

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

วิธีการในการแก้ไขปัญหามีมากมายที่ไม่ได้สำหรับศาสตร์เกือบทุกแขนง เช่น วิศวกร นักธุรกิจ นักเศรษฐศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ แพทย์ ฯลฯ คือ การจำลองแบบปัญหา กลไกของวิธีการจำลองแบบปัญหานั้นขึ้นอยู่กับแบบจำลองและการใช้แบบจำลอง แบบจำลองที่ใช้ในการจำลองแบบปัญหาอาจจะเป็นระบบงาน หรือเป็นแนวความคิดลักษณะใดลักษณะหนึ่ง ซึ่งไม่จำเป็นต้องเหมือนกับปัญหาจริง แต่จะต้องสามารถช่วยให้เข้าใจในปัญหาจริงได้ เพื่อประโยชน์ในการอธิบายพฤติกรรม และเพื่อปรับปรุง แก้ไขปัญหานั้นๆ ฉะนั้นการจำลองแบบปัญหาจะเน้นถึงการสร้างแบบจำลอง และการทดลองเพื่อการศึกษาปัญหาต่างๆ ที่ต้องการเรียนรู้ และแสดงผลลัพธ์ออกมาซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญยิ่งในการศึกษาด้านการแพทยศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา เศรษฐศาสตร์ และสาขาอื่นๆ อีกมากมาย แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพทย์ได้มีบทบาทอย่างมากต่อการทำความเข้าใจและแก้ปัญหเกี่ยวกับโรค เพื่อศึกษา วิเคราะห์ และนำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค

ในงานวิจัยชิ้นนี้เป็นการสร้าง พัฒนา และศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรคมาลาเรีย ตามกลุ่มอายุของผู้ป่วย และตามฤดูกาลในประเทศไทย โดยทำการศึกษา ทำความเข้าใจ พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหการระบาดของโรคมาลาเรีย หลังจากนั้นใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาวิเคราะห์แบบจำลอง แสดงผลการวิเคราะห์ที่ได้ เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันการระบาดของโรค เพื่อใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทย ท้าวมุมมองของทางสำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข และเพื่อเป็นแนวทางในการลดงบประมาณรายจ่ายทางการแพทย์ของประเทศไทย

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการระบาดของวิทยาของโรคมาลาเรียตามกลุ่มอายุของผู้ป่วย และตามฤดูกาลในประเทศไทย
2. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับการระบาดของวิทยาของโรคมาลาเรียตามกลุ่มอายุของผู้ป่วย และตามฤดูกาลในประเทศไทย
3. เพื่อศึกษา และค้นคว้าหาแนวทางในการลดการระบาดของโรคมาลาเรียตามกลุ่มอายุของผู้ป่วย และตามฤดูกาลในประเทศไทยโดยนำความรู้ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้
4. เพื่อนำศาสตร์ และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ และโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์
5. เพื่อเป็นแนวทางในการลดการระบาดของโรค และลดงบประมาณในการควบคุมการระบาดของโรคมาลาเรียในประเทศไทย

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. ศึกษา และค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับโรคมาลาเรีย ลักษณะการระบาดของโรค และสถิติผู้ป่วยโรคมาลาเรียในประเทศไทยตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 จนถึงปัจจุบัน จากสำนักโรคระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข
2. ศึกษา และค้นคว้าถึงปัจจัยที่มีผลต่อการระบาดของโรคมาลาเรีย
3. ศึกษา และสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคมาลาเรียตามกลุ่มอายุของผู้ป่วย และฤดูกาลในประเทศไทย
4. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้
5. แก้ไข และปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสม และสอดคล้องกับลักษณะการระบาดของโรคมาลาเรียในประเทศไทย
6. สรุปผลการวิจัย

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เป็นการสร้าง และเพิ่มความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการระบาดของโรคมาลาเรียในประเทศไทย
3. สามารถนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการศึกษา การวิจัย ทางด้านแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้
4. สอดคล้องแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 10 ยุทธศาสตร์การพัฒนาคุณภาพคนและสังคมไทยสู่สังคมแห่งภูมิปัญญาและการเรียนรู้ ประเภทการวิจัยประยุกต์
5. สามารถนำผลที่ได้จากการวิเคราะห์ และการวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ทางการแพทย์ได้
6. สามารถหาแนวทางใหม่ที่จะช่วยในการลดการระบาดของโรค โดยใช้เทคนิคและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาสร้างแบบจำลองการระบาดของโรคมาลาเรียในประเทศไทย ซึ่งเป็นการช่วยลดงบประมาณในการควบคุมการระบาดของโรค
7. เพื่อเป็นการช่วยให้ประชาชนรอดพ้นจากการเป็นโรคมาลาเรียในประเทศไทย ซึ่งในแต่ละปีมีประชาชนที่ป่วยจากโรคนี้เป็นจำนวนมาก
8. เพื่อเป็นการนำคณิตศาสตร์มาศึกษา และประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์กับวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์

