเจนในการแก้ปัญหา คิดเป็นร้อยละ 58.82 ในขณะที่นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นร่วมกัน คิดเป็นร้อยละ 64.71

ด้านการวัดผลและประเมินผล พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า การทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนทราบข้อบกพร่องของตนเอง เพื่อนำไปปรับปรุง แก้ไข และพัฒนาตนเองต่อไป คิดเป็นร้อยละ 50 และนักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยว่า เกณฑ์การประเมินผล มีความชัดเจน เหมาะสมและยุติธรรม คิดเป็นร้อยละ 55.88 รองลงมาคือ จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์มีความเหมาะสมกับเวลาที่ใช้สอบ คิดเป็นร้อยละ 52.94

ด้านครูผู้สอน พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า ครูผู้สอนปฏิบัติตนเป็นแบบอย่างที่ดีและเหมาะสมกับบทบาทหน้าที่ของครูผู้สอน คิดเป็นร้อยละ 58.82 รองลงมา คือ ครูผู้สอนเปิด โอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย และคอยช่วยเหลือให้นักเรียนให้เข้าใจบทเรียนอย่างเต็มความสามารถ คิดเป็นร้อยละ 55.88 และครูผู้สอนเอาใจใส่และมีความเป็นกันเองกับนักเรียน ทำให้ส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี คิดเป็นร้อยละ 52.94 นอกจากนี้ นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยว่า ครูผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและค้นพบความรู้ด้วยตนเอง คิดเป็นร้อยละ 52.94

ด้านสื่อการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยอย่างยิ่งว่า สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีความเข้าใจในบทเรียนมากขึ้น คิดเป็นร้อยละ 58.82 รองลงมา คือ สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้สอดคล้องกับเนื้อหาสาระ คิดเป็นร้อยละ 52.94 ในขณะที่นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยว่า สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจขั้นตอนการแก้ปัญหาและทักษะการแก้ปัญหาได้ดี คิดเป็นร้อยละ 55.88

ข้อวิจารณ์

จากผลการวิจัย เรื่อง การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ผู้วิจัยได้นำมาเป็นข้อวิจารณ์ ดังนี้

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนหลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน โดยมีคะแนนเฉลี่ยหลังการเรียน 13.32 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 66.62 สูงกว่าเกณฑ์ 60% ที่ได้กำหนดไว้ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ วีรศักดิ์ เลิศโสภา (2544) นิยม เกียรติทาทราย (2548) และอดิเรก เฉลียวฉลาด (2550) ซึ่งได้นำการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อศึกษาและพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดย วีรศักดิ์ เลิศโสภา (2544) ได้ศึกษาผลการใช้เทคนิคการสอน เค ดับเบิ้ลยู ดี แอล ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 นิยม เกียรติทาทราย (2548) ได้ศึกษาการพัฒนาผลการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาการหาพื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL และ อดิเรก เฉลียวฉลาด (2550) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาร้อยละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้เทคนิค K-W-D-L กับการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน และงานวิจัยที่เป็นการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L กับการสอนปกติ พบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ เนื่องจากจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เน้นให้นักเรียนคิดวิเคราะห์การแก้โจทย์ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอน โดยนักเรียนต้องใช้ทักษะการอ่านในการวิเคราะห์และทำความเข้าใจ โจทย์ปัญหา เพื่อค้นหาข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ว่า โจทย์กำหนดอะไร หรือบอกอะไรมาให้บ้าง โจทย์ต้องการทราบอะไร ต้องใช้ความรู้อะไรบ้างในการแก้โจทย์ปัญหา มีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไร แล้วนักเรียนดำเนินการแก้ปัญหตามวิธีการที่ได้กำหนดไว้ และสรุปผลของการแก้ปัญห และขั้นตอนที่ได้จากการแก้ปัญห ซึ่งเห็นได้ว่า กระบวนการในการแก้ปัญหามีลำดับขั้นตอนการคิดชัดเจน ที่นักเรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์และดำเนินแก้ปัญหเพื่อจะได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง

2. การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 4 เรื่อง ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ซึ่งในแต่ละเรื่องผู้วิจัยได้ศึกษาความสามารถในการแก้ โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ ขั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ ขั้นตอนนี้ศึกษาความสามารถในการทำความเข้าใจโจทย์ว่าโจทย์บอกระยะไรบ้าง และนำความรู้ที่เรียนมาสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ ขั้น W สิ่งที่โจทย์ ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้ศึกษาเกี่ยวกับความสามารถในการวิเคราะห์โจทย์ว่า โจทย์ต้องการทราบอะไร และสามารถบอกวิธีการแก้ปัญหาโดยบอกขั้นตอนที่สำคัญว่าต้องทำอะไรบ้างในการแก้ปัญหา เพื่อที่จะได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง ขั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา ศึกษา เกี่ยวกับการแสดงวิธีการหาคำตอบของนักเรียน และขั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ ได้ เป็นการศึกษาความสามารถในการสรุปคำตอบและสรุปความรู้ทั้งหมดที่นำมาใช้ในการ แก้ปัญหา ผลจากการตรวจแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียน ส่วนใหญ่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ทั้งสี่ขั้นตอน โดยเฉลี่ย อยู่ในระดับดี โดยได้คะแนนเฉลี่ย 13.66 คะแนน จากคะแนนเต็ม 18 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 76.06 ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ชีรวรรณ ไชยพิชิต (2551) ที่ได้พัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการสอดแทรกข้อมูลท้องถิ่นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทั้ง 4 ด้าน คือ ด้านทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา ด้าน วางแผนแก้ปัญหา ด้านดำเนินการตามแผน และด้านการตรวจสอบคำตอบ อยู่ในเกณฑ์ดี และ สอดคล้องกับงานวิจัยของ ปาจารย์ เยาดำ (2552) ที่ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง “การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว” โดยใช้กลวิธี STAR ของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสวัสดิ์ศรีรัตนากิมุข จังหวัดตรัง พบว่า นักเรียนมีการพัฒนาความสามารถ ในการแก้โจทย์ปัญหาทั้งสี่ด้าน คือ ด้านการศึกษาโจทย์ปัญหา ด้านการแปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ ปัญหาไปสู่สมการทางคณิตศาสตร์ ด้านการหาคำตอบของโจทย์ปัญหา และด้านการทบทวน คำตอบอยู่ในเกณฑ์ดี และจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียน โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L พบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ย ในขั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ และขั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและ วิธีการแก้ปัญหาสูงสุด และพบว่าทั้งสองขั้นตอนนี้ ไฮเพอร์โบลาเป็นเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ สูงสุด เนื่องจากนักเรียนผ่านการวิเคราะห์การแก้โจทย์ปัญหา โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L มาแล้วสามเรื่อง ได้แก่ วงกลม วงรี และพาราโบลา และพบว่ารูปแบบมาตรฐานของ สมการไฮเพอร์โบลา มีลักษณะคล้ายกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี และแนวทางวิธีการ แก้ปัญหามีลักษณะเช่นเดียวกับวงรี จึงทำให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์เรื่องไฮเพอร์โบลาได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง โจทย์ต้องการทราบอะไร สามารถนำความรู้ที่เรียนมาวิเคราะห์โจทย์

และวิธีการแก้ปัญหาก็ได้เป็นอย่างดี ชั้น D ดำเนินการแก้ปัญหาก็เป็นขั้นตอนที่นักเรียนทำคะแนนได้รองลงมา และพบว่าเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดในชั้นตอนนี้คือ พาราโบลา เนื่องจากการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง พาราโบลา นักเรียนต้องใช้ความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์ ซึ่งนักเรียนได้เรียนรู้ผ่านมาแล้วจากเรื่อง วงกลม และวงรี และขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง พาราโบลา ไม่มีความซับซ้อน เช่น โจทย์ต้องการให้หาสมการพาราโบลา ดังนั้นวิธีการแก้ปัญหาคือ หาค่า p แล้วนำไปแทนค่าในสูตรสมการพาราโบลา ซึ่งจะได้คำตอบตามที่ต้องการ จึงทำให้พาราโบลาเป็นเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุด และขั้นตอนที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ ชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาคำตอบที่ได้ เพราะในการสรุปผลของการแก้ปัญหาคำตอบที่ได้ นักเรียนต้องอาศัยข้อมูลจากขั้นตอนต่าง ๆ ทั้งสามขั้นตอน ได้แก่ ชั้น K ชั้น W และชั้น D มาใช้ในการสรุปคำตอบ ซึ่งถ้านักเรียนทำขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งผิดพลาดก็จะทำให้การสรุปคำตอบผิดพลาดไปด้วย และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดในชั้น L คือ วงกลม เนื่องจากนักเรียนมีความรู้พื้นฐานเรื่องวงกลมอยู่แล้ว และรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมไม่ซับซ้อน นักเรียนรู้จักศูนย์กลางของวงกลมและรัศมีของวงกลมก็สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ วงกลมจึงเป็นเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดในชั้นตอนนี้ จากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหามาในแต่ละชั้นตอนแสดงให้เห็นว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถศึกษาโจทย์เพื่อทำความเข้าใจถึงสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหาก็ได้เป็นอย่างดี แต่นักเรียนขาดทักษะการคิดคำนวณและขาดความรู้พื้นฐานที่ต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหามา เช่น การจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ และขาดความรอบคอบในการทำงาน

เมื่อพิจารณาแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหามาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา สามารถแสดงรายละเอียดดังนี้

1. นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามเรื่องวงกลมได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง โจทย์ต้องการทราบอะไร และนักเรียนสามารถนำความรู้ที่เรียนมาเขียนสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ และสามารถบอกวิธีการแก้ปัญหาคือว่าต้องทำอะไรบ้างเพื่อจะได้มาซึ่งคำตอบที่ต้องการ ในขั้นตอนการดำเนินการแก้ปัญหาก็ต้องใช้ความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์มาใช้ในการแก้ปัญหามา เช่น การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด การหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด เป็นต้น และความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์ ปัญหาที่พบคือ นักเรียนบางคนไม่สามารถเขียนสูตรเรขาคณิตวิเคราะห์ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหามาได้ และไม่สามารถจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ นอกจากนี้นักเรียนมีข้อผิดพลาดในการคิดคำนวณ เช่น การถอดรากที่สอง การบวกลบจำนวนเต็ม เป็นต้น สำหรับขั้นสรุปผลของการ

แก้ปัญหาและคำตอบที่ได้พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถสรุปคำตอบและสรุปผลของการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง

2. นักเรียนสามารถตอบคำถามเรื่องวงรีได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้างและโจทย์ต้องการทราบอะไร แต่นักเรียนบางคนไม่สามารถนำความรู้ที่เรียนมาสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ เช่น นักเรียนไม่สามารถแยกแยะได้ว่าโจทย์วงรีที่กำหนดมาให้เป็นสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน สำหรับขั้นดำเนินการแก้ปัญหา นักเรียนต้องนำความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ การจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์มาใช้ในการแก้ปัญหา และนักเรียนต้องรู้รูปแบบมาตรฐานของวงรีที่กำหนดให้ว่าเป็นสมการวงรีชนิดใด พบว่านักเรียนที่สามารถบอกได้ว่าโจทย์วงรีที่กำหนดมาให้ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีชนิดใด สามารถแสดงการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง แต่นักเรียนมีข้อผิดพลาดในการคิดคำนวณ โดยเฉพาะการจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ และในขั้นตอนการสรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ พบว่านักเรียนบางคนเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีไม่ได้ ทำให้การสรุปคำตอบผิดพลาดไปด้วย

3. นักเรียนส่วนใหญ่สามารถตอบคำถามเรื่องพาราโบลาได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง โจทย์ต้องการทราบอะไร และสามารถนำความรู้ที่เรียนมาสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ นั่นคือสามารถบอกได้ว่าพาราโบลาที่โจทย์กำหนดให้เป็นสมการพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน และสามารถบอกวิธีการแก้ปัญหาได้ ในขั้นตอนการดำเนินการแก้ปัญหา พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถแสดงขั้นตอนการหาคำตอบได้ แต่นักเรียนบางคนมีข้อผิดพลาดด้านการคิดคำนวณเกี่ยวกับการใช้สมบัติการเท่ากัน และสมบัติการแจกแจงสำหรับขั้นการสรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถเขียนสรุปคำตอบ และสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง แต่มีนักเรียนบางคนเขียนส่วนประกอบของพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งสลับกับสมการพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน เช่น นักเรียนเขียนโฟกัสของสมการพาราโบลาที่จุดยอด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน คือจุด $(h, k+p)$ แต่คำตอบที่ถูกต้องคือจุด $(h+p, k)$

4. นักเรียนส่วนใหญ่สามารถตอบคำถามเรื่องไฮเพอร์โบลาได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง โจทย์ต้องการทราบอะไร และสามารถนำความรู้ที่เรียนมาสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ คือสามารถบอกได้ว่าโจทย์ไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน และสามารถบอกวิธีการแก้ปัญหาได้ ในขั้นตอนการดำเนิน

การแก้ปัญหา นักเรียนต้องนำความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ การจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์มาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่สามารถทำในขั้นตอนนี้ได้ แต่ปัญหาที่พบคือ นักเรียนบางคนเข้าใจผิดเกี่ยวกับรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา กับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ในเรื่องความสัมพันธ์ของค่า a , b และ c เช่น เรื่องไฮเพอร์โบลา ความสัมพันธ์ของค่า a , b และ c คือ $c^2 = a^2 + b^2$ แต่นักเรียนใช้ค่า $a^2 = b^2 + c^2$ ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้ในเรื่องวงรี นอกจากนี้ นักเรียนบางคนมีข้อผิดพลาดในการคิดคำนวณ เช่น การใช้สมบัติการแจกแจง การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ สำหรับขั้นสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้พบว่า นักเรียนที่ทำขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้องก็สามารถสรุปคำตอบและสรุปความรู้ที่ได้จากการหาคำตอบได้ นอกจากนี้ นักเรียนบางคนสรุปคำตอบผิดแต่สามารถเขียนสรุปความรู้ที่ได้จากการหาคำตอบได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

การวิจัย เรื่อง การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช สรุปได้ดังนี้

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
2. ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
3. ศึกษาความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

2. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 34 คน ที่ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) จากจำนวนทั้งหมด 3 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 105 คน

3. สารการเรียนรู้ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในงานวิจัยครั้งนี้คือ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วย วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

4. ระยะเวลาที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2553 ตั้งแต่วันที่ 15 พฤศจิกายน 2553 ถึงวันที่ 24 ธันวาคม 2553 โดยใช้เวลาทั้งหมด 19 คาบ คาบละ 50 นาที

5. ตัวแปรที่ศึกษาในงานวิจัย ได้แก่

5.1 ตัวจัดกระทำ คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

5.2 ตัวแปรตาม คือ

5.2.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

5.2.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

5.2.3 ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 4 ชุด ดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 17 คาบ

2. แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยผู้วิจัยได้กำหนดพฤติกรรมที่ต้องการมุ่งวัด 4 ชั้น ได้แก่ ชั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ ชั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา ชั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา และชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ ซึ่งคำตอบที่ได้ต้องมีความเป็นไปได้และสอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ให้นักเรียนทำเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ ซึ่งมีทั้งหมด 4 ชุด ได้แก่ เรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ในแต่ละชุดมีจำนวน 2 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน การประเมินผลในแต่ละข้อประเมินตามคุณลักษณะที่ต้องการวัดแตกต่างกัน 4 ขั้นตอนคือ ชั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ มีการตรวจให้คะแนนตั้งแต่ 0-2 คะแนน ชั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา มีการตรวจให้คะแนนตั้งแต่ 0-2 คะแนน ชั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา มีการตรวจให้คะแนนตั้งแต่ 0-3 คะแนน และชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ มีการตรวจให้คะแนนตั้งแต่ 0-2 คะแนน ซึ่งการกำหนดเกณฑ์ในแต่ละชั้นจะแสดงถึงรายการคุณลักษณะที่ตอบถูกทุกประเด็นจนกระทั่งนักเรียนทำไม่ถูกต้องทั้งหมดในแต่ละขั้นตอน

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สำหรับใช้ทดสอบก่อนการเรียนและหลังการเรียน แบ่งเป็น 2 ตอน คะแนนเต็ม 20 คะแนน ดังนี้ ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบปรนัยชนิดเลือกตอบมี 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ (ข้อละ 1 คะแนน) และตอนที่ 2 เป็นข้อสอบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 2 ข้อ (ข้อละ 4 คะแนน) ซึ่งจากการหาคุณภาพของแบบทดสอบพบว่า แบบทดสอบมีค่าดัชนีความง่ายอยู่ระหว่าง 0.30 ถึง 0.65 ค่าดัชนีอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.40 ถึง 0.58 และสัมประสิทธิ์ความเที่ยงของแบบทดสอบเท่ากับ 0.83

4. แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย เป็นแบบวัดความรู้สึกรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์หลังการเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่ามี 5 ระดับ คือ เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็น

ด้วย และไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง จำนวนทั้งหมด 15 ข้อ โดยแบ่งประเด็นที่ต้องการสอบถามออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ด้านการวัดผลและประเมินผล ด้านครูผู้สอน และด้านสื่อการเรียนรู้

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการวิจัย ผู้วิจัยมีขั้นตอนในการดำเนินการดังนี้

1. สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย จากนั้นนำเครื่องมือไปหาคุณภาพ
2. นำหนังสือขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลการทำวิจัย จากภาควิชาการศึกษา มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ไปติดต่อผู้อำนวยการ โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช เพื่อขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล จากนั้นผู้วิจัยได้ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ได้สร้างไว้ดังนี้
 - 2.1 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีลักษณะเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 12 ข้อ และแบบอัตนัย แสดงวิธีทำ จำนวน 2 ข้อ ที่ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างขึ้นและผ่านการวิเคราะห์และปรับปรุงแก้ไขแล้ว มาทำการทดสอบก่อนการเรียน (pre - test) กับนักเรียนโดยใช้เวลา 50 นาที
 - 2.2 ดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย กับนักเรียนเป็นเวลา 17 คาบ คาบละ 50 นาที
 - 2.3 นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนทำหลังจากดำเนินการสอนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละเรื่องดังนี้ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา โดยใช้เวลา 15 นาที

2.4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ฉบับเดิม มาทำการทดสอบหลังการเรียน (post - test) กับนักเรียน โดยใช้เวลา 50 นาที

3. ให้นักเรียนทำแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย

4. นำข้อมูลที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L มาวิเคราะห์ แปลผล และสรุปผล

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการเรียนและหลังการเรียนของกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้ matched-pairs t-test

2. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์หลังการเรียนกับเกณฑ์ 60% โดยใช้ one sample t-test

3. ประเมินแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยใช้ค่าร้อยละและค่าเฉลี่ย ซึ่งพิจารณาจากคะแนนแต่ละขั้นตอน โดยทำการประเมินทั้งหมด 4 เรื่อง โดยในแต่ละเรื่องมีคะแนนตั้งแต่ 0 ถึง 18 คะแนน และกำหนดเกณฑ์การประเมินดังนี้

ช่วงคะแนน 80-100 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับดีมาก

ช่วงคะแนน 70-79 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับดี

ช่วงคะแนน 60-69 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับปานกลาง

ช่วงคะแนน 50-59 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับน้อย

ช่วงคะแนน 0-49 หมายถึง นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับต้องปรับปรุง

4. ประเมินแบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โดยใช้วิธีการแจกแจงความถี่ และหาค่าร้อยละ

ผลการวิจัย

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โดยวัดผลและประเมินผลจากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า คะแนนเฉลี่ยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ซึ่งประกอบด้วย วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ของนักเรียนอยู่ในระดับดี โดยได้คะแนนร้อยละ 76.06 และเมื่อพิจารณาความสามารถในการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอน สรุปผลได้ดังนี้

1.1 ชั้น K สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถวิเคราะห์โจทย์ปัญหาได้ดีมาก คือสามารถเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และสามารถนำความรู้ที่เรียนมาเขียนสรุปเป็นความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ถูกต้อง โดยได้คะแนนร้อยละ 86.95 และในขั้นตอนนี้พบว่า เรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดคือ ไฮเพอร์โบลา รองลงมาคือ วงกลม และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ วงรี ปัญหาที่พบจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา คือ นักเรียนบางคนเขียนได้เฉพาะสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ แต่ไม่สามารถเขียนสรุปความคิดรวบยอดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ได้ เช่น นักเรียนไม่สามารถแยกแยะได้ว่า โจทย์สมการวงกลมที่กำหนดมาให้เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ หรือจุด (h, k) โจทย์สมการวงรีที่กำหนดมาให้เป็นสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน โจทย์สมการพาราโบลาที่กำหนดมาให้ เป็นสมการพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน และ โจทย์สมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดมาให้ เป็นสมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน เป็นต้น

1.2 ชั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถเขียนสิ่งที่โจทย์ถาม และบอกวิธีการแก้ปัญหาที่จะได้มาซึ่งคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยอยู่ในระดับดีมาก ได้คะแนนร้อยละ 86.95 และในชั้นตอนนี้พบว่า เรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดคือ ไฮเพอร์โบลา รองลงมาคือ วงกลมและพาราโบลา และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ วงรี โดยปัญหาที่พบคือ นักเรียนบางคนเขียนสิ่งที่โจทย์ถามได้แต่เขียนวิธีการแก้ปัญหาได้ไม่ครบสมบูรณ์ ตัวอย่างเช่น ในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่องวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) โจทย์ต้องการให้หาส่วนประกอบของวงรี ได้แก่ จุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนโท ดังนั้นวิธีการแก้ปัญหานักเรียนต้องหาจุดศูนย์กลางของวงรีคือจุด (h, k) หาค่า $a, b,$ และ c แต่นักเรียนบางคนเขียนวิธีการแก้ปัญหาเฉพาะการหาจุดศูนย์กลางของวงรี หรือ หาค่า $a, b,$ และ c เท่านั้น

1.3 ชั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา พบว่า นักเรียนมีความสามารถในชั้นดำเนินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง โดยได้คะแนนร้อยละ 69.36 เมื่อพิจารณาการดำเนินการแก้ปัญหาเรื่อง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา พบว่า พาราโบลาเป็นเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุด รองลงมาคือ ไฮเพอร์โบลา และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ วงรี สำหรับในชั้นตอนดำเนินการแก้ปัญหาพบว่า นักเรียนต้องนำความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์และกำลังสองสมบูรณ์มาใช้ในการแก้ปัญหาค้าง และจากการทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหานักเรียนทั้งสี่เรื่อง ปัญหาที่พบคือ นักเรียนบางคนมีข้อผิดพลาดในด้านการคิดคำนวณ เช่น การถอดรากที่สอง การบวกลบจำนวนเต็ม เป็นต้น และนักเรียนบางคนเขียนสูตรเรขาคณิตวิเคราะห์ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาก็ไม่ได้ เช่น สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และสูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด เป็นต้น นอกจากนี้ นักเรียนบางคนไม่สามารถจัดพจน์ของจำนวนให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้

1.4 ชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ พบว่า นักเรียนมีความสามารถสรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ ในระดับปานกลาง ได้คะแนนร้อยละ 64.89 เนื่องจากชั้น L เป็นชั้นตอนที่ต้องอาศัยข้อมูลจากชั้นตอนต่าง ๆ ก่อนหน้านี้มาใช้ในการเขียนสรุปคำตอบ ซึ่งพบว่า นักเรียนทำชั้นตอนใดชั้นตอนหนึ่งผิด ทำให้ขั้นสรุปผลของการแก้ปัญหานั้นผิดพลาดไปด้วย และพบว่าเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้สูงสุดคือ วงกลม รองลงมาคือ พาราโบลา และเรื่องที่นักเรียนทำคะแนนได้ต่ำที่สุดคือ วงรี

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนโดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ 60% ที่ผู้วิจัยได้กำหนดไว้

3. ผลการสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เรื่อง ภาคตัดกรวย พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่เห็นด้วยกับการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค K-W-D-L และร้อยละของนักเรียนส่วนใหญ่เลือกระดับความคิดเห็นที่เห็นด้วยอย่างยิ่ง และเห็นด้วย โดยพบว่าการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ทำให้นักเรียนมีความรอบคอบในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และมีความมั่นใจในการหาคำตอบ ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องที่เรียนมากขึ้น ช่วยให้นักเรียนคิดอย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนที่ชัดเจนในการแก้ปัญหา และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นร่วมกัน

ข้อเสนอแนะ

การศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช มีข้อเสนอแนะดังนี้

ข้อเสนอแนะที่ได้จากการวิจัย

1. การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนหลังการเรียนสูงกว่าก่อนการเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ 60% เนื่องจากในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เน้นให้นักเรียนฝึกการวิเคราะห์แก้โจทย์ปัญหาอย่างเป็นลำดับขั้นตอน และนักเรียนได้มีโอกาสปรึกษาร่วมกันในการแก้โจทย์ปัญหา พร้อมทั้งแลกเปลี่ยนและรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น นักเรียนมีความเข้าใจและสามารถแก้ปัญหาได้ ทำให้การจัดการเรียนการสอนในครั้งนี้ประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ ดังนั้นครูสามารถนำการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ไปประยุกต์ใช้กับการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในเรื่องอื่น ๆ ได้ตามความเหมาะสม

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค K-W-D-L เป็นการเน้นให้นักเรียนฝึกการแก้ปัญหาที่เป็นขั้นตอน อย่างละเอียดถี่ถ้วน ดังนั้นครูควรให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง โดยครูเป็นผู้คอยชี้แนะ เพื่อนักเรียนจะได้พัฒนาทักษะและความสามารถในการแก้ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

3. การฝึกทำโจทย์ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญที่นักเรียนต้องนำความรู้ ความเข้าใจ และทักษะทางคณิตศาสตร์หลายอย่างมาใช้ในการแก้ปัญหา ดังนั้นครูจึงควรทบทวนความรู้พื้นฐานที่ต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียน และครูควรให้นักเรียนได้ฝึกทำโจทย์ที่หลากหลาย และสอดคล้องกับชีวิตประจำวัน

4. ครูผู้สอนควรมีการวางแผนการจัดการเรียนรู้เป็นอย่างดีในการเตรียมเนื้อหา สื่อการเรียนรู้ และการเตรียมกิจกรรมต่าง ๆ เนื่องจากเวลาในแต่ละคาบมีจำกัด และนักเรียนต้องใช้เวลาในการฝึกทักษะการแก้ปัญหาและทำกิจกรรมต่างๆ ค่อนข้างมาก

5. การตรวจงานหรือแบบฝึกหัดของนักเรียน ครูควรมีการบันทึกการส่งงานอย่างเป็นระบบ และส่งคืนนักเรียนทันทีหรือในคาบเรียนถัดไป และครูควรเขียนข้อความชมเชย หรือข้อความที่เป็นคำแนะนำในการแสดงแนวคิดของนักเรียน เพื่อเป็นการสร้างแรงจูงใจ ทำให้นักเรียนทราบข้อบกพร่องของตนเอง เพื่อจะได้ปรับปรุงแก้ไขต่อไป

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ และระดับชั้นอื่น ๆ

2. ควรมีการทำวิจัยเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาควคู่ไปกับการพัฒนาทักษะและกระบวนการด้านอื่น ๆ เช่น ทักษะการให้เหตุผล ทักษะการสื่อสาร การสื่อความหมาย และทักษะการเชื่อมโยงความรู้ เป็นต้น

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

กังวล เทียนกัณฑ์เทศน์. 2536. การวัด การวิเคราะห์ การประเมินทางการศึกษาเบื้องต้น.

กรุงเทพมหานคร: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.

กาญจนา ไชยพันธุ์. 2549. กระบวนการกลุ่ม. กรุงเทพมหานคร: โอ. เอส. พรินติ้ง เฮาส์.

คมเพชร ฉัตรศุกกุล. 2546. กิจกรรมกลุ่มในโรงเรียน. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร:

ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ฉวีวรรณ เสวตมาลย์. 2544. ปกิณกะคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สุวีริยาสาส์น.

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. 2542. การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: คณะศึกษาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

ดวงเดือน อ่อนน่วม. 2533. การสอนซ่อมเสริมคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร:

โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทัศนีย์ กาตะโล. 2547. การพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้เรื่องภาคตัดกรวย

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา,

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ทิสนา แยมมณี. 2537. กลุ่มสัมพันธ์เพื่อการทำงานเป็นทีมและการจัดการเรียนการสอน.

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

_____. 2545. กลุ่มสัมพันธ์เพื่อการทำงานและการจัดการเรียนการสอน. กรุงเทพมหานคร:

นิชินแอดเวอร์ไทซิ่ง กรุ๊ป.

_____. 2548. รูปแบบการเรียนการสอน: ทางเลือกที่หลากหลาย. กรุงเทพมหานคร:

สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีรวรรณ ไชยพิชิต. 2551. การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง“การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว” โดยการสอดแทรกข้อมูลท้องถิ่นของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนเทศบาล 3 (วิมุกตายนวิทยา). วิทยานิพนธ์ ศิลปศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

นิรันดร์ แสงกุหลาบ. 2547. การเปรียบเทียบผลการเรียนรู้เรื่อง โจทย์ปัญหาทศนิยมและร้อยละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่จัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค เค ดับเบิลยู ดี แอล และตาม แนว สสวท. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยศิลปากร.

นิยม เกียรติทนาย. 2548. การพัฒนาผลการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหาการหาพื้นที่ ผิวนและปริมาตรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค KWDL. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยศิลปากร.

บุญทัน อยู่ชมบุญ. 2529. พฤติกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์: ระดับประถมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: โอเดียนสโตร์.

ประพนธ์ จำเริญญ. 2551. เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์. (Online).
<http://kids-d.swu.ac.th/dspace/handle/123456789/561>, 30 มกราคม 2553.

