วิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับ การค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ

A RUNNING TIME ANALYSIS FOR AN ANT COLONY OPTIMIZATION ALGORITHM FOR SHORTEST PATHS ON DIRECTED ACYCLIC GRAPHS

นายณัฐภัทร อิทธิรัตนสุนทร

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พ.ศ. 2550

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมคอมพิวเตอร์)

ปริญญา

วิศวกรรมคอมพิวเตอร์	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
สาขา	**ภาควิชา**

เรื่อง การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ

A Running Time Analysis for an Ant Colony Optimization Algorithm for Shortest Paths on Directed Acyclic Graphs

นามผู้วิจัย นายณัฐภัทร อิทธิรัตนสุนทร

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ ....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์จิตร์ทัศน์ ฝักเจริญผล, Ph.D.)

กรรมการ ....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์สมนึก คีรีโต, Ph.D.)

กรรมการ ....

(รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรวรรณ, M.Eng.)

หัวหน้าภาควิชา ....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เขมะฑัต วิภาตะวนิช, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

....

(รองศาสตราจารย์วินัย อาจคงหาญ, M.A.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ .... **เดือน** .... **พ.ศ.** ....

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ

A Running Time Analysis for an Ant Colony Optimization Algorithm for Shortest Paths on Directed Acyclic Graphs

โดย

นายณัฐภัทร อิทธิรัตนสุนทร

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมคอมพิวเตอร์)
พ.ศ. 2550

ณัฐภัทร อิทธิรัตนสุนทร 2550: การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมคอมพิวเตอร์) สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ประธานกรรมการที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์จิตร์ทัศน์ ฝักเจริญผล, Ph.D. 59 หน้า

งานวิจัยนี้นำเสนอการพิสูจน์เวลาการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดสำหรับสองปัญหาได้แก่ปัญหา *One-Max* และปัญหาการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ ต่อมาได้มีงานวิจัยของ Neumann และ Witt ได้นำเสนอการวิเคราะห์เวลาการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* อย่างไรก็ตามในการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวพิจารณาเฉพาะกรณีที่มีมดเพียงตัวเดียวโดยงานวิจัยนี้ได้พิจารณากรณีที่มีมดหลายตัวร่วมกันทำงาน ซึ่งพิสูจน์ว่าจำนวนรอบในการทำงานเป็น $O(\frac{1}{\rho}n^2 \log n)$ เมื่อ ρ เป็นอัตราการระเหยของฟีโรโมนและ n เป็นจำนวนของโหนดในกราฟ ข้อแตกต่างที่สำคัญในกรณีที่ใช้มดหลายตัวคือเวลาในการทำงานจะไม่มีพฤติกรรมการเปลี่ยนเชิงเฟสซึ่งแตกต่างจากกรณีที่ใช้มดตัวเดียว กล่าวคือผลงานวิจัยของ Neumann และ Witt แสดงให้เห็นว่าถ้าอัตราการระเหย ρ เป็น $O(n^{-1-\varepsilon})$ แล้วนั้น อัลกอริทึมจะใช้เวลาในการทำงานเป็นแบบเอ็กโพเน็นเชียลในจำนวนโหนดในกราฟ แต่ถ้าอัตราการระเหย ρ เป็น $\Omega(n^{-1+\varepsilon})$ เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมจะเป็น $O(n^2)$ นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้พิสูจน์ว่าเวลาการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบจะเท่ากับ $O(\frac{1}{\rho}n^2 m \log n)$ โดย n เป็นจำนวนโหนดและ m เป็นจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ ผลการวิเคราะห์ดังกล่าวเป็นพื้นฐานของนิยามของการลู่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดแบบใหม่ที่เรียกว่าการลู่เข้าแบบละโมบ

____________________ ____________________ ___ / ___ / ___

ลายมือชื่อนิสิต ลายมือชื่อประธานกรรมการ

Nattapat Attiratanasunthron 2007: A Running Time Analysis for an Ant Colony Optimization Algorithm for Shortest Paths on Directed Acyclic Graphs. Master of Engineering (Computer Engineering), Major Field: Computer Engineering, Department of Computer Engineering. Thesis Advisor: Assistant Professor Jittat Fackcheroenphol, Ph.D. 59 pages.

In thesis, we prove polynomial running time bounds for two Ant Colony Optimization (ACO) algorithms for two problems, *One-Max* and the single-destination shortest paths problem on directed acyclic graphs. More specifically, we extend the recent result of Neumann and Witt on *One-Max*, to the case of multiple ants by showing that our multiple-ant algorithm runs in $O(\frac{1}{\rho}n^2 \log n)$ time, where ρ is the evaporation rate and n is the number of variables. This result stands in sharp contrast with that of Neumann and Witt, where a single-ant algorithm is shown to require an exponential running time if $\rho = O(n^{-1-\varepsilon})$ for any $\varepsilon > 0$. For shortest path problem on a DAG, we show that an ACO-based algorithm runs in $O(\frac{1}{\rho}n^2 m \log n)$ time for DAG with n nodes and m edges. We believe that this is the first running time analysis of an ACO-based algorithm on a practical problem. We also propose a new notion of convergence, called greedy convergence.

____________________ ____________________ ___ / ___ / ___

Student's signature Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลงได้ด้วย ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์จิตร์ทัศน์ ฝักเจริญผล ประธานกรรมการที่ปรึกษา ผู้ให้แนวทางการวิจัยและข้อเสนอแนะรวมถึงวิถีทางในการดำเนินชีวิตที่เป็นประโยชน์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สมนึก คีรีโต กรรมการที่ปรึกษาวิชาเอก รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรวรรณ กรรมการที่ปรึกษาวิชารอง และรองศาสตราจารย์ชุลีรัตน์ จรัสกุลชัย อาจารย์ผู้แทนบัณฑิตวิทยาลัย ที่กรุณาให้คำปรึกษา และข้อเสนอแนะที่มีคุณค่าเพื่อให้วิทยานิพนธ์นี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ข้าพเจ้าขอขอบคุณเพื่อนๆ นิสิตปริญญาโท สมาชิกกลุ่มวิจัยเชิงทฤษฎีทุกท่านที่ให้คำปรึกษาและกำลังใจในการทำงาน รวมถึงเพื่อนๆ และน้องที่บริษัทที่ช่วยกันทำงานแทนในขณะที่ลามาศึกษาต่อ อีกทั้งเจ้าหน้าที่ธุรการภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ทุกท่านสำหรับความช่วยเหลือด้านการประสานงาน และดำเนินการเอกสารต่างๆ สุดท้าย แม่และพ่อ ที่คอยถามไถ่ถึงเรื่องการเรียน และเลี้ยงดูมา

ณัฐภัทร อิทธิรัตนสุนทร

มีนาคม 2550

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญภาพ

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญภาพ (ต่อ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ

A Running Time Analysis for an Ant Colony Optimization Algorithm for Shortest Paths on Directed Acyclic Graphs

คำนำ

การทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดเป็นการค้นหาคำตอบโดยใช้วิธีศึกษาสำนึก (Heuristics) แบบหนึ่งซึ่งถูกเสนอมาเพื่อใช้แก้ปัญหาในหลากหลายรูปแบบ แม้ว่าผลการทดลองพบว่าอัลกอริทึมนี้จะให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจแต่ยังไม่มีทฤษฎีที่อธิบายได้อย่างชัดเจนว่าอัลกอริทึมประสบผลสำเร็จได้อย่างไร โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอและพิสูจน์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมดังกล่าว กล่าวคือจะทำการวิเคราะห์อัลกอริทึมในการทำงานบนปัญหาสองปัญหาคือปัญหา *One-Max* และ ปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบ

โดยในวิทยานิพนธ์ได้นำผลงานของ Neumann และ Witt มาทำการวิจัยต่อ ซึ่งในงานวิจัยของ Neumann และWitt นั้นทำการพิจารณาเฉพาะบนปัญหา *One-Max* โดยเรียกว่าอัลกอริทึม 1-ANT ซึ่งใช้มดตัวเดียวในการทำงาน เวลาในการทำงานของ Neumann และWitt ได้แสดงว่าเป็น $O(n^2)$ เมื่อ อัตราการระเหยของฟีโรโมน $\rho = \Omega(n^{-1+\varepsilon})$ และเป็นเอ็กโพเน็นเชียล เมื่อ $\rho = O(n^{-1-\varepsilon})$ สำหรับค่า $\varepsilon > 0$ ส่วนในงานนี้มีความแตกต่างจากของ Neumann และ Witt คือจะใช้มดหลายตัวในการทำงาน โดยจะเรียกว่า อัลกอริทึมแบบมดหลายตัว (*multiple-ant algorithm)* โดยได้แสดงว่าเวลาการทำงานเป็น $O(\frac{1}{\rho} n^2 \log n)$ และสำหรับกรณีของการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบนั้นอัลกอริทึมจะใช้เวลาในการทำงานได้เป็น $O(\frac{1}{\rho} n^2 m \log n)$ ในกราฟที่มีโหนด n โหนด และเส้นเชื่อม m เส้น

วัตถุประสงค์

งานวิจัยชิ้นนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. ทำความเข้าใจเกี่ยวกับคุณสมบัติพื้นฐานของอัลกอริทึมอาณาจักรมด
2. พัฒนาเครื่องมือรวมถึงวิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับพิสูจน์เวลาการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดโดยผ่านทางการศึกษาอัลกอริทึมอาณาจักรมดแบบง่าย

ผลการวิจัย

การวิจัยมีผลลัพธ์ดังนี้

1. อัลกอริทึมใช้เวลาในการทำงานบนปัญหา *One-Max* เป็น $\mathrm{O}(\frac{1}{\rho} n^2 \log n)$ เมื่อ ρ เป็นอัตราการระเหยของฟีโรโมนเมื่อ n เป็นจำนวนโหนดในกราฟ
2. อัลกอริทึมใช้เวลาในการทำงานบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบเป็น $\mathrm{O}(\frac{1}{\rho} n^2 m \log n)$ เมื่อ ρ เป็นอัตราการระเหยของฟีโรโมนเมื่อ n และ m เป็นจำนวนโหนดและผลรวมของเส้นเชื่อมในกราฟ

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดและวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมในการแก้ปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบ

การตรวจเอกสาร

ส่วนนี้ของวิทยานิพจน์จะแสดงการตรวจเอกสาร โดยจะแบ่งเป็นส่วน ๆ ดังนี้ ส่วนแรกจะอธิบายแนวคิดพื้นฐานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมด (Dorigo and Blum, 2005) จากนั้นจะอธิบายอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสองอัลกอรทึมคืออัลกอริทึม Ant System และ AntNet (Di Caro and Dorigo,1997,1998) ในส่วนถัดไปจะกล่าวถึงการลู่เข้าสู่คำตอบของอัลกอริทึมแบบมด (Stützle and Dorigo, 2002) รวมถึงการวิเคราะห์การทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดในปัญหา *One-Max* ในนิยามของ Neumann และ Witt (Neumann and Witt, 2006) และในส่วนสุดท้ายของการตรวจเอกสารจะอธิบายอัลกอริทึมสำหรับการหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (Dijkstra ,1959)

<u>อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมด</u>

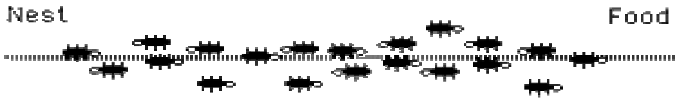
อัลกอริทึมอาณาจักรมดนั้นเลียนแบบพฤติกรรมของมดจริงๆ ในธรรมชาติมดนั้นสามารถเดินทางจากรังของมันไปยังแหล่งอาหารและกลับมาสู่รังได้ โดยมดจะเลือกเส้นทางที่จะใช้เดิน ให้มีระยะทางรวมนั้นเกือบจะได้เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด จากแนวคิดนี้ทำให้ Dorigo (Dorigo and Stützle, 2004) ได้พัฒนาอัลกอริทึมอาณาจักรมดขึ้นมาซึ่งนับเป็นอัลกอริทึมสำหรับหาค่าที่ดีที่สุดแบบหนึ่งซึ่งมีประสิทธิภาพในการทำงาน

การหาคำตอบที่ดีที่สุดแบบอัลกอริทึมอาณาจักรมด (Ant Colony Optimization Algorithm) หรือต่อไปจะเรียกว่า ACO Algorithm เป็นการอัลกอริทึมซึ่งจำลองการทำงานมาจากชีวิตและพฤติกรรมจริงของการทำงานของมด โดยมดนั้นเกือบจะตาบอด (Dorigo and Gambardella ,1997) แต่อย่างไรก็ตามมดนั้นสามารถค้นหาเส้นทางจากรังของมันไปยังแหล่งอาหารและย้อนกลับมายังรังของมันได้ โดยระยะทางที่มดใช้ในการเดินทางนั้นเกือบจะมีระยะทางใกล้เคียงกับเส้นทางที่สั้นที่สุด

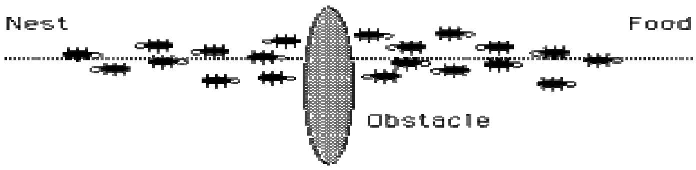
พฤติกรรมดังกล่าวสามารถอธิบายได้ดังนี้ พิจารณาเส้นทางของมด จากภาพที่ 1-4 (ภาพจาก (Dorigo and Gambardella ,1997)) ถ้าเส้นทางเป็นเส้นทางตรง (ในภาพที่ 1) การเดินทางของมดจะเป็นเส้นทางตรงซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุดเป็นพื้นฐานอยู่แล้ว อย่างไรก็ตามหากมีสิ่งกีดขวางเกิดขึ้น พิจารณาในภาพที่ 2 โอกาสที่มดจะเดินหลบหลีก ไปทางซ้ายหรือขวา จะเป็น 50-50 เปอร์เซ็นต์ กรณีเส้นทางหนึ่งมีระยะทางสั้นกว่าอีกเส้นทางหนึ่ง มดตัวที่เลือกเส้นทางที่สั้นกว่าย่อมไปสู่แหล่งอาหารและย้อนกลับไปสู่รังได้ก่อนมดที่เลือกเส้นทางที่ยาวกว่า

ส่วนมดอื่นๆ นั้นจะพิจารณาเส้นทางที่สั้นกว่าได้อย่างไร? เมื่อมดเดินทางนั้นจะมีการฝากกลิ่นหรือฟีโรโมน (Pheromone) เพื่อตามรอยเอาไว้ มดตัวต่อไปที่เดินมาจะพิจารณาจากความแรงของกลิ่นที่ได้รับ และมดตัวต่อๆ มาก็จะอาศัยข้อมูลจากกลิ่นที่ได้รับนี้ ในการตัดสินใจเลือกทางเดินต่อไป โดยเราพิจารณาในภาพที่ 3 เส้นทางที่มดต้องตัดสินใจมีอยู่ทั้งหมดสองเส้นทางคือเส้นทางด้านบนและเส้นทางด้านล่าง หากเส้นทางใดมี

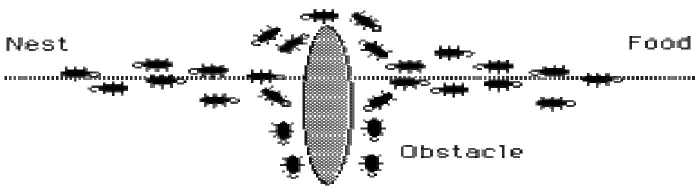
ความแรงของกลิ่นมากก็แสดงว่ามีมดจำนวนมากผ่านเส้นทางนั้น ซึ่งเป็นผลมาจากมดแต่ละตัวมีการฝากกลิ่นเมื่อเดินผ่านไปแล้วเท่าๆ กันนั่นเอง



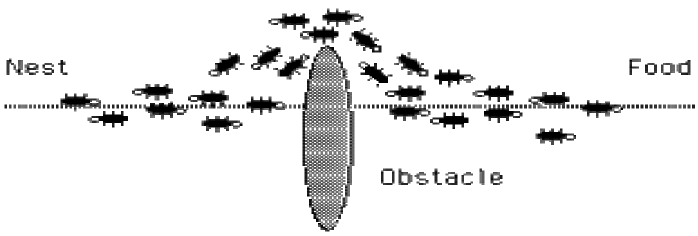
ภาพที่ 1 เส้นทางการเดินของมดจากรังไปสู่แหล่งอาหาร



ภาพที่ 2 เส้นทางเดินของมดเมื่อเกิดอุปสรรคกีดขวาง



ภาพที่ 3 มดทำการเลือกค้นหาเส้นทางอย่างอิสระและทำการติดต่อสื่อสารกันโดยใช้ฟีโรโมนที่ฝากไว้



ภาพที่ 4 มดสามารถค้นหาเส้นทางที่สั้นกว่าได้โดยใช้ความเข้มข้นของฟีโรโมนในเส้นทางเป็นตัวตัดสินใจ

ในการค้นหาเส้นทางของมดนั้นจะมีอีกปัจจัยหนึ่งที่มีผลต่อการเลือกเส้นทางของมันก็คือ การระเหยของฟีโรโมน (Evaporate) ที่มดได้ฝากเอาไว้ในแต่ละเส้นทาง ซึ่งการระเหยนั้นจะขึ้นอยู่กับเวลา จากการที่มดมีความเร็วในการเดินทางที่คงที่ ดังนั้นจากภาพที่ 4 หากมีทางเลือกที่มีระยะทางแตกต่างกันเส้นทางที่มีระยะยาวกว่าย่อมต้องใช้เวลาในการเดินทางที่มากกว่า ซึ่งจะทำให้สูญเสียฟีโรโมนจากการระเหยมากกว่าเส้นทางที่มีระยะทางสั้นกว่า และ เนื่องจากมดตัวต่อๆ มา มีการพิจารณาเส้นทางเดินจากความเข้มข้นของฟีโรโมน ดังนั้นมดตัวอื่นๆ จะมีความน่าจะเป็นที่จะเลือกเส้นทางที่สั้นกว่าในการเดินทางนั้นเอง

อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดเป็นอัลกอริทึมเชิงสุ่ม โดยมีปัจจัยที่สำคัญมากของอัลกอริทึมคือฟีโรโมน ซึ่งจะใช้เป็นปัจจัยที่ใช้ในการตัดสินใจในการเลือกเส้นทางของอัลกอริทึมโดยจะเรียกอัลกอริทึมที่มีการทำงานในลักษณะนี้ว่าฟีโรโมนโมเดล ซึ่งฟีโรโมนโมเดลนั้นเป็นโมเดลสำหรับใช้ในการจัดการแก้ปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดเชิงคอมบินาทโทเรี่ยล Combinatorial Optimization (CO)

โดยปัญหา CO นั้นสามารถนิยามเป็นปัญหาที่แตกต่างกันได้หลายรูปแบบ ซึ่งอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดนั้นก็คือการใช้ฟีโรโมนโมเดลในรูปแบบที่เข้ากับปัญหานั้นๆ ยกตัวอย่างเช่นปัญหา CO ที่สำคัญมากปัญหาหนึ่งคือปัญหาคนเดินทางขายของ

Hamiltonian Cycle

นิยาม

กำหนดให้กราฟ $G = (V, E)$ เป็นกราฟแบบไม่มีทิศทาง โดยมี V เป็นเซตของโหนด และ E เป็นเซตของเส้นเชื่อม โดย Hamiltonian Cycle การเป็นหาเส้นทางซึ่งผ่านโหนดแต่ละโหนดในกราฟเพียงโหนดละหนึ่งครั้งเท่านั้นและไม่ซ้ำโหนดเดิม ซึ่งเดินทางจากโหนดเริ่มต้นใดๆ ในกราฟไปยังโหนดสุดท้ายและย้อยกลับมายังโหนดเริ่มต้น

<u>ปัญหาคนเดินทางขายของ Traveling Salesman Problem</u>

นิยาม

อัลกอริทึมอาณาจักรมดเมื่อนำมาใช้กับปัญหาคนเดินทางขายของ (The Traveling Salesman Problem ซึ่งต่อไปจะเรียกว่า TSP) (Dorigo and Gambardella ,1997 , Stützle and Dorigo 1999) ปัญหา TSP นี้เป็นปัญหาที่สำคัญมากปัญหาหนึ่ง โดยเรากำหนดให้กราฟ $G = (V, E, W)$ เป็นกราฟแบบไม่มีทิศทางโดยมี V เป็นเซตของโหนด และ E เป็นเซตของเส้นเชื่อม โดยมี W เป็นฟังก์ชั่นแสดงน้ำหนักของเส้นเชื่อมแต่ละด้าน โดย TSP คือต้องการหา Hamiltonian Cycle ที่มีผลรวมของน้ำหนักของเส้นเชื่อมที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งปัญหา TSP นี้จัดเป็น NP-Complete นั้นคือเราไม่สามารถคาดหวังว่าจะมีอัลกอริทึมใดที่แก้ปัญหานี้ได้ในเวลาที่เป็นฟังก์ชั่นพหุนามในขนาดของปัญหา

อัลกอริทึม Ant System

อัลกอริทึม Ant System (Dorigo and Ganbardella ,1997) นับเป็นอัลกอริทึมเริ่มแรกที่นำเอาหลักการของมดในธรรมชาติมาใช้ในอัลกอริทึมเพื่อแก้ปัญหาการหาค่าที่ดีที่สุดเชิงคอมบินาทโทเรี่ยลซึ่งนำเอาการตัดสินใจเลือกเส้นทางในการเดินทางในทุกๆ เส้นทางที่เป็นไปได้ตามค่าฟีโรโมนด้วยความน่าจะเป็นค่าค่าหนึ่ง

นิยาม

อัลกอริทึม Ant System เป็นการใช้อัลกอริทึมอาณาจักรมดในการแก้ปัญหาคนเดินทางขายของ (Stützle and Dorigo ,1999) โดยมีกราฟ $G=(V,E,W)$ ซึ่งมีโหนด $r,s \in V$ และ $\eta(r,s) \in W$ และมีมด k ตัวในการทำงาน โดยจะกำหนดให้ $P_k(r,s)$ เป็นความน่าจะเป็นของมดตัวที่ k ที่โหนด r ในการที่จะเลือกเส้นทางย้ายไปที่โหนด s และจะมี $J_k(r)$ เป็นเซตของโหนดที่มดตัวที่ k ในโหนด r ที่ยังไม่ได้เดินทางไป (unvisited node) ส่วนค่าน้ำหนักเส้นทางของมดตัวที่ k เดินทางจากโหนด r ไปยังโหนด s มีค่าเป็น $\eta(r,s)$ หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าค่าการมองเห็นจาก r ไป s ซึ่งค่าการมองเห็นนี้จะเป็นส่วนกลับกับระยะทางของเส้นเชื่อมจากโหนด r ไปยังโหนด s หรือเรียกว่า d_{rs} และเมื่อมดได้เลือกเส้นทางแล้ว มดนั้นจะมีการฝากกลิ่นหรือฟีโรโมนไว้ตามเส้นทาง โดยจะกำหนดให้ $\tau(r,s)$ เป็นฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมจากโหนด r ไปยังโหนด s และสุดท้ายนั้นจะกำหนดให้ β เป็นพารามิเตอร์ที่ใช้ในการทำงานโดยเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง

การทำงานของ Ant System มีการทำงานดังอัลกอริทึมที่แสดงในภาพที่ 5 ซึ่งจะมีการทำงานในสองส่วนคือส่วนกำหนดค่าเริ่มต้นของอัลกอรทึมและส่วนที่เป็นฟังก์ชั่นในการทำงาน โดยในบรรทัดที่ 1 นั้นจะกำหนดค่าฟีโรโมนเริ่มต้นในแต่ละเส้นเชื่อม ส่วนบรรทัดที่ 2 นั้นกำหนดให้มีมดทั้งหมด m ตัวในการทำงาน โดยวางมดแต่ละตัวในโหนดใดๆ ในกราฟแบบสุ่ม อัลกอริทึมจะมีการทำงานเป็นวนรอบตามจำนวนรอบของการทำงานในอัลกอริทึมบรรทัดที่ 3 และการทำงานนั้นจะกำหนดให้มีมด m ตัว โดยมดแต่ละตัวทำหน้าที่ของมันเองอย่างอิสระในการเลือกเส้นทาง ในอัลกอริทึมบรรทัดที่ 6 และทำการจดจำค่าโหนดที่ได้ทำการเดินทางไปแล้วในบรรทัดที่ 7 เพื่อไม่ให้เดินทางซ้ำ เมื่อมดเดินทางได้ครบรอบการทำงาน จะทำการปรับค่าฟีโรโมนตามเงื่อนไขของอัลกอริทึมในบรรทัดที่ 8 และทำการคำนวนค่าระยะทางที่เดินทางได้ โดยการทำงานของอัลกอริทึมจะเป็นแบบวนซ้ำ หากยังไม่ถึงเงื่อนไขที่ตั้งไว้ จะทำงานต่อไปจนกระทั้งสุดท้ายเมื่อครบกำหนดรอบของการทำงาน จะทำการหา ระยะทางที่สั้นที่สุดของมดในบรรทัดที่ 11

```
PROCEDURE AntSystem
1. Initial Pheromone Value
2. Place the m ants on the node of the graph
3.   while Condition is not met do
4.     for k = 1 to m do // m ants
5.         for r = 1 to n-1 do
6.              ant k random walk to node j
7.              update J_k(r)
8.         update pheromone
9.         Calculate Distance L_k
10.
11. Print Shortest Path
```

ภาพที่ 5 แสดงโค้ดเทียมของอัลกอริทึม Ant System

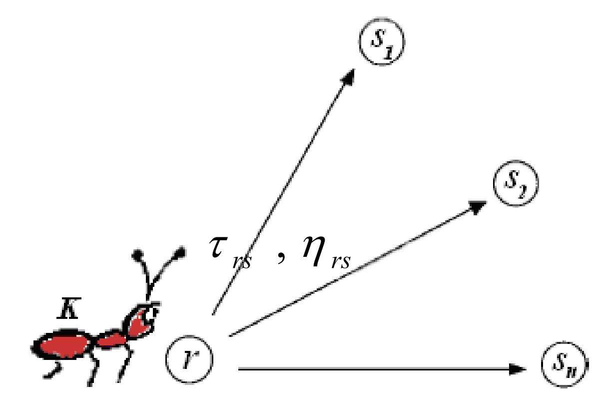
จากภาพที่ 5 แสดงโค้ดเทียมของอัลกอริทึม Ant System ซึ่งจะประกอบด้วยฟังก์ชั่นย่อยๆ อยู่สองฟังก์ชั่นคือ ในบรรทัดที่ 6 เป็นฟังก์ชั่นการเลือกเส้นทางเดินของมด และบรรทัดที่ 8 เป็นฟังก์ชั่นการปรับค่าฟีโรโมนของมดใดในอัลกอริทึม

การเลือกเส้นทางของมด

จากภาพที่ 5 แสดงฟังก์ชั่นย่อยในอัลกอริทึม Ant System ในบรรทัดที่ 6 (ant k random walk to node j) การเลือกเส้นทางเดินของมดจะทำการเลือกเส้นทางตามความน่าจะเป็นโดยขึ้นอยู่กับสองปัจจัยคือ ค่าฟีโรโมนบนเส้นทางที่เป็นตัวเลือกและค่าการมองเห็นในภาพที่ 6 และมีการคำนวนค่าตามสมการด้านล่างนี้

$$P_k(r,s)=\begin{cases}\dfrac{[\tau(r,s)]\cdot[\eta(r,s)]^{\beta}}{\sum_{u\in J_k(r)}[\tau(r,u)]\cdot[\eta(r,u)]^{\beta}} & \text{if } s\in J_k(r)\\[2ex] 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

โดยในภาพที่ 6 (ภาพจาก Dorigo and Stützle, 2004) แสดง $J_k(r)$ เมื่อ $r=i$ ของมดตัวที่ k โดยจะกำหนดให้มดแต่ละตัวมีความสามารถในการจดจำเส้นทางในการเดินทางว่าเมืองใดที่เดินทางผ่านมาแล้วบ้าง โดยจะพิจารณาจาก $J_k(r)$ หากโหนดในที่อยู่ในเส้นทางยังไม่ถูกทำการเลือกหรือมีค่าที่ยังไม่ได้เก็บไว้ใน $J_k(r)$ แล้วนั้นก็จะทำการพิจารณาเลือกเส้นทางนั้นในการตัดสินใจ โดยมดแต่ละตัวจะต้องทำการเดินทางครบรอบ



ภาพที่ 6 มดมาถึงที่เมือง r จะทำการเลือกเส้นทางไปยังเมือง s'

ส่วนในกรณีที่ปัญหา TSP อยู่บนระนาบเราจะมี $d_{rs} = \sqrt{(r_1 - s_1)^2 + (r_2 - s_2)^2}$ เมื่อ r และ s เป็นโหนดสองโหนดใดๆ ที่มีพิกัดที่ (r_x, r_y) และ (s_x, s_y) ตามลำดับ

นิยาม

อัลกอริทึม Ant System จะทำงานแบบวนซ้ำ โดยหากมดตัวที่ k ทำงานครบหนึ่งรอบจะกำหนดให้ค่าระยะทางของมดตัวที่ k ในการเดินทางครบรอบเป็น L_k โดยการทำงานครบหนึ่งรอบนี้เรียกว่า *tour*

การปรับค่าฟีโรโมนของมด

จากภาพที่ 5 แสดงฟังก์ชั่นย่อยในอัลกอริทึม Ant System ในบรรทัดที่ 8 (update pheromone) การปรับค่าของฟีโรโมนนั้นจะทำการปรับค่าเมื่อมดเดินทางครบหนึ่งรอบ โดยจะมีการปรับค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมต่างๆ ตามสมการด้านล่าง

$$\tau(r,s) \leftarrow (1-\rho)\cdot\tau(r,s) + \sum_{k=1}^{m} \Delta\tau_k(r,s)$$

โดยจะกำหนดให้ ρ เป็นอัตราการระเหยของค่าฟีโรโมน ซึ่งจะเป็นค่าคงที่อยู่ระหว่าง [0,1]

โดยที่ $\Delta\tau_k(r,s) = \begin{cases} 1/L_k & if\ (r,s) \in tour\ done\ by\ ant\ k \\ 0 & otherwise \end{cases}$

อย่างไรก็ตามอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดนั้นได้นำไปประยุกต์ใช้ในงานที่หลากหลายอาทิเช่นการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดหรือประยุกต์ใช้เป็น Routing protocol อาทิเช่น AntNet (Di Caro and Dorigo, 1997,1998) หรือนำไปใช้ในงานเครือข่ายไร้ข่าย (Shen, Huang, and Jaikaeo , 2005)

<u>อัลกอริทึม AntNet</u>

AntNet (M. Dorigo และ G. Di Caro 1998) เป็น Routing Protocol สำหรับ Packet Switched Networks ซึ่งอัลกอริทึมนั้นเป็นอัลกอริทึมสำหรับค้นหาเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายรวมน้อยสุดโดยใช้กลุ่มของตัวแทน (Multi-Agents) ที่เรียกว่ามด ซึ่งมดใน Antnet นี้มีการทำงานอยู่สองขั้นตอนขั้นตอนการดำเนินการของ AntNet มีขั้นตอนสองขั้นตอนคือ

1. Forward Ants เป็นการรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับสถานะหรือตำแหน่งภายในกราฟ
2. Backward Ants ใช้ข้อมูลที่รวบรวมมาและนำไปปรับแก้ลงในตารางเส้นทางข้อมูล (Routing tables)

ซึ่งในการทำงานของอัลกอริทึมนั้นมดจะทำการเคลื่อนที่ไปข้างหน้าจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดหมายปลายทางได้และทำการเดินย้อยกลับจากจุดหมายปลายทางสู่จุดเริ่มต้น (Forward and Backward) โดยในจังหวะที่มดเดินเคลื่อนที่ไปข้างหน้าเพื่อทำการสำรวจและเลือกเส้นทางนั้นมดจะทำการเก็บบันทึกข้อมูลเส้นทาง ,และโหนดต่างๆ เอาไว้ด้วย ซึ่งข้อมูลต่างๆ ที่มดแต่ละตัวทำการเก็บบันทึกนั้นจะถูกนำมาใช้ในระหว่างที่มดเดินกลับไปยังจุดเริ่มต้น (Backward) โดยข้อมูลจะถูกปรับปรุงลงสู่ตารางการจัดเส้นทาง (Routing Table) และตารางสถิติ (Statistical Local Traffic Table) เพื่อใช้เป็นข้อมูลในการตัดสินใจของมดตัวถัดไป

ไม่เพียงแต่ปัญหาบนเครือข่ายที่นำเอาอัลกอริทึมแบบอาณาจักรไปใช้ในการแก้ปัญหา แต่ยังมีการนำเอาอัลกอริทึมอาณาจักรมดไปประยุกต์ใช้มากมายเช่น Vehicle Routing (Rizzoli, Oliverio, Montemanni and Gambardella, 2004), Simulated annealing (Jerrum and Sorkin, 1993), Genetic Algorithm (Stützle and Dorigo, 1999) และปัญหาอื่นๆ อีกรวมถึงปรับอัลกอริทึมเองให้มีรูปแบบต่างๆ ให้สอดคล้องกับปัญหานั้นๆ เช่น MAX-MIN Ant System (Stützle and Hoos, 2000) โดยหากท่านผู้อ่านมีสนใจในอัลกอริทึมอาณาจักรมดสามารถศึกษาอ่านเพิ่มเติมได้ที่ หนังสือ *Ant Colony Optimization* ของ (Dorigo and Stützle ,2004) และ (Merkle and Middendorf, 2002)

อย่างไรก็ตามแนวคิดพื้นฐานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดนั้นไม่สามารถการันตีการที่จะค้นหาคำตอบที่ดีที่สุดได้ ซึ่งอาศัยแต่ผลการทดลองที่น่าพอใจโดยการปรับค่าปัจจัยต่างๆ ที่มีส่วนในการทำงานของอัลกอริทึมอาทิเช่นอัตราการระเหยของฟีโรโมน, จำนวนของมดที่ใช้ในการทำงาน หรืออื่นๆ ซึ่งปัจจัยต่างๆ เหล่านี้ล้วนแต่เป็นปัญหาว่าต้องใช้และกำหนดค่าต่างๆ เป็นเท่าไหร่เพื่อให้เหมาะสมที่สุด ถึงกระนั้นก็ตามความสำเร็จของอัลกอริทึมแบบนี้ก็ยังเป็นที่สงสัยว่าแก้ไขปัญหาได้อย่างไร โดยต่อมา Stützle และ Dorigo จึงได้ทำการพิสูจน์ว่าอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดนั้นสามารถค้นหาคำตอบที่ดีที่สุดได้

การพิสูจน์การลู่เข้าสู่คำตอบอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมด

การลู่เข้าสู่คำตอบอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมด (Stützle and Dorigo, 2002) ได้ทำการพิสูจน์การลู่เข้าลู่เข้าสู่คำตอบของอัลกอริทึมว่าให้ใช้นานเพียงพอเป็น Exponential time อัลกอริทึมสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาได้ โดยได้กำหนดรูปแบบของการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาไว้สองรูปแบบคือการ Convergence in Value คือ การลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งค่า หรือคือต้องการให้ลู่เข้าเพื่อได้ซึ่งผลลัพธ์อย่างน้อยหนึ่งครั้งและ Convergence in Solution คือ การลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ หรือคือต้องการให้ลู่เข้าเพื่อให้ได้ซึ่งผลลัพธ์ในการทำงานทุกๆ ครั้ง

การลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งค่า (Convergence in Value)

การทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดนั้นจะเป็นการทำงานแบบวนซ้ำให้มดในแต่ละโหนดอยู่ในกราฟและทำการค้นหาหรือแก้ปัญหาตามแต่ละกรณีซึ่งจะอาศัยการฝากฟีโรโมนไว้เพื่อเป็นตัวกลางในการติดต่อสื่อสารกันดังนั้นในแต่ละรอบของการทำงานมดจะมีการฝากฟีโรโมนไว้

นิยาม

S^* เป็นเซตของเส้นเชื่อมที่มีผลรวมของน้ำหนักน้อยที่สุดจาก s ไป u

ทฤษฎีบทย่อยที่ 1 (ทฤษฎีบทย่อยของ (Stützle and Dorigo , 2002)) สำหรับค่าของฟีโรโมนใดๆ บนเส้นเชื่อม $\forall (i,j) \in S^* \lim_{\theta \to \infty} \tau_{ij} = \tau_{\max}$

ทฤษฎีบทย่อยที่ 1 Stützle, T. และ Dorigo M. ได้ทำการพิสูจน์ไว้ว่าหากมีเวลามากเพียงพอในการทำงานแบบวนซ้ำของอัลกอริทึม (t เข้าใกล้สู่ ∞) อัตราค่าของฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมที่อยู่ในเซตของ S^* จะมีค่าฟีโรโมนเป็น $\tau_{\max}$

ทฤษฎีบทย่อยที่ 2 (ทฤษฎีบทย่อยของ (Stützle and Dorigo , 2002)) สำหรับค่าของฟีโรโมนใดๆ บนเส้นเชื่อม $\forall (i,j) \notin S^* \lim_{\theta \to \infty} \tau_{ij} = \tau_{\min}$

ทฤษฎีบทย่อยที่ 2 Stützle, T. และ Dorigo M. ได้ทำการพิสูจน์ไว้ว่าหากมีเวลามากเพียงพอในการทำงานแบบวนซ้ำของอัลกอริทึม (t เข้าใกล้สู่ ∞) อัตราค่าของฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมที่ไม่ได้อยู่ในเซตของ S^* จะมีค่าฟีโรโมนเป็น $\tau_{\min}$

นิยาม

$P^{*}(\theta)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จะพบคำตอบที่ดีที่สุดในการทำงานของอัลกอริทึมในรอบที่ θ ,โดย θ เป็นจำนวนรอบของอัลกอริทึมที่ใช้ในการทำงาน

ทฤษฎีบทที่ 3 (ทฤษฎีบทของ (Stützle and Dorigo , 2002)) อัลกอริทึมอาณาจักรมดมีความน่าจะเป็น $P^{*}(\theta)$ ในการที่จะพบคำตอบที่ดีที่สุดอย่างน้อยหนึ่งครั้ง โดยที่ $P^{*}(\theta) \geq 1-\varepsilon$,ที่ θ มีค่ามากมาก และ ε มีค่าน้อยมากแต่มากกว่าศูนย์ หรือเขียนได้อีกรูปหนึ่งคือ $\lim_{t\to\infty} P^{*}(\theta) = 1$

พิสูจน์

จากขอบเขตของฟีโรโมนที่ถูกกำหนดโดยอัลกอริทึมภายใต้ฟังก์ชั่นของการปรับค่าฟีโรโมนดังนั้น อัตราค่าฟีโรโมนจะอยู่ภายใต้ $\tau_{\min}$ และ $\tau_{\max}$ และสำหรับทุกๆ คำตอบของปัญหาที่เป็นไปได้ที่มีค่าน้อยที่สุดนั้น จะขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นของ $P_{\min}$ โดยที่

$$P_{\min} \geq \hat{P}_{\min} = \frac{\tau_{\min}}{(Nc-1)\tau_{\max} + \tau_{\min}}$$

โดยที่ Nc เป็นจำนวนทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ดังนั้นเราพิจารณาที่ $n < \infty$ และจำนวนครั้งของการวนรอบ t ครั้ง ซึ่งค่า t เข้าใกล้ค่าอินฟินิตี้ ($t \to \infty$) ดังนั้นจะได้ว่าสัดส่วนของ $\tau_{\min}$ และ $\tau_{\max}$ จะมีความแตกต่างกันเข้าใกล้ 1 จาก $|\tau_{\max} - \tau_{\min}| \approx 1$ ซึ่งจะทำให้ $P_{\min}$ มีค่าน้อยมาก

$$\therefore P^{*}(\theta) = 1-(1-\hat{P})^{t} = \lim_{t\to\infty} P^{*}(\theta) = 1$$

<u>**การลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ (Convergence in Solution)**</u>

Stützle และ Dorigo (Dorigo and Stützle, 2004)ได้นิยามการลู่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาโดยอัลกอริทึมแบบอาณามดไว้อีกรูปแบบหนึ่ง โดยที่ต้องการให้มดทุกๆ ตัวให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ดีที่สุดในทุกๆ รอบของการทำงานด้วยความน่าจะเป็นของการที่จะพบเส้นทางที่ดีที่สุดนั้นขึ้นกับสัดส่วนของค่า $\tau_{\min}$ และ $\tau_{\max}$

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนดค่าฟีโรโมนที่ต่ำที่สุดจากอัลกอริทึมเป็น $\tau_{\min}(\theta) = \dfrac{d}{\ln(\theta+1)}$ โดย d เป็นค่าคงที่และ $P^*(\theta)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จะพบคำตอบที่ดีที่สุดอย่างน้อยหนึ่งครั้งในการทำงานรอบที่ θ ดังนั้น จะได้ว่า $\lim_{t\to\infty} P^*(\theta) = 1$

พิสูจน์

โดยหลังจากที่พบคำตอบที่ดีที่สุดแล้วนั้นเส้นเชื่อมหรือทางที่เป็นไปได้อื่นๆ ที่ไม่ได้อยู่ในเซ็ตของคำตอบที่ดีที่สุดจะได้ไม่ได้รับการปรับค่าฟีโรโมนให้มีค่าเพิ่มขึ้น และทางตรงข้ามค่าฟีโรโมนหล่าวนั้นจะถูกปรับค่าให้ลงน้อยลง

จาก $\lim_{\theta\to\infty} \dfrac{d}{\ln(\theta+1)} = 0$, ดังนั้นเมื่อการวนรอบของ t เข้าใกล้ ∞ จะทำให้ $P_{\min}$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ได้ ฉะนั้นจะทำให้เส้นทางอื่นๆ ที่ไม่ได้อยู่ในเส้นทางที่ดีที่สุดมีความน่าจะเป็นในการที่จะถูกเลือกเส้นทางเป็นศูนย์

จากผลงานวิจัยของ Stützle และ Dorigo ได้ทำการพิสูจน์ว่าหากมีเวลามากพออัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดจะสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุดได้ แต่ก็ไม่สามารถบอกได้ว่าต้องใช้เวลาในการทำงานเป็นเท่าใด ซึ่งต่อมาในงานวิจัยของ Neumann และ Witt ได้ทำการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรโดยใช้มดเพียงหนึ่งตัวในการทำงานโดยเรียกอัลกอริทึมนี้ว่า 1-ANT อัลกอริทึม ซึ่งเป็นการวิเคราะห์เวลาในการทำงานบนปัญหาพิเศษที่เรียกว่าปัญหา *One-Max*

<u>การวิเคราะห์การทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดในปัญหา *One-Max* ที่ใช้มดตัวเดียว</u>

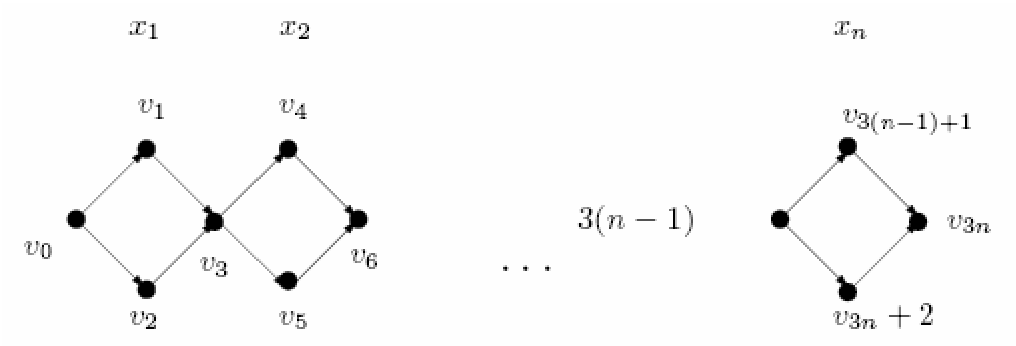
นิยาม

ปัญหา *One-Max* (หรือเรียกอีกอย่างว่า ปัญหา Bit Counting) มี เซตของตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ที่แต่ละตัวมีค่า 0 หรือ 1 จุดประสงค์คือ ต้องการหาค่าของตัวแปรดังกล่าวที่ทำให้ผลรวมมีค่ามากที่สุด

ปัญหาดังกล่าวสามารถเขียนในรูปของการโปรแกรมเชิงเลขได้ดังนี้

$$\text{Maximize } \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\text{Subject to: } x_i \in \{0,1\} \quad \textit{for all } 1 \le i \le n.$$

Neumann และ Witt ได้แปลงปัญหา *One-Max* ไปเป็นปัญหาบนกราฟที่มีทิศทาง โดยให้กราฟ $G=(V,E)$ มีจำหนดโหนดเป็น $3n+1$ โหนด และมีจำนวนเส้นเชื่อม $4n$ เส้น และกำหนดจุดเริ่มต้นในกราฟเป็น $s=v_0$ โดยมีค่าตั้งแต่ $v_0,v_1,v_2,...,v_{3n}$ โดยมีโครงสร้างของกราฟเป็นดังภาพที่ 7 และทำการกำหนดน้ำหนักในเส้นเชื่อมโดยพิจารณาค่าที่ x_i, $1\le i\le n$, โดยจะทำการกำหนดค่า x_i เป็น 1 ถ้ามีการเลือกเส้นเชื่อมที่ $(v_{3(i-1)},v_{3(i-1)+1})$ และทำการกำหนดค่า x_i เป็น 0 ที่โหนดในกรณีอื่นๆ โดยโครงสร้างของกราฟ *One-Max* แสดงได้ดังรูป



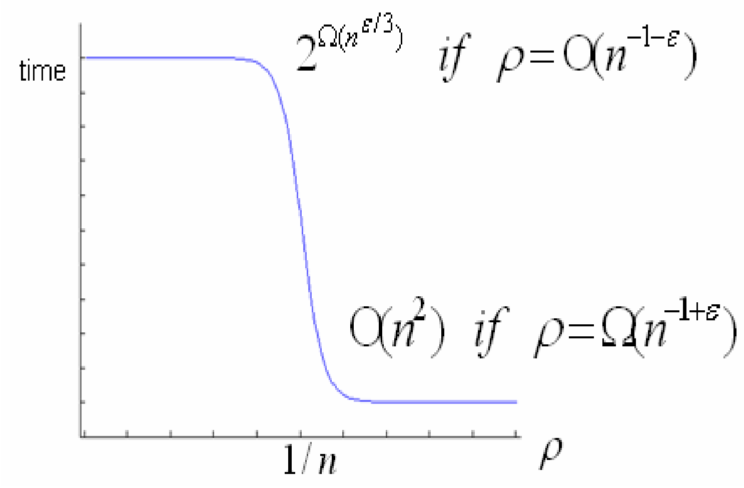
ภาพที่ 7 แสดงโครงสร้างของกราฟ *One-Max* ในนิยามของ Neumann และ Witt