1.5 ระเบียบวิธีการวิจัย

1. ศึกษา ค้นคว้าเกี่ยวกับโรคมาลาเรีย และลักษณะการแพร่ระบาดของโรคมาลาเรีย
2. ศึกษา และวิเคราะห์ข้อมูลของโรคมาลาเรีย
3. กำหนดตัวแปรในการวิจัย โดยที่ตัวแปรต้นคือ อายุของผู้ป่วย และฤดูกาลที่พบผู้ป่วยโรคนี้ ตัวแปรตามคือ จำนวนผู้ป่วยโรคมาลาเรีย
4. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคมาลาเรียในประเทศไทย
5. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ และประมวลผลที่ได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์
6. พัฒนา และแก้ไขปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ให้เหมาะสม
7. วิเคราะห์ และสรุปผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ พร้อมทั้ง

เสนอแนวทางในการลดการระบาดของโรคนี้โดยอ้างอิงความรู้ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์
และวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์

8. สรุป เขียนบทความวิจัย และรายงานผลการวิจัย

1.6 ทฤษฎีหรือกรอบแนวคิดของโครงการวิจัย (ภาคผนวก)

1. Standard Dynamical Analysis Method
2. The equilibrium state
3. The Routh-Hurwitz criteria
4. Local asymptotical stability

บทที่ 2

โรคมาลาเรีย (Malaria disease)

มาลาเรีย (malaria) หรือที่เรียกกันว่าไข้จับสั่นหรือไข้ป่า เป็นโรคติดต่อที่อยู่คู่กับมนุษย์มานานมาก แม้ปัจจุบันการแพทย์และสาธารณสุขได้ช่วยให้โรคนี้นับรทความรุนแรงลง หรือหมดไปในหลายประเทศหลายท้องถิ่น แต่มาลาเรียก็ยังคงความรุนแรงอยู่ในอีกหลายแห่งรวมทั้งในประเทศไทย ลักษณะที่สำคัญของท้องถิ่นที่ยังมีมาลาเรียคุกคามอยู่ คือ เป็นท้องถิ่นที่มีสภาวะอากาศร้อน มีแหล่งน้ำในบริเวณป่าและบ้านเรือนเหมาะที่จะเป็นแหล่งเพาะพันธุ์ของยุงที่เป็นพาหะของโรค จึงจัดได้ว่ามาลาเรียเป็นโรคเขตร้อนที่สำคัญ อีกทั้งการขาดระบบสาธารณสุขที่ด้อย การดูแลสุขภาพ รวมถึงการไม่ทราบถึงวิธีการป้องกันการติดต่อของโรค เมื่อป่วยแล้วยังมักมีความเป็นอยู่และพฤติกรรมที่เกื้อหนุนต่อการแพร่ของโรค เช่น ในการทำมาหากินต้องเข้าป่า หาของป่า หรือหักร้างทางป่าเพื่อเพาะปลูกหรือตั้งถิ่นฐานใหม่ เป็นต้น

2.1 ประวัติโรคมาลาเรีย

ตามหลักฐานการบันทึกได้มีรายงานติดเชื้อโรคมาลาเรียในประชากรมนุษย์ ตามหลักฐานการบันทึกได้มีการรายงานว่า การติดเชื้อโรคมาลาเรียในประชากรมนุษย์นั้นมานานกว่า 50,000 ปีแล้ว และเชื่อกันว่าอาจเป็นเชื้อก่อโรคในมนุษย์ที่มีการกำเนิดมาพร้อมกับมนุษย์บนโลกก็เป็นได้ ในช่วงประวัติศาสตร์ของมนุษยชาติ การติดเชื้อมาลาเรียได้มีการถูกบันทึกไว้อย่างต่อเนื่อง นับตั้งแต่ในประเทศจีนเมื่อ 2700 ปีก่อนคริสตกาล

ในสมัยเมื่อ 1,500 ปีก่อน แพทย์กรีกชื่อ ฮิปโปเครติส (Hippocrates) ได้พบว่ามาลาเรียเป็นโรคชนิดหนึ่งที่มีสาเหตุจากการที่ผู้ป่วยใช้ชีวิตใกล้ชิดกับบริเวณที่มีน้ำนิ่ง แต่เขาไม่รู้ว่า