ปรีชา เนาวิ์เย็นผล. 2544. กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์การศึกษาคูณิบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา, มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ปาจริย์ เขาค้า. 2552. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "การประยุกต์ของ สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว" โดยการใช้กลวิธี STAR ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสวัสดิ์รัตนากิมุข จังหวัดตรัง. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชา การสอนคณิตศาสตร์, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

- มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช. 2534. เอกสารการสอนชุดการสอนกลุ่มทักษะ 2 (คณิตศาสตร์). พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.
- ยุพิน พิพิธกุล. 2539. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บพิธการพิมพ์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. 2546. พจนานุกรม ฉบับบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2542. กรุงเทพมหานคร: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.
- ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ. 2543. เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: สุวีริยาสาส์น.
- วรรณิ โสภประยูร. 2543. เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์สำเร็จรูปสำหรับระดับประถมศึกษา. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช.
- วัชรรา เล่าเรียนดี. 2553. รูปแบบและกลยุทธ์การจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด. พิมพ์ครั้งที่ 5 ฉบับปรับปรุง. นครปฐม: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร.
- วาริ ถิระจิตร. 2541. “วิธีสอนแบบแก้ปัญหา.” ใน แรมสมร อยู่สถาพร. (บรรณาธิการ). เทคนิคและวิธีสอนในระดับประถมศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 73-80.
- วิรัชศักดิ์ เลิศโสภา. 2544. ผลการใช้เทคนิคการสอน เค ดับเบิ้ลยู ดี แอล ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ในการเรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ศุภวดี บุญวงศ์. 2527. ตำรากิจกรรมกลุ่มในโรงเรียน. สงขลา: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. 2553. ค่าสถิติพื้นฐานผลการทดสอบทางการศึกษา
ระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ปีการศึกษา 2552. (Online).

<http://www.niets.or.th/>, 21 พฤษภาคม 2553.

สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2546. คู่มือวัดผลและประเมินผลคณิตศาสตร์.

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.

_____. 2550. ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร:

โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.

_____. 2551. เอกสารสำหรับผู้รับการอบรมคณิตศาสตร์ประถมศึกษาตามหลักสูตรการศึกษา
ขั้นพื้นฐานหลักสูตรที่ 2. (Online).

http://www3.ipst.ac.th/primary_math/training/train2-teacher.asp,

23 มีนาคม 2553.

สมวงษ์ แปลงประสพโชค, สมเดช บุญประจักษ์, และ จรรยา ภู่อุดม. 2549. นวัตกรรมเพื่อ
พัฒนาคุณภาพการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานของเด็กไทย : การศึกษาสาเหตุ
เด็กไทยอ่อนคณิตศาสตร์และแนวทางแก้ไข. มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร. (Online).

www.ripn-math.com/doc/25510502/child_low_math.doc, 2 ตุลาคม 2552.

สิริพร ทิพย์คง. ม.ป.ป. เอกสารคำสอนวิชา 158522 ทฤษฎีและวิธีสอนคณิตศาสตร์.

กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

_____. 2536. การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในการแก้

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูปแบบต่าง ๆ . กรุงเทพมหานคร:

โครงการวิจัยและพัฒนาสมรรถวิสัยของครูโดยใช้สมรรถฐาน มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

_____. 2545. หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร:

บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สำนักงานทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. 2539. **การประเมินผลตามสภาพจริง (Authentic Assessment)**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

สำนักงานวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2551. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษา พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพมหานคร: สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน.

หฤทัย อติชาตพงศ์. ม.ป.ป. **กิจกรรมกลุ่มในโรงเรียน**. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาแนะแนวและจิตวิทยาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

อดิเรก เกลียวฉลาด. 2550. **การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อการเรียนเรื่อง โจทย์ปัญหาร้อยละของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้เทคนิค K-W-D-L กับการสอนปกติ**. วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี.

Alice F. A. and E. Armoyr-Thomas. 1997. "Mathematical Problem Solving in Small Group: Exploring the Interplay of Students' Metacognitive Behavior, Perceptions, and Ability Level." **Journal of Mathematical Behavior**. (Online). http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6W5B-46384DF-8&_user=122832&_coverDate=1&_fmt=high&_orig=search&_sort=d&_docanchor=&view=c&_searchStrId=1206192413&_rerunOrigin=scholar.google&_acct=C000009878&_version=1&_urlVersion=0&_u serid=122832&md5=9ca91d3bb8b7899ecd0f70177f62dad5, 12 February 2010.

Fuchs, L. S. and D. Fuchs. 2002. "Mathematical Problem-Solving Profiles of Students with Mathematics Disabilities With and Without Comorbid Reading Disabilities." **Journal of Learning Disabilities**. (Online). <http://ldx.sagepub.com/cgi/content/abstract/35/6/564>, 12 February 2010

Joyce, B. R. and M. Weil. 2004. **Models of Teaching**. Boston, Mass: Pearson/ Allyn and Bacon.

Kennedy, L. M. and S. Tips. 1994. **Guiding children's learning for mathematic.**
Belmont, California: Wadworth.

Krulik, S. and J. A. Rudnick. 1984. **A Sourcebook for Teaching Problem Solving.** Boston:
Allyn and Bacon.

_____. 1988. **Problem Solving: a Handbook for Elementary School teacher.**
Boston: Allyn and Bacon.

Polya, G. 1957. **How to Solve It.** New Jersey: Princeton Press.

Shaw, J. M., M. S. Chambless, and D. A. Chessin. 1997. "Cooperative Problem Solving:
Using K-W-D-L as an Organizational Technique." **Teaching Children Mathematics.**
(Online). http://vnweb.hwwwilsonweb.com/hww/results/results_single_ftpes.jhtml,
15 December 2009.



ภาคผนวก



ภาคผนวก ก
ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ 31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ภาคตัดกรวย

เรื่อง วงกลม

เวลา 50 นาที

1. สาระสำคัญ

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า รัศมี (Radius) ของวงกลม

สมการวงกลม

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม (Standard form for a circle) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของวงกลมได้
2. หาสมการของวงกลมเมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและรัศมีได้
3. หาส่วนต่าง ๆ ของวงกลมจากสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้
4. เขียนกราฟของวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

2.2 ด้านทักษะและกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ
2. มีระเบียบวินัย
3. เป็นคนช่างสังเกต
4. มีความรอบคอบ

3. ตารางการเรียนรู้

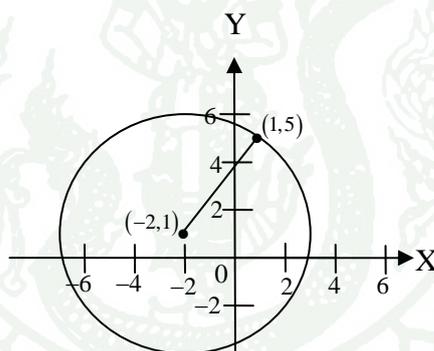
วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะทางเท่ากัน จุดคงที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลางวงกลม (Center) และระยะทางที่เท่ากันเรียกว่า รัศมี (Radius) ของวงกลม

สมการวงกลม

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม (Standard form for a circle) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนความสัมพันธ์ของกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2,1)$ และวงกลมผ่านจุด $(1,5)$

วิธีทำ กราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2,1)$ จะได้ว่า $h = -2$ และ $k = 1$ และวงกลมผ่านจุด $(1,5)$ นั่นคือจุด $(1,5)$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ดังรูป



ดังนั้นรัศมีของวงกลมคือ ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุด $(1,5)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad r &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ r &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= 5 \end{aligned}$$

แทนค่า $h = -2$ $k = 1$ และ $r = 5$ ในสูตรสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 &= 5^2 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 &= 25 \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

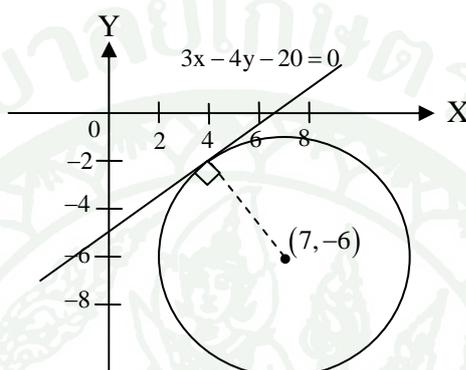
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมคือ $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(7, -6)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมจะตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ดังนั้น รัศมีจะเท่ากับระยะทางระหว่างจุด $(7, -6)$ กับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$

ดังรูป



จะได้

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r = \frac{|3(7) + (-4)(-6) + (-20)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{|25|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{25}{5}$$

$$= 5$$

แทนค่า $(h,k) = (7, -6)$ และ $r = 5$ ลงในสูตรสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ จะได้

$$(x-7)^2 + (y-(-6))^2 = 5^2$$

$$(x-7)^2 + (y+6)^2 = 25$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 12y + 36 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมคือ $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0\}$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนเรื่องวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ รัศมี r หน่วย วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) รัศมี r หน่วย และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยใช้การถามตอบ

2. ครูยกตัวอย่างที่ 1 โดยให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์โจทย์ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 3.1 ครูตั้งคำถาม แล้วครูเขียนคำตอบของนักเรียนในแผนผัง K-W-D-L บนกระดาน ดังนี้

2.1 สิ่งที่โจทย์บอกให้ทราบมีอะไรบ้าง ให้นักเรียนระดมความคิด โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง K

2.2 สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร และจะมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไรบ้าง นักเรียนร่วมกันอภิปราย และสรุปวิธีการแก้ปัญหา โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง W

2.3 นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหามาวิธีที่เลือกไว้ โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง D

2.4 นักเรียนร่วมกันอภิปรายความรู้และคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาคืออะไร และสรุป แล้วครูเขียนสิ่งที่ได้ลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง L

2.5 ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยจากการทำตัวอย่างที่ 1

3. ครูยกตัวอย่างที่ 2 โดยให้นักเรียนจับคู่ปรึกษากัน เพื่อวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหา ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 3.2 แล้วครูสุ่มนักเรียนทีละคน ออกมาแสดงวิธีทำตามขั้นตอน K-W-D-L บนกระดาน ครูและนักเรียนที่เหลือตรวจสอบความถูกต้อง

4. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาในตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 โดยครูใช้การถามตอบ

5. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 คน โดยลดความสามารถ เก่ง ปานกลาง และอ่อน และแจกใบงานที่ 4 ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มร่วมกันวิเคราะห์และทำโจทย์ตามขั้นตอน K-W-D-L และเมื่อนักเรียนทำเสร็จให้แต่ละกลุ่มรวบรวมส่งครูตรวจ

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2.1 หน้า 177 ข้อ 3, 4 และ 8 ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นการบ้าน

5. สื่อการเรียนรู้

5.1 แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 3.1 และชุดที่ 3.2

5.2 ใบงานที่ 4 เรื่อง วงกลม

6. การวัดผลและประเมินผล

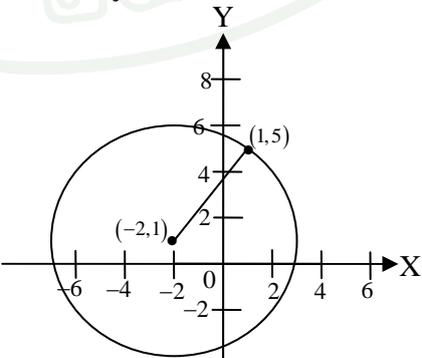
การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องประมาณร้อยละ 75
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน	2. นักเรียนให้ความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมประมาณร้อยละ 80
3. การทำใบงานที่ 4	3. นักเรียนทำใบงานที่ 4 ได้ถูกต้องร้อยละ 80
4. การทำแบบฝึกหัด 3.2.1 หน้า 177 ข้อ 3, 4 และ 8	4. นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2.1 หน้า 177 ข้อ 3, 4 และ 8 ได้ถูกต้องร้อยละ 70

7. บันทึกหลังการสอน

ครูทบทวนเรื่องรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และทบทวนความรู้เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ให้ได้แก่ การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด การหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถตอบคำถามที่ครูถามได้ และนักเรียนให้ความร่วมมือในการเรียนเป็นอย่างดี แต่ในการทำตัวอย่างและใบงานพบว่า นักเรียนบางคนไม่สามารถเขียนสูตรเรขาคณิตวิเคราะห์ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ เช่น สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และมีนักเรียนบางคนมีข้อผิดพลาดในการคิดคำนวณ เช่น การบวกลบจำนวนเต็ม การถอดรากที่สอง เป็นต้น ครูได้นั่งคุยกับนักเรียนทั้งชั้นเกี่ยวกับข้อบกพร่องและข้อผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหากับนักเรียน และได้ชี้แนะพร้อมทั้งให้คำแนะนำนักเรียนที่ทำใบงานผิดพลาดเป็นรายบุคคล และในการแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค K-W-D-L พบว่า ในขั้น K สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและความรู้เดิมที่ใช้ และในขั้น L ขึ้นสรุปผลของแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ นักเรียนมีการเขียนอธิบายรายละเอียดได้ดีขึ้น

แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 3.1

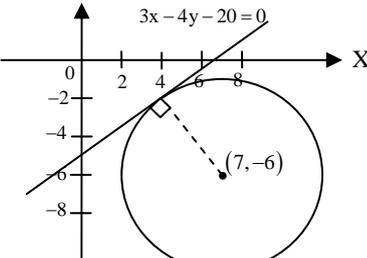
จงเขียนความสัมพันธ์ของกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2,1)$ และวงกลมผ่านจุด

<p>K (what we know)</p> <p>โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้</p> <p>วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2,1)$ และวงกลมผ่านจุด $(1,5)$</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าว เรียกว่า รัศมีของวงกลม</p> <p>สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$</p>
<p>W (what we want)</p> <p>โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ</p> <p>ความสัมพันธ์ของกราฟวงกลม นั่นคือต้องการหาสมการวงกลม</p> <p>วิธีการแก้ปัญหาคือ</p> <p>วาดรูปประกอบจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้</p> <p>หารัศมีวงกลมจากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด</p> <p>แทนค่า จุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลมในสมการ</p> <p>$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$</p>
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2,1)$ จะได้ว่า $h = -2$ และ $k = 1$ และวงกลมผ่านจุด $(1,5)$ นั่นคือจุด $(1,5)$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม ดังรูป</p> <div style="text-align: center;">  </div>

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>ดังนั้นรัศมีของวงกลมคือ ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุด(1,5)</p> <p>จะได้ $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$</p> $= \sqrt{(-2-1)^2 + (1-5)^2}$ $= \sqrt{9+16}$ $= 5$ <p>แทนค่า $h = -2$ และ $k = 1$ และ $r = 5$ ใน สูตรสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะได้</p> $(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 5^2$ $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$ $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมคือ</p> $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0\}$ <p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้ได้แก่</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 2) สูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด คือ $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 3.2

จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(7, -6)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$

<p>K (what we know)</p> <p>โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้</p> <p>วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(7, -6)$ วงกลมสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรงอยู่กัเป็นที่เป็ระยะทางคงตัว จุดที่ตรงอยู่กัที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าว เรียกว่า รัศมีของวงกลม</p> <p>สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ</p> $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
<p>W (what we want)</p> <p>โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ</p> <p>ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม นั่นคือ ต้องการหาสมการวงกลม</p> <p>วิธีการแก้ปัญหาคือ</p> <p>วาดรูปประกอบจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ หารัศมีวงกลม จากสูตรระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง แทนค่า จุดศูนย์กลางวงกลมและรัศมีในสมการ</p> $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ เนื่องจากวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(7, -6)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$ ดังรูป</p> 