นิยาม

ปัญหา *One-Max* ในรูปแบบของกราฟนั้นหากเราทำการเลือกเส้นเชื่อมที่ $(v_{3(i-1)},v_{3(i-1)+1})$ แล้วนั้นโดยต่อไปทำการเลือกที่เส้นเชื่อม $(v_{3(i-1)+1},v_{3i})$ จะทำการเรียกเส้นเชื่อมนี้ว่า $1-edges$ และกรณีอื่นๆ ให้เป็น $0-edges$ โดย$1\le i\le n$

<u>ผลงานวิจัยของ Neumann และ Witt</u>

Neumann และ Witt นั้นได้ทำการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* ในรูปแบบของกราฟไว้ (ใช้มดตัวเดียวในการทำงานในอัลกอริทึม)โดยเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมนั้นจะขึ้นอยู่กับอัตราการระเหยของฟีโรโมนซึ่งเรียกคุณสมบัตินี้ว่า Phase Transition บนอัตราการระเหย คุณสมบัติของโดย Phase Transition นี้เป็นคุณสมบัติที่น่าสนใจ ยกตัวอย่างเช่น คุณสมบัติของน้ำในการเปลี่ยนสถานะกลายเป็นไอที่อุณหภูมิ 100 องศา แต่หากน้ำยังคงมีอุณหภูมิที่ 99 องศา ก็ยังคงมีสถานะเป็นของเหลวอยู่ เป็นต้น โดยแสดงคุณสมบัติของเฟสทรานซิสชั่นในภาพที่ 8



ภาพที่ 8 แสดงคุณสมบัติ Phase Transition บนอัตราการระเหย

ซึ่งหากเรากำหนดค่าอัตราการระเหย ρ น้อยกว่า $1/n$ เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมจะเป็นฟังก์ชั่นเอ็กโปแนนเชียลกับขนาดของปัญหา หรือคือจำนวนของโหนดในกราฟนั้นเอง แต่หากกำหนดค่าอัตราการระเหย ρ มากกว่า $1/n$ แล้วจะได้ว่าเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมจะเป็นฟังก์ชั่นพหุนาม

<u>การหาเส้นทางที่สั้นที่สุด</u>

ปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดเป็นปัญหาพื้นฐานด้านเครือข่ายโดยในทางปฏิบัติมักจะพบปัญหานี้ได้ทั่วไปและมักจะเป็นปัญหาย่อยของปัญหาด้านเครือข่ายปัญหาอื่น โดยรูปแบบของปัญหาในกลุ่มนี้ที่สำคัญคือ ปัญหาวิถีสั้นสุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยว โดยในวิทยานิพนธ์เล่มนี้เราจะใช้ปัญหานี้มาเป็นตัวทดสอบและวิเคราะห์เวลาในการทำงานอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมด

นิยาม

กำหนดให้ $G = (V, E)$ คือกราฟระบุทิศทาง โดยที่ V คือเซตของจุดยอด และ E คือเซตของเส้นเชื่อม แต่ละเส้นเชื่อมมีความยาว (ที่ไม่เป็นจำนวนลบ) กำกับ ให้ $v1$ คือจุดยอดจุดหนึ่งใน V เรียกว่าจุดยอดแหล่งต้นทาง ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยว คือ ต้องการหาวิถีสั้นสุดจาก $v1$ ไปยังจุดยอดอื่นๆ ใน G

<u>อัลกอริทึมของ Dijkstra</u>

อัลกอริทึมของไดค์สตรา (Dijkstra, 1959) เป็นอัลกอริทึมที่ทำการค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (Shortest Path) ที่จะใช้เดินทางจากจุดเริ่มต้นจุดหนึ่ง ไปยังจุดสิ้นสุดใดๆ บนกราฟ โดยผ่านเส้นทางที่เชื่อมตรง (edge) ระหว่างหน่วยหรือจุดต่างๆ (Node) อัลกอริทึมนี้ มีชื่อที่นิยมเรียกอีกชื่อหนึ่งคือ อัลกอริทึมค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (shortest path algorithm) โดยอัลกอริทึมต้นฉบับของ Dijkstra นั้นจะใช้เวลาในการทำงานเป็น $O(n^2)$ เมื่อ

n เป็นจำนวนจุดยอดในกราฟ อย่างไรก็ตามหากเราใช้งานอัลกอริทึมของ Dijkstra โดยใช้โครงสร้างข้อมูลแบบฟิโบนัคชีฮีป (Fibonacci heap) มาช่วยในการทำงาน อัลกอริทึมจะใช้เวลาในการทำงานเป็น $\mathrm{O}(m + n\log n)$ ซึ่งเป็นเวลาที่ดีที่สุดในการทำงานบนกราฟที่มีความยาวเส้นเชื่อมเป็นจำนวนจริงไม่ลบ

<u>อัลกอริทึมของ Bellman-Ford-Moore</u>

อัลกอริทึมของ Bellman-Ford-Moore (Bellman 1958, Ford 1962 , Moore 1959) Bellman-Ford-Moore อัลกอริทึมนั้นสามารถมีเวลาในการทำงานเป็น $\mathrm{O}(nm)$ เมื่อ n คือจำนวนจุดยอดและ m คือจำนวนเส้นเชื่อม โดยอัลกอริทึมนี้สามารถใช้งานได้ในกรณีที่กราฟมีเส้นเชื่อมระยะเป็นลบได้ (แต่ไม่มีวงรอบระยะทางเป็นลบ) โดย Bellman-Ford-Moore อัลกอริทึมนี้เป็นอัลกอริทึมที่ดีที่สุดเท่าที่รู้จักที่ทำงานกับกราฟที่มีความยาวของเส้นเชื่อมเป็นจำนวนจริง

ผลการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดที่มีมดหลายตัวบนปัญหาหลักๆ สองปัญหาคือ การทำงานของอัลกอรทึมบนปัญหา *One-Max* และบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ พร้อมทั้งผลการทดลองซึ่งแสดงคุณสมบัติต่างๆ ของอัลกอริทึมอาณาจักรมด

<u>การวิเคราะห์เวลาการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดที่มีมดหลายตัวบนปัญหา *One-Max*</u>

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ในปัญหา *One-Max* โดยจะเริ่มด้วยการนิยามปัญหาบนกราฟอีกลักษณะที่แตกต่างจากของ Neumann และ Witt จากนั้นจะเสนออัลกอริทึมที่ใช้มดหลายตัว และพิสูจน์เวลาการทำงานของอัลกอริทึม

<u>ปัญหา *One-Max* ในมัลติกราฟ</u>

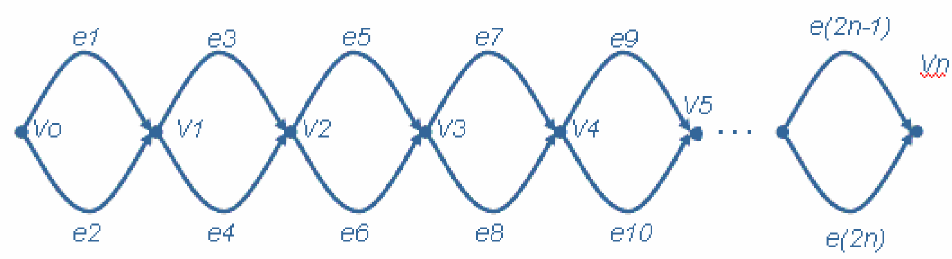
ในการที่จะวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดนั้นต้องเจอกับปัญหาจากความหลากหลายของพารามิเตอร์รวมถึงความซับซ้อนในตัวปัญหาเองอาทิเช่นขนาดของกราฟที่มีขนาดใหญ่ อัตราการระเหยที่มีผลต่อเวลาในการทำงานให้ช้าหรือเร็วขึ้น การเลือกเส้นทางของมดด้วยความน่าจะเป็นตามสัดส่วนของฟีโรโมน เป็นต้น สิ่งต่างๆ เหล่านี้ล้วนเป็นความยากลำบากในการที่จะวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมด ดังนั้นเพื่อเป็นการง่ายต่อการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึม ในขั้นแรกจึงจะทำการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมบนปัญหาที่อยู่บนกราฟอย่างง่ายที่เรียกว่าปัญหา *One-Max* โดยทั้งนี้การวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวยังสามารถนำไปใช้บนปัญหาที่มีการใช้งานจริงๆ เช่นปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดได้

เพื่อความสะดวกในงานวิจัยนี้ได้ทำการแปลงปัญหาในของ *One-Max* ให้มีความซับซ้อนน้องลงเพื่อให้สามารถวิเคราะห์และทำความเข้าใจในการทำงานและคุณสมบัติต่างๆ ของอัลกอริทึมได้ง่ายเข้า โดยแปลงกราฟที่นิยามโดย Neumann และ Witt ให้อยู่ในรูปแบบของมัลติกราฟในปัญหา *One-Max*

นิยาม

มัลติกราฟ $G=(V,E)$ สำหรับปัญหา *One-Max* ที่มีตัวแปร n ตัว ประกอบด้วยโหนด $n+1$ โหนดและเส้นเชื่อม $2n$ เส้น โดยจะกำหนดให้แต่ละโหนดมีชื่อตั้งแต่ $v_0, v_1, v_2, ..., v_n$ ซึ่งจะกำหนดจุดเริ่มต้นในกราฟเป็น v_0, และกำหนดเส้นเชื่อมต่างๆ มีชื่อเป็น $e_1, e_2, e_3, ..., e_{2n}$, ซึ่งภายในมัลติกราฟนั้นมีการต่อเชื่อมระหว่างโหนดและเส้นเชื่อมโดยที่โหนดที่ $i-1$ จะต่อเชื่อมกับโหนด i เท่านั้นโดยจะต่อเชื่อมกันผ่านทางเส้นเชื่อมที่ e_{2i-1} และ e_{2i} ,และเราจะทำการพิจารณาการกำหนดค่าที่ x_i, $1 \le i \le n$, โดยจะทำการ

กำหนดค่า x_i ให้มีค่าเป็น 1 ถ้ามีการเลือกเส้นเชื่อมที่ e_{2i-1} และทำการกำหนดค่า x_i ให้มีค่าเป็น 0 ที่โหนดในกรณีอื่นๆ ซึ่งเราต้องการหาเส้นทางจาก v_0 ไปยัง v_n ที่มีน้ำหนักรวมของเส้นเชื่อมที่มากที่สุด โดยโครงสร้างของมัลติกราฟ *One-Max* แสดงได้ดังภาพที่ 9



ภาพที่ 9 แสดงมัลติกราฟในรูปแบบของ *One-Max*

สังเกตว่าปัญหาในกราฟดังกล่าวเทียบเท่ากับปัญหา *One-Max* กล่าวคือ เราสามารถแปลงเส้นทางใดๆ จาก v_0 ไป v_n ให้เป็นการกำหนดค่าของตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$ ในปัญหา *One-Max* ได้ โดยให้ตัวแปร $x_i = 1$ ถ้าเส้นทางดังกล่าวใช้เส้นเชื่อม ในการเดินระหว่างโหนด v_{i-1} กับโหนด v_i และให้ $x_i = 0$ ถ้าใช้เส้นเชื่อม e_{2i} สำหรับ $1 \le i \le n$

<u>อัลกอริทึมอาณาจักรมดแบบมีมดหลายตัวสำหรับปัญหา *One-Max*</u>

อัลกอริทึมที่พิจารณาจะใช้มด n ตัว โดยมดแต่ละตัวจะเริ่มเดินจากโหนดที่แตกต่างกันไปยังโหนด v_n กล่าวคือมดตัวที่ i จะเริ่มที่โหนด v_i ซึ่งมดจะเลือกทางเดินโดยใช้ค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อม อย่างไรก็ตามในการปรับค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมใดๆ เราจะให้มดที่เริ่มต้นที่โหนดต้นทางของเส้นเชื่อมนั้นปรับค่าฟีโรโมนเท่านั้น นั้นคือบางตัวที่ i จะปรับค่าฟีโรโมนของเส้นเชื่อม e_{2i-1} และ e_{2i}

อัลกอริทึมมีการทำงานแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนกำหนดค่าเริ่มสถานะต้น(Initial State) และส่วนของการทำงาน (Process State) โดยแสดงดังภาพที่ 10

PROCEDURE Multiple-Ant-Algorithm-One-Max
//Initial State
1. Initial Pheromone Value = 1/2 for all $e \in E$
2. $\tau_{\max} = (n-1)/n$
3. $\tau_{\min} = 1/n$
4. **for each** node i, Set Ant i to node i
5.
6. **while** forever **do**
7.   **for** $i = 1$ **to** $n-1$ **do**
8.   Ant i random walk to $n-1$
9.   CalculateDistance
10.   Update Pheromone
11.
12. Get Solution by Ant $n = 1$

ภาพที่ 10 แสดงโค้ดเทียมของอัลกอริทึมอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max*

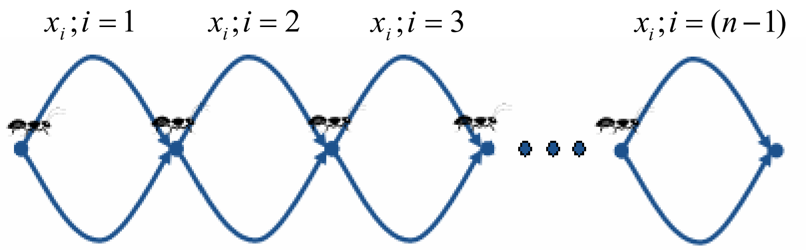
ซึ่งในส่วนการกำหนดค่าเริ่มต้น เราทำการกำหนดค่าต่างๆ ดังนี้

1. ค่าเริ่มต้นของฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมใดๆ กำหนดให้เป็น 1/2 ในทุกเส้นเชื่อมในกราฟ
2. กำหนดค่ามากสุดของฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมใดๆ มีค่าเป็น $\tau_{\max} = (n-1)/n$
3. กำหนดค่าน้อยสุดของฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมใดๆ มีค่าเป็น $\tau_{\min} = 1/n$
4. กำหนดให้ในแต่ละโหนดในกราฟมีมดอยู่โหนดละ 1 ตัว ยกเว้นโหนดที่ $n-1$ (โหนดสุดท้าย)

จากอัลกอริทึมทำกำหนดค่าเริ่มต้นของในบรรทัดที่ 1-3 เป็นการกำหนดค่าให้กับตัวแปรต่างๆ โดยในบรรทัดที่ 2-3 นั้นจะเป็นการกำหนดค่าฟีโรโมนที่เป็นไปได้มากที่สุดและน้อยที่สุดไว้ในอัลกอริทึม โดยมีรูปแบบคล้าย MAX-MIN Ant System (Stützle and Hoos, 2000) ส่วนในบรรทัด 4 นั้นจะเป็นการกำหนดให้มดแต่ละตัวอยู่ในแต่ละโหนดในกราฟ ดังแสดงในภาพที่ 11 ปัญหา *One-Max* นั้นต้องการหาค่าผลรวมของ x_i ที่มีค่ามากที่สุด เมื่อแต่ละ i มีค่าเป็น 1 (ซึ่งเป็นคำตอบของ *One-Max* ที่มีค่ามากที่สุด) ,โดย $1 \le i \le n$, แต่อย่างไรก็ตามมดแต่ละตัวจะมีผลรวมของ x_i ที่ไม่เท่ากันเพราะระยะทางจากจุดเริ่มต้นของแต่ละตัวไปยังปลายทางไม่เท่ากัน โดยมดแต่ละตัวนั้นอยู่บนกราฟ ในรูปแบบของ *One-Max* และไม่มีวงรอบ มดนั้นจึงย้อนกลับทางเดิมไม่ได้ นั้นคือมดที่มีตำแหน่งเกิดใน $i < i'$ จะมีค่าผลรวมที่มากที่สุดของ $x_i < x_{i'}$ เสมอ

จากรูปมดตัวที่ $i = 1$ อยู่ในโหนด $n = 0$, มดตัวที่ $i = 2$ อยู่ในโหนดที่ $n = 1, \ldots$, มดตัวที่ $i = n$ อยู่ในโหนดที่ $n-1$ ดังนั้น ผลรวมที่มากที่สุดของมดตัวที่ i จะได้เป็น

$$(n-i) = \sum_{i=j}^{n} x_i \quad ; j \text{ is start node of } ant_i \; ; 1 \le j \le n-1$$



ภาพที่ 11 กำหนดตำแหน่งเริ่มต้นของมดแต่ละตัวในมัลติกราฟบนปัญหา *One-Max*

นั้นคือมดแต่ละตัวมีปัญหาย่อยๆ ของแต่ละปัญหาของตัวมันเอง จุดประสงค์คือมดตัวที่ i ต้องการค่าผลรวมของ x_i เป็น $n-i$

จากอัลกอริทึมอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* โดยแสดงในภาพที่ 10 โดยอัลกอริทึมนั้นจะมีฟังก์ชั่นย่อยอีกสามตัวสำหรับการทำงานในแต่ละรอบการทำงานของของอัลกอริทึม ดังนี้

- ฟังก์ชั่นย่อยการเลือกเส้นทางของมด (ภาพที่ 10 บรรทัดที่ 8)
- ฟังก์ชั่นย่อยคำนวนระยะทางของมดแต่ละตัว (ภาพที่ 10 บรรทัดที่ 9)
- ฟังก์ชั่นย่อยการปรับค่าหรืออัพเดทฟีโรโมน (ภาพที่ 10 บรรทัดที่ 10)

ฟังก์ชั่นย่อยการเลือกเส้นทางของมด (ภาพที่ 10 บรรทัดที่ 8) คือขั้นตอนการเลือกเส้นทางของมดตัวที่ i ในแต่ละเส้นเชื่อมโดยมดแต่ละตัวนั้นจะมีการเลือกเส้นเชื่อมที่ติดกันด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{\tau(2i-1)}{\tau(2i-1)+\tau(2i)}$ โดยเรากำหนดให้ z เป็นตัวแปรสม่ำเสมอแบบสุ่มบน [0,1] ดังนั้นมดตัวที่ i จะทำการเลือกเส้นทางบนเส้นเชื่อมตามการเลือกเส้นทางที่เป็นไปได้ในกราฟดังภาพที่ 12

PROCEDURE RandomWalk

1. $Z = Rand[0,1]$
2. $if\ \ (Z \le \frac{\tau(2i-1)}{\tau(2i-1)+\tau(2i)})\ then$
3. $\quad Select\ node\ e(2i-1)$
4. $else$
5. $\quad Select\ node\ e(2i)$

ภาพที่ 12 ฟังก์ชั่นของการเลือกเส้นทางขอมดในแต่เส้นทาง

โดยหากมดตัวที่ i ยังไม่ถึงจุดหมายที่โหนด n ดังนั้นมดตัวที่ i จะทำการเลือกเส้นทางต่อไปและหากถึงโหนด n จะมีการคำนวนค่าเพื่อหาผลรวมของค่า x_i และทำการวนซ้ำมดตัวที่ $i+1$ ต่อไป ซึ่งหากมดตัวสุดท้ายเดินทางถึงโหนด n เราจะเรียกว่า 1 รอบการทำงาน โดยการหาผลรวมของค่า x_i นี้ทำโดยอัลกอริทึมในภาพที่ 10 ในบรรทัดที่ 9 ดังนี้

PROCEDURE CalculateDistance

$tmp = 0$

$for\ \ j = i\ to\ n\ do$

$\quad tmp = tmp + x_i[j]$

ภาพที่ 13 ฟังก์ชั่นคำนวนค่าระยะทาง

ฟังก์ชั่นย่อยการปรับค่าหรืออัพเดทฟีโรโมน (ภาพที่ 10 บรรทัดที่ 10) ส่วนการปรับค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมใดๆ นั้นจะมีขั้นตอนการปรับค่าโดยพิจารณาผลรวมของ x_i หากผลรวมของค่า x_i ของมดตัวที่ i ในรอบปัจจุบันมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่า x_i ของมดตัวที่ i ที่ดีที่สุด โดยค่าที่ปรับนั้นจะปรับเฉพาะเส้นเชื่อมที่โหนด i เท่านั้น พิจารณาจากฟังก์ชั่นในภาพที่ 14

จากการทำงานของอัลกอริทึม จะทำงานแบบวนรอบทำซ้ำไป โดยมดแต่ละตัวในอัลกอริทึมจะมีการคำนวนค่าผลรวมของ x_i หรือในกรณีประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาค้นหาเส้นทางที่สั้นที่สุดก็จะเป็นการคำนวนระยะทาง อีกทั้งมีการปรับค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมที่มีการเดินทางผ่านไปตามเงื่อนไขของอัลกอริทึม อัตราค่าฟีโรโมนนี้เองจะเป็นปัจจัยในการเลือกเส้นทางของมด

PROCEDURE PHEROMONE-UPDATE-FOR-ANT-i:

if $f_i \geq \hat{f}_i$ **then**

    if $e_{2i-1} \in s_i$ **then**

        $a \leftarrow 2i-1,\ \ b \leftarrow 2i$

    else

        $a \leftarrow 2i,\ \ b \leftarrow 2i-1$

    endif

    // a is an index of the edge in s_i

    // b is an index of the edge not in s_i

    $\tau_a \leftarrow \min\{\tau_{\max}, (1-\rho)\tau_a + \rho\}$

    $\tau_b \leftarrow \max\{\tau_{\min}, (1-\rho)\tau_b\}$

endif

ภาพที่ 14 ฟังก์ชั่นของการปรับค่าฟีโรโมนตามเงื่อนไข

<u>**พิสูจน์เวลาการทำงานของอัลกอริทึม**</u>

ในส่วนนี้จะแสดงการพิสูจน์เวลาการทำงาน โดยขั้นแรกจะนิยามคำศัพท์ที่ใช้ในการพิสูจน์ และจะพิสูจน์ทฤษฎีบทย่อย และทฤษฎีบทหลักตามลำดับ ในการวิเคราะห์เวลาการทำงานนี้ จะวิเคราะห์เป็นจำนวนรอบการทำงาน ที่มีนิยามดังนี้

นิยาม

อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* จะกำหนดการทำงานเป็น*หนึ่งรอบการทำงาน*เมื่อมดทุกตัวในแต่ละโหนดในกราฟสามารถเดินทางถึงโหนดสุดท้ายหรือสิ้นสุดการทำงาน

แนวทางในการพิสูจน์เวลาการทำงานของอัลกอริทึมว่าใช้เวลา $\mathrm{O}\left(\frac{n^2}{\rho}\log n\right)$ จะทำโดยพิจารณาว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใดค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมจึงจะมีค่าที่ดีที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ นั่นคือมีค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อม e_{2i-1} มีค่าเป็น $\tau_{\max}$ และบนเส้นเชื่อม e_{2i} มีค่าเป็น $\tau_{\min}$ สำหรับทุก ๆค่า i เราจะเรียกสถานะของค่าฟีโรโมนบนคู่ของเส้นเชื่อมนั้นๆ ว่าเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง ซึ่งเขียนนิยามอย่างเป็นทางการได้ว่า

นิยาม

ถ้าค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมที่ e_{2i-1} มีค่าเป็น $\tau_{\max}$ และบนเส้นเชื่อมที่ e_{2i} มีค่าเป็น $\tau_{\min}$ แล้ว จะเรียกสถานะของค่าฟีโรโมนบนคู่ของเส้นเชื่อมนั้นๆ ว่ามีเป็น*การอิ่มตัวอย่างถูกต้อง* (Correctly Saturated) สำหรับค่า $1 \le i \le n$