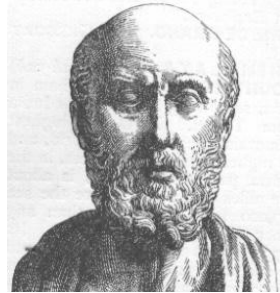
แท้จริงแล้วมีสาเหตุมาจากยุง เขาจึงได้รับการยกย่องให้เป็นนักมาลาเรียวิทยาคนแรกของโลก อีกทั้งโรมในอดีตเมื่อ 700 ปีก่อนก็เคยถูกคุกคามด้วยโรคมาลาเรีย จนกระทั่งแหล่งน้ำเน่าใน เมืองถูกกำจัดหมด ชาวโรมันในสมัยนั้นจึงได้ตั้งชื่อโรคร้ายนี้ว่า มาลาเรีย(malaria) ซึ่งเป็น ภาษาอิตาเลียน แปลว่า อากาศเสีย โดยมาจากการสนธิคำ mal ที่แปลว่าเสียกับคำ aria ที่ แปลว่าอากาศ ซึ่งเกิดจากความเข้าใจผิดแต่เดิมว่าโรคนี้มีสาเหตุมาจากอากาศเสียในแหล่ง ต่างๆ เช่น บึงน้ำและที่ลุ่มซึ่งมีมากแถวชานกรุงโรม

ในปี พ.ศ. 2423 เมื่อแพทย์ทหารชาวฝรั่งเศสที่ทำงานในประเทศอัลจีเรียชื่อ Charles Louis Alphonse Laveran ได้สังเกตเห็นปรสิตในเม็ดเลือดแดงของคนที่เป็นด้วยโรคมาลาเรีย จึงเสนอแนวคิดที่ว่าสาเหตุก่อโรคมาลาเรียคือเชื้อโปรโตซัว

ในปี พ.ศ. 2450 เชื้อโปรโตซัวนี้ได้รับการตั้งชื่อว่า พลาสโมเดียม (Plasmodium) โดย นักวิทยาศาสตร์ชาวอิตาลีชื่อ Ettore Marchiafava และ Angelo Celli ในปีต่อมาแพทย์ชาว คิวบาชื่อ Carlos Finley ซึ่งปฏิบัติหน้าที่รักษาผู้ป่วยโรคไข้เหลืองในฮาวานาได้เสนอว่า มาลาเรียสามารถติดต่อได้โดยมียุงเป็นพาหะ

ในปี พ.ศ. 2441 แพทย์ชาวอังกฤษชื่อ Sir Ronald Ross ที่ทำงานอยู่ในประเทศอินเดียได้ พิสูจน์ว่าเชื้อมาลาเรียติดต่อผ่านทางยุงได้จริง เขาสามารถพิสูจน์ได้ว่ายุงชนิดหนึ่งได้นำเชื้อ โรคนี้ติดต่อไปยังนก และสามารถสกัดปรสิตมาลาเรียจากต่อมน้ำลายของยุงที่ไปกัดนกที่ติด เชื้อตัวนั้นได้การค้นพบของ Finlay และ Ross ได้รับการยืนยันในเวลาต่อมาโดย medical board นำโดย Walter Reed ในปี พ.ศ. 2443 และได้รับการนำไปใช้ William C. Gorgas ใน

หน่วยงานสาธารณสุขระหว่างการก่อสร้างคลองปานามา การปฏิบัติงานทางสาธารณสุขนี้ได้ช่วยชีวิตคนงานนับพันและได้เริ่มสร้างวิธีการในการต่อสู้กับโรคมาลาเรียในปัจจุบัน



รูปที่ 2.1 Hippocrates บิดาทางการแพทย์และนักมาลาเรียวิทยาคนแรกของโลก

2.2 เชื้อที่เป็นสาเหตุของโรค

มาลาเรียเป็นโรคที่เกิดจากเชื้อโปรโตซัวพลาสโมเดียม ซึ่งจะพบได้ในสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม สัตว์ปีก และสัตว์เลื้อยคลาน รวมพลาสโมเดียมทั้งหมดมีมากกว่า 120 ชนิด โดยเชื้อที่ทำให้เกิดโรคในคนที่สำคัญมี 4 ชนิด คือ