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>รัศมีวงกลม คือระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลาง $(7, -6)$ กับเส้นตรง $3x - 4y - 20 = 0$ จะได้</p> $r = \frac{ 3(7) + (-4)(-6) + (-20) }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$ $= \frac{ 25 }{\sqrt{25}}$ $= \frac{25}{5}$ $= 5$ <p>แทนค่าแทนค่า $h = 7$, $k = -6$ และ $r = 5$</p> <p>ในสูตรสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะได้</p> $(x - 7)^2 + (y - (-6))^2 = 5^2$ $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 25$ $x^2 - 14x + 49 + y^2 + 12y + 36 = 25$ $x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0$
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้นความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่ต้องการคือ</p> $\{(x, y) x^2 + y^2 - 14x + 12y + 60 = 0\}$ <p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้ได้แก่</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 2) สูตรระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง คือ $d = \frac{ Ax_1 + By_2 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ 31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ภาคเรียนที่ 2

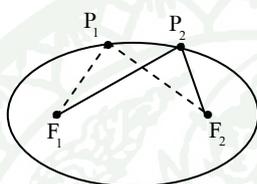
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ภาคตัดกรวย

เรื่อง วงรี

เวลา 50 นาที

1. สาระสำคัญ

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว (คงรูป) โดยค่าคงตัวนี้มีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า โฟกัส (focus) ของวงรี



$$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = \text{ค่าคงตัว}$$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$

วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X

สมการของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(c, 0)$ และจุด $F_2(-c, 0)$ เมื่อ $c > 0$ และผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ ซึ่ง $0 < 2c < 2a$ คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } a^2 = b^2 + c^2, a > b > 0$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกทนิยามและส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงรีได้
2. หาสมการวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้
3. หาส่วนต่าง ๆ ของวงรีจากสมการที่กำหนดให้ได้
4. เขียนกราฟของวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

2.2 ด้านทักษะและกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถใน

1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

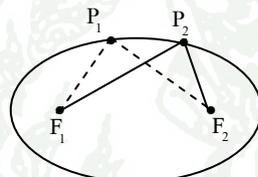
2.3 ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ
2. มีระเบียบวินัย
3. เป็นคนช่างสังเกต
4. มีความรอบคอบ

3. สารการเรียนรู้

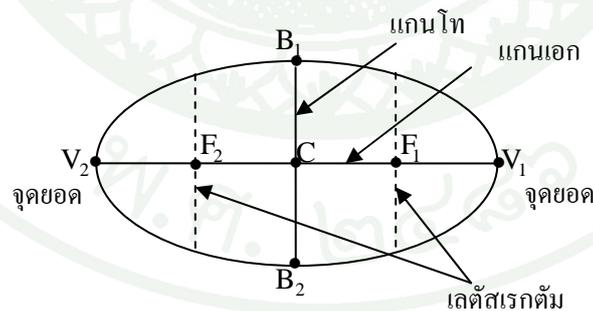
บทนิยามวงรี

วงรี คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว (ดูรูป) โดยค่าคงตัวนี้มีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี



$$P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2 = \text{ค่าคงตัว}$$

ส่วนประกอบของวงรี



1. จุดคงที่สองจุดคือ F_1 และ F_2 เรียกว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี ห่างจากจุดศูนย์กลาง c หน่วย นั่นคือส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมโฟกัสทั้งสองยาว $2c$ หน่วย ($|F_1F_2| = 2c$)
2. จุด C ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง (center)** ของวงรี
3. $\overline{V_1V_2}$ ที่ผ่านโฟกัสทั้งสองโดยปลายทั้งสองพบกับกราฟเรียกว่า **แกนเอก (major axis)** ของวงรี แกนเอกยาว $2a$ หน่วย ($|V_1V_2| = 2a$)

4. จุด V_1 และ V_2 ซึ่งเป็นจุดปลายทั้งสองของแกนเอก เรียกว่า **จุดยอด** (vertex) ของวงรี
5. $\overline{B_1B_2}$ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนเอก โดยมีปลายทั้งสองพบกับกราฟ เรียกว่า **แกนโท** (minor axis) ของวงรี แกนโทยาว $2b$ หน่วย ($|B_1B_2| = 2b$)
6. ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนเอก โดยที่ปลายทั้งสองอยู่บนกราฟ เรียกว่า **เลตัสเรกตัม** (Latusrectum) ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย
7. ค่าความเยื้องศูนย์กลางของวงรี แทนด้วย e กำหนดโดย $e = \frac{c}{a}$

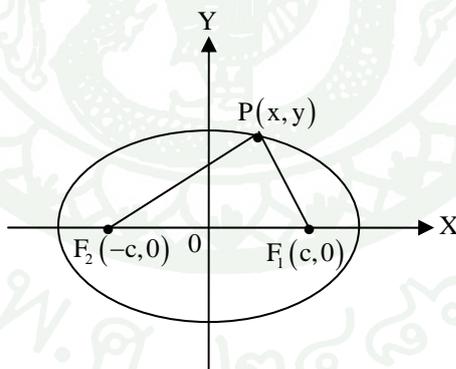
หมายเหตุ

- ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 นั่นคือ $0 < e < 1$ ถ้า e มีค่าใกล้ 1 แล้ววงรีมีความรีมาก แต่ถ้า e มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย
- สังเกตว่า $2a > 2b$ ดังนั้นแกนเอกยาวกว่าแกนโท

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X

วงรีมีโฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด $F_1(c, 0)$ และจุด $F_2(-c, 0)$ เมื่อ $c > 0$ ดังรูป



จากรูปให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ระยะห่างระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $F_1F_2 = 2c$ หน่วย

จากบทนิยามจะได้ $PF_2 + PF_1$ เท่ากับค่าคงตัวซึ่งมากกว่า $2c$

สมมติให้ $PF_2 + PF_1 = 2a$ เมื่อ $a > 0$ และ $2a > 2c$ ดังนั้น $a > c$

จากสูตรระยะทางจะได้ว่า

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \end{aligned}$$

หารด้วย 4 แล้วยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned} a^2 [(x+c)^2 + y^2] &= (a^2 + cx)^2 \\ a^2 [x^2 + 2cx + c^2 + y^2] &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a > c$ ดังนั้น $a^2 - c^2 > 0$ และหารสมการ (1) ด้วย $a^2(a^2 - c^2)$

จะได้
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \dots\dots\dots(2)$$

กำหนด $b^2 = a^2 - c^2$ (โดยที่ $b > 0$) เนื่องจาก $b^2 < a^2$ จะได้ว่า $b < a$

แทน $a^2 - c^2 = b^2$ ใน (2) จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } a > b \text{ เป็นสมการของวงรี}$$

ดังนั้นสมการของวงรี คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } a > b > 0, a > c > 0, a^2 = b^2 + c^2$$

ในการเขียนกราฟของวงรีนั้น เราจะต้องทราบระยะตัดแกน X และ ระยะตัดแกน Y

หาระยะตัดแกน X ให้ $y = 0$ จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

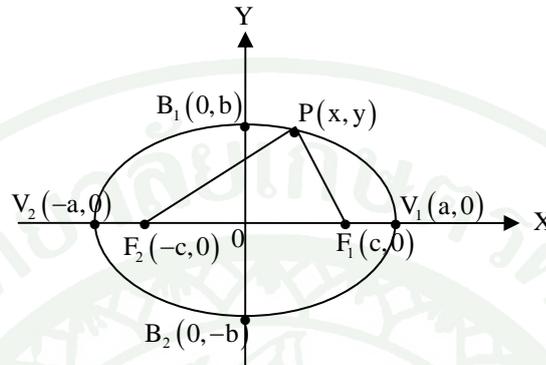
$$x^2 = a^2$$

นั่นคือ $x = \pm a$

ดังนั้น วงรีตัดแกน X ที่ $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$

ทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $x=0$ เราจะได้ $y = \pm b$
 ดังนั้น วงรีตัดแกน Y ที่ $(0, -b)$ และ $(0, b)$

ผังรูป



จากรูปจะได้

1. วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$
2. โฟกัสเป็นจุดอยู่บนแกน X คือจุด $(c,0)$ และจุด $(-c,0)$
3. จุดยอดอยู่บนแกน X คือจุด $(a,0)$ และจุด $(-a,0)$
4. จุดปลายแกนโทคือจุด $(0,b)$ และจุด $(0,-b)$

ตัวอย่างที่ 1 จงบอกจุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนโท ความยาวเลตัสเรกตัม และเขียน

กราฟของวงรี ที่มีสมการ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

วิธีทำ จากสมการวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

จะได้ว่า $a = 5$ และ $b = 3$

และจะได้ว่า แกนเอกอยู่บนแกน X (เพราะตัวส่วนที่มีค่ามากอยู่ใต้พจน์ x^2)

และจาก $a^2 = b^2 + c^2$

จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned}c^2 &= 5^2 - 3^2 \\ &= 25 - 9 \\ &= 16\end{aligned}$$

$$c = \pm 4$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลางวงรีคือ จุด $(0,0)$

โฟกัสคือจุด $(\pm c, 0)$ จะได้ $(\pm c, 0) = (\pm 4, 0)$

จุดยอดคือจุด $(\pm a, 0)$ จะได้ $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$

จุดปลายแกนโทคือจุด $(0, \pm b)$ จะได้ $(0, \pm b) = (0, \pm 3)$

$$\text{ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ } \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3^2)}{5} = \frac{18}{5}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่า วงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน X

จุดศูนย์กลางคือจุด $(0,0)$

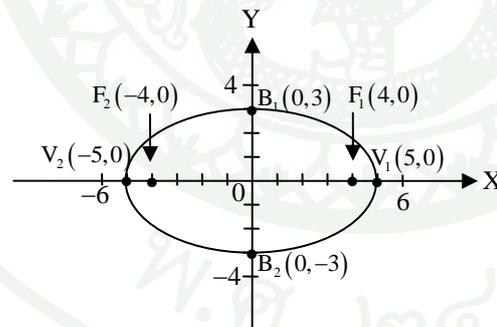
โฟกัสคือจุด $(-4,0)$ และจุด $(4,0)$

จุดยอดคือจุด $(-5,0)$ และจุด $(5,0)$

จุดปลายแกนโทคือจุด $(0,-3)$ และจุด $(0,3)$

ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{18}{5}$ หน่วย

กราฟแสดงดังรูป



ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดให้โฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$ และจุด $(-3,0)$ และผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8

วิธีทำ จากวงรีมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$ และ $(-3,0)$ จะได้ $c = 3$ จุดศูนย์กลางวงรีอยู่ที่จุด $(0,0)$

แกนเอกอยู่บนแกน X และสมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

และจากผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8
จะได้ $2a = 8$ ดังนั้น $a = 4$

$$\text{จาก } b^2 = a^2 - c^2 \text{ จะได้ } b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\text{ดังนั้น } b = \pm\sqrt{7}$$

$$\text{จากสมการวงรี } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{จะได้ } \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

$$7x^2 + 16y^2 = 112$$

$$\text{ดังนั้นสมการวงรีคือ } 7x^2 + 16y^2 = 112$$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการกล่าวถึงวงกลม โดยให้นักเรียนพิจารณาว่าถ้ายืดวงกลมให้ยาวออกตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางจะเกิดโค้งรูปไข่ เรียกว่า วงรี โดยครูใช้การถามตอบ

2. ครูสาธิตวิธีการสร้างรูปวงรีบนกระดาษ แล้วให้นักเรียนพิจารณารูปวงรีที่ครูสร้างขึ้น บนกระดาษว่า ระยะทางจากแต่ละจุดไปยังจุดคงที่ที่กำหนดให้สองจุดมีความสัมพันธ์กันอย่างไร (ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดคงที่ทั้งสองมีค่าคงตัว) โดยครูใช้การถามตอบ และ ครูบอกนักเรียนว่า จุดคงที่ดังกล่าวเรียกว่า โฟกัสของวงรี ครูสรุปบทนิยามของวงรี และส่วนประกอบของวงรี

3. ครูอธิบายรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) มีแกนเอกอยู่บนแกน X โดยใช้การถามตอบ พร้อมเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

4. ครูยกตัวอย่างที่ 1 โดยให้นักเรียนวิเคราะห์โจทย์ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.1 ครูตั้งคำถาม แล้วครูเขียนคำตอบของนักเรียนในแผนผัง K-W-D-L บนกระดาษ ดังนี้

4.1 สิ่งที่โจทย์บอกให้ทราบมีอะไรบ้าง ให้นักเรียนระดมความคิด โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง K

4.2 สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร และจะมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไรบ้าง นักเรียนร่วมกันอภิปราย และสรุปวิธีการแก้ปัญหา โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง W

4.3 นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาตามวิธีที่เลือกไว้ โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง D

4.4 นักเรียนร่วมกันอภิปรายความรู้และคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาคืออะไร และสรุป แล้วครูเขียนสิ่งที่ได้ในแผนผัง K-W-D-L ช่อง L

4.5 ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยจากการทำตัวอย่างที่ 1

5. ครูยกตัวอย่างที่ 2 โดยให้นักเรียนจับคู่ปรึกษากัน เพื่อวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหา ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.2 แล้วครูสุ่มถามนักเรียนทีละคน เพื่อเฉลยคำตอบตามขั้นตอน K-W-D-L บนกระดาน

6. ครูให้นักเรียนช่วยสรุปบทนิยามของวงรี ส่วนประกอบของวงรี และรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ มีแกนเอกอยู่บนแกน X โดยใช้การถามตอบ

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2.2 หน้า 188 ข้อ 1 ใหญ่ (ทำข้อ 2, 3) ข้อ 3 ใหญ่ (ข้อ 1, 4) ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นการทำงาน

5. สื่อการเรียนรู้

5.1 แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.1 และ ชุดที่ 5.2

6. การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องประมาณร้อยละ 75
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน	2. นักเรียนให้ความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมประมาณร้อยละ 80
3. การทำแบบฝึกหัด 3.2.2 หน้า 188 ข้อ 1 ใหญ่ (ข้อ 2 และ 3) ข้อ 3 ใหญ่ (ข้อ 1 และ 4)	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2.2 หน้า 188 ข้อ 1 ใหญ่ (ข้อ 2 และ 3) ข้อ 3 ใหญ่ (ข้อ 1 และ 4) ได้ถูกต้องประมาณร้อยละ 75

7. บันทึกหลังการสอน

นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความสนใจและตั้งใจเรียนในสิ่งที่ครูสอนและสามารถตอบคำถามที่ครูถามได้ ในขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค K-W-D-L ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.1 พบว่าในขั้น K สิ่งที่กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้ นักเรียนสามารถบอกได้ว่าโจทย์ต้องการอะไร แต่ในขั้นตอนการเขียนความรู้เดิมนักเรียนบางคนตอบไม่ได้ว่าต้องเขียนอะไรบ้าง ในขั้น W สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา พบว่านักเรียนส่วนใหญ่บอกได้ว่าโจทย์ต้องการทราบอะไร แต่มีนักเรียนบางคนที่ไม่บอกวิธีการแก้ปัญหาไม่ได้ ในขั้น D ดำเนินการแก้ปัญหา นักเรียนส่วนใหญ่