สังเกตว่าถ้าทุกๆ เส้นเชื่อมในกราฟมีค่าสถานะของฟีโรโมนเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องแล้วนั้น เราจะได้ว่า มดใดๆ ในกราฟจะสามารถหาผลรวมที่มากที่สุดของ x_i ได้ด้วยความน่าจะเป็นที่สูง หรือได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} x_i = |n|$ เมื่อ $i=1$ และมดใดๆ จะสามารถแก้ปัญหาย่อยของแต่ละตัวมันเองได้ซึ่งจะทำให้ $(n-i) = \sum_{i=j}^{n} x_i$ เป็นจริง เมื่อ j เป็นจุดเริ่มต้นของมดแต่ละตัวในกราฟ ,$1 \le j \le n-1$

ทฤษฎีบทที่ 5 เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* จะใช้เวลาในการทำงานเป็น $\mathrm{O}\left(\frac{n^2}{\rho}\log n\right)$

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมในทฤษฎีบทที่ 5 นั้นจำเป็นต้องมีทฤษฎีบทย่อยประกอบทฤษฎีบท 3 ทฤษฎีบทย่อยอันได้แก่ทฤษฎีบทย่อยที่ 6,7 และ 8 และในส่วนของทฤษฎีบทที่ 5 นั้นจะทำการพิสูจน์และในส่วนถัดไป

ทฤษฎีบทย่อยที่ 6 สำหรับทุกๆ i และ t, $\tau_{\min} \le \tau_i(t) \le \tau_{\max}$

บทพิสูจน์

สำหรับค่าของทุกๆ $\tau_i(t)$ บนเส้นเชื่อมค่าของฟีโรโมนต่ำสุดจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $\tau_{\min}$ และค่าฟีโนโมนมากสุดจะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\tau_{\max}$ จากอัลกอริทึมอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* (ภาพที่ 10) เมื่อพิจารณาโค้ดในบรรทัดที่ 7 และ 8 ค่าของฟีโรโมนใดๆ ที่ถูกปรับค่าจะไม่เกินค่าของ $\tau_{\min}$ และ $\tau_{\max}$

จากสมการของการปรับค่าเราทำการแทนค่าเพื่อหาค่า τ ที่ t ใดๆ

$$
\begin{aligned}
\tau_0 &= \tau_0 \\
\tau_1 &= (1-\rho)\tau_0 + \rho \\
\tau_2 &= (1-\rho)\tau_1 + \rho \\
&= (1-\rho)((1-\rho)\tau_0 + \rho) + \rho \\
&= (1-\rho)^2\tau_0 + \rho(1-\rho) + \rho \\
\tau_3 &= (1-\rho)\tau_2 + \rho \\
&= (1-\rho)((1-\rho)^2\tau_0 + \rho(1-\rho) + \rho) + \rho \\
&= (1-\rho)^3\tau_0 + \rho(1-\rho)^2 + \rho(1-\rho) + \rho \\
&\vdots \\
\tau_n &= (1-\rho)^n\tau_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\rho(1-\rho)^i
\end{aligned}
$$

จาก Geometric series: $\sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c} \quad ,|c|<1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\tau_n = \frac{\rho}{1-(1-\rho)} = 1$$

จากอัลกอริทึม (ภาพที่ 10) ค่าฟีโรโมนที่อยู่ใน feasible solution จะถูกปรับค่าโดยสมการจากอัลกอริทึมในบรรทัดที่ 7 นี้ $\min\{\tau_{\max}, (1-\rho)\tau_a + \rho\}$ และจาก $\tau_{\max}$ กำหนดค่าเป็น $\frac{n-1}{n}$ ดังนั้น

$$\min\{1, \frac{n-1}{n}\} = \frac{n-1}{n} \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\tau_n \le \tau_{\max}$$

และทำการพิจารณากรณีของ $\tau_{\min}$

$$
\begin{aligned}
\tau_0 &= \tau_0 \\
\tau_1 &= (1-\rho)\tau_0 \\
\tau_2 &= (1-\rho)\tau_1 \\
&= (1-\rho)(1-\rho)\tau_0 \\
&= (1-\rho)^2\tau_0 \\
\tau_3 &= (1-\rho)\tau_2 \\
&= (1-\rho)(1-\rho)^2\tau_0 \\
&= (1-\rho)^3\tau_0 \\
&\vdots \\
\tau_n &= (1-\rho)^n\tau_0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\tau_n = (1-\rho)^n\tau_0 = 0$$

ขอบเขตของค่าที่เป็นไปได้จะถูกจำกัดโดยอัลกอริทึมในภาพที่ 10 ในบรรทัดที่ 8 โดยที่กำหนดค่า $\tau_{\min} = 1/n$

$$\max\{0, \frac{1}{n}\} = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \tau_{\min} \le \lim_{n\to\infty}\tau_n$$

ซึ่งจะได้ว่าความจริงตามทฤษฎีบทย่อยที่ 6 $\tau_{\min} \le \tau_i(t) \le \tau_{\max}$

ทฤษฎีบทย่อยที่ 7 จำนวนครั้งของการปรับค่าจากค่าของฟีโรโมนบนคู่ของเส้นเชื่อมใดๆ ให้ค่าของฟีโรโมนบนคู่ของเส้นเชื่อมนั้นมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง จำนวนครั้งของการปรับค่าต้องทำทั้งสิ้น $T = \mathrm{O}(\frac{1}{\rho}\log n)$ ครั้ง

บทพิสูจน์

ในทฤษฎีบทย่อยที่ 7 นี้เราจะพิจารณาจำนวนครั้งในการปรับค่าฟีโรโมน จากค่าของฟีโรโมนใดๆ บนเส้นเชื่อมให้ค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมนั้นๆ มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

ก่อนอื่นพิจารณาจากอัลกอริทึม อัลกอริทึมจะมีการปรับค่าหากค่าผลรวมของ x_i ในรอบปัจจุบันมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับผลรวมของ x_i ที่ดีที่สุด และจากทฤษฎีบทย่อยที่ 6 ,ที่ว่าค่าของฟีโรโมนน้อยที่สุดบนเส้นเชื่อมใดๆ มีค่าเป็น $\tau_{\min}$ และค่าฟีโรโมนมากสุดบนเส้นเชื่อมใดๆ มีค่าเป็น $\tau_{\max}$, โดยสมมติให้ค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อม $e_{2n-1} = \tau_{\min}$ ซึ่งเป็นเส้นเชื่อมที่ถูกต้อง (x_i มีค่าเป็น 1) และ $e_{2n} = \tau_{\max}$ เป็นเส้นเชื่อมที่ผิด (x_i เป็น 0) ดังนั้นพิจารณาจำนวนครั้งของการปรับค่าบนเส้นเชื่อม e_{2n} เข้าสู่ค่า $\tau_{\min}$

จากอัลกอริทึมในฟังก์ชั่นการปรับค่าฟีโรโมน จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\tau_{ij} = \max\{\tau_{\min}, ((1-\rho)\tau_{\min})^{T}\}$$

ดังนั้น จำนวนครั้งในการปรับค่าจาก $\tau_{\max}$ ไปสู่ $\tau_{\min}$ เขียนได้เป็นสมการด้านล่าง

$$((1-\rho)\tau_{\max})^{T} = \tau_{\min}$$

กำหนดให้จำนวนครั้งของการปรับค่าเป็น T เป็น $\frac{1}{\rho}\ln\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$

แทนค่า T ในสมการ $((1-\rho)\tau_{\max})^{T} = \tau_{\min}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&= \left(\left((1-\rho)\tau_{\max}\right)^{1/\rho}\right)^{\ln(\tau_{\max}/\tau_{\min})} \\
&\le \tau_{\max}\left(\left(e^{-\rho}\right)^{1/\rho}\right)^{\ln(\tau_{\max}/\tau_{\min})} \\
&= \tau_{\max}e^{-\ln(\tau_{\max}/\tau_{\min})} = \tau_{\min}
\end{aligned}$$

ดังนั้นจำนวนครั้งของการปรับค่าจากของคู่ของเส้นเชื่อมโดยให้ค่าของฟีโรโมนนั้นมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง จำเป็นต้องใช้จำนวนครั้งในการปรับค่าทั้งหมด $\frac{1}{\rho}\cdot\ln\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$ ครั้ง ซึ่งจะได้เป็น $T = \mathrm{O}(\frac{1}{\rho}\log n)$

ทฤษฎีบทย่อยที่ 8 ความน่าจะเป็นของมดตัวที่ i ในการที่จะเลือกเส้นทางที่มีค่า x_i เท่ากับ 1 มีค่าเป็น $\Omega(1/n)$

บทพิสูจน์

จากทฤษฎีบทย่อยที่ 6 ค่าฟีโรโมนที่มากที่สุดและน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ในเส้นเชื่อมใดๆ มีค่าอยู่ระหว่าง $\tau_{\min} \le \tau_i(t) \le \tau_{\max}$ ดังนั้นจากฟังก์ชั่นของการเลือกเส้นทางเราจะได้ว่าอัตราส่วนของฟีโรโมนได้เป็น

$$\frac{\tau_j}{\tau_{j'} + \tau_j} \ge \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max} + \tau_{\max}}$$

จากอัลกอริทึมกำหนดค่า $\tau_{\max}$ เป็น $(n-1)/n$ และค่า $\tau_{\min}$ เป็น $1/n$ และทำการแทนค่า $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ ลงในสมการด้านบนจะได้เป็น

$$= \frac{1/n}{2(n-1)/n} = \frac{1}{2(n-1)} = \Omega(1/n)$$

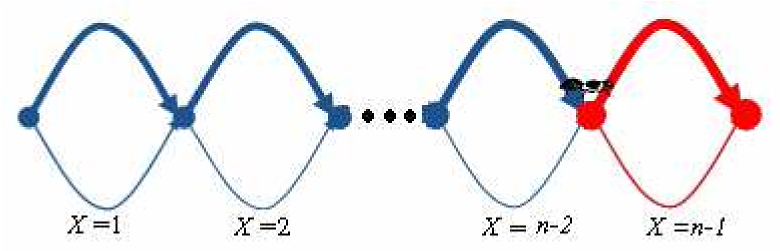
ดังนั้นความน่าจะเป็นในการที่มดตัวที่ i จะทำการเลือกเส้นเชื่อมที่ x_i มีค่าเป็น 1 มีค่าเท่ากับ $\Omega(1/n)$ นั้นคือ มดต้องทำการเลือกเส้นทางโดยเฉลี่ยอย่างมาก $O(n)$ ครั้งในการเจอเส้นเชื่อมที่มีค่า x_i เป็น 1

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* (ซึ่งเวลาในการทำงานเป็น $O\left(\frac{n^2}{\rho}\log n\right)$) จะกระทำโดยวิเคราะห์หาเวลาที่มดแต่ละตัวใช้ในการปรับค่าให้ฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมที่ติดกับโหนดเริ่มต้นของมันเองนั้นมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

จากอัลกอริทึมเราได้กำหนดให้มดทุกตัวอยู่ในทุกโหนดในกราฟ (ยกเว้นโหนดสุดท้าย) ในการพิจารณา จะไล่จากมดที่เริ่มที่โหนดสุดท้ายมายังโหนดแรกสุดคือจากโหนดที่ $n-1$ จนถึงโหนดที่ 1 เพื่อความเข้าใจ จะเริ่มพิจารณาจากมดตัวที่ $n-1$ ก่อนที่จะพิจารณาในกรณีทั่วไปต่อ

วิเคราะห์เวลาในการทำงานในปัญหาย่อยของมดในโหนดที่ $n-1$



ภาพที่ 15 พิจารณามดอยู่ที่โหนด $n-1$

โดยในภาพที่ 15 เราพิจารณาการทำงานของมดในโหนดที่ $n-1$ จากทฤษฎีบทย่อยที่ 2 จำนวนครั้งที่ต้องทำการปรับจากเพื่อให้ค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมคู่ที่ $n-1$ มีค่าสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องนั้น ต้องทำการปรับค่าทั้งหมดจำนวน $O(\frac{1}{\rho}\log n)$ ครั้ง

และเมื่อใดถึงจะมีการปรับค่า เราพิจารณาจากอัลอกริทึมการปรับค่าโดยเรียกฟังก์ชั่น *update-pheromone* ในภาพที่ 14 นั้นจะทำการปรับค่าเมื่อผลรวมของค่า x_i ของมดตัวที่ i ในรอบปัจจุบันมากกว่าหรือเท่ากับผลรวมของค่า x_i ของมดตัวที่ i ที่ดีที่สุดที่เคยมีมา มดตัวที่ $n-1$ จะมีค่าที่ดีที่สุดที่เป็นไปได้นั้น ผลรวมของ x_i นั้นจะมีค่าเป็น 1 (เนื่องจากเป็นโหนดสุดท้าย) ดังนั้นทุกๆ ครั้งที่มีการเลือกเส้นทางด้านบนของโหนด $n-1$ นั้นจะมีการปรับค่าฟีโรโมนด้วยทุกครั้งไป

จากทฤษฎีบทย่อยที่ 3 ด้วยความน่าจะเป็นน้อยที่สุดในการเลือกเส้นเชื่อมด้านบนเป็น $\Omega(1/n)$ พิจารณาจำนวนครั้งที่มดทำงานเป็นตัวแปรสุ่มแบบเรขาคณิต เราจะได้ว่าตัวแปรสุ่มนี้มีค่าเฉลี่ยไม่เกิน $\frac{1}{\Omega(1/n)} = \mathrm{O}(n)$ นั่นคือโดยเฉลี่ยมดต้องทำงานอย่างมาก $\mathrm{O}(n)$ ครั้งในการที่จะเลือกเส้นเชื่อมด้านบน 1 ครั้ง

เราต้องการให้เหตุการณ์ดังกล่าวเกิดขึ้น $\mathrm{O}(\frac{1}{\rho}\log n)$ ครั้ง เพื่อที่จะให้เส้นเชื่อมคู่ที่ $n-1$ ถูกปรับค่าจนกระทั่งมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง ดังนั้นจะใช้เวลาในการทำงานโดยเฉลี่ยเป็น $\mathrm{O}(n \cdot \frac{1}{\rho}\log n)$ รอบ

นั่นหมายความว่า มดในโหนดที่ $n-1$ สามารถแก้ปัญหาย่อยของตัวมัน เมื่อเวลาผ่านไปโดยเฉลี่ย $\mathrm{O}(\frac{n}{\rho}\log n)$ รอบ

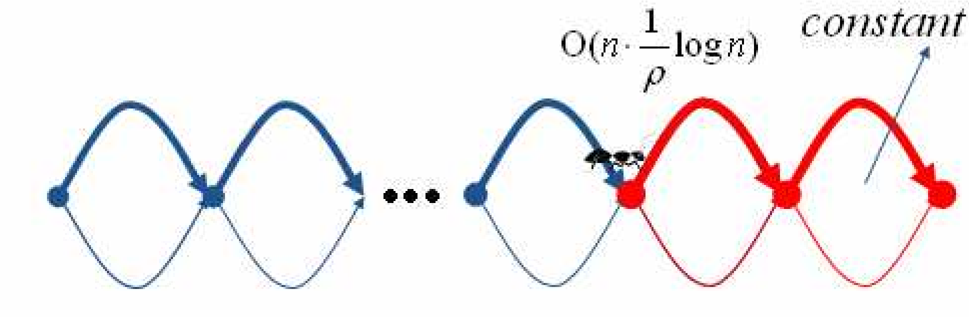
วิเคราะห์เวลาในการทำงานในปัญหาย่อยของมดในโหนดที่ $n-2$

ต่อมาเราทำการพิจารณาการทำงานของมดในคู่ของเส้นเชื่อมที่ $n-2$ ภายหลังจากที่มดตัวที่ $n-1$ ได้แก้ปัญหาย่อยของมันแล้ว นั่นคือ ได้ทำการปรับค่าฟีโรโมนจนกระทั่งคู่ของเส้นเชื่อมในโหนดที่ $n-1$ มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

และเมื่อใดถึงจะมีการปรับค่าบนเส้นเชื่อมคู่ที่ $n-2$ นั้นก็คือมดตัวที่ $n-2$ ได้ค่าผลรวมค่า x_{n-2} มากกว่าหรือเท่ากับผลรวมของ x_{n-2} ที่ดีที่สุด ซึ่งค่าผลรวมที่ดีที่สุดนั้นประกอบไปด้วยสองส่วนที่ต้องพิจารณา นั้นก็คือ ต้องทำการเลือกเส้นเชื่อมโหนดที่ $n-2$ เพื่อทำให้ค่าในโหนด x_{n-2} มีค่าเป็นหนึ่ง นั่นคือเลือกเส้นเชื่อมด้านบนในโหนด $n-2$ และที่โหนด $n-1$ เลือกเส้นเชื่อมด้านบนด้วยซึ่งจะให้ผลรวมนั้นมีค่าเป็น 2 เราพิจารณาในส่วนที่แรกก่อน ความน่าจะเป็นที่มดตัวที่ $n-2$ จะทำการเลือกเส้นเชื่อมด้านบนที่โหนด $n-1$ นั้นจะมีความน่าจะเป็นที่เป็นค่าคงที่ เนื่องจากค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมคู่ที่ $n-1$ มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง (ซึ่งความน่าจะเป็นของมดตัวในเส้นเชื่อมที่ $n-2$ จะทำการเลือกเส้นเชื่อมด้านบนที่ $n-1$ จะได้เป็น

$$\left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\max} + \tau_{\min}}\right) = \left(\frac{(n-1)/n}{(n-1)/n + 1/n}\right) = (1 - 1/n)$$

โดยในอัลกอริทึมเราพิจารณาที่ n มีค่ามาก ฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่มดตัวที่ทำงานในเส้นเชื่อมที่ $n-2$ จะเลือกเส้นเชื่อมด้านบนที่ $n-1$ จะมีค่าเป็นค่าคงที่ หากค่าฟีโรโมนบนคู่ของเส้นเชื่อม $n-1$ มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง



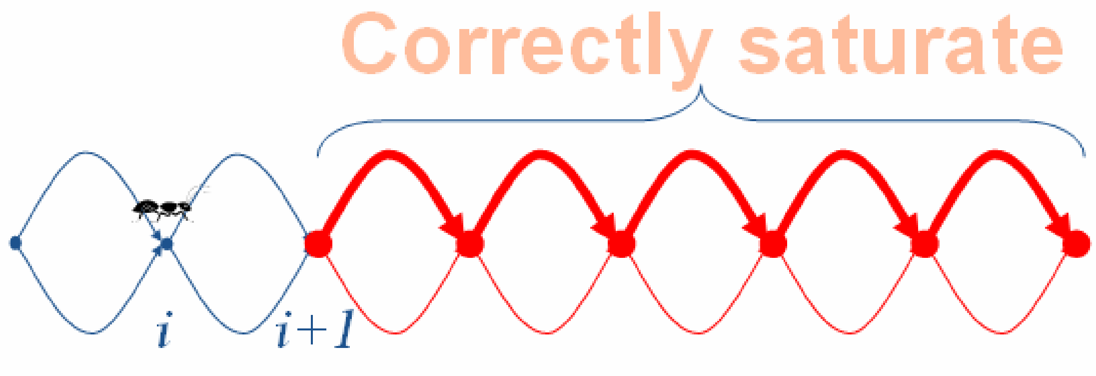
ภาพที่ 16 แสดงคู่ของเส้นเชื่อมคู่ที่ $n-1$ ที่กลายสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

ต่อมาทำการพิจารณาการทำงานของมดตัวที่ $n-2$ ในส่วนที่ 2 ซึ่งการที่มดตัวที่ $n-2$ จะเลือกเส้นทางด้านบนนั้นมีด้วยความน่าจะเป็น $\Omega(1/n)$ ดังนั้นมดต้องทำงานอย่างน้อย n ครั้งในการที่จะเลือกเส้นเชื่อมด้านบนหนึ่งครั้ง เพราะฉะนั้นการที่เส้นเชื่อมคู่ที่ $n-2$ จะโดนปรับค่าจนกระทั่งมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องนั้นใช้เวลาในการทำงานเป็น $O(n \cdot \frac{1}{\rho} \log n)$ โดยที่ความน่าจะเป็นที่มดตัวที่ $n-2$ จะเลือกเส้นเชื่อมที่ $n-1$ ในเส้นทางด้านบนมีค่าเป็นค่าคงที่

จะได้ว่า ปัญหาย่อยของมดในโหนดที่ $n-2$ นั้นใช้เวลาในการทำงานโดยเฉลี่ย $O(n \cdot \frac{1}{\rho} \log n)$ รอบหลังจากที่มดตัวที่ $n-1$ ได้แก้ปัญหาแล้ว ซึ่งใช้จำนวนรอบโดยเฉลี่ย $O(n \cdot \frac{1}{\rho} \log n)$

วิเคราะห์เวลาในการทำงานในปัญหาย่อยของมดในโหนดที่ i

พิจารณาการทำงานของมดในโหนดที่ i การที่มดในโหนดที่ i จะสามารถแก้ปัญหาย่อยของตัวมันเองได้นั้น ขึ้นกับอัตราค่าฟีโรโมนในโหนดก่อนหน้า ในกรณีนี้คือโหนดที่ $i+1$ (โดยการที่ค่าของฟีโรโมนในโหนด $i+1$ นั้นจะมีค่าสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องนั้น จำเป็นต้องขึ้นกับค่าสถานะของโหนดก่อนหน้านั้นด้วย)



ภาพที่ 17 แสดงคู่ของเส้นเชื่อมของมดในโหนดที่ i

เราทำการพิจารณาการทำงานของมดในคู่ของเส้นเชื่อมในโหนดที่ i ภายหลังจากที่มดตัวที่อยู่ที่โหนด $i+1$ ได้แก้ปัญหาย่อยของมันแล้ว นั่นคือ ได้ทำการปรับค่าฟีโรโมนจนกระทั่งคู่ของเส้นเชื่อมในโหนดที่ i จนกระทั้งถึงโหนดที่ $n-1$ มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

และเมื่อใดถึงจะมีการปรับค่าบนเส้นเชื่อมคู่ในโหนด i นั้นก็คือมดตัวที่ i ได้ค่าผลรวมค่า x_{n-i} มากกว่าหรือเท่ากับผลรวมของ x_{n-i} ที่ดีที่สุด ซึ่งค่าผลรวมที่ดีที่สุดนั้นประกอบไปด้วยสองส่วนที่ต้องพิจารณา นั้นก็คือ ต้องทำการเลือกเส้นเชื่อมโหนดที่ i เพื่อทำให้ค่าในโหนด x_{n-i} มีค่าเป็นหนึ่ง นั่นก็คือเลือกเส้นเชื่อมด้านบนในโหนด i และที่โหนด $i+1$ จนกระทั้งถึง $n-1$ เลือกเส้นเชื่อมด้านบนด้วยทั้งหมดซึ่งจะให้ผลรวมนั้นมีค่าเป็น $n-i$ เราพิจารณาในส่วนที่แรกก่อน ความน่าจะเป็นที่มดตัวที่ i จะทำการเลือกเส้นเชื่อมด้านบนที่โหนด $i+1$ จนกระทั้งถึงโหนดที่ $n-1$ นั้นจะมีความน่าจะเป็นดังนี้

$$\left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\max}+\tau_{\min}}\right)^{i-1} = \left(\frac{(n-1)/n}{(n-1)/n+1/n}\right)^{i-1} = (1-1/n)^{i-1}$$
$$\geq (1-1/n)^{n-1} \geq e^{-1} = \Omega(1)$$