1. พลาสโมเดียมซัลซิฟารัม (*Plasmodium falciparum*) จะมีอาการไข้จับสั่นวันเว้นวัน และจับไข้ทุก 36 ชั่วโมง ซึ่งเชื้อชนิดนี้ก่อโรครุนแรงที่สุดและอันตรายมากที่สุด ผู้ที่ได้รับเชื้อนี้เข้าไปและไม่ได้รับการรักษาจะมีอาการรุนแรงและเกิดเป็นมาลาเรียขึ้นสมองได้ แต่ถ้าได้รับการรักษาและหายจากโรคแล้วมักจะหายเป็นปกติ โดยไม่มีอาการอื่นหลงเหลืออีกเลย ผู้ป่วยฟัลซิฟารัมมาลาเรียจะเกิดภาวะแทรกซ้อนที่ทำให้เสียชีวิตได้ ได้แก่ ภาวะมาลาเรียขึ้นสมอง ภาวะไตวายเฉียบพลัน และภาวะช็อก ซึ่งเชื่อนี้พบมากที่สุดในแต่ละปี โดยจะพบได้ทั่วไปบริเวณเขตร้อนและเขตอบอุ่น



รูปที่ 2.2 พลาสโมเดียมซัลซิฟารัม

2. พลาสโมเดียมไวแวกซ์ (*Plasmodium vivax*) จะมีอาการไข้จับวันเว้นวัน ชนิดไม่ร้ายแรง จับไข้ทุก 4 ชั่วโมง ผู้ป่วยที่เป็นไวแวกซ์มาลาเรียมักจะไม่มีเสียชีวิต แต่ผู้ป่วยจะเป็นโรคซ้ำอีก ผู้ป่วยที่ไม่ได้รับการรักษาอาการไข้มักจะค่อยๆ หายและหายได้ แต่จะเป็นซ้ำได้อีกภายใน 2 ปี นานที่สุด 8 ปี เชื้อนี้มีการแพร่กระจายเป็นอาณาบริเวณกว้างมากคือ บริเวณเส้นรุ้งที่ 40 องศาใต้ ไปจนถึงเส้นรุ้งที่ 60 องศาเหนือ แต่ที่พบมากคือ บริเวณเส้นรุ้งที่ 30 องศาใต้ ไปจนถึงเส้นรุ้งที่ 45 องศาเหนือ ซึ่งจะพบได้ทั้งเขตร้อน เขตกึ่งร้อน และเขตอบอุ่น ประเทศไทยพบมากในบริเวณภาคใต้

3. พลาสโมเดียมมาลาเรีย (*Plasmodium malariae*) มีลักษณะคล้ายกับเชื้อไวแวกซ์ คือ เชื้อนี้จะกลับไปเป็นซ้ำได้อีก และถ้าไม่ได้รับการรักษาอาการไข้มักจะหายไปได้เองแต่เป็นซ้ำได้อีกภายใน 1 ปี นานที่สุด 5 ปี โอกาสในการกลับไปเป็นอีกมีน้อยกว่าเชื้อไวแวกซ์ เชื้อมาลาเรียเป็นเชื้อที่ไม่แพร่หลายนัก พบในแอฟริกากลางและตะวันตก ศรีลังกาและบางส่วนของมาเลเซีย

4. พลาสโมเดียมโอวาล์ (*Plasmodium ovale*) ผู้ป่วยมักไม่มีอาการรุนแรง และมักจะเกิดอาการไข้อาจใช้เวลานานเป็นปี เชื้อมาลาเรียอยู่ในคนได้เป็นเวลานานหลายปี พบมากใน

แอฟริกาตะวันตก สำหรับในประเทศไทยพบน้อยมากเพียงปีละ 1-2 ราย และมักพบบริเวณ
จังหวัดชายแดนซึ่งมีมาลาเรียชุกชุม