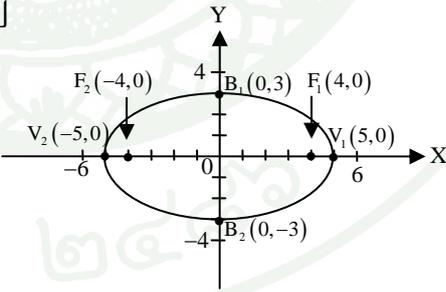
สามารถดำเนินการแก้ปัญหาตามวิธีที่เลือกไว้ได้ แต่บางคนมีความผิดพลาดขั้นคิดคำนวณที่เกี่ยวกับการบวกลบจำนวนเต็ม และในชั้น L สรุปผลของการแก้ปัญหาและคำตอบที่ได้ นักเรียนบางคนไม่สามารถบอกได้ว่าจะสรุปผลของการแก้ปัญหาอย่างไร ครูได้ให้คำแนะนำและข้อสังเกตในการตอบคำถามในแต่ละขั้นตอน สำหรับการแก้ปัญหาในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.2 นักเรียนส่วนใหญ่อก็สามารถแก้ปัญหตามขั้นตอน K-W-D-L ได้ แต่มีนักเรียนบางคู่ที่เขียนวิธีการแก้ปัญหาไม่ได้ จึงทำให้ไม่สามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้ ครูได้อธิบายและให้คำแนะนำเป็นรายบุคคล และได้เน้นย้ำข้อผิดพลาดที่พบให้กับนักเรียนทั้งชั้นอีกครั้ง เพื่อให้ นักเรียนมีความรอบคอบมากขึ้น



แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.1

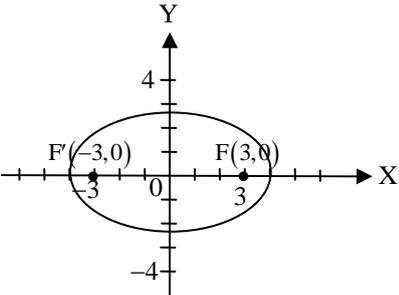
จงบอกจุดศูนย์กลาง โฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนโท ความยาวเลตัสเรกตัม และเขียนกราฟของ
วงรี ที่มีสมการ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

<p>K (what we know) โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ สมการวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง</p> <p>สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</p> <p>เมื่อ $a > b$ และ $a^2 = b^2 + c^2$</p>
<p>W (what we want) โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ</p> <p>จุดศูนย์กลางวงรี โฟกัส จุดยอด จุดปลายแกนโท ความยาวเลตัสเรกตัม และกราฟของวงรี</p> <p>วิธีการแก้ปัญหาคือ</p> <p>จัดสมการวงรีให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</p> <p>หาค่า a, b และ c</p>
<p>D (what we do) ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ จากสมการวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$</p> <p>จัดรูปสมการใหม่จะได้ $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$</p> <p>ดังนั้น $a = 5$ และ $b = 3$</p> <p>และจะได้ว่าวงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน X (เพราะตัวส่วนที่มีค่ามากอยู่ใต้พจน์ x^2)</p> <p>และจาก $a^2 = b^2 + c^2$ จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2$</p>

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	$c^2 = 5^2 - 3^2$ $= 25 - 9$ $= 16$ $c = \pm 4$ <p>เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลางวงรีคือ จุด $(0,0)$</p> <p>โฟกัสคือจุด $(\pm c,0)$ ดังนั้น $(\pm c,0) = (\pm 4,0)$</p> <p>จุดยอดคือจุด $(\pm a,0)$ ดังนั้น $(\pm a,0) = (\pm 5,0)$</p> <p>จุดปลายแกนโทคือจุด $(0,\pm b)$ ดังนั้น $(0,\pm b) = (0,\pm 3)$</p> <p>ความยาวเลตัสเรคตัมเท่ากับ $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3^2)}{5} = \frac{18}{5}$</p>
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้นสรุปได้ว่า วงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน X</p> <p>จุดศูนย์กลางคือจุด $(0,0)$</p> <p>โฟกัสคือจุด $(-4,0)$ และจุด $(4,0)$</p> <p>จุดยอดคือจุด $(-5,0)$ และจุด $(5,0)$</p> <p>จุดปลายแกนโทคือจุด $(0,-3)$ และจุด $(0,3)$</p> <p>ความยาวเลตัสเรคตัมเท่ากับ $\frac{18}{5}$ หน่วย</p> <p>กราฟแสดงดังรูป</p>  <p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้คือ รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ และ $a^2 = b^2 + c^2$ จุดยอดคือจุด $(\pm a,0)$ โฟกัสคือจุด $(\pm c,0)$ จุดปลายแกนโทคือจุด $(0,\pm b)$ และความยาวเลตัสเรคตัมเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$</p>

แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 5.2

จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดให้โฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$ และจุด $(-3,0)$ และผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8

<p>K (what we know)</p> <p>โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้</p> <p>วงรีมีโฟกัสที่จุด $(3,0)$ และจุด $(-3,0)$</p> <p>ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง</p> <p>วงรีที่มีโฟกัสที่จุด $(\pm c,0)$ มีแกนเอกอยู่บนแกน X และสมการวงรีคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ และ $a^2 = b^2 + c^2$</p>
<p>W (what we want)</p> <p>โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ</p> <p>สมการวงรี</p> <p>วิธีการแก้ปัญหาคือ</p> <p>วาดรูปประกอบคร่าว ๆ</p> <p>หาค่า a, b และ c จากสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้แล้วแทนค่าในสูตรสมการวงรี</p>
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ จากวงรีมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$ และจุด $(-3,0)$ จะได้ $c = 3$ จุดศูนย์กลางวงรีอยู่ที่จุด $(0,0)$ และวงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน X ดังรูป</p> <div style="text-align: center;">  </div>

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>จากผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8 จะได้ $2a=8$ ดังนั้น $a=4$</p> <p>จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ $b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$</p> <p>ดังนั้น $b = \pm\sqrt{7}$</p> <p>เนื่องจากแกนเอกอยู่บนแกน X ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</p> <p>จะได้ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$</p> $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ $7x^2 + 16y^2 = 112$
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้นสมการวงรี คือ $7x^2 + 16y^2 = 112$</p> <p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้คือ รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$ และ $a^2 = b^2 + c^2$ มีจุดยอดคือจุด $(\pm a, 0)$ และโฟกัสคือจุด $(\pm c, 0)$</p>

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ 31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ภาคตัดกรวย

เรื่อง พาราโบลา

เวลา 50 นาที

1. สาระสำคัญ

พาราโบลา (Parabola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุด F ซึ่งตั้งอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดหนึ่ง และเส้นตรง l ที่ตั้งอยู่กึ่งกลางที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรงอยู่กึ่งกลางนี้เรียกว่า โฟกัส (Focus) และเส้นตรงที่ตั้งอยู่กึ่งกลางนี้เรียกว่า เส้นบังคับหรือไดเรกทริกซ์ (Directrix) ของพาราโบลา

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$

พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน

สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4px$

เป็นสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(p, 0)$ และสมการของไดเรกทริกซ์ คือ $x = -p$ และกราฟพาราโบลามีลักษณะ ดังนี้

- เมื่อ $p > 0$ จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านขวา (ตะแคงขวา)
- เมื่อ $p < 0$ จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านซ้าย (ตะแคงซ้าย)

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

- บอกบทนิยามของพาราโบลาได้
- หาสมการพาราโบลาตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้
- หาส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลาจากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้
- เขียนกราฟของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

2.2 ด้านทักษะและกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถใน

- การแก้ปัญหา
- การให้เหตุผล
- การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ
- การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ
2. มีระเบียบวินัย
3. เป็นคนช่างสังเกต
4. มีความรอบคอบ

3. สารการเรียนรู้

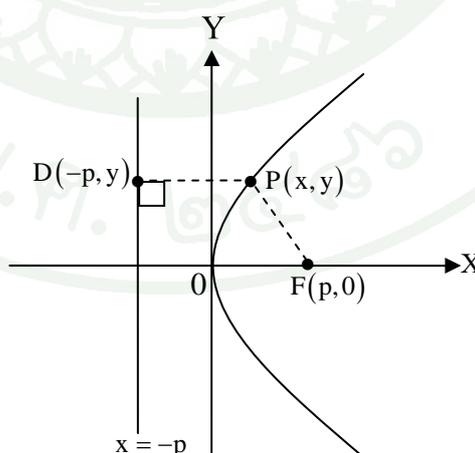
พาราโบลา (Parabola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุด F ซึ่งตั้งอยู่คู่กับที่จุดหนึ่ง และเส้นตรง l ที่ตั้งอยู่คู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตั้งอยู่คู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส (Focus)** และเส้นตรงที่ตั้งอยู่คู่กับที่นี้เรียกว่า **เส้นบังคับหรือไดเรกทริกซ์ (Directrix)** ของพาราโบลา

รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$

พาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน

ถ้าพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(p, 0)$ สมการของไดเรกทริกซ์ คือ $x = -p$

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา ซึ่งมีจุด $F(p, 0)$ เป็นโฟกัส และมีสมการของไดเรกทริกซ์ คือ $x = -p$ ลาก \overline{PD} ตั้งฉากกับไดเรกทริกซ์



ระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัส F เท่ากับ $\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$

ระยะทางจากจุด P ถึงไดเรกทริกซ์เท่ากับ $|x - (-p)| = |x + p|$

จากบทนิยามของพาราโบลา ระยะทางทั้งสองนี้ต้องเท่ากัน จะได้

$$|PF| = |PD|$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

$$(x-p)^2 + y^2 = |x+p|^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน

สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4px$

จุดยอดคือจุด $(0, 0)$

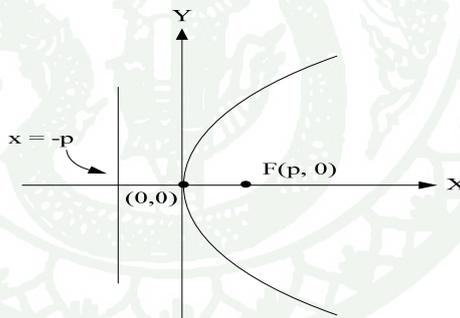
โฟกัสคือจุด $(p, 0)$

สมการของไดเรกทริกซ์ คือ $x = -p$

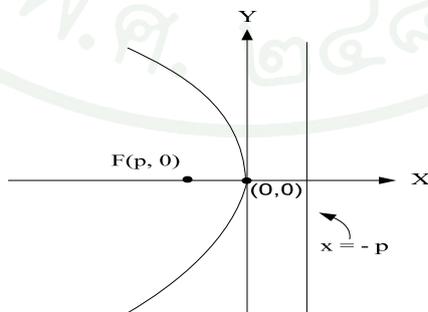
ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $|4p|$ หน่วย

กราฟของพาราโบลาเป็นดังนี้

1. เมื่อ $p > 0$ จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านขวา



2. เมื่อ $p < 0$ จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านซ้าย



ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดรเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัม จากสมการพาราโบลา

$$8x + 12y^2 = 0$$

วิธีทำ จากสมการ $8x + 12y^2 = 0$

$$\text{จัดรูปสมการใหม่ จะได้ } y^2 = -\frac{2}{3}x$$

$$\text{จะได้ว่า } 4p = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } p = -\frac{1}{6}, (p < 0)$$

จะได้กราฟพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอนเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านซ้าย

$$\text{โฟกัสคือจุด } (p, 0) \text{ ดังนั้น } (p, 0) = \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$

$$\text{ไดเรกตริกซ์ คือ } x = -p \text{ ดังนั้น } x = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ } |4p| \text{ ดังนั้น } \left|4\left(-\frac{1}{6}\right)\right| = \frac{2}{3}$$

ดังนั้นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$

$$\text{โฟกัสคือจุด } \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$

$$\text{สมการของไดเรกตริกซ์ คือ } x = \frac{1}{6}$$

$$\text{ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ } \frac{2}{3} \text{ หน่วย}$$

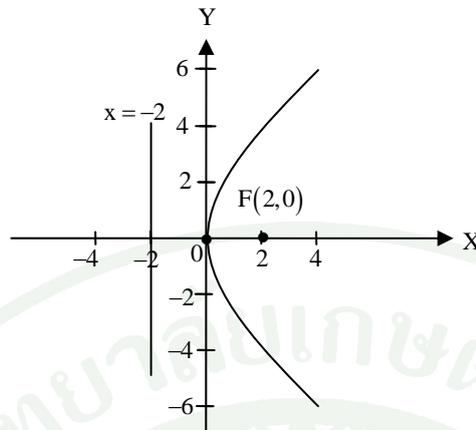
ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟและหาสมการพาราโบลา เมื่อกำหนดจุดยอดที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่ที่จุด $F(2, 0)$

วิธีทำ เนื่องจากพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และโฟกัสคือจุด $F(2, 0)$ จะได้ว่า $p = 2$ และสมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4px$

เนื่องจาก $p = 2$, $(2 > 0)$ จะได้กราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านขวา และสมการพาราโบลา คือ $y^2 = 4(2)x = 8x$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 8x$

กราฟแสดงดังรูป



ข้อสรุปเกี่ยวกับสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด (0,0)

แกนพาราโบลาคือแกน X	แกนพาราโบลาคือแกน Y
สมการ $y^2 = 4px$	สมการ $x^2 = 4py$
โฟกัสคือจุด $F(p,0)$	โฟกัสคือจุด $F(0,p)$
เส้นของไดเรกทริกซ์คือเส้นตรง $x = -p$	เส้นของไดเรกทริกซ์คือเส้นตรง $y = -p$
ลักษณะกราฟ เป็นโค้งเปิดไปทางด้านขวา เมื่อ $p > 0$ เป็นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย เมื่อ $p < 0$	ลักษณะกราฟ เป็นโค้งเปิดขึ้นด้านบน เมื่อ $p > 0$ เป็นโค้งเปิดลงด้านล่าง เมื่อ $p < 0$
ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $ 4p $ หน่วย	ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $ 4p $ หน่วย

4. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0,0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง โดยใช้การถามตอบ

2. ครูอธิบายรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0,0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย พร้อมเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย

3. ครูยกตัวอย่างที่ 1 โดยให้นักเรียนวิเคราะห์โจทย์ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 10.1 ครูตั้งคำถาม แล้วครูเขียนคำตอบของนักเรียนในแผนผัง K-W-D-L บนกระดาน ดังนี้

3.1 สิ่งที่โจทย์บอกให้ทราบมีอะไรบ้าง ให้นักเรียนระดมความคิด โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง K

3.2 สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร และจะมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไรบ้าง นักเรียนร่วมกันอภิปราย และสรุปวิธีการแก้ปัญหา โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง W

3.3 นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาตามวิธีที่เลือกไว้ โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง D

3.4 นักเรียนร่วมกันอภิปรายความรู้และคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาคืออะไร และสรุป แล้วครูเขียนสิ่งที่ได้ในแผนผัง K-W-D-L ช่อง L

3.5 ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยจากการทำตัวอย่างที่ 1

4. ครูยกตัวอย่างที่ 2 โดยให้นักเรียนวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหาในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 10.2 แล้วครูสุ่มถามนักเรียนทีละคน เพื่อเฉลยคำตอบตามขั้นตอน K-W-D-L บนกระดาน

5. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0,0)$ มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน โดยครูใช้การถามตอบ

6. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 คน โดยลดความสามารถ เก่ง ปานกลาง และอ่อน และแจกใบงานที่ 8 ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มร่วมกันวิเคราะห์และทำโจทย์ตามขั้นตอน K-W-D-L ใช้เวลาประมาณ 10 นาที และเมื่อนักเรียนทำเสร็จครูสุ่มกลุ่มนักเรียน ให้ส่งตัวแทนออกมาเฉลยคำตอบบนกระดานข้อละ 1 คน ครูและนักเรียนที่เหลือช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง

7. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2.3 หน้า 200 ข้อ 1 ใหญ่ (ทำข้อ 9, 10, 11) ข้อ 2 ใหญ่ (ข้อ 11, 12) ในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นกรบ้าน

5. สื่อการเรียนรู้

5.1 แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 10.1 และชุดที่ 10.2

5.2 ใบงานที่ 8 เรื่อง พาราโบลามีจุดยอด (0,0)

6. การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องประมาณร้อยละ 85
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน	2. นักเรียนให้ความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมประมาณร้อยละ 80
3. การทำใบงานที่ 8	3. นักเรียนทำใบงานที่ 8 ถูกต้องประมาณร้อยละ 85
4. การทำแบบฝึกหัด 3.2.3 หน้า 200 ข้อ 1 ใหญ่ (ข้อ 9, 10, 11) ข้อ 2 ใหญ่ (ข้อ 11, 12)	4. นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2.3 หน้า 200 ข้อ 1 ใหญ่ (ข้อ 9, 10, 11) ข้อ 2 ใหญ่ (ข้อ 11, 12) ถูกต้องประมาณร้อยละ 80

7. บันทึกหลังการสอน

นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจและสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ดีขึ้น สามารถบอกข้อแตกต่างของรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลามีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งและสมการพาราโบลามีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอนได้ สำหรับในขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้เทคนิค K-W-D-L พบว่านักเรียนส่วนใหญ่สามารถตอบคำถามในแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหาได้ แต่มีนักเรียนบางคนที่มีข้อผิดพลาดในการเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลามีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งและแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอนสลับกัน ครูได้ทบทวนและเน้นย้ำถึงข้อแตกต่างของสมการพาราโบลทั้งสองรูปแบบให้กับนักเรียนอีกครั้ง

แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 10.1

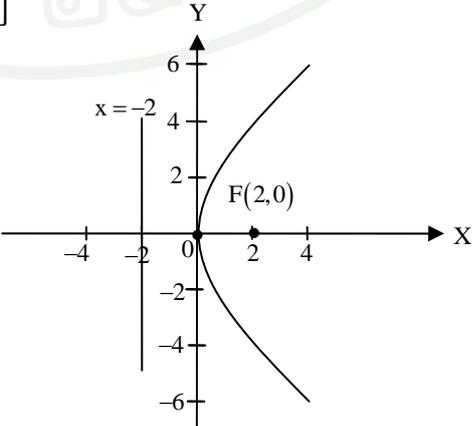
จงหาจุดยอด โฟกัส ไคเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ จากสมการพาราโบลา $8x + 12y^2 = 0$

<p>K (what we know)</p> <p>โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้</p> <p>สมการพาราโบลา $8x + 12y^2 = 0$</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุด F ซึ่งตั้งอยู่กึ่งกลางที่จุดหนึ่ง และเส้นตรง l ที่ตั้งอยู่กึ่งกลางที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตั้งอยู่กึ่งกลางที่นี้เรียกว่า โฟกัส และเส้นตรงที่ตั้งอยู่กึ่งกลางที่นี้เรียกว่า เส้นบังคับหรือไคเรกตริกซ์ ของพาราโบลา</p> <p>สมการพาราโบลาที่อยู่ในรูป $y^2 = 4px$ มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(p, 0)$ ไคเรกตริกซ์ คือ $x = -p$ และแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน</p>
<p>W (what we want)</p> <p>โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ</p> <p>จุดยอด โฟกัส ไคเรกตริกซ์ ความยาวของเลตัสเรกตัม และกราฟของพาราโบลา</p> <p>วิธีการแก้ปัญหาคือ</p> <p>จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน $y^2 = 4px$</p>
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ จากสมการ $8x + 12y^2 = 0$</p> <p>จัดรูปสมการใหม่ จะได้ $y^2 = -\frac{2}{3}x$</p> <p>จะได้ว่า $4p = -\frac{2}{3}$</p> <p>ดังนั้น $p = -\frac{1}{6}$, $(p < 0)$</p> <p>จะได้พาราโบลามีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน และกราฟเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านซ้าย</p>

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>โฟกัสคือจุด $(p, 0)$ จะได้ $(p, 0) = \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$</p> <p>ไคเรกตริกซ์ คือ $x = -p$ จะได้ $x = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$</p> <p>ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ $4p$ นั่นคือ</p> $\left 4\left(-\frac{1}{6}\right)\right = \frac{2}{3}$
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้นพาราโบลาที่มียอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$</p> <p>โฟกัสคือจุด $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$</p> <p>สมการของไคเรกตริกซ์ คือ $x = \frac{1}{6}$</p> <p>ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{2}{3}$ หน่วย</p> <p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้คือ รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน คือ $y^2 = 4px$ โฟกัสคือจุด $(p, 0)$ และสมการของไคเรกตริกซ์ คือ $x = -p$</p>

แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 10.2

จงเขียนกราฟและหาสมการพาราโบลา เมื่อกำหนดจุดยอดที่จุดกำเนิด และ โฟกัสอยู่ที่จุด $F(2, 0)$

<p>K (what we know)</p> <p>โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้</p> <p>พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และ โฟกัสคือจุด $F(2, 0)$</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>พาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(p, 0)$ ไคเรกตริกซ์ คือเส้นตรง $x = -p$</p> <p>สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4px$</p>
<p>W (what we want)</p> <p>โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ</p> <p>สมการพาราโบลา และกราฟของพาราโบลา</p> <p>วิธีการแก้ปัญหาคือ</p> <p>หาค่า p แล้วแทนค่าลงในสมการพาราโบลา $y^2 = 4px$</p>
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ เนื่องจากจุดยอดของพาราโบลา คือจุด $(0, 0)$ และ โฟกัสคือจุด $F(2, 0)$ จะได้ว่า $p = 2$ และสมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4px$</p> <p>เนื่องจาก $p = 2, (2 > 0)$ จะได้กราฟพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดทางด้านขวา ดังนั้นจะได้สมการพาราโบลา คือ</p> $y^2 = 4(2)x$ $= 8x$
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 8x$</p> <p>กราฟแสดงดังรูป</p> 

<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหา ของคำตอบที่ได้</p>	<p>สรุปขั้นคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้ คือ รูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มี แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน คือ $y^2 = 4px$ จุดยอดคือจุด $(0, 0)$ โฟกัสคือจุด $(p, 0)$ และสมการของไดเรกทริกซ์ คือ $x = -p$</p>
--	---



ใบงานที่ 8
เรื่อง พาราโบลาที่มีจุดยอด (0, 0)

ชื่อ-นามสกุล.....เลขที่.....ห้อง.....

1. จงหาสมการพาราโบลาเมื่อโฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ และไคเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = \frac{1}{2}$

สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และความรู้เดิมที่ใช้

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำตอบที่ได้และสรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ

.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ศ 31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ภาคเรียนที่ 2

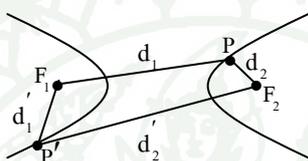
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ภาคตัดกรวย

เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

เวลา 50 นาที

1. สาระสำคัญ

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่ง **ผลต่าง** ของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และจุด F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว (คูรูป) โดยค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุด F_1 และจุด F_2 ดังกล่าวนี้เรียกว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา



$$|d_1 - d_2| = |d_1' - d_2'| = \text{ค่าคงตัว}$$

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน (แกนตามขวางขนานกับแกน X)

สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน โฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h + c, k)$ และจุด $F_2(h - c, k)$ เมื่อ $c > 0$ และผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ หนึ่งบนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับค่าคงตัว $2a$ ซึ่ง $0 < 2a < 2c$ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{เมื่อ } b^2 = c^2 - a^2$$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของไฮเพอร์โบลาได้
2. หาสมการไฮเพอร์โบลาตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้
3. หาส่วนต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลา จากสมการไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ได้
4. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

2.2 ด้านทักษะและกระบวนการ นักเรียนมีความสามารถใน

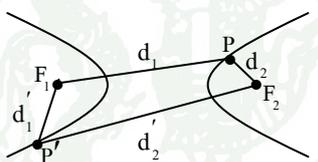
1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ
4. การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์

2.3 ด้านคุณลักษณะ นักเรียน

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ
2. มีระเบียบวินัย
3. เป็นคนช่างสังเกต
4. มีความรอบคอบ

3. ตารางการเรียนรู้

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่ง *ผลต่าง* ของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุด F_1 และจุด F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว (ดูรูป) โดยค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุด F_1 และจุด F_2 ดังกล่าวนี้เรียกว่า **โฟกัส** ของไฮเพอร์โบลา



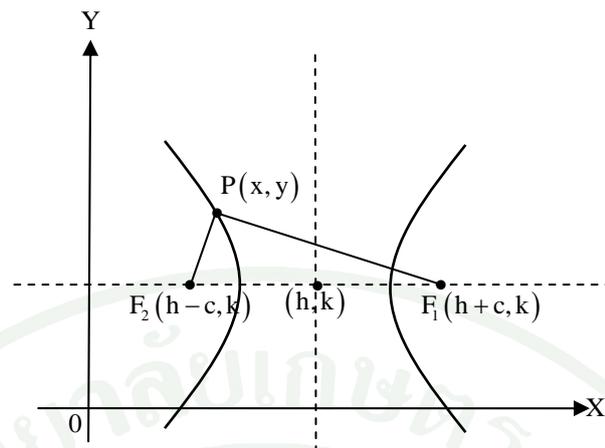
$$|d_1 - d_2| = |d_1' - d_2'| = \text{ค่าคงตัว}$$

รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน (แกนตามขวางขนานกับแกน X)

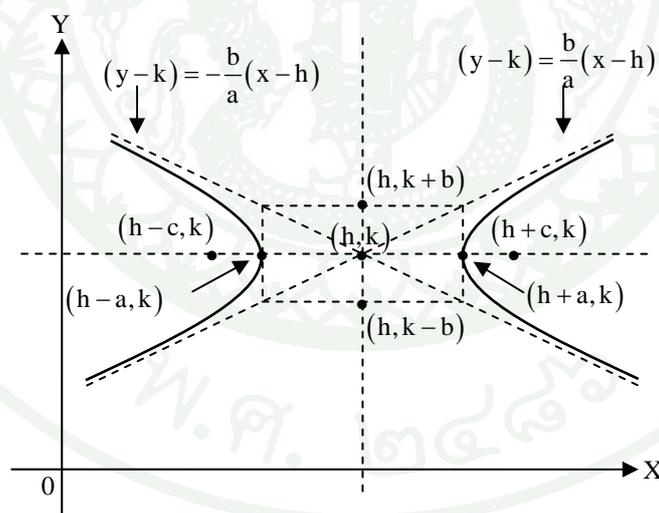
ให้ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h + c, k)$ และจุด $F_2(h - c, k)$ เมื่อ $c > 0$ (ดังแสดงในรูป) จากทฤษฎีบท ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา แล้ว $|PF_1 - PF_2|$ ต้องมีค่าเท่ากับจำนวนบวกจำนวนหนึ่งเสมอ สมมุติว่าเท่ากับ $2a$ โดยที่

$$0 < 2a < 2c$$



จะได้สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน โฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h+c, k)$ และจุด $F_2(h-c, k)$ เมื่อ $c > 0$ และผลต่างของระยะทางจากจุด ๆ หนึ่งบนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับค่าคงตัว $2a$ ซึ่ง $0 < 2a < 2c$ คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ เมื่อ } b^2 = c^2 - a^2, 0 < a < c \text{ และ } b > 0$$



จากรูปจะได้

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)
2. จุดยอดคือจุด $(h+a, k)$ และจุด $(h-a, k)$
3. โฟกัสคือจุด $(h+c, k)$ และจุด $(h-c, k)$
4. จุดปลายแกนตั้งคือจุด $(h, k+b)$ และจุด $(h, k-b)$

5. ความยาวเลตัสเรคตัมเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

6. สมการเส้นกำกับคือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

สมการรูปแบบทั่วไปของไฮเพอร์โบลา

ให้ A, B, C, D และ E เป็นค่าคงตัวใด ๆ สมการรูปแบบทั่วไปของไฮเพอร์โบลา คือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ เมื่อ A และ B มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนตั้งยุค และเส้นกำกับของสมการไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 54x = 63$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จากสมการไฮเพอร์โบลา

$$9x^2 - 16y^2 - 54x = 63$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้ $(9x^2 - 54x) - 16y^2 = 63$

$$9(x^2 - 6x) - 16y^2 = 63$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 16y^2 = 63 + 81$$

$$9(x - 3)^2 - 16y^2 = 144$$

$$\frac{(x - 3)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

เปรียบเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $a^2 = 16$ และ $b^2 = 9$ จะได้ $a = \pm 4$ และ $b = \pm 3$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$ เพราะฉะนั้น $c^2 = 16 + 9 = 25$ ดังนั้น $c = \pm 5$

จะได้ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

และจะได้ว่า $h = 3$ และ $k = 0$

เนื่องจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) จะได้ $(h, k) = (3, 0)$

จุดยอดคือจุด $(h \pm a, k)$ จะได้ $(h - a, k) = (3 - 4, 0) = (-1, 0)$

$$\text{และ } (h + a, k) = (3 + 4, 0) = (7, 0)$$

โฟกัสคือจุด $(h \pm c, k)$ จะได้ $(h - c, k) = (3 - 5, 0) = (-2, 0)$

$$\text{และ } (h + c, k) = (3 + 5, 0) = (8, 0)$$

จุดปลายแกนตั้งยุคคือจุด $(h, k \pm b)$ จะได้ $(h, k - b) = (3, 0 - 3) = (3, -3)$

$$\text{และ } (h, k + b) = (3, 0 + 3) = (3, 3)$$

$$\text{เส้นกำกับคือ } y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \text{ จะได้ } y - 0 = \pm \frac{3}{4}(x - 3) \text{ ดังนั้น } y = \pm \frac{3}{4}(x - 3)$$

ดังนั้น สรุปได้ว่าไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลางคือจุด $(3, 0)$