ดังนั้นจากความน่าจะเป็นที่ได้ จะมีค่าเป็นค่าคงที่ หากค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมต่างๆ เหล่านั้นมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

และต่อมาทำการพิจารณาการทำงานของมดตัวที่ i ในส่วนที่ 2 ซึ่งการที่มดตัวที่ i จะเลือกเส้นทางด้านบนนั้นมีด้วยความน่าจะเป็น $\Omega(1/n)$ ดังนั้นมดต้องทำงานโดยเฉลี่ย $\mathrm{O}(n)$ ครั้งในการที่จะเลือกเส้นเชื่อมด้านบนหนึ่งครั้ง เพราะฉะนั้นการที่เส้นเชื่อมที่ i จะโดนปรับค่าจนกระทั้งมีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องนั้นใช้เวลาในการทำงานเป็น $\mathrm{O}(n\cdot\frac{1}{\rho}\log n)$ โดยที่ความน่าจะเป็นที่มดตัวที่ i จะเลือกเส้นเชื่อมที่ $i+1$ จนกระทั้งถึงโหนดที่ $n-1$ ในเส้นทางด้านบนมีค่าเป็นค่าคงที่

จะได้ว่า ปัญหาย่อยของมดในโหนดที่ i นั้นจะใช้เวลาในการทำงานโดยเฉลี่ย $\mathrm{O}(n\cdot\frac{1}{\rho}\log n)$ รอบหลังจากที่มดตัวที่ $i+1$ ได้แก้ปัญหาแล้ว

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานทั้งหมด

อัลกอริทึมจะแก้ปัญหาได้เมื่อฟีโรโมนบนทุกเส้นเชื่อมมีสถานะอิ่มตัวอย่างถูกต้องแล้ว ให้ตัวแปรสุ่ม T_i เท่ากับจำนวนรอบที่มดตัวที่ i ใช้ในการปรับค่าให้ฟีโรโมนในโหนดที่ i ให้มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง หลังจากที่มดตัวที่ $i+1$ ได้แก้ปัญหาย่อยของมันเรียบร้อยแล้ว จากนิยามนี้เราจะได้ว่าเวลาทั้งหมดใน

การปรับค่า T นั้นมีค่าเป็นผลรวมของเวลาในการแก้ปัญหาย่อยของมดแต่ละตัวในกราฟ หรือเท่ากับผลรวมของ $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$

จากการวิเคราะห์ข้างต้นเราจะได้ว่า $\mathbf{E}[T_i] = \mathrm{O}(\frac{n}{\rho}\log n)$ นั่นคือ

$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[T_1 + T_2 + \ldots + T_n]$ (ใช้คุณสมบัติ Linearity of Expectation (Feller, 1971))

$$= \mathbf{E}[T_1] + \mathbf{E}[T_2] + \ldots + \mathbf{E}[T_n]$$

$$\therefore \; = n \cdot \mathrm{O}(\frac{n}{\rho}\log n) = \mathrm{O}(\frac{n^2}{\rho}\log n)$$

การหาคำตอบหลังจากที่ฟีโรโมนในทุก ๆ เส้นเชื่อมมีการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง

ถ้าค่าของฟีโรโมนในของเส้นเชื่อมในกราฟมีค่าของฟีโรโมนเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องแล้วนั้น ความน่าจะเป็นในการที่มดตัวที่ 1 จะเลือกเส้นทางด้านบนทั้งหมด นั่นคือให้ผลลัพธ์เป็น $\sum_{i=1}^{n} x_i = |n|$ คือ

$$\left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\max} + \tau_{\min}}\right)^{n-1} = \left(\frac{(n-1)/n}{(n-1)/n + 1/n}\right)^{n-1} = (1 - 1/n)^{n-1}$$

$$\geq (1 - 1/n)^{n-1} \geq e^{-1} = \Omega(1)$$

นั่นคือ ด้วยความน่าจะเป็นเป็นค่าคงที่ มดตัวที่ 1 จะเดินได้คำตอบเป็นค่าที่ดีที่สุด

การวิเคราะห์เวลาการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดสำหรับปัญหาวิถีสั้นสุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยวบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ

ปัญหาปัญหาวิถีสั้นสุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยวบนกราฟแบบไม่มีวงรอบจะมีลักษณะคล้ายกับปัญหา *One-Max* โดยเราจะใช้การใช้มด n ตัวในการทำงานและมดแต่ละตัวจะมีการเลือกเส้นทางในกราฟอย่างอิสระต่อกันแต่การเลือกเส้นเชื่อมนั้นจะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของฟีโรโมนจากโหนด v ไปยังโหนด t โดยหากมดเดินทางถึงโหนด t จะมีการปรับค่าฟีโรโมนตามเงื่อนไข กล่าวคือหากมดตัวที่ i ในการทำงานรอบปัจจุบันได้ระยะทางที่สั้นกว่าหรือเท่ากับระยะทางที่ดีที่สุดแล้วนั้นถึงจะมีการปรับค่าฟีโรโมนตามเงื่อนไข โดยแต่มีปัจจัยที่แตกต่างกัน 2 ส่วนคือ

1. การกำหนดค่าเริ่มต้นของฟีโรโมนในแต่ละเส้นเชื่อมในกราฟโดยจะกำหนดให้แต่ละเส้นเชื่อมมีค่าเริ่มต้นเป็น $\frac{1}{\deg_o(v)}$ และ Δ เป็น $\max_v \deg_o(V)$

2. การกำหนดค่า $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ โดยจะทำการกำหนดค่า $\tau_{\max}$ เป็น $\frac{n^2-1}{n^2}$, และ $\tau_{\min}$ เป็น $\frac{1}{n^2}$ ซึ่งจะเป็นตัวกำหนดความน่าจะเป็นในการเลือกเส้นทางที่ถูกต้องของอัลกอริทึม โดยที่ยังคงรักษาสัดส่วนของ $(\tau_{\max}/\tau_{\min})$ ให้เวลาในการทำงานนั้นยังอยู่ในขอบเขตของฟังก์ชั่นพหุนามได้

พิสูจน์เวลาการทำงานของอัลกอริทึม

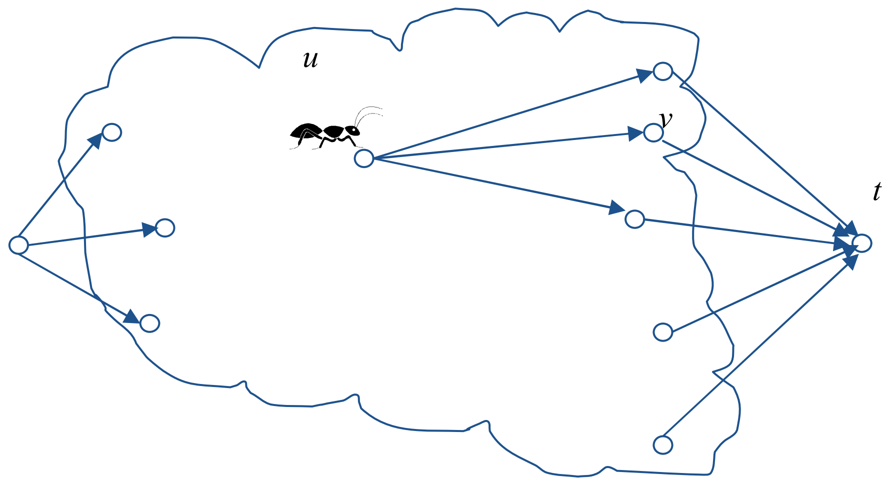
โดยการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมนั้นก็จะคล้ายกับปัญหา *One-Max* (*One-Max* ก็จัดเป็นกราฟแบบไม่มีวงรอบ) โดยมีแนวทางในการพิสูจน์ที่คล้ายคลึงกัน ซึ่งประกอบด้วยทฤษฏีบทย่อย 3 ทฤษฏีบทย่อยคือ ทฤษฏีบทย่อยที่ 6,7 และ 9 ซึ่งในส่วนทฤษฏีบทที่ 6 และ 7 ได้แสดงในส่วนก่อนหน้านี้แล้ว และนำมาประยุกต์ใช้ประกอบในการพิสูจน์ทฤษฏีบทที่ 10

ทฤษฏีบทย่อยที่ 9 ที่เส้นเชื่อม $e=(u,v)$ มดใดๆ จะทำการเลือกโหนด u กับความน่าจะเป็นที่น้อยที่สุดเป็น $\Omega\left(\frac{1}{n^2\cdot\deg_o(u)}\right)$

บทพิสูจน์

จากอัลกอริทึมกำหนดค่า $\tau_{\max}$ เป็น $\frac{n^2-1}{n^2}$ และค่า $\tau_{\min}$ เป็น $\frac{1}{n^2}$ โดยการพิสูจน์จะคล้ายกับทฤษฏีบทย่อยที่ 8

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}\cdot \deg_o(u)} = \frac{1/n^2}{(n^2-1)/n^2\cdot \deg_o(u)}$$
$$= \Omega\left(\frac{1}{n^2\cdot \deg_o(u)}\right)$$



ภาพที่ 18 แสดงทางเลือกของมดที่โหนด u ไปโหนดใดๆ

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่น้อยสุดที่มดในโหนด u จะทำการเลือกเดินทางที่มีระยะทางสั้นสุดจะได้เป็น $\Omega\left(\frac{1}{n^2\cdot \deg_o(u)}\right)$ โดยที่ $\deg_o(u)$ คือจำนวนของเส้นเชื่อมที่ออกจากโหนด u

จากทฤษฎีบทย่อยที่ 7 เรายังคงได้จำนวนครั้งของการปรับค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมใดๆ ตามในทฤษฎีบทย่อยที่ 7 โดยปัจจัยในการทำงานของอัลกอริทึมที่เปลี่ยนแปลงไปมี $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ ฉะนั้นแทนค่าลงในสมการ T โดยได้ดังนี้

$$T = \frac{1}{\rho}\ln\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}$$
$$= \frac{1}{\rho}\ln\frac{(n^2-1)/n^2}{1/n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho}\log n\right)$$

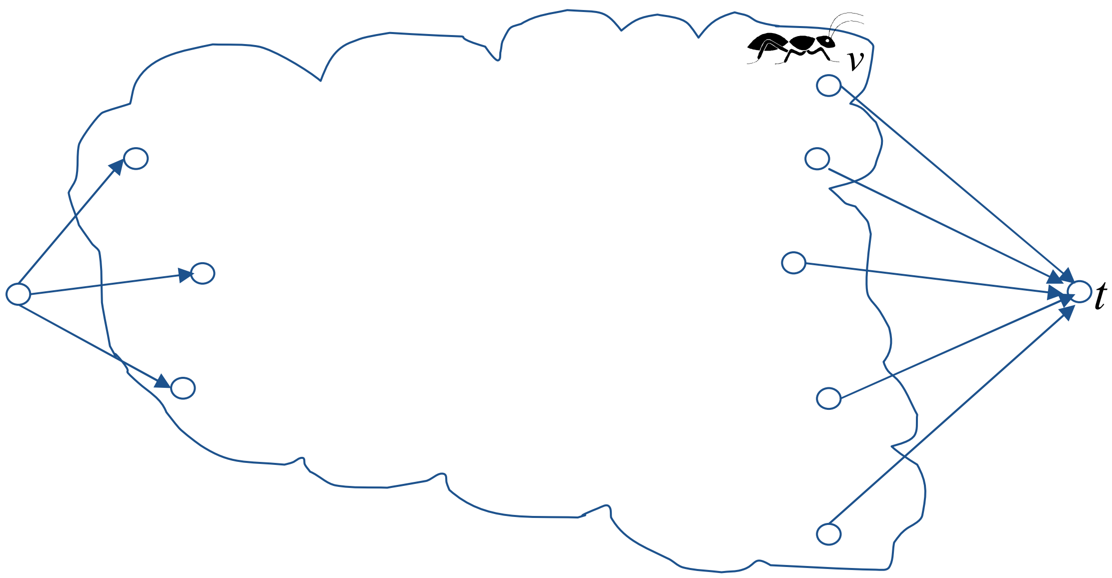
เพราะฉะนั้นจำนวนครั้งในการปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมยังสอดคล้องกับทฤษฎีบทย่อยที่ 7

ทฤษฎีบทที่ 10 เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดบนปัญหาวิถีสั้นสุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยวบนกราฟแบบไม่มีวงรอบจะใช้เวลาในการทำงานเป็น $O\left(\frac{n^2 m}{\rho}\log n\right)$

บทพิสูจน์

การวิเคราะห์เวลาในการทำงานบนปัญหาวิถีสั้นสุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยวบนกราฟแบบไม่มีวงรอบนั้นจะมีการวิเคราะห์คล้ายกับปัญหา *One-Max* ในส่วนที่กล่าวถึงก่อนหน้านี้ ซึ่งจุดประสงค์คือต้องการให้อัตราค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทางในเซ็ตคำตอบของปัญหามีค่าเป็น $\tau_{\min}$ โดยจำนวนครั้งของการปรับค่าฟีโรโมนเพื่อให้ได้ค่าเป็น $\tau_{\min}$ นั้นจะใช้ทฤษฎีบทย่อยที่ 7 ในการอ้างอิงได้และจำนวนครั้งของการปรับยังคงได้เป็น $O\left(\frac{1}{\rho}\log n\right)$ จาก

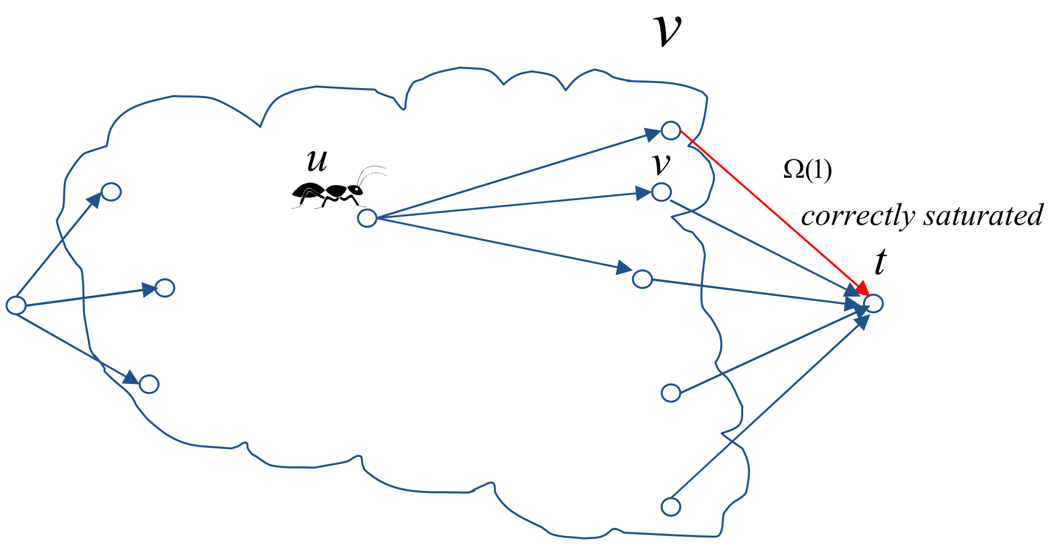
$$\frac{1}{\rho}\ln\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = \frac{1}{\rho}\ln\frac{(n^2-1)/n^2}{1/n^2} = O\left(\frac{1}{\rho}\log n\right)$$



ภาพที่ 19 กราฟ G เป็น DAG ในพิจารณามดในโหนดระดับ v

เราพิจารณาจากกราฟสมมติให้มดอยู่ในตำแหน่งเป็นดังภาพที่ 19 เราจะกำหนดให้โหนดในระดับถัดจากโหนด t ที่ติดกันหนึ่งระดับโดยกำหนดให้เป็นโหนด v จากการที่จะทำการปรับค่าฟีโรโมน จำนวนครั้งของการปรับค่าเป็น $O\left(\frac{1}{\rho}\log n\right)$ และจากทฤษฎีบทย่อยที่ 9 ความน่าจะเป็นในการที่พบเส้นทางที่สั้นที่สุดอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

เท่ากับ $\Omega\left(\frac{1}{n^2 \cdot \deg_o(u)}\right)$ ดังนั้นในโหนดที่มีความลึกในระดับ v จะใช้เวลาในการทำงานทั้งหมดเป็น $O\left(\frac{1}{\rho} n^2 \cdot \deg_o(v) \log n\right)$ ซึ่งจะให้ความน่าจะเป็นของการที่มดจะเลือกเส้นทางจากโหนดในระดับ v ไปยัง t มีความน่าจะเป็นเท่ากับค่าคงที่หรือเท่ากับ $\Omega(1)$



ภาพที่ 20 กราฟ G เป็น DAG ในพิจารณามดในโหนดระดับ u

ต่อมาเรากำหนดให้โหนดที่ถัดมาจากโหนดในระดับ v หนึ่งระดับเป็นโหนดในระดับ u ซึ่งพิจารณาโหนด u ในภาพที่ 20 การที่มดในโหนด u จะทำการปรับค่าฟีโรโมนตามเงื่อนไขได้นั้นกล่าวคือต้องพบระยะทางที่สั้นที่สุดหรือเท่ากับระยะทางที่มดในรอบก่อนหน้านั้นๆ ค้นหาพบจาก u ไปยัง t โดยหากต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก u ไปยัง t ซึ่งต้องผ่านโหนด v ดังนั้นเส้นทางจากโหนด v ไป t ที่สั้นที่สุดย่อมเป็นส่วนประกอบของเส้นทางจาก u ไปยัง t โดยความน่าจะเป็นของการที่จะพบคำตอบอย่างน้อยหนึ่งครั้งจาก u ไปยัง t มีค่าเท่ากับ $\Omega\left(\frac{1}{n^2 \cdot \deg_o(u)}\right) \cdot \Omega(1)$ ซึ่งจะเท่ากับ $\Omega\left(\frac{1}{n^2 \cdot \deg_o(u)}\right)$ ดังนั้นการที่มดจะปรับค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมให้มีค่าเป็น $\tau_{\max}$ ได้นั้นจะต้องใช้เวลาในการทำงานเท่ากับ $O\left(\frac{1}{\rho} n^2 \cdot \deg_o(u) \log n\right)$

การวิเคราะห์เวลาโดยรวมทั้งหมด

จากการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของโหนดในแต่ละระดับความลึกในกราฟ ซึ่งพิจารณาจากโหนดในระดับที่ติดกับโหนดสุดท้ายไล่มาจนถึงโหนดเริ่มต้น โดยเราจะกำหนดให้ตัวแปรสุ่ม Ti เท่ากับจำนวนรอบที่มด

ตัวที่ i ใช้ในการปรับค่าให้ฟีโรโมนในโหนดที่ i ให้มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้อง มีค่าเป็น Expected Number ของ *Ti* มีค่าเป็น

$$\mathbf{E}[T_i] = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho} n^2 \deg_o(i) \log n\right)$$

ซึ่งการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมก็จะทำการพิจารณาในโหนดถัดๆ ไปจนกระทั้งถึงโหนดที่เป็นต้นทางโดยทางเลือกทั้งหมด มีได้มากที่สุดคือ m ทางเลือก หรือ m เป็นผลรวมของทุกๆ เส้นทาง หรือก็คือ ผลรวมของค่า Expected Number ของแต่ละโหนด (ใช้คุณสมบัติ Linearity of Expectation (Feller, 1971)) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho} n^2 \deg_o(V) \log n\right) &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho} n^2 \log n\right)\left(\sum_{v\in V} \deg_o(V)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{\rho} n^2 m \log n\right)\end{aligned}$$

ดังนั้นเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดสำหรับปัญหาวิถีสั้นสุดแบบแหล่งต้นทางเดี่ยวบนกราฟแบบไม่มีวงรอบจะใช้เวลาในการทำงานได้เป็น $\mathrm{O}(\frac{1}{\rho} n^2 m \log n)$

การลู่เข้าแบบกรีดี้ Greedy Convergence

ในหัวข้อนี้เราจะเสนอรูปแบบใหม่ของการลู่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาโดยให้นิยามว่า การลู่เข้าแบบกรีดี้ (Greedy Convergence) จากทฤษฎีบทย่อยที่ 6 จะได้ว่าหลังจากอัลกอริทึมใช้เวลาไปเป็นฟังก์ชั่นพหุนามของจำนวนรอบการทำงานทุกๆ เส้นทางที่เป็นไปได้ที่ไม่ได้อยู่ในเซ็ตของคำตอบที่ดีที่สุดนั้นจะมีค่าฟีโรโมนลู่เข้าสู่ $\tau_{\min}$ และในทางตรงข้ามค่าฟีโรโมนในเส้นเชื่อมที่อยู่ในเซ็ตของคำตอบที่ดีที่สุดนั้นจะมีค่าฟีโรโมนลู่เข้าสู่ $\tau_{\max}$ ดังนั้นมดแต่ละตัวในโหนดใดๆ จะสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุดได้โดยทำการเลือกเส้นเชื่อมที่มีค่าฟีโรโมนมากที่สุดในเส้นทางที่เป็นไปได้เป็นเงื่อนไขแทน ซึ่งจะทำให้การเลือกเส้นทางนั้นไม่ขึ้นกับค่าความน่าจะเป็นเหมือนตามการทำงานตามปกติของอัลกอริทึม ซึ่งเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมไม่ว่าจะเป็นของ *One-Max* หรือการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดสำหรับกราฟแบบไม่มีวงรอบนั้นเวลาในการทำงานก็จะอยู่ในขอบเขตเวลาของ Greedy Convergence นั้นเอง

การลู่เข้าแบบกรีดี้มีความแตกต่างกับการลู่เข้าแบบการลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งค่าและการลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งวิธี ตรงที่การลู่เข้าแบบกรีดี้นั้นจะมีประสิทธิภาพดีกว่าการลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งอาจจะมีกรณีที่ต้องการคำตอบที่ดีที่สุดมากกว่าหนึ่งครั้ง หรือถ้าหากต้องการคำตอบที่ดีที่สุดทุกๆ ครั้งในการทำงาน การที่เราจะใช้การลู่เข้าแบบให้ได้มาซึ่งวิธีนั้นบางครั้งอาจจะเป็นไปได้ยากเมื่อ n มีขนาดใหญ่มากๆ (ซึ่งพิจารณาจากสัดส่วนของ $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ รวมถึงค่าคงที่ d ในทฤษฎีบทย่อยที่ 4) ดังนั้นการลู่เข้าแบบกรีดี้จะสามารถช่วยและแก้ปัญหาตรงส่วนนี้ได้

ผลการทดลอง

ในงานวิจัยนี้เราได้ทำการทดลองอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดในสองปัญหาคือปัญหา *One-Max* และปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบ ซึ่งในการทดลองแต่ละปัญหานั้นจะแบ่งเป็นสามส่วน คือ ส่วนที่หนึ่งการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมในปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหลายตัวในการทำงาน ส่วนที่สองคือทำการลองเพื่อศึกษาประสิทธิภาพในการทำงานของอัลกอริทึมในปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหนึ่งตัวในการทำงาน และในส่วนที่สามจะทำการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในปัญหากราฟแบบไม่มีวงรอบ โดยในแต่ละการทดลองนั้นจะทำการกำหนดและเปลี่ยนค่าปัจจัยต่างๆ ของอัลกอริทึม คือจำนวนโหนดในกราฟ และอัตราการระเหยของฟีโรโมน