2.3 ยุงก้นปล่องที่เป็นพาหะนำโรคมมาลาเรีย

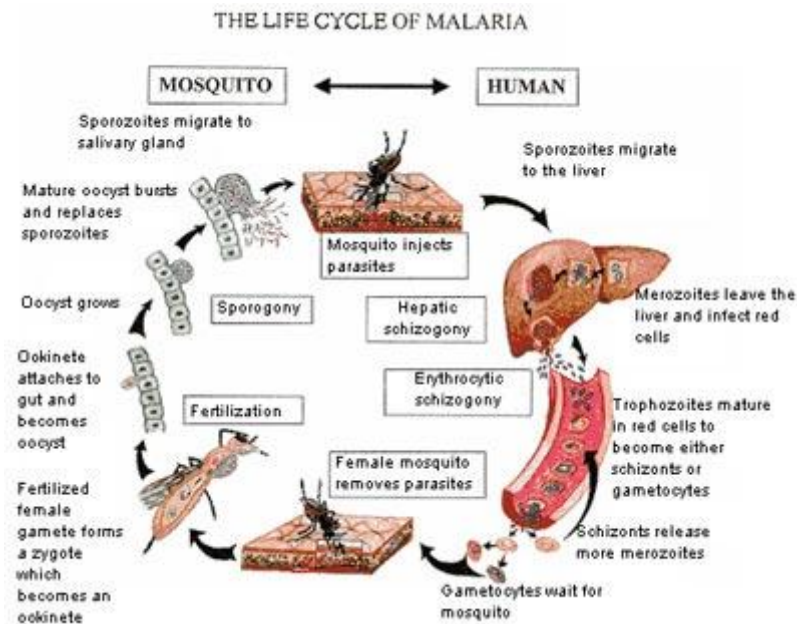


รูปที่ 2.3 ยุงก้นปล่องพาหะนำโรคมมาลาเรีย

มาลาเรีย เป็นกันมากในจังหวัดตามแนวชายแดนและจังหวัดที่ยังมีป่าทึบ เนื่องจาก
พาหะของมาลาเรีย คือ ยุงก้นปล่อง ที่เรียกเช่นนี้เนื่องจากเวลาที่ยุงชนิดนี้กัดคน จะเกาะโดย
ยกกันขึ้นทำมุมกับผิวหนัง 45 องศา ซึ่งยุงก้นปล่องที่เป็นพาหะของมาลาเรียที่สำคัญใน
เมืองไทยมี 3 ชนิด คือ

1. *Anopheles minimus* เพาะพันธุ์ตามลำธารที่มีน้ำใสสะอาดไหลช้า ๆ มีหญ้าขึ้นตามขอบ
และมีร่มเงาเล็กน้อย พบในท้องที่แถบเขาหรือใกล้เขา ชอบกินเลือดคนมากกว่าสัตว์
2. *Anopheles dirus* เพาะพันธุ์ตามแหล่งน้ำนิ่ง มีร่มเงา เช่น ตามปลักโคลน รอยเท้าสัตว์ และ
แหล่งน้ำชั่วคราวที่มีน้ำใส มีใบไม้แห้ง ชอบอยู่ตามเขาและป่าเชิงเขา กัดคนตอนกลางคืน
ตั้งแต่เวลา 22.00 น. และมากที่สุดหลังเที่ยงคืน มีนิสัยชอบเกาะพักนอกบ้าน ชอบกินเลือดคน
3. *Anopheles maculates* เพาะพันธุ์ตามท้องที่ป่าเขา แหล่งเพาะพันธุ์ ได้แก่ ลำธารเล็กๆ ที่มี
แสงแดดส่องถึง ตัวเต็มวัยชอบเกาะพักตามพุ่มไม้เตี้ยๆ กินเลือดทั้งคนและสัตว์ หากินนอก
บ้านมากกว่าในบ้าน

2.4 การติดต่อของโรคโดยพาหะมายังคน



รูปที่ 2.4 วงจรชีวิตของโรคมาลาเรีย

เมื่อยุงก้นปล่องตัวเมียมีเชื้อมาลาเรียกัดคน ยุงจะปล่อยเชื้อมาลาเรียที่เรียกว่า สปอร์โรซอยด์ (sporozoite) จากต่อมน้ำลายเข้าสู่กระแสเลือดของคน จากนั้นเชื้อจะเดินทางไปเซลล์ตับภายใน 1 ชั่วโมงและเกิดการแบ่งเซลล์แบบไม่อาศัยเพศ ทำให้ได้เมโรซอยด์ (merozoite) นับพันตัว จากนั้นเซลล์ตับจะโตและแตกออกปล่อยเมโรซอยด์ออกมาในกระแสเลือด ระยะนี้ผู้ป่วยจะเริ่มแสดงอาการของโรค คือ ไข้ หนาวสั่น ปวดศีรษะ สำหรับเชื้อพลาสโมเดียมไวแวกซ์และพลาสโมเดียมโอวาล์ เชื้อบางส่วนยังคงอยู่ในเซลล์ตับแล้วจะหยุดพักการเจริญชั่วขณะ เรียกระยะหยุดพักนี้ว่า ฮิพโนซอยด์ (hypnozoite) ทำให้เกิดการกลับเป็นซ้ำ (relapse) ได้อีก