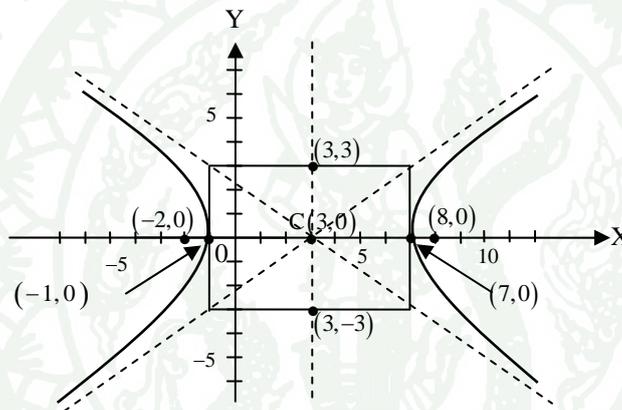
จุดยอดคือจุด $(-1, 0)$ และจุด $(7, 0)$

โฟกัสคือจุด $(-2, 0)$ และจุด $(8, 0)$

จุดปลายแกนสังยุคคือจุด $(3, -3)$ และจุด $(3, 3)$

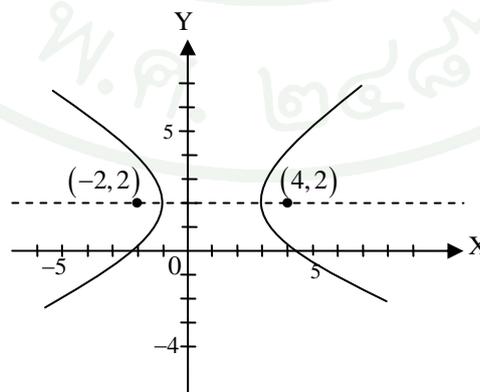
$$\text{เส้นกำกับคือ } y = \pm \frac{3}{4}(x - 3)$$

กราฟแสดงดังรูป



ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการไฮเพอร์โบล่า ที่มีผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบล่าไปยังจุด $(4, 2)$ และจุด $(-2, 2)$ เท่ากับ 4 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ไฮเพอร์โบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด $(4, 2)$ และจุด $(-2, 2)$ ดังรูป



จะได้ว่าไฮเพอร์โบล่ามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคือจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง

ดังนั้นจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{2 + 2}{2} \right) = (1, 2)$$

ดังนั้นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคู่อยู่ที่จุด $(1, 2)$ จะได้ $h = 1$ และ $k = 2$

จากผลต่างของค่าคงตัวเท่ากับ 4 หน่วย จะได้ $2a = 4$ ดังนั้น $a = 2$

การหาค่า c

วิธีที่ 1 หาค่า c จากระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลากับโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคู่

กรณีที่ 1 จุดศูนย์กลาง $(1, 2)$ กับจุด $(4, 2)$ จะได้ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองเท่ากับ

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 จุดศูนย์กลาง $(1, 2)$ กับจุด $(-2, 2)$ จะได้ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองเท่ากับ

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หาค่า c จากระยะทางระหว่างโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคู่คือจุด $(4, 2)$ กับจุด $(-2, 2)$ เนื่องจากระยะทางระหว่างโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคู่เท่ากับ $2c$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 2c &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $c = 3$

จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$ ดังนั้น $b = \pm\sqrt{5}$

เนื่องจากไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน สมการไฮเพอร์โบลาคู่คือ

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{(x - 1)^2}{2^2} - \frac{(y - 2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

$$5(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 20$$

$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 20$$

$$5x^2 - 10x + 5 - 4y^2 - 16y - 16 = 20$$

$$5x^2 - 4y^2 - 10x - 16y - 31 = 0$$

ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ $5x^2 - 4y^2 - 10x - 16y - 31 = 0$

4. กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูทบทวนรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) โดยใช้การสุ่มถามนักเรียนทีละคน
2. ครูอธิบายรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน โดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย พร้อมเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย
3. ครูยกตัวอย่างที่ 1 โดยให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์โจทย์ในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 15.1 ครูตั้งคำถาม และเขียนคำตอบของนักเรียนลงในแผนผัง K-W-D-L บนกระดานดังนี้
 - 3.1 สิ่งที่โจทย์บอกให้ทราบมีอะไรบ้าง ให้นักเรียนระดมความคิด โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง K
 - 3.2 สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร และจะมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไรบ้าง โดยนักเรียนร่วมกันอภิปราย และสรุปถึงวิธีการแก้ปัญหา ครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง W
 - 3.3 นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาตามวิธีที่เลือกไว้ โดยครูเขียนสิ่งที่นักเรียนตอบลงในแผนผัง K-W-D-L ช่อง D
 - 3.4 นักเรียนร่วมกันอภิปรายความรู้และคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาคืออะไร และสรุป แล้วครูเขียนสิ่งที่ได้ในแผนผัง K-W-D-L ช่อง L
 - 3.5 ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยจากการทำตัวอย่างที่ 1
6. ครูยกตัวอย่างที่ 2 โดยให้นักเรียนจับคู่ปรึกษากันเพื่อวิเคราะห์แก้โจทย์ปัญหา และทำลงในแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 15.2 ตามขั้นตอน K-W-D-L ใช้เวลาประมาณ 5 นาที แล้วครูสุ่มถามนักเรียนทีละ 1 คนเพื่อเฉลยคำตอบตามขั้นตอน K-W-D-L บนกระดาน
7. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน โดยครูใช้การถามตอบ

9. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเรื่องไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน เป็นการบ้าน

5. สื่อการเรียนรู้

5.1 แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 15.1 และชุดที่ 15.2

5.2 แบบฝึกหัดเรื่องไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

6. การวัดผลและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้องประมาณร้อยละ 85
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน	2. นักเรียนให้ความสนใจและให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมประมาณร้อยละ 80
3. การทำแบบฝึกหัดเรื่อง ไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดเรื่องไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอนถูกต้องประมาณร้อยละ 75

7. บันทึกหลังการสอน

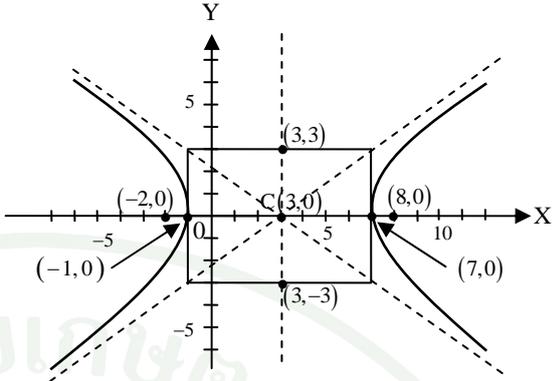
นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจและสามารถตอบคำถามเรื่องรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวนอนได้ แต่ในขั้นตอนการแก้ปัญหานักเรียนยังมีข้อผิดพลาดในเรื่องการคิดคำนวณ โดยเฉพาะการใช้สมบัติการแจกแจงในการคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ นอกจากนี้นักเรียนบางคนเขียนสูตรเรขาคณิตวิเคราะห์ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง เช่น สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด สูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด เป็นต้น ครูได้นัดแนะและคอยเตือนนักเรียนให้มีความรอบคอบอยู่เสมอ

แผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 15.1

จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และเส้นกำกับของสมการไฮเพอร์โบลา
 $9x^2 - 16y^2 - 54x = 63$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

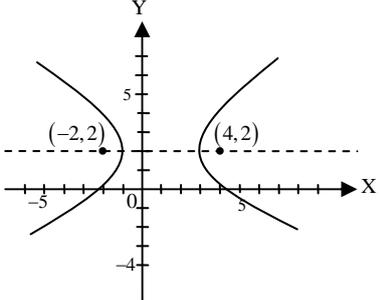
<p>K (what we know) โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ สมการไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 54x = 63$ ความรู้เดิมที่ใช้ ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง คือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$</p>
<p>W (what we want) โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ และกราฟของไฮเพอร์โบลา วิธีการแก้ปัญหา จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน หาจุดศูนย์กลาง หาค่า a, b และ c</p>
<p>D (what we do) ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา วิธีทำ จากสมการไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 54x = 63$ จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้ $(9x^2 - 54x) - 16y^2 = 63$ $9(x^2 - 6x + 9) - 16y^2 = 63 + 81$ $9(x-3)^2 - 16y^2 = 144$</p>

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและ แสดงขั้นตอนการ แก้ปัญหาอย่างไร</p>	$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-0)^2}{9} = 1$ <p>เปรียบเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐาน $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$</p> <p>จะได้ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน และจะได้ว่า $h=3$ และ $k=0$ เนื่องจาก $a^2=16$ และ $b^2=9$ จะได้ $a=\pm 4$ และ $b=\pm 3$ จาก $b^2=c^2-a^2$ จะได้ $c^2=a^2+b^2$ เพราะฉะนั้น $c^2=16+9=25$ ดังนั้น $c=\pm 5$ เนื่องจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) จะได้ $(h,k)=(3,0)$ จุดยอดคือจุด $(h\pm a,k)$ จะได้ $(h-a,k)=(3-4,0)=(-1,0)$ และ $(h+a,k)=(3+4,0)=(7,0)$ โฟกัสคือจุด $(h\pm c,k)$ จะได้ $(h-c,k)=(3-5,0)=(-2,0)$ และ $(h+c,k)=(3+5,0)=(8,0)$ จุดปลายแกนสังยุคคือจุด $(h,k\pm b)$ จะได้ $(h,k-b)=(3,0-3)=(3,-3)$ และ $(h,k+b)=(3,0+3)=(3,3)$ เส้นกำกับคือ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$ จะได้ $y-0=\pm\frac{3}{4}(x-3)$ ดังนั้น $y=\pm\frac{3}{4}(x-3)$</p>
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหา ของคำตอบที่ได้</p>	<p>คำตอบที่ได้</p> <p>ดังนั้น สรุปได้ว่าไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน</p> <p>จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3,0)$</p> <p>จุดยอดคือจุด $(-1,0)$ และจุด $(7,0)$</p> <p>โฟกัสคือจุด $(-2,0)$ และจุด $(8,0)$</p> <p>จุดปลายแกนสังยุคคือจุด $(3,-3)$ และจุด $(3,3)$</p> <p>เส้นกำกับคือ $y=\pm\frac{3}{4}(x-3)$</p>

<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหา ของคำตอบที่ได้</p>	<p>กราฟแสดงดังรูป</p>  <p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้ คือ รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$ มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(h \pm a, k)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(h \pm c, k)$ และสมการเส้นกำกับคือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$</p>
--	---

เฉลยแผนผัง K-W-D-L ชุดที่ 15.2

จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (4,2) และจุด (-2,2) เท่ากับ 4 หน่วย

<p>K (what we know)</p> <p>โจทย์บอกอะไรมาให้บ้าง</p>	<p>สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้</p> <p>ไฮเพอร์โบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด (4,2) และจุด (-2,2) ผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสเท่ากับ 4 หน่วย</p> <p>ความรู้เดิมที่ใช้</p> <p>ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะห่างจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัว ซึ่งมีความมากกว่าศูนย์แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง</p> <p>ไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(h \pm c, k)$ มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$</p>
<p>W (what we want)</p> <p>โจทย์ต้องการทราบอะไร และวางแผนแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ คือ สมการไฮเพอร์โบลา</p> <p>วิธีการแก้ปัญหา คือ</p> <p>วาดรูปประกอบคร่าว ๆ</p> <p>หาค่า a, b และ c แทนในสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$</p>
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>แสดงวิธีการแก้ปัญหา</p> <p>วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ไฮเพอร์โบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด (4,2) และจุด (-2,2) ดังรูป</p> 

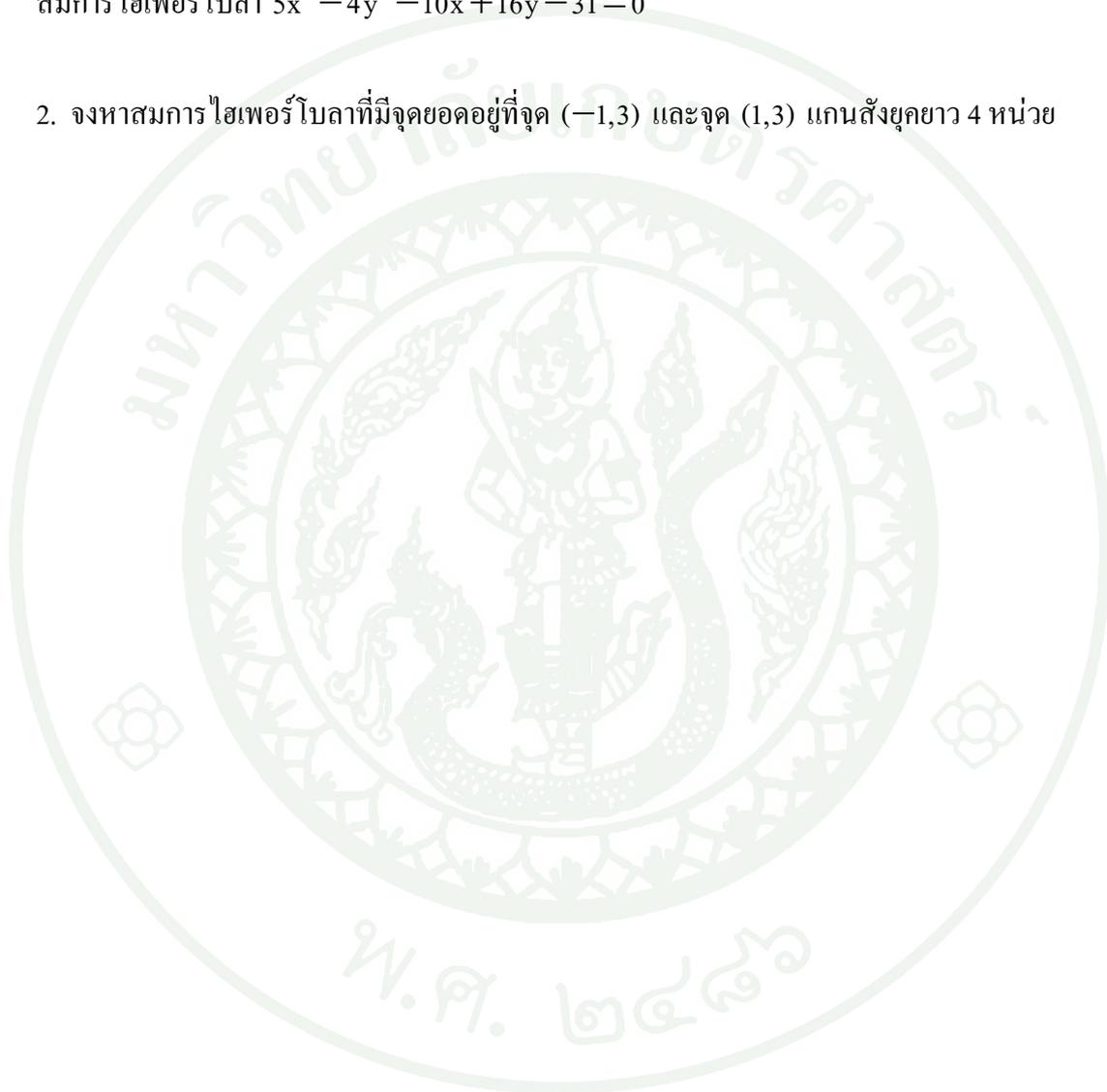
<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	<p>จะได้ว่าไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคือ จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง</p> <p>ดังนั้นจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ</p> $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{4 - 2}{2}, \frac{2 + 2}{2}\right) = (1, 2)$ <p>ดังนั้นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลายู่ที่จุด (1, 2)</p> <p>จะได้ $h = 1$ และ $k = 2$</p> <p>จากผลต่างของระยะจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาก็ยังโฟกัสเท่ากับ 4 หน่วย จะได้ $2a = 4$ ดังนั้น $a = 2$</p> <p>การหาค่า c</p> <p>วิธีที่ 1 หาค่า c จากระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลากับโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคือ</p> <p>กรณีที่ 1 จุดศูนย์กลาง (1, 2) กับจุด (4, 2) จะได้ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองเท่ากับ</p> $\begin{aligned}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3\end{aligned}$ <p>กรณีที่ 2 จุดศูนย์กลาง (1, 2) กับจุด (-2, 2) จะได้ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองเท่ากับ</p> $\begin{aligned}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 2)^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3\end{aligned}$ <p>วิธีที่ 2 หาค่า c จากระยะทางระหว่างโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคือจุด (4, 2) กับจุด (-2, 2)</p> <p>เนื่องจากระยะทางระหว่างโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคือ $2c$ จะได้</p> $2c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
--	--