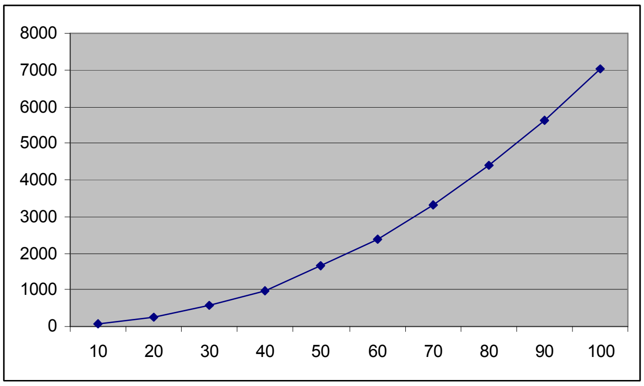
<u>ผลการทดลองของอัลกอริทึมอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหลายตัวในการทำงาน</u>

การทดลองอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหลายตัวในการทำงานซึ่งทำการกำหนดค่าอัตราการระเหยเป็น $1/n$ และทำการปรับเปลี่ยนค่าจำนวนของโหนดในกราฟ

การทดลองการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* นั้นเราทำการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมในกราฟรูปแบบของ *One-Max* โดยกำหนดค่า n เป็นค่าต่างๆ ตั้งแต่ n เท่ากับ 10,20,30,…,100 และทำการกำหนดค่าฟีโรโมนในสถานะเริ่มต้นเป็น 1/2 ซึ่งอัตราการระเหย ρ นั้นเท่ากับ $1/n$ เมื่อ n เป็นจำนวนโหนดในกราฟ ซึ่งแต่ละ n นั้นทำการทดลอง 10 ครั้งและหาค่าเฉลี่ยของการทำงานซึ่งแสดงผลลัพธ์ได้ในตารางที่ 1

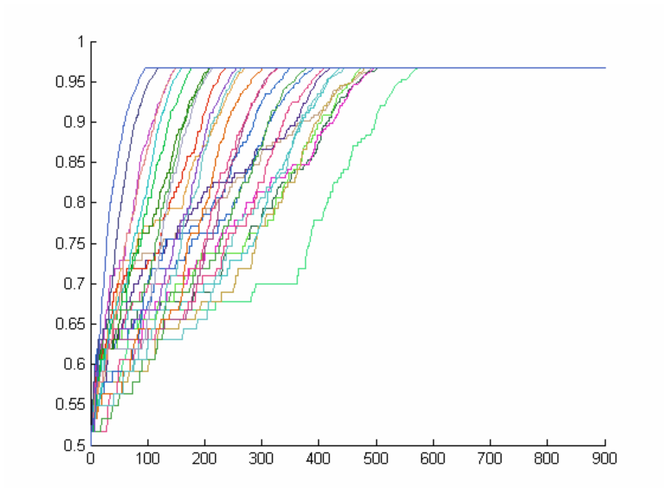
ตารางที่ 1 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* เมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น $1/n$

n	Average # of Iterations	Std. Dev.
10	56.40	9.969
20	242.70	22.356
30	562.70	17.153
40	990.10	30.950
50	1,644.20	54.952
60	2,378.00	66.024
70	3,306.50	54.302
80	4,412.60	52.409
90	5,613.90	107.043
100	7,015.40	26.256



ภาพที่ 21 ค่าเฉลี่ยจำนวนครั้งของรอบการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* เมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 โดยที่อัตราการระเหยเป็น $1/n$

ภาพที่ 21 แสดงแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของจำนวนรอบการทำงานเมื่อเทียบกับจำนวนโหนดในกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปโดยแกน Y แสดงจำนวนรอบการทำงานและแกน X แสดงจำนวนโหนดในกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 โดยที่อัตราการระเหยเป็น $1/n$

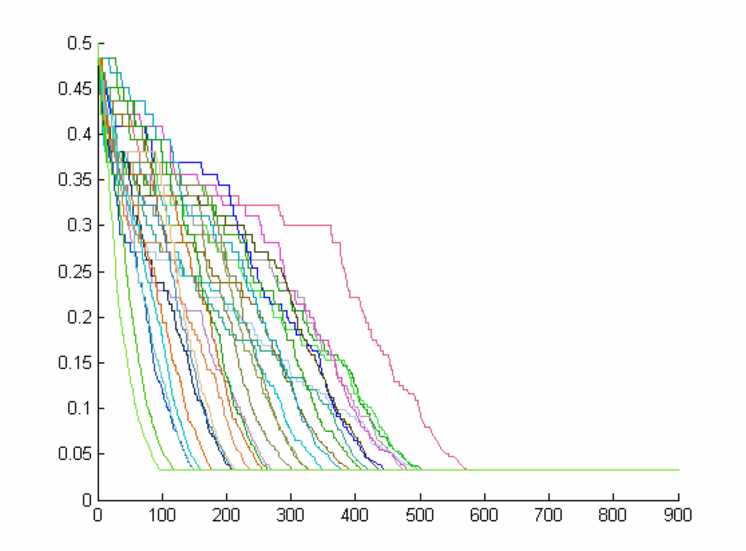


ภาพที่ 22 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 1 เมื่อเทียบกับเวลา *multiple-ant algorithm* สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด n = 30 เมื่ออัตราการระเหยเป็น $1/n$

ภาพที่ 22 แสดงของการทำงานของอัลกอริทึมเราสามารถแสดงการปรับเปลี่ยนค่าของฟีโรโมนในแต่ละช่วงเวลา โดยแกน Y แสดงแกนเวลาและแกน X เป็นอัตราค่าของฟีโรโมน ซึ่งจากภาพจะสังเกตได้ว่าอัตราเปลี่ยนแปลงของฟีโรโมนในคู่ของเส้นเชื่อมด้านบนใน *One-Max* จะเข้าใกล้สู่ค่าค่าหนึ่งซึ่งในที่นี้คือค่า $\tau_{\max}$ โดยภาพนี้เป็นตัวอย่างซึ่งเรากำหนด n มีค่าเท่ากับ 30 ฉะนั้น $\tau_{\max} = \dfrac{n-1}{n} \approx 0.96$, และในกราฟแต่ละเส้นนั้นแทนค่าของฟีโรโมนในแต่ละคู่ของเส้นเชื่อมด้านบนใน *One-Max* ซึ่งในคู่ของเส้นเชื่อมที่มีค่าเกือบๆ จะเป็น

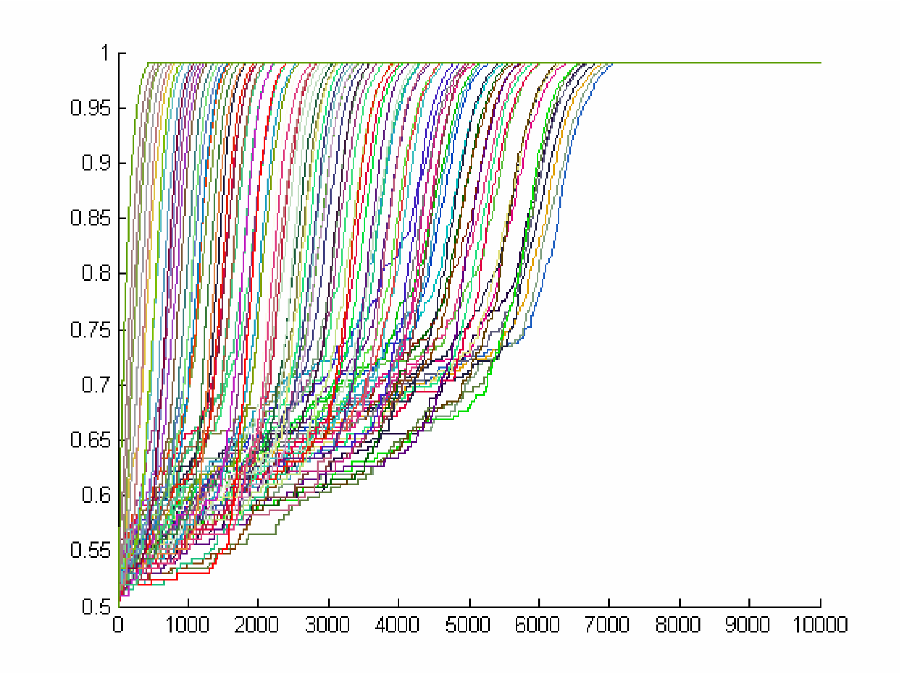
$n-1$ (x_i ที่ i เกือบจะเป็น $n-1$) จะมีแนวโน้มลู่เข้าสู่ค่า $\tau_{\max}$ ได้ไวกว่าคู่ของเส้นเชื่อมที่มีค่าเกือบๆจะเป็น 1 (x_i ที่ i เกือบจะเป็น 1)

ภาพที่ 23 ทดลองกรณีที่ $\tau_{\min} = \frac{1}{n} = \frac{1}{30} \approx 0.03$ ดังนั้นคู่ของเส้นเชื่อมที่อยู่ด้านล่างจะลู่เข้าสู่ค่า $\tau_{\min}$ โดยแกน X แสดงจำนวนรอบในการทำงานและแกน Y แสดงค่าของฟีโรโมน โดยค่าฟีโรโมนที่เป็นไปได้น้อยที่สุดมีค่าเป็น $\tau_{\min}$ โดยในกรณีนี้คือ 1/*n*

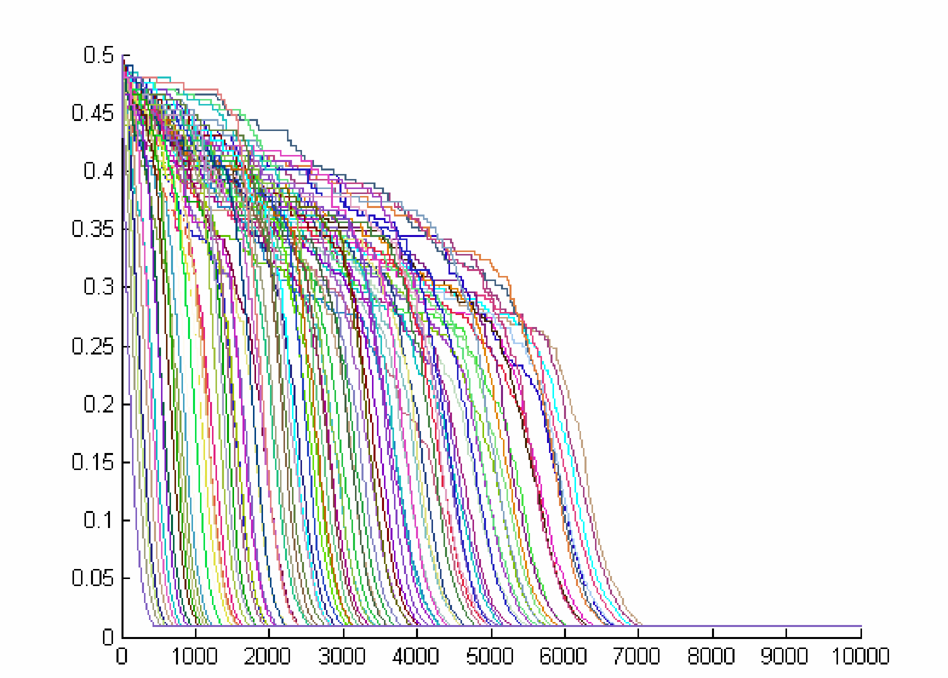


ภาพที่ 23 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 0 เมื่อเทียบกับเวลา *multiple-ant algorithm* สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด *n* = 30 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/*n*

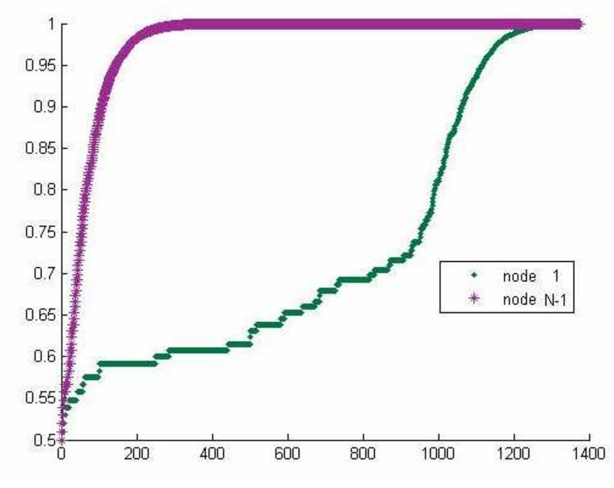
ภาพที่ 24 เป็นการแสดงการปรับค่าของฟีโรโมนในเส้นเชื่อมด้านบนในกราฟของ *One-Max* โดยแกน Y คือเวลา ซึ่งจะเห็นได้ว่าการลู่เข้าสู่ $\tau_{\max}$ จะเกือบเป็นลำดับจากคู่ของเส้นเชื่อมที่เกือบจะมีค่าเป็น *n*-1 ถึงคู่ของเส้นเชื่อมที่เกือบจะมีค่าเป็น 1 และในทางตรงข้ามแสดงการลู่เข้าสู่ $\tau_{\min}$ ในภาพที่ 25



ภาพที่ 24 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 1 เมื่อเทียบกับเวลา *multiple-ant algorithm* สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด n = 100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/n



ภาพที่ 25 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 0 เมื่อเทียบกับเวลา *multiple-ant algorithm* สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด n = 100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/n



ภาพที่ 26 เปรียบเทียบอัตราการระเหยของเส้นเชื่อมที่ 1 และ *n*-1

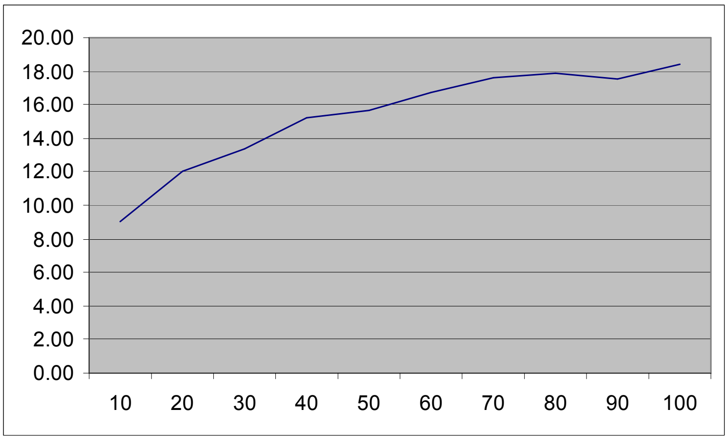
ภาพที่ 26 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟีโรโมนในคู่ของเส้นเชื่อมที่ 1 และ *n*-1 ในเส้นทางด้านบน สังเกตได้ว่า คู่ของเส้นเชื่อมด้านบนในเส้นเชื่อมที่ *n*-1 จะมีจำนวนครั้งของการปรับค่าเพื่อให้ค่าฟีโรโมนมีค่าเป็นสถานะการอิ่มตัวอย่างถูกต้องด้วยจำนวนครั้งที่น้อยกว่าเส้นเชื่อมที่ 1 ซึ่งสอดคล้องกับการวิเคราะห์เวลาในการทำงานในทฤษฎีบทที่ 4

ต่อมาได้ทำการทดลองอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหลายตัวในการทำงานซึ่งทำการกำหนดค่าอัตราการระเหยเป็น 1/2 และทำการปรับเปลี่ยนค่าจำนวนของโหนดในกราฟ การหาจำนวนรอบเวลาการทำงานของอัลกอริทึมนั้น จากการกำหนดให้อัตราการระเหยของฟีโรโมนมีค่าเท่ากับ 1/2 จะทำให้จำนวนครั้งของการปรับค่าให้คู่ของเส้นเชื่อมใดๆ ในมัลติกราฟของ *One-Max* มีสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องได้เร็วขึ้นซึ่งแสดงผลการทดลองได้จากตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* เมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/2

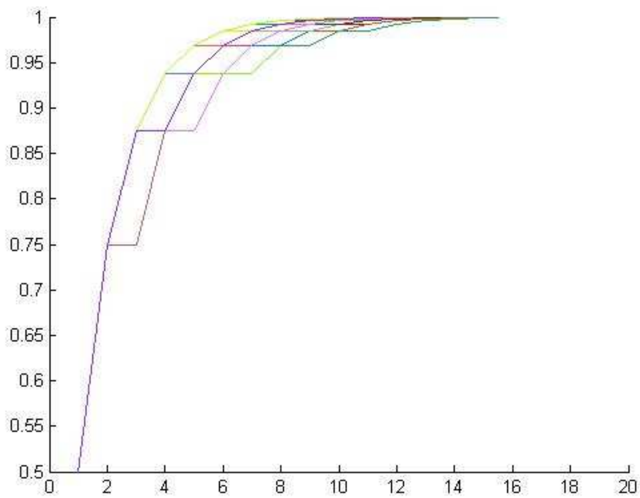
n	Average # of Iterations	Std. Dev.
10	9.00	1.15
20	12.00	1.25
30	13.40	1.17
40	15.20	1.14
50	15.70	1.06
60	16.70	1.34
70	17.60	1.26
80	17.90	1.79
90	17.50	2.01
100	18.40	0.97

ตารางที่ 2 แสดงผลการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมในปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหลายตัวในการทำงาน โดยกำหนดให้อัตราการระเหยเป็น 1/2 ทำการปรับเปลี่ยนจำนวนโหนดในกราฟ ค่า n เป็น 10,20,30,…,100 ทำการทดลองของค่า n แต่ละ n จำนวน 10 ครั้ง



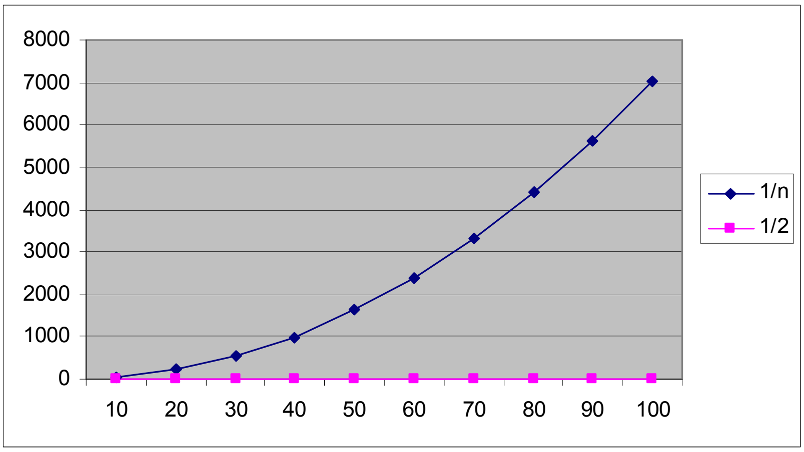
ภาพที่ 27 ค่าเฉลี่ยจำนวนครั้งของรอบการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* เมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 โดยที่อัตราการระเหยเป็น 1/2

จากภาพที่ 26 จะเห็นแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของจำนวนรอบการทำงานเมื่อเทียบกับจำนวนโหนดในกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปโดยแกน Y แสดงจำนวนรอบการทำงานและแกน X แสดงจำนวนโหนดในกราฟที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 โดยที่อัตราการระเหยเป็น 1/2



ภาพที่ 28 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 1 เมื่อเทียบกับเวลา *multiple-ant algorithm* สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด n = 100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/2

ในภาพที่ 28 ได้ใช้อัตราการระเหยเป็น 1/2 ค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมคู่ด้านบนจะมีจำนวนครั้งของการปรับค่าฟีโรโมนที่น้อยเมื่อเทียบกับอัตราการระเหยเป็น $1/n$ ฉะนั้นค่าฟีโรโมนในโหนดด้านบนนั้นจะที่ถูกปรับนั้นเกือบพร้อมๆ กันเป็นผลให้ค่าฟีโรโมนในโหนดต่างๆ มีค่าใกล้เคียงกันในทุกๆ โหนด จากภาพในรูป 28 ฟีโรโมนในโหนดต่างๆ มีค่าใกล้เคียงกันเมื่อเทียบกับแกน X ซึ่งเป็นแกนเวลาแสดงจำนวนครั้งของการปรับค่า เป็นผลให้มีการซ้อนทับของค่าฟีโรโมนในโหนดต่างๆ



ภาพที่ 29 แสดงการเปรียบจำนวนรอบการทำงานปรับเปลี่ยนอัตราการระเหยเป็น 1/*n* และ 1/2 บนปัญหา *One-Max* แบบใช้มดหลายตัว

ภาพที่ 29 แสดงการเปรียบเทียบจำนวนรอบในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดเมื่อใช้มดหลายตัวในการทำงาน โดยทำการปรับเปลี่ยนอัตราการระเหย 1/*n* และ 1/2 บนปัญหา *One-Max* โดยสังเกตได้ว่าหากเราใช้อัตราการระเหยเป็น 1/2 แล้วนั้นการทำงานจะมีจำนวนรอบในการทำงานของอัลกอริทึมน้อยกว่าเมื่อใช้ค่าอัตราการระเหยของฟีโรโมนเป็น 1/*n* เป็นอย่างมาก ทั้งนี้เนื่องจากสังเกตได้ว่าบนปัญหา *One-Max* นั้นมีทางเลือกของเส้นทางอย่างมากที่สุดเพียงสองเส้นทางเท่านั้น

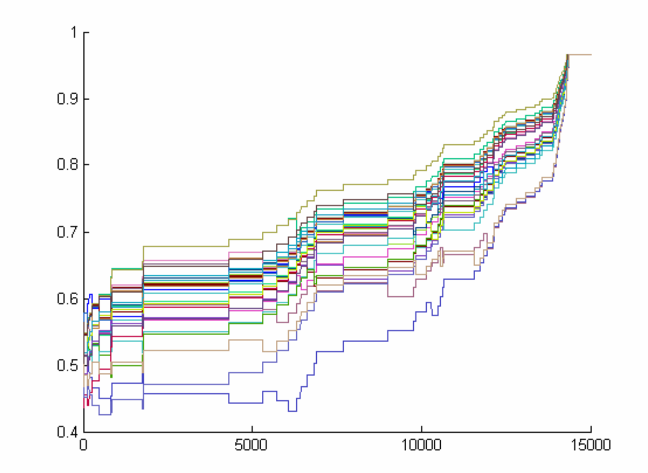
ผลการทดลองของอัลกอริทึมอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* โดยใช้มดตัวเดียว

จากงานวิจัยของ *Neumann* และ *Witt* ใช้อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแต่ใช้มดหนึ่งตัวในการทำงาน ซึ่งเรียกว่า 1-ANT อัลกอริทึม ซึ่งมดตัวนี้จะอยู่ในโหนดแรกสุดและวิ่งไปสุดโหนดสุดท้ายเพื่อทำการทำงานหาเส้นทางในกราฟของ *One-Max* ในคู่ของเส้นเชื่อมด้านบน ซึ่งโดยเราได้ทำการทดลองรัน 1-ANT อัลกอริทึม ในตัวอย่างของปัญหาในรูปแบบเดียวกันกับของเรา (กราฟ *One-Max* เมื่อ $n = 10,20,30,...,100$) ซึ่งใช้มดหลายตัวร่วมกันทำงาน ผลของการทำงานแสดงในตารางการที่ 2 ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของการทำงานในแต่ละ n โดยในแต่ละ n ทำการทดลองซ้ำ 10 ครั้ง

ตารางที่ 3 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของ 1-ANT อัลกอริทึม สำหรับปัญหา *One-Max* เมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/*n*