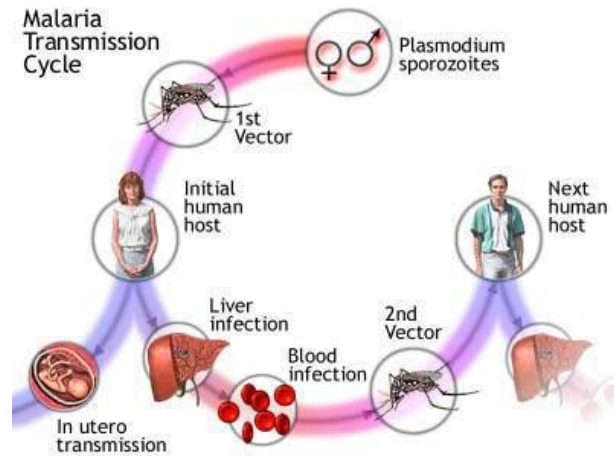
หลังจากที่เมโรซอยด์เข้าสู่กระแสเลือด เชื้อจะเดินทางต่อไปยังม้ามเลือดแดงและกินฮีโมโกลบินในเม็ดเลือดแดงเป็นอาหาร หลังจากนั้นจะเจริญเป็นโทรโฟซอยด์ (trophozoite)

และแบ่งตัวอีกครั้งเป็นเมโรซอยต์ 6-30 ตัว เมื่อเม็ดเลือดแดงแตกเมโรซอยต์จะเดินทางไปยังเม็ดเลือดแดงอื่น แล้วเจริญแบ่งตัวจนเวียนอยู่เช่นนี้ เมโรซอยต์บางตัวจะมีการเปลี่ยนแปลงเป็นเชื้อมีเพศที่เรียกว่า แกมิโตไซต์ (gametocyte) ซึ่งมีทั้งเพศผู้และเพศเมีย เมื่อยังกักตัวอยู่ในเม็ดเลือดแดงที่มีแกมิโตไซต์ในกระแสเลือด เชื้อเหล่านี้จะผสมพันธุ์กันเป็นไซโกตเจริญเป็น oocyst ฟังตัวที่กระเพาะยุง แล้วแบ่งตัวเป็นสปอโรซอยต์ไปยังต่อมน้ำลาย พร้อมทั้งจะถูกปล่อยเข้าสู่กระแสโลหิตของคนต่อไป

2.5 วิธีการแพร่ระบาดของโรค

1. การแพร่โดยธรรมชาติ (Natural transmission) โดยการถูกยุงก้นปล่องตัวเมียที่มีเชื้อมาลาเรียในต่อมน้ำลายกัด และปล่อยเชื้อเข้าสู่กระแสเลือดคน เป็นวิธีที่พบได้มากที่สุดและผู้ป่วย

2. การแพร่ผ่านทางรก (congenital transmission) โดยจะติดต่อจากมารดาซึ่งมีเชื้อมาลาเรียในร่างกาย และถ่ายทอดทางรกไปสู่ทารกในครรภ์ วิธีนี้พบได้น้อยมาก มักพบในพื้นที่ที่มีมาลาเรียชุกชุม กรณีเช่นนี้จะพบระยะฟักตัวสั้นกว่าวิธียุงกัด โดยทารกแรกเกิดและมารดาจะมีเชื้อมาลาเรียชนิดเดียวกัน



รูปที่ 2.5 การแพร่ระบาดของโรคมาลาเรียโดยวิธีธรรมชาติและวิธีแพร่ผ่านทารก

3.การแพร่โดยบังเอิญ (accidental transmission) เช่น การถ่ายเลือด จะพบในรายที่ผู้บริจาคโลหิตมีความหนาแน่นของเชื้อมาลาเรียในกระแสโลหิตต่ำและไม่มีอาการ หากไม่ได้ทำการตรวจโลหิตหาเชื้อมาลาเรียก่อน ผู้ป่วยที่ได้รับการถ่ายเลือดจากผู้ป่วยจะเป็นมาลาเรียได้, การใช้เข็มฉีดยาร่วมกันในผู้เสพยาเสพติด

4.การแพร่โดยเจตนา (deliberate transmission) เช่น การใช้มาลาเรียในการรักษาโรคซิฟิลิส โดยเอาเลือดจากผู้ป่วยโรคมาลาเรียให้แก่ผู้ป่วยที่เป็นซิฟิลิสขึ้นสมอง

2.6 อาการของโรค

ระยะฟักตัวของโรค คือ ระยะเวลาตั้งแต่ถูกยุงกัดจนกระทั่งเกิดอาการของมาลาเรีย ซึ่งระยะการฟักตัวนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของเชื้อ ดังนี้

- พลาสโมเดียมซัลซิฟารัม ระยะฟักตัวประมาณ 7-14 วัน
- พลาสโมเดียมไวเวกซ์และพลาสโมเดียมโอวาล์ ระยะฟักตัวประมาณ 8-14 วัน
- พลาสโมเดียมมาลาริอี ระยะฟักตัวประมาณ 18-40 วัน