<p>D (what we do)</p> <p>ดำเนินการแก้ปัญหาและแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาอย่างไร</p>	$= \sqrt{(-2-4)^2 + (2-2)^2}$ $= \sqrt{36}$ $= 6$ $c = 3$ <p>ดังนั้น $c = 3$</p> <p>จาก $b^2 = c^2 - a^2$ จะได้ $b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$ ดังนั้น $b = \pm\sqrt{5}$</p> <p>เนื่องจากไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน</p> <p>สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$</p> <p>จะได้ $\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$</p> $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ $5(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 20$ $5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 20$ $5x^2 - 10x + 5 - 4y^2 - 16y - 16 = 20$ $5x^2 - 4y^2 - 10x - 16y - 31 = 0$
<p>L (what we learn)</p> <p>เสนอผลการแก้ปัญหาของคำตอบที่ได้</p>	<p>สรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ</p> <p>สิ่งที่ต้องเรียนรู้ได้แก่</p> <ol style="list-style-type: none"> รูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ <p>เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$ มีจุดยอดคือจุด $(h \pm a, k)$ โฟกัสคือจุด $(h \pm c, k)$</p> <p>และสมการเส้นกำกับคือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$</p> <ol style="list-style-type: none"> สูตรการหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด คือ $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ <ol style="list-style-type: none"> สูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดคือ $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

แบบฝึกหัด เรื่องไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนตั้งขาค ความยาวเลตัสเรกตัม และเส้นกำกับของสมการไฮเพอร์โบลา $5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$
2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-1, 3)$ และจุด $(1, 3)$ แกนตั้งขาคยาว 4 หน่วย





ภาคผนวก ข

ตารางวิเคราะห์ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย

ตารางผนวกที่ ข1 ตารางวิเคราะห์ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย

เนื้อหา	พฤติกรรมที่ต้องการวัด						รวม
	ความรู้ความจำ		ความเข้าใจ		การนำไปใช้		
	ปรนัย	อัตนัย	ปรนัย	อัตนัย	ปรนัย	อัตนัย	
1. วงกลม	-	-	2 (ข้อ 1-2)	1 (ข้อ 1)	-	-	3
2. วงรี	-	-	2 (ข้อ 3, 5)	-	-	-	2
3. พาราโบลา	-	-	2 (ข้อ 6, 8)	-	-	1 (ข้อ 2)	3
4. ไฮเพอร์โบลา	-	-	3 (ข้อ 9-11)	-	-	-	3
5. โจทย์ระคน	-	-	1 (ข้อ 12)	-	2 (ข้อ 4,7)	-	3
รวม	-	-	10	1	2	1	14



ภาคผนวก ค
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คำชี้แจง แบบทดสอบชุดนี้มี 2 ตอน จำนวน 14 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน ใช้เวลา 50 นาที

ตอนที่ 1 เป็นแบบทดสอบปรนัยแบบเลือกตอบ จำนวน 12 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบอัตนัยแสดงวิธีทำ จำนวน 2 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดยกาเครื่องหมาย × ในช่องที่ตรงกับตัวเลือกในแต่ละข้อของกระดาษคำตอบ (ข้อละ 1 คะแนน)

1. วงกลมที่มีสมการ $4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y = 11$ มีจุดศูนย์กลางอยู่จุดที่ใดและรัศมียาวเท่าใด

ก. จุดศูนย์กลางคือจุด $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ รัศมียาว 3 หน่วย

ข. จุดศูนย์กลางคือจุด $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ รัศมียาว 3 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลางคือจุด $(3, 2)$ รัศมียาว 3 หน่วย

ง. จุดศูนย์กลางคือจุด $(-3, 2)$ รัศมียาว $\frac{\sqrt{11}}{2}$ หน่วย

2. สมการวงกลมในข้อใดที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3, -5)$ และจุด $(7, 3)$

ก. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 36 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 36 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 24 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 24 = 0$

3. สมการวงรีในข้อใดที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -5)$ และจุด $(0, 5)$ และโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย

ก. $9x^2 + 25y^2 = 225$

ข. $16x^2 + 25y^2 = 400$

ค. $25x^2 + 9y^2 = 225$

ง. $25x^2 + 16y^2 = 400$

4. วงรีวงหนึ่งมีสมการเป็น $9x^2 + 4y^2 = 36$ สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงรี และรัศมียาวเท่ากับความยาวครึ่งแกนโท คือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 = 2$

ข. $x^2 + y^2 = 3$

ค. $x^2 + y^2 = 4$

ง. $x^2 + y^2 = 9$

5. กำหนดสมการวงรี $4x^2 + y^2 + 40x - 2y + 85 = 0$ ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับเท่าใด

ก. 8 หน่วย

ข. 10 หน่วย

ค. 16 หน่วย

ง. 20 หน่วย

6. สมการพาราโบลาในข้อใดที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -3)$ ไคเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 3$

ก. $y^2 = 12x$

ข. $y^2 = -12x$

ค. $x^2 = 12y$

ง. $x^2 = -12y$

7. ข้อใดต่อไปนี้คือสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่โฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และรัศมีของวงกลมยาวเท่ากับระยะทางจากโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา

ก. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

8. ความยาวเลดส์ครกคัมของกราฟพาราโบลา $y^2 - 6y + 4x + 10 = 0$ มีค่าเท่าใด

ก. 1 หน่วย

ข. 2 หน่วย

ค. 3 หน่วย

ง. 4 หน่วย

9. ข้อใดต่อไปนี้คือโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $4x^2 - y^2 = -16$

ก. $(0, 2\sqrt{5})$ และ $(0, -2\sqrt{5})$

ข. $(2\sqrt{5}, 0)$ และ $(-2\sqrt{5}, 0)$

ค. $(0, 2\sqrt{2})$ และ $(0, -2\sqrt{2})$

ง. $(2\sqrt{2}, 0)$ และ $(-2\sqrt{2}, 0)$

10. สมการไฮเพอร์โบลาในข้อใดที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-5, 0)$ และจุด $(5, 0)$ มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-8, 0)$ และจุด $(8, 0)$

ก. $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{25} = 1$

ข. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$

ค. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{39} = 1$

ง. $\frac{y^2}{39} - \frac{x^2}{25} = 1$

11. กำหนดสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-1)^2}{25} - (x-3)^2 = 1$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้กล่าวไม่

ถูกต้อง

- ก. ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (1,3)
- ข. ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด (3,6) และจุด(3,-4)
- ค. ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง
- ง. ไฮเพอร์โบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด $(3, 1 + \sqrt{26})$ และจุด $(3, 1 - \sqrt{26})$

12. กำหนดสมการ $2x^2 + 11y^2 + 4x - 44y + 24 = 0$ และสมการ

$2x^2 - 7y^2 + 4x - 28y - 40 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. กราฟทั้งสองของสมการมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน
- ข. ความยาวแกนเอกของวงรีเท่ากับความยาวแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา
- ค. กราฟทั้งสองของสมการมีความยาวโฟกัสเท่ากัน
- ง. กราฟทั้งสองของสมการมีจุดยอดร่วมกัน



ภาคผนวก
แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง วงรี

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. จงเขียนกราฟและหาสมการวงรีที่อยู่ในรูปทั่วไปเมื่อโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,4)$ และ จุด $(0,-4)$ และผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 10 หน่วย

สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำตอบที่ได้และสรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ

.....

.....

.....

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. จงหาสมการพาราโบลาในรูปทั่วไป เมื่อกำหนดให้จุดยอดอยู่ที่ $(2, -3)$ และโคเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = 1$

สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำตอบที่ได้ และสรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ

.....

.....

.....

.....

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

จงแสดงวิธีทำโดยละเอียด

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ความยาว
เลตัสเรกตัมเท่ากับ 6 หน่วย และแกนสังยุคยาว 12 หน่วย

สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้และความรู้เดิมที่ใช้

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบและวิธีการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

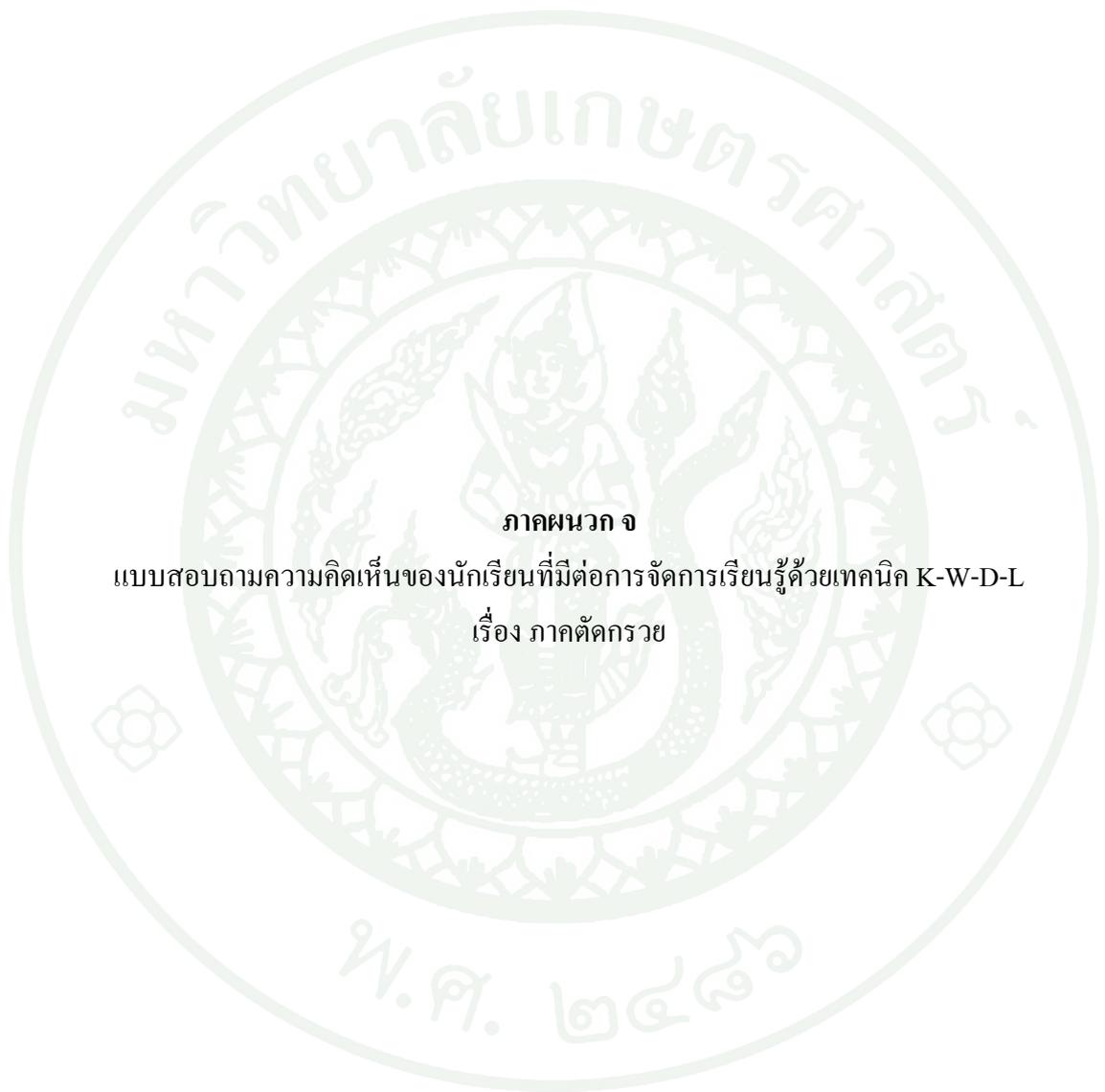
.....

คำตอบที่ได้และสรุปขั้นตอนคิดหาคำตอบ

.....

.....

.....



ภาคผนวก จ

แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L
เรื่อง ภาคตัดกรวย

แบบสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L

คำชี้แจง แบบสอบถามความคิดเห็นฉบับนี้ใช้สำหรับสอบถามความคิดเห็นของนักเรียนเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย โดยให้นักเรียนอ่านข้อความที่กำหนดและแสดงความคิดเห็นของนักเรียนโดยทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับระดับความคิดเห็นของนักเรียนมากที่สุด

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
ด้านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้					
1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ช่วยให้นักเรียนคิดอย่างเป็นระบบและมีขั้นตอนที่ชัดเจนในการแก้ปัญหา					
2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ทำให้นักเรียนมีความรอบคอบในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความมั่นใจในการหาคำตอบ					
3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นร่วมกัน					
4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยเทคนิค K-W-D-L ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาในเรื่องที่เรียนมากขึ้น					
ด้านการวัดผลและประเมินผล					
5. การทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนทราบข้อบกพร่องของตนเอง เพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาตนเองต่อไป					

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
6. การทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทำให้นักเรียนมีความต้องการที่จะพัฒนาตนเองอย่างต่อเนื่อง					
7. เกณฑ์การประเมินผล มีความชัดเจนเหมาะสมและยุติธรรม					
8. จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์มีความเหมาะสมกับเวลาที่ใช้สอบ					
ด้านครูผู้สอน					
9. ครูผู้สอนเอาใจใส่และมีความเป็นกันเองกับนักเรียน ทำให้ส่งเสริมบรรยากาศในการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี					
10. ครูผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย และคอยช่วยเหลือให้นักเรียนให้เข้าใจบทเรียนอย่างเต็มความสามารถ					
11. ครูผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ได้ปฏิบัติและค้นพบความรู้ด้วยตนเอง					
12. ครูผู้สอนปฏิบัติตนเป็นแบบอย่างที่ดี และเหมาะสมกับบทบาทหน้าที่ของครูผู้สอน					
ด้านสื่อการเรียนรู้					
13. สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในการจัดการเรียนรู้สอดคล้องกับเนื้อหาสาระ					



ภาคผนวก จ
รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

1. ดร. ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์ อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. อาจารย์ถาวร พันธนิยะ ครู คศ. 2 หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช
3. อาจารย์วิภาวี บุญฤกษ์ ครู คศ. 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ -นามสกุล	นางสาวเสาวนีย์ บุญแก้ว
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 5 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2526
สถานที่เกิด	จังหวัดนครศรีธรรมราช
ประวัติการศึกษา	ปีการศึกษา 2548 ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ปีการศึกษา 2549 ประกาศนียบัตรบัณฑิต (ป. บัณฑิต) สาขาวิชาทางการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
ตำแหน่งปัจจุบัน	ครู คศ.1
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย นครศรีธรรมราช
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ทุนโครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถ พิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สกวค.) จากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี (สสวท.)