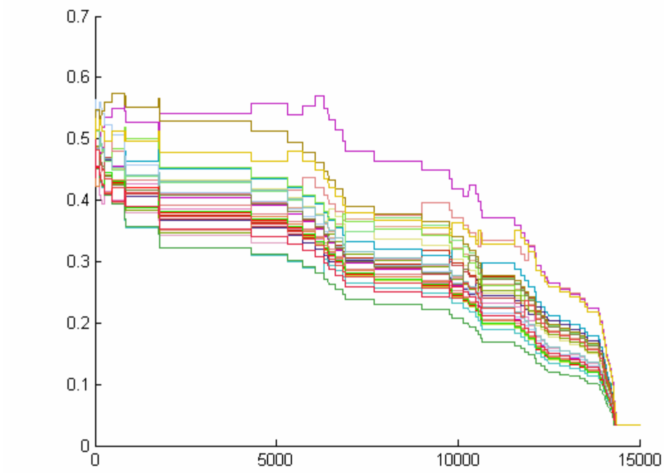
n	Average # of Iterations	Std. Dev.
10	222.30	104.66
20	1,751.70	662.17
30	12,223.10	2,553.79
40	26,349.00	3,170.97
50	32,617.20	4,215.86
60	43,766.20	3,319.17
70	56,814.90	7,138.49
80	79,059.90	9,243.56
90	139,956.67	15,051.28
100	174,244.54	34,234.33

โดยที่เราสามารถแสดงอัตราการระเหยของฟีโรโมนที่ลู่เข้าสู่ $\tau_{\max}$ ได้ โดยแสดงตัวอย่างในภาพที่ 30 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าของฟีโรโมนในคู่ของเส้นเชื่อมในเส้นเชื่อมด้านบน



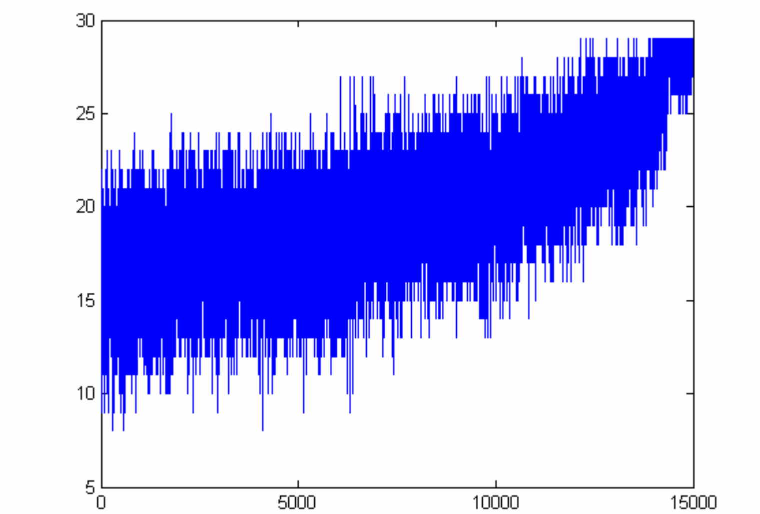
ภาพที่ 30 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 1 เมื่อเทียบกับเวลา 1-ANT อัลกอริทึม สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด n = 30 อัตราการระเหยเป็น 1/*n*

ซึ่งแกน X เป็นจำนวนรอบในการทำงานและแกน Y แสดงค่าฟีโรโมน และในทางตรงข้ามอัตราเปลี่ยนแปลงลดลงของฟีโรโมนบนคู่ของเส้นเชื่อมด้านล่างเมื่อทำการทำงานโดยอัลกอริทึมแบบมดตัวเดียวจะแสดงได้ดังภาพที่ 31



ภาพที่ 31 การปรับค่าของฟีโรโมนบนเส้นทางที่ x_i มีค่าเป็น 0 เมื่อเทียบกับเวลา 1-ANT อัลกอริทึม สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด *n* = 30 อัตราการระเหยเป็น 1/*n*

จากการที่อัลกอริทึมมีการทำงานแบบวนซ้ำเราสังเกตได้ว่าหลังจากทำงานระยะเวลาหนึ่งผลรวมของค่า x_i ของมด เมื่อ $i = 1$ จะมีเข้าใกล้ค่าที่ดีที่สุด จากภาพที่ 32 ผลรวมของหนึ่งในปัญหา *One-Max* โดยผลรวมของหนึ่งที่มีค่ามากที่สุดมีค่าเท่ากับ $n-1$ นั้นคือในกรณีนี้มีค่าเป็น 30-1 เมื่อแกน X คือแกนเวลาแสดงจำนวนรอบการทำงานและแกน Y คือผลรวมของค่า x_i เมื่อ $i = 1$



ภาพที่ 32 ผลรวมของ x_i เมื่อ $i = 1$ ของ 1-ANT อัลกอริทึม สำหรับ *One-Max* โดยกำหนด *n* = 30

ต่อมาได้ทำการทดลองอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหา *One-Max* โดยใช้มดหนึ่งตัวในการทำงานและทำกำหนดค่าอัตราการระเหยเป็น 1/2 รวมทั้งทำการปรับเปลี่ยนค่าจำนวนของโหนดในกราฟ

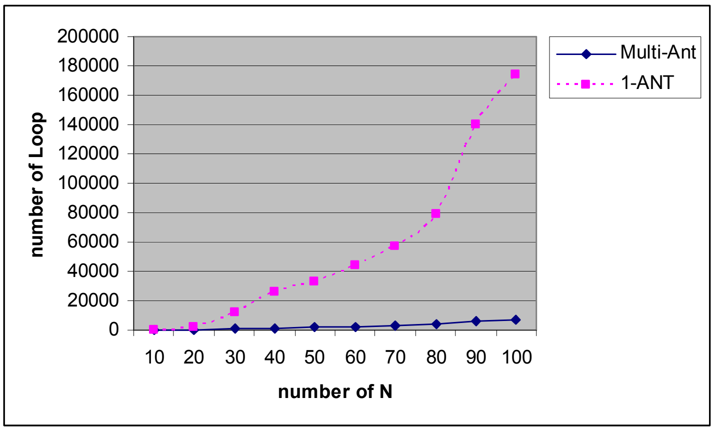
ตารางที่ 4 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบใช้มดหนึ่งตัวสำหรับปัญหา *One-Max* เมื่อ n มีค่าเป็น 10,20,30,…,100 เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/2

n	Average # of Iterations	Std. Dev.
10	11.30	1.57
20	14.80	2.66
30	16.60	1.35
40	17.80	1.55
50	19.60	1.84
60	19.70	1.64
70	17.60	1.26
80	17.90	1.79
90	17.50	2.01
100	18.40	0.97

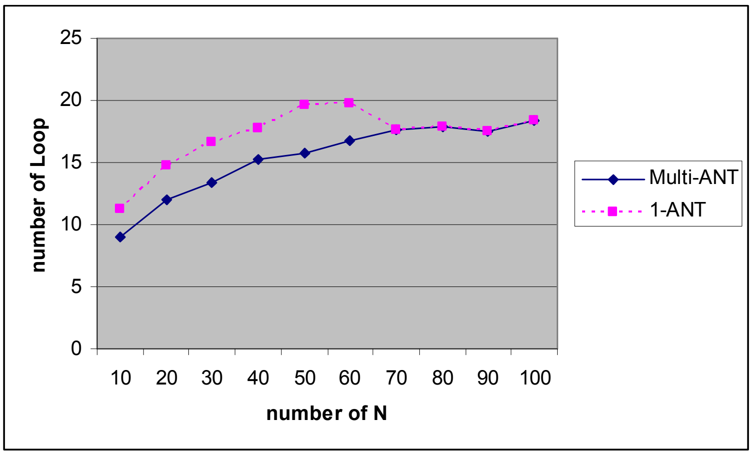
ในปัญหา *One-Max* นั้นเราได้ทำการทดลองโดยทำการปรับเปลี่ยนค่าฟีโรโมนเป็น 1/2 ซึ่งจากการทดลองเราจะได้ผลการทดลองดังในตารางที่ 4 สังเกตได้ว่าผลลัพธ์ของเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมนั้นเกือบจะใกล้เคียงกับการใช้อัลกอริทึมแบบการใช้มดหลายตัวในการทำงาน

<u>เปรียบเทียบการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดระหว่างการใช้มดหลายตัวและมดตัวเดียว</u>

ข้อสังกตจากการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักร โดยใช้มดตัวเดียวและจากการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมด โดยใช้มดหลายตัว เมื่อ n เป็นขนาดของปัญหา โดยมีค่า n มีค่าเท่าๆกัน อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟีโรโมนที่จะลู่เข้าสู่ค่า $\tau_{\max}$ เมื่อทำงานบนอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดโดยใช้มดหลายตัวจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงลู่เข้าที่เร็วกว่าการใช้อัลกอริทึมแบบอาณาจักรแบบมดตัวเดียว (ในการทดลองนี้ใช้อัตราการระเหยเป็น $1/n$) ซึ่งสามารถเปรียบเทียบขนาดของปัญหาที่ n มีค่าต่างๆ ได้จากผลการทดลองได้ในภาพที่ 33 แต่หากมีการกำหนดค่าอัตราการระเหยเป็น 1/2 แล้วนั้นผลลัพธ์ทั้งสองอัลกอริทึมเกือบจะมีผลใกล้เคียงกัน และมีประสิทธิการทำงานที่รวดเร็วกว่าอัตราการระเหยเป็น 1/2 ในกรณีของปัญหา *One-Max*



ภาพที่ 33 เปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำงานระหว่างอัลกอริทึมอาณาจักรมดที่ใช้มดหลายตัวและการใช้มดตัวเดียวในการทำงาน เมื่อ $n = 10,20,30,...,90$ เมื่ออัตราการระเหยเป็น $1/n$



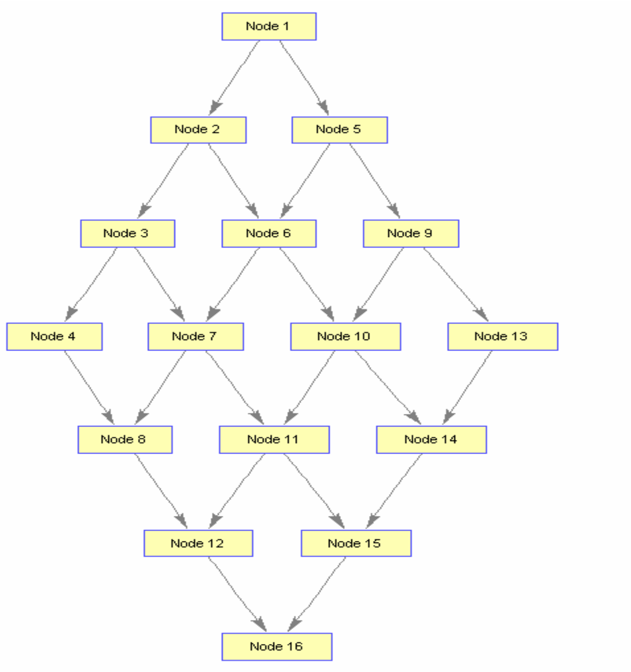
ภาพที่ 34 เปรียบเทียบจำนวนรอบของการทำงานระหว่างอัลกอริทึมอาณาจักรมดที่ใช้มดหลายตัวและการใช้มดตัวเดียวในการทำงาน เมื่อ $n = 10,20,30,...,90$ เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/2

การทดลองการทำงานของอัลกอริทึมบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในปัญหากราฟแบบไม่มีวงรอบ

โดยในแต่ละการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมนั้นได้ทำการทดลองในสองรูปแบบคือบนกราฟแบบไม่มีวงรอบอย่างง่ายและกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มซึ่งคล้ายรูปแบบในปัญหาจริง โดยทั้งสองรูปแบบของทดลองนั้นได้ทำการปรับเปลี่ยนค่าปัจจัยต่างๆ ของอัลกอริทึม คือจำนวนโหนดในกราฟ และอัตราการระเหยของฟีโรโมน

ผลการทดลองบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบง่าย

ในการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบนั้น ก่อนอื่นเรากำหนดให้กราฟ G เป็นกราฟแบบไม่มีวงรอบโดยเราทำการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟ ซึ่งจะกำหนดให้มีกราฟขนาด $n = k^2$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ขนาด 3,4,5,…,10 และกราฟ G มีขนาด $2k-1$ ชั้น สำหรับ $1 \le i \le k$ และชั้นที่ i มี i โหนด ซึ่งกราฟจะมีลักษณะคล้ายกริดดังแสดงในตัวอย่างภาพที่ 30 และกำหนดน้ำหนักบนเส้นเชื่อมต่างๆ เป็นค่าสุ่มแบบมีรูปแบบระหว่าง [0,1]

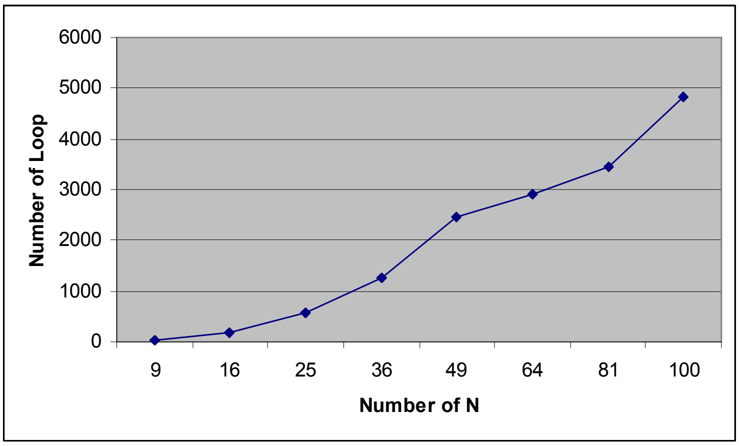


ภาพที่ 35 แสดงตัวอย่างกราฟซึ่งเป็นกราฟแบบแบบไม่มีวงรอบขนาด $k = 4$ (แบบกริด *n* เป็น 25)

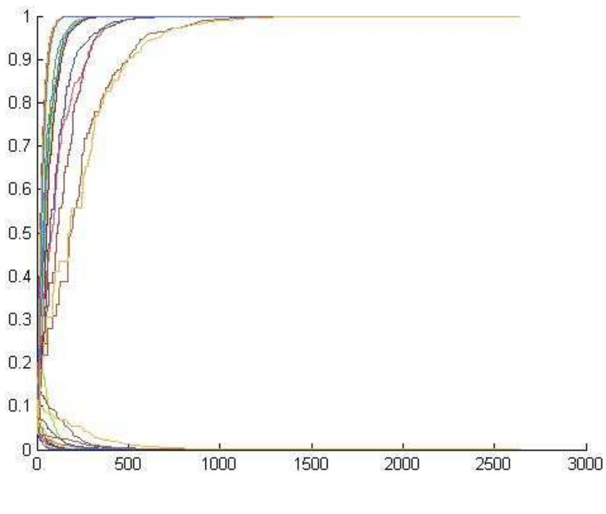
โดยในกรณีเราทำการปรับค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ตามอัลกอริทึมคือ $\tau_{\min} = 1/n^2$, $\tau_{\max} = (n^2 - 1)/n^2$ และอัตราการระเหย ρ เป็น $1/n^2$ ผลการทดลองของเราทำการทดลองในกราฟขนาดแต่ละ k จำนวน k ละ 10 ครั้ง และหาค่าค่าเฉลี่ยของผลการทดลองแต่ละ k แสดงในตารางที่ 5

ตารางที่ 5 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบง่าย เมื่อ n มีค่าเป็น 9,16,25,...,100

n	Average # of Iterations	Std. Dev.
9	43.34	9.34
16	184.43	83.43
25	564.55	144.36
36	1,273.60	1,388.44
49	2,451.88	255.53
64	2,923.44	286.44
81	3,454.98	2,943.42
100	4,843.54	3,433.45



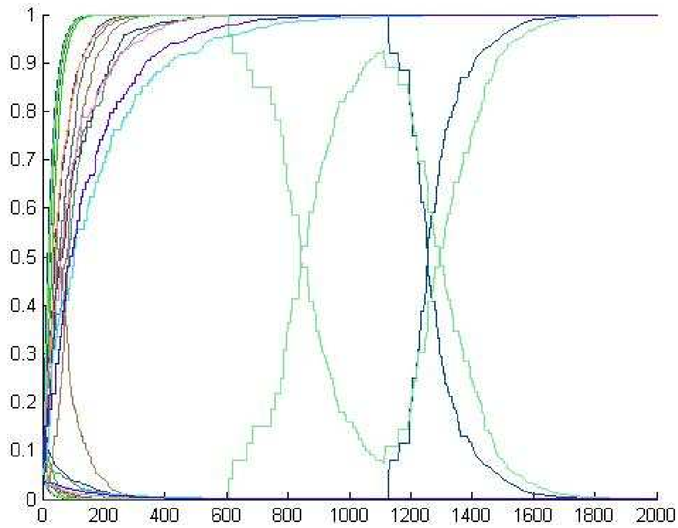
ภาพที่ 36 ค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบง่าย เมื่อ n มีค่าเป็น 9,16,25,...,100 และอัตราการระเหยเป็น $1/n$



ภาพที่ 37 ตัวอย่างการปรับค่าของฟีโรโมนโดยใช้อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบเมื่อ $n = k^2, n = 5$

ภาพที่ 35 แสดงแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของจำนวนโหนดในกราฟแบบไม่มีวงรอบซึ่งแกน X คือจำนวนโหนดในกราฟ และแกน Y คือจำนวนรอบของการทำงานและโดยในภาพที่ 36 แสดงการปรับเปลี่ยนค่าฟีโรโมนบนเส้นเชื่อมภายในกราฟแบบไม่มีวงรอบในลักษณะกริดขนาด 25 โหนด โดยแกน X แสดงจำนวนรอบการทำงาน และแกน Y ค่าฟีโรโมน

อย่างไรก็ตามอัลกอริทึมแบบอาณาจักรในการแก้ปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบนั้นจะมีความยากและซับซ้อนกว่าปัญหา *One-Max* มาก ฉะนั้นโอกาสที่มดจะทำการเลือกเส้นทางผิดและกลับมาสู่เส้นทางที่ถูกต้องได้นั้นมีค่าเป็น $P_{\min}$ แต่อย่างไรก็จากทฤษฎีบทย่อยที่ 9 ด้วยความน่าจะเป็น $\Omega(\frac{1}{n^2 \cdot \deg_0(u)})$ มดจะสามารถค้นหาเส้นทางที่ถูกต้องได้ นั้นคือสามารถปรับเปลี่ยนค่าฟีโรโมนจากค่า $\tau_{\min}$ ไปสู่ $\tau_{\max}$ และในทางกลับกัน (นั้นคือหากมดหลงทางเดินในเส้นทางที่ผิดแล้วนั้นอย่างไรก็ตามอัลกอริทึมเองสามารถที่จะค้นหาเส้นทางที่ถูกต้องได้ด้วยค่าความน่าจะเป็นค่าหนึ่ง) โดยแสดงตัวอย่างดังภาพที่ 37

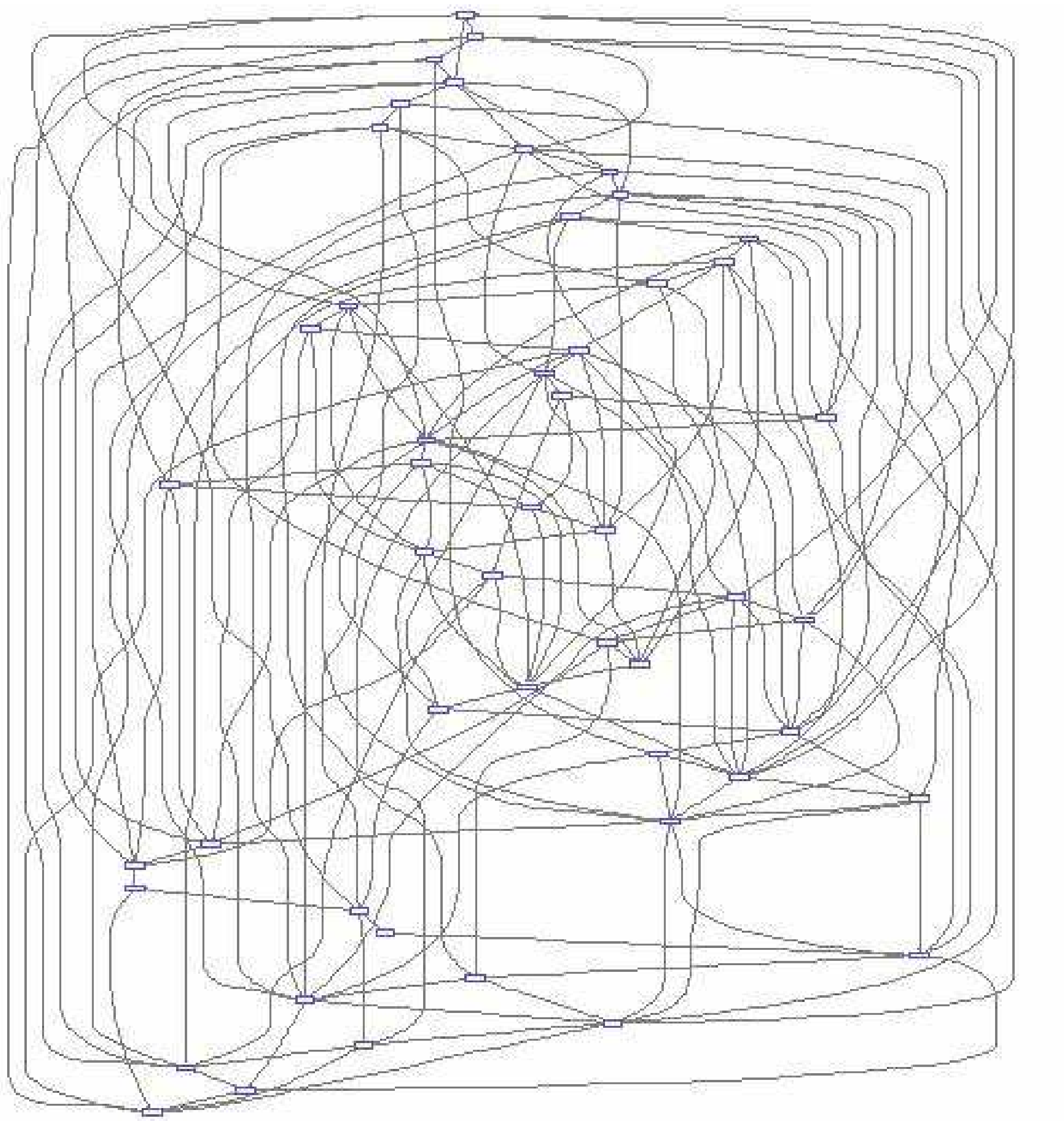


ภาพที่ 38 แสดงการปรับค่าจาก $\tau_{\min}$ ไปสู่ค่า $\tau_{\max}$ โดยใช้อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบเมื่อ $n = k^2, n = 5$

อัลกอริทึมเป็นการทำงานแบบวนรอบโดยมีการตรวจสอบสถานะของเส้นเชื่อมใดๆ ในกราฟ หากทุกๆ เส้นเชื่อมในกราฟมีค่าสถานะเป็นการอิ่มตัวอย่างถูกต้องแล้วนั้นให้หยุดการทำงานของอัลกอริทึม โดยหากให้เวลานานเพียงพอ อัลกอริทึมจะสามารถค้นหาเส้นทางที่ถูกต้องได้

ผลการทดลองบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม

ในการทดลองการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวสำหรับบนการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มนั้น ก่อนอื่นจะทำการกำหนดปัจจัยสองค่าคือหนึ่งจำนวนโหนดในกราฟแบบไม่มีวงรอบว่าจะมีจำนวนโหนดเป็นเท่าใด และสองกำหนดค่าของเส้นเชื่อมที่เป็นไปได้มากที่สุดในโหนดใดๆ จะมีค่าเป็นเท่าใด โดยการทดลองนั้นจะทำการปรับค่าอัตราการระเหยบนแต่ละกราฟด้วยสัดส่วนที่แตกต่างกัน โดยกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มนั้นจะมีโครงสร้างดังตัวอย่างในภาพที่ 39 (ภาพที่ 39 เป็นกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มกำหนดให้ n =50 ให้จำนวนเส้นเชื่อมที่เป็นไปได้มากสุดในแต่ละโหนดมีค่าเป็น 5)

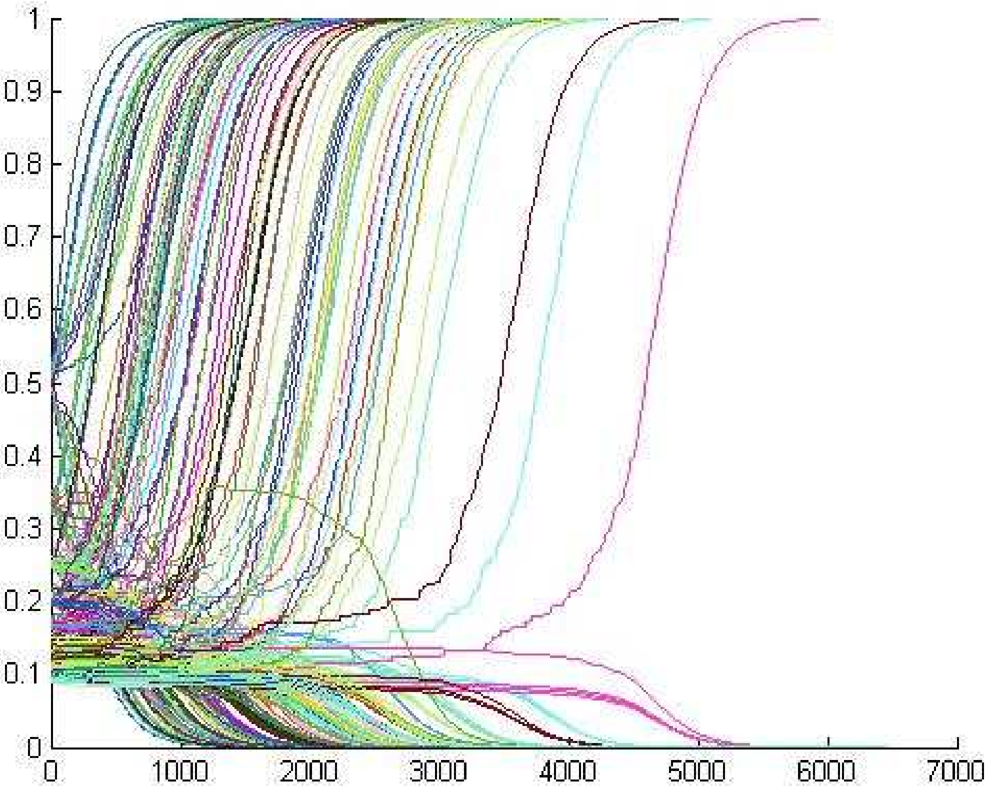


ภาพที่ 39 แสดงตัวอย่างกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม โดยกำหนดจำหนดโหนดในกราฟเป็น n เท่ากับ 50 และจำนวนเส้นเชื่อมมากสุดในแต่ละโหนดเท่ากับ 5

ตารางที่ 6 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม เมื่อ n มีค่าเป็น 20,30,40,…,100

n	Average # of Iterations	Std. Dev.
20	77.40	37.36
30	195.20	143.48
40	373.30	112.39
50	584.30	308.11
60	885.30	1,130.12
70	1,556.50	80.76
80	1,126.90	1,087.77
90	2,639.40	1,459.78
100	6,802.00	1,430.65

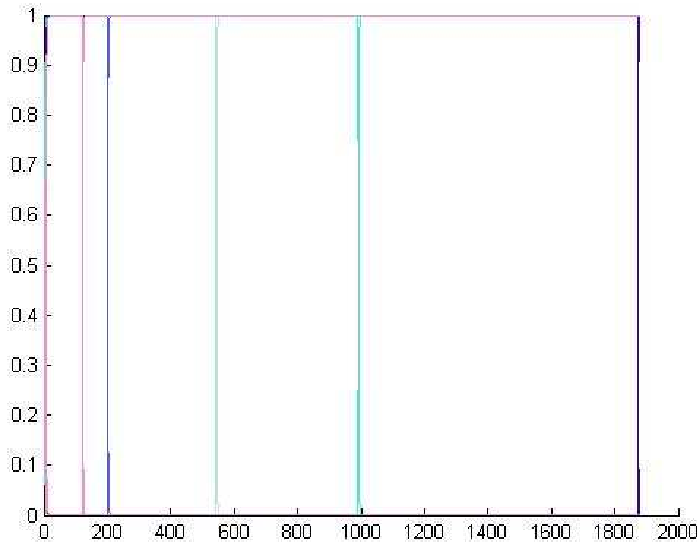
จากตารางที่ 6 แสดงผลการทดลองของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดโดยใช้มดหลายตัวในการทำงานบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม โดยกำหนดค่า n แต่ละค่าเป็น 20,30,40,…,100 และในแต่ละ n นั้นมีอัตราการระเหยเป็น $1/n$ สุดท้ายทำการกำหนดค่าจำนวนของเส้นเชื่อมที่เป็นไปได้มากที่สุดในการต่อเชื่อมกับโหนดต่างๆ ในกราฟเป็น 10 เปอร์เซ็นต์ของ n (จำนวนเส้นเชื่อมต่างๆ เป็น 2,3,4,…,10)



ภาพที่ 40 ตัวอย่างการปรับค่าของฟีโรโมนโดยใช้อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบมดหลายตัว สำหรับปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มเมื่อ n=100 และอัตราการระเหยเป็น $1/n$

ภาพที่ 40 แสดงการปรับค่าของฟีโรโมนในโหนดต่างๆ ในกราฟแบบไม่มีวงรอบทำการหนดค่า n มีจำนวนเท่ากับ 100 และเส้นเชื่อมที่เป็นไปได้มากสุดในการต่อเชื่อมแต่ละโหนดในกราฟมีค่าเป็น10 เส้นเชื่อม อัลกอริทึมจะทำการปรับค่าฟีโรโมนด้วยอัตราการระเหย $1/n$ โดยฟีโรโมนในเส้นเชื่อมที่เส้นเชื่อมนั้นอยู่ในเซ็ทของคำตอบที่ดีที่สุดของแต่ละปัญหานั้นจะมีการปรับค่าเข้าสู่ค่า $\tau_{\max}$ และในทางตรงข้ามเส้นเชื่อมอื่นๆ จะมีการปรับค่าเข้าสู่ $\tau_{\min}$ โดยแกน X เป็นจำนวนรอบในการทำงานและแกน Y เป็นค่าฟีโรโมน

ในอีกกรณีหนึ่งได้ทำการปรับค่าอัตราการระเหยของอัลกอริทึมให้มีค่าเป็น 1/2 โดยจากภาพที่ 40 สังเกตได้ว่าค่าฟีโรโมนในโหนดต่างๆ ในกราฟจะมีค่าปรับค่าอย่างรุนแรงกล่าวคือมีการปรับค่าจาก $\tau_{\max}$ ไปสู่ $\tau_{\min}$ และมีการปรับค่าจาก $\tau_{\min}$ ไปสู่ $\tau_{\max}$ สลับกันในช่วงเวลาของการทำงาน เนื่องจากอัตราการระเหยที่สูงมาก โดยจากการกำหนดค่าเริ่มต้น $\tau_{\min}$ และ $\tau_{\max}$ มีค่าอยู่ระหว่างศูนย์และหนึ่ง อัตราการระเหยที่มีค่ามากถึง 1/2 นั้นขอเพียงปรับค่าเพียง 2 ครั้งค่าฟีโรโมนในเส้นเชื่อมก็จะมีค่าเป็น $\tau_{\max}$ ได้ ผลการทดลองแสดงในภาพที่ 41



ภาพที่ 41 ตัวอย่างการปรับค่าของฟีโรโมนโดยใช้อัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบมดหลายตัว สำหรับปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มเมื่อ $n = 30$ และอัตราการระเหยเป็น 1/2

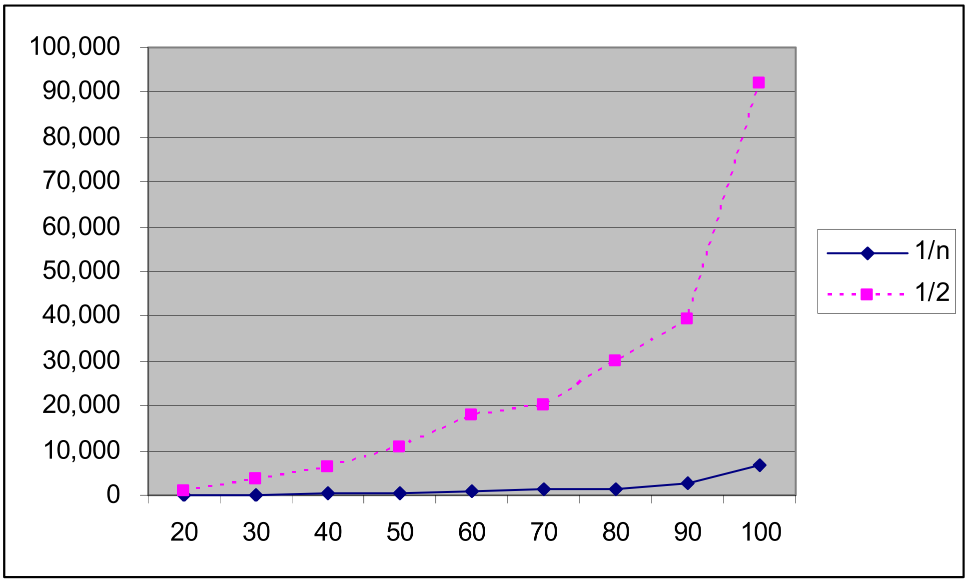
โดยผลการทดลองโดยเฉลี่ยในการใช้อัตราการระเหยเป็น 1/2 นั้นแสดงได้ในตารางที่ 7 โดยกำหนดปัจจัยต่างๆ เหมือนในการทดลองของตารางที่ 6

ตารางที่ 7 แสดงค่าเฉลี่ยจำนวนรอบของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดสำหรับการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม เมื่อ n มีค่าเป็น 20,30,40,…,100 โดยที่กำหนดอัตราการระเหยเป็น 1/2

n	Average # of Iterations	Std. Dev.
20	1,024.60	554.03
30	3,445.80	1,564.11
40	6,163.00	2,340.64
50	10,858.20	3,232.51
60	17,766.30	2,251.98
70	20,054.30	2,185.58
80	29,756.90	673.40
90	39,133.00	1,762.90
100	92,166.20	8,427.47

<u>การเปรียบเทียบการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวในการทำงานบนปัญหากราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม โดยมีอัตราการระเหยที่แตกต่างกันเท่ากับ 1/2 และ 1/*n*</u>

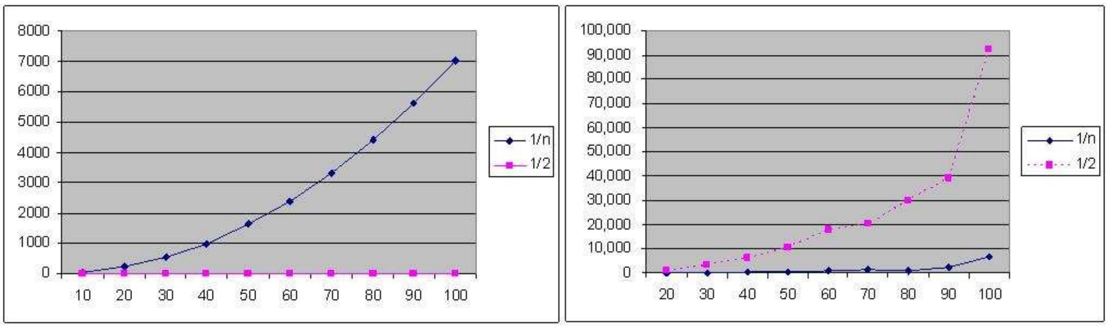
ผลการทดลองนี้ได้ทำการเปรียบเทียบเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวในการทำงานบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม โดยปัจจัยต่างๆ ในการกำหนดค่าการทำงานมีค่าเท่ากันทุกอย่างเพียงแต่ปรับค่าของฟีโรโมนที่แตกต่างกัน โดยแสดงผลดังในภาพที่ 42



ภาพที่ 42 เปรียบเทียบจำนวนครั้งของการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวในการทำงานบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม ที่ใช้อัตราการระเหยเป็น 1/2 และ 1/*n*

จากภาพที่ 42 เป็นการเปรียบเทียบการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวในการทำงานเมื่อปรับเปลี่ยนอัตราการระเหยเป็น 1/2 และ 1/*n* โดยที่แกน X คือจำนวนโหนดในกราฟ และแกน Y คือจำนวนรอบของการทำงาน

<u>การเปรียบเทียบการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวในการทำงานบนปัญหากราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มและปัญหา *One-Max* โดยมีอัตราการระเหยที่แตกต่างกันเท่ากับ 1/2 และ 1/*n*</u>

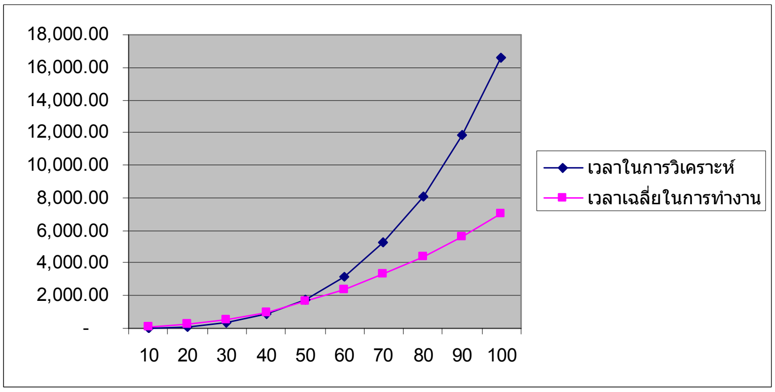


ภาพที่ 43 เปรียบเทียบการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดแบบใช้มดหลายตัวในการทำงาน โดยด้ายซ้ายเป็นปัญหา *One-Max* และด้านขวาเป็นปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม

จากภาพที่ 43 ด้านซ้ายมือเป็นการแสดงจำนวนรอบในการทำงานของอัลกอริทึมบนปัญหา *One-Max* เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/2 และ 1/*n* และด้านขวามือเป็นการแสดงจำนวนรอบในการทำงานของอัลกอริทึมบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม เมื่ออัตราการระเหยเป็น 1/2 และ 1/*n* ซึ่งภาพที่ 43 นั้น แกน X เป็นจำนวนโหนดในกราฟ และ แกน Y เป็นจำนวนรอบในการทำงาน สังเกตได้ว่าภาพด้านซ้ายและภาพด้านขวามือจะมีแนวโน้มในการทำงานที่สลับกัน กล่าวคือในปัญหา *One-Max* นั้นหากอัตราการระเหยเป็น 1/2 จำนวนรอบในการทำงานจะมีจำนวนรอบที่น้อยกว่าหากกำหนดอัตราการระเหยเป็น 1/*n* และ(ด้านขวา) ในปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดในกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ม หากกำหนดให้อัตราการระเหยเป็น 1/2 จำนวนรอบในการทำงานจะมีจำนวนรอบที่มากกว่าหากกำหนดอัตราการระเหยเป็น 1/*n* ทั้งนี้ปัจจัยที่มีผลต่อการทำงานเท่าที่สังเกตได้คือ รูปแบบของปัญหานั้นเอง ทั้งนี้รูปแบบปัญหาของกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่มนั้นมีความซับซ้อนมากกว่ารูปแบบของปัญหา *One-Max* เป็นอย่างมาก ปัญหา *One-Max* นั้นมีเส้นเชื่อมในแต่ละโหนดเพียงสองเส้นเท่านั้นจำนวนทางเลือกจึงมีแค่สองเส้นทางในแต่ละโหนด เมื่อเปรียบเทียบกับของกราฟแบบไม่มีวงรอบแบบสุ่ ม เช่นในกรณีของ *n* มีค่าเป็น 100 จากการกำหนดค่าคงที่ จำนวนเส้นเชื่อมที่เชื่อมต่อแต่ละโหนดมีค่าได้มากที่สุดเป็น 10 % ของจำนวนโหนดทั้งหมดในกราฟ เมื่อปัญหามีความซับซ้อนขึ้นการที่เราใช้อัตราการระเหยที่สูงนั้น อัลกอริทึมจะมีการปรับค่าของฟีโรโมนเข้าสู่ $\tau_{\min}$ และ $\tau_{\max}$ ในเส้นเชื่อมใดๆ จำนวนรอบของการปรับค่าที่ต่ำมาก เสมือนการทำงานเป็นแบบสุ่มเลือกเดินค้นหาเส้นทาง ฉะนั้นความแตกต่างและความซับซ้อนของแต่ละปัญหานี้เองเป็นผลให้เวลาในการทำงานแตกต่างกันเมื่ออัตราการระเหยเปลี่ยนแปลง

<u>การเปรียบการเวลาจากการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและเวลาเฉลี่ยในการทำงานจริง</u>

อย่างไรก็ตามจากการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมในส่วนก่อนหน้านั้นจะได้ว่าเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมอาณาจักรมดบนปัญหา *One-Max* จะใช้เวลาในการทำงานเป็น $O(\frac{n^2}{\rho}\log n)$ อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองเวลาเฉลี่ยในการทำงานจริงเมื่อเทียบกับเวลาในการวิเคราะห์ทางทฤษฎียังคงอยู่ในขอบเขตของเวลาในการทำงานดังแสดงได้ในภาพที่ 44 โดยแกน X เป็นจำนวนโหนดในกราฟ และแกน Y เป็นจำนวนรอบในการทำงานของอัลกอริทึม ซึ่งในภาพที่ 44 นั้นเวลาในการวิเคราะห์ทางทฤษฎีได้ถูกหารด้วย 500 เพื่อทำให้แนวโน้มเด่นชัดขึ้น



ภาพที่ 44 เปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยในการทำงานจริงเทียบกับเวลาในการวิเคราะห์

สรุปผล

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะทำการวิเคราะห์เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมแบบอาณาจักรมดบนสองปัญหาคือบนปัญหา *One-Max* และปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบโดยอัลกอริทึมเมื่อทำงานบน *One-Max* จะใช้เวลาในการทำงานเป็น $\mathrm{O}(\frac{1}{\rho} n^2 \log n)$ และบนปัญหาการหาเส้นทางที่สั้นที่สุดบนกราฟแบบไม่มีวงรอบจะใช้เวลาในการทำงานเป็น $\mathrm{O}(\frac{1}{\rho} n^2 m \log n)$ เมื่อ ρ เป็นอัตราการระเหยของฟีโรโมน และ n และ m เป็นจำนวนโหนดและจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟตามลำดับ ซึ่งการทำงานของอัลกอริทึมของเรานั้นจะแตกต่างจากของ Neumann และ Witt โดยจะใช้มดเพียงตัวเดียวในการทำงานซึ่งส่งผลให้เวลาในการทำงานของอัลกอริทึมนั้นมีเฟสทรานซิสชั่นบนอัตราการระเหย

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

Bellman, R. 1958. On a routing problem. **Quarterly of Applied Mathematics, 16(1): 87-90.**

Dijkstra, E.W. 1959. A note on two problems in connection with graphs. **Numerische Mathematik, pages 269-271.**

Di Caro, G. and Dorigo, M. 1997. AntNet: a mobile agents approach to adaptive routing . **Technical Report IRIDIA/97-12, Universite Libre de Bruxelles, Belgium.**

Di Caro G. and Dorigo, M. 1998. Antnet: distributed stigmergetic control for communications Networks , ***Journal of Artificial Intelligence Research*, (9): 317-365.**

Dorigo, M. and Blum, C. 2005. Ant colony optimization theory: A survey. ***Theoretical Computer Science*, pages 243–278.**

Dorigo, M. and Ganbardella, L. 1997. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem. ***IEEE transactions on Evolutionary Computing*, Apr, pages 53-66.**

Dorigo, M. and Stützle, T. 2004 ***Ant Colony Optimization***, 1 ed. MIT Press, Cambridge, MA.

Dorigo, M. & Gambardella, L. M. 1997. *Ant colonies for the traveling salesman problem*, **BioSystems 43, pages 73-81.**

Feller, W. 1971, ***An Introduction to Probability Theory and Its Applications***, vol. 2, 2nd ed. Wiley.

Ford Jr., L.R. and D.R. Fulkerson. 1962, **Flows in Networks**. Princeton University Press, Princeton.

Gutjahr, W.J., 2002. ACO algorithms with guaranteed convergence to the optimal solution , ***Information Processing Letters 82*, pages 145-153.**

Jerrum, M. and Sorkin G. 1993. Simulated annealing for graph bisection. **In Proc. 34th Ann. *Symp. on Foundations of Comp. Sci.***

Kallel, L., Naudts, B. and Rogers, A. (Eds.) ,2001. *Theoretical Aspects of Evolutionary Computing*. **Natural Computing Series, Springer, Berlin, Germany.**

Merkle, D. and Middendorf, M., 2002. Modelling the Dynamics of Ant Colony Optimization Algorithms. **In Proceedings of *the Genetic and Evolutionary Computation Conference*(GECCO-2002), New York.**

Moore, E.F. 1959. The shortest path through a maze. **In Proc. Of the International Symposium on the Theory of Switching , Harvard University Press., pages 285-292**.

Neumann, F. and Witt, C., 2006. Runtime Analysis of a Simple Ant Colony Optimization Algorithm. ***Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, Report No. 84.**

Rizzoli,A.E., Oliverio F., Montemanni R. and Gambardella L.M., 2004. Ant Colony Optimisation for vehicle routing problems: from theory to applications". **Technical Report IDSIA-15-04, Istituto Dalle Molle di Studi sull'Intelligenza Artificiale, September.**

Shen, C., Huang, Z. and Jaikaeo, C. , 2005. Ant-Based Distributed Topology Control Algorithms for Mobile Ad hoc Networks. ***Wireless Networks 11*(3), 2005, pages 299-317.**

Stützle, T. and Dorigo,M. 1999. *ACO Algorithms for the Traveling Salesman Problem*. In K. Miettinen, M. Makela, P. Neittaanmaki, and J. Periaux, editors, **Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science. Wiley.**

Stützle, T. and Dorigo,M. 2002. A Short Convergence Proof for a Class of ACO Algorithms, ***IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6 (4), (in press).**

Stützle, T. and H. H. Hoos, 2000. MAX-MIN ant system, ***Future Gener. Comput. Syst.*, 16(8):889-914.**

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	ณัฐภัทร อิทธิรัตนสุนทร
วัน เดือน ปี ที่เกิด	10 กันยายน พ.ศ. 2522
สถานที่เกิด	จังหวัด ฉะเชิงเทรา
ประวัติการศึกษา	วศ.บ. (วิศวกรรมคอมพิวเตอร์) สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (พ.ศ. 2545)
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	กรรมการผู้จัดการบริษัท เอเชียมีเดียซอฟท์ จำกัด
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	บริษัท เอเชียมีเดียซอฟท์ จำกัด
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-