อาการแสดงของโรคมาลาเรียหลังการฟักตัวไม่มีลักษณะพิเศษที่บ่งบอกเฉพาะ โดยมากจะมีอาการนำคล้ายกับคนเป็นไข้หวัด คือ มีไข้ต่ำ ๆ ปวดศีรษะ ปวดตามตัว และ กล้ามเนื้อ อาจมีอาการคลื่นไส้เบื่ออาหารได้ อาการนี้จะเป็นเพียงระยะสั้นเป็นวันหรือหลายวันได้ ขึ้นอยู่กับระยะฟักตัวของเชื้อ จำนวนของ สปอโรซอยต์ที่ผู้ป่วยได้รับเข้าไป ชนิดของ เชื้อ ภาวะภูมิคุ้มกันต้านต่อเชื้อมาลาเรียของผู้ป่วย ภาวะที่ผู้ป่วยได้รับยาป้องกันมาลาเรียมาก่อน หรือยาที่ใช้ในการรักษาที่ได้รับ อาการไข้ที่เป็นอาการที่เด่นชัดของมาลาเรีย ประกอบด้วย 3 ระยะ คือ

- 1.ระยะสั้น ผู้ป่วยจะมีอาการหนาวสั่น ปากและตัวสั่น ซีด ผิวหนังแห้งหยาบ อาจเกิดขึ้นนานประมาณ 15 – 60 นาที ระยะนี้ตรงกับ การแตกของเม็ดเลือดแดงที่มีเชื้อมาลาเรีย
- 2.ระยะร้อน ผู้ป่วยจะมีไข้สูง อาจมีอาการคลื่นไส้อาเจียนร่วมด้วย หน้าแดง ระยะนี้ใช้เวลา 2 – 6 ชั่วโมง
- 3.ระยะเหงื่อออก ระยะนี้เหงื่อจะเริ่มออกที่ขมับก่อนแล้วจึงออกทั้งตัว หลังจากระยะเหงื่อออก จะมีอาการอ่อนเพลีย ไข้ลด

ปัจจุบันนี้จะพบลักษณะทั้ง 3 ระยะได้น้อยมาก ผู้ป่วยจะมีไข้สูงตลอดเวลา โดยเฉพาะในผู้ป่วยที่เป็นมาลาเรียครั้งแรก เนื่องจากในระยะแรกของการติดเชื้อมาลาเรีย เชื้อ อาจเจริญถึงระยะแก่ไม่พร้อมกัน ซึ่งอาจเป็นผลมาจากได้รับเชื้อในเวลาต่างกัน เชื้อจึงเจริญใน เม็ดเลือดแดงไม่พร้อมกัน ทำให้เกิดมีเชื้อหลายระยะ การแตกของเม็ดเลือดแดงจึงไม่พร้อมกัน ผู้ป่วยมาลาเรียในระยะแรกอาจมีไข้สูงตลอดเวลาแต่เมื่อผ่านไประยะหนึ่งแล้ว การแตกของเม็ดเลือดแดงเกิดขึ้นพร้อมกัน จะเห็นผู้ป่วยมีการจับไข้หนาวสั่นเป็นเวลา แยกได้ชัดเจน

ตามชนิดของเชื้อมาลาเรีย โดยเชื้อไวแวกซ์ ฟัสซิพาร์ม และโอวัลเล่ ใช้เวลาในการแบ่งตัว 48 ชั่วโมง จึงทำให้เกิดไข้ทุกวันที่ 3 ส่วนมาลาเรียอีใช้เวลา 72 ชั่วโมง อาการไข้จึงเกิดทุกวันที่ 4

ภายหลังที่เป็นมาลาเรียได้ระยะหนึ่ง จะตรวจพบว่าผู้ป่วยซีด บางคนมีตัวเหลือง ตาเหลือง ตับ และม้ามโต บางรายกดเจ็บ ถ้าเม็ดเลือดแดงแตกมาก ๆ จะพบว่าผู้ป่วยมีปัสสาวะดำ

2.7 วิธีการรักษาโรคมาลาเรีย

มาลาเรียเป็นโรคติดเชื้อทางปรสิตที่สำคัญมากที่สุด เนื่องจากในแต่ละปีมีผู้เป็นโรคมาลาเรียมากถึง 300 ถึง 500 ล้านคน และเสียชีวิตปีละ 1 ถึง 3 ล้านคน ดังนั้นการรักษาโรคมาลาเรียอย่างถูกต้อง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเลือกใช้ยาต้านโรคมาลาเรียให้เหมาะสมจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง มาลาเรียเป็นโรคที่รักษาให้หายขาดได้ โอกาสที่ผู้ป่วยจะเสียชีวิตน้อยมาก ถ้าผู้ป่วยได้รับการวินิจฉัยที่ถูกต้องรวดเร็ว และได้รับการรักษาด้วยยาที่มีประสิทธิภาพสูง การแยกชนิดของเชื้อมีความสำคัญมาก เนื่องจากการเลือกใช้ยาสำหรับเชื้อแต่ละชนิดนั้นต่างกัน ยาที่ใช้ในการรักษาไข้มาลาเรียมีหลายขนาน เช่น คลอโรควิน เมโฟลควิน อาร์ทีเมเทอร์ เตตราซัยคลิน เป็นต้น การให้ยารักษาโรคขึ้นกับปัจจัยหลายอย่าง เช่น ชนิดของเชื้อ เชื้อคือยา ระยะของโรค ความรุนแรงของโรค

การรักษามาลาเรีย แบ่งออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1.การรักษาจำเพาะ เป็นการกำจัดเชื้ออันเป็นต้นเหตุของโรคที่ทำให้เกิดอาการป่วยไข้ โดยการให้ยาฆ่าเชื้อระยะไรเฟส (blood schizonticide) กำจัดเชื้อมาลาเรียที่เป็น schizont

ซึ่งเป็นระยะไร้เพศในเม็ดเลือดแดง การเลือกชนิดของยาฆ่าเชื้อระยะไร้เพศนั้น ควรพิจารณาประสิทธิภาพของยาต่อเชื้อมาลาเรีย ตามลักษณะการดื้อยาของเชื้อมาลาเรียในพื้นที่ต่างๆ กัน

2.การบำบัดอาการและภาวะแทรกซ้อน คือ การบำบัดอาการและภาวะแทรกซ้อนอื่นๆ ที่เกิดขึ้นระหว่างที่ผู้ป่วยยังมีเชื้อมาลาเรีย หรือภายหลังที่เชื้อมาลาเรียหมดแล้ว โดยเฉพาะผู้ป่วยที่ติดเชื้อมาลาเรียซัลซิฟาร์ม ถ้าได้รับการรักษาซ้ำ จะมีภาวะแทรกซ้อนรุนแรงได้

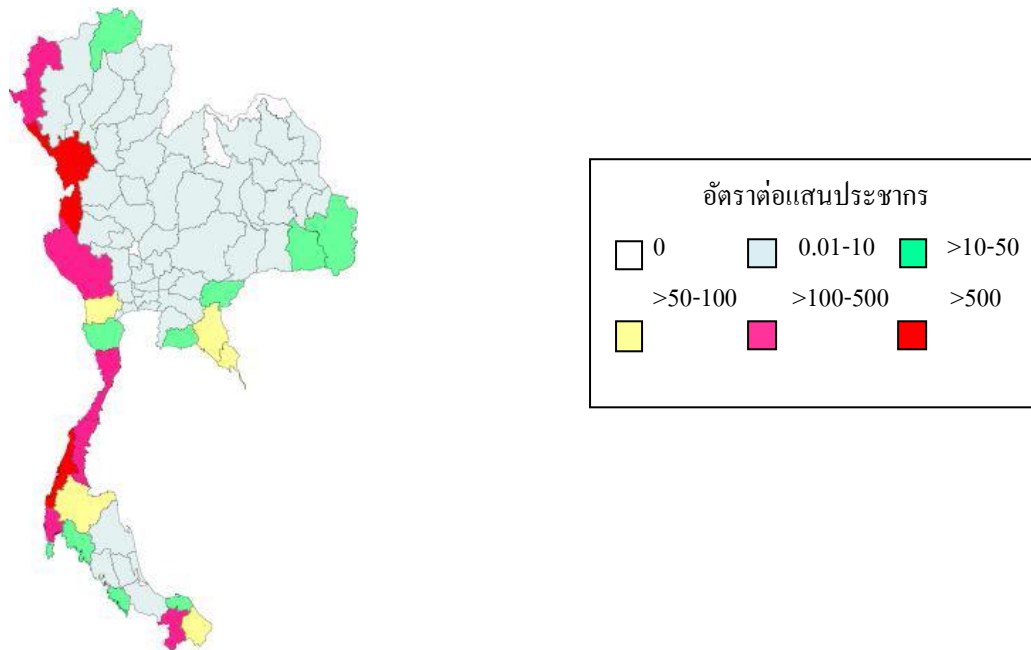
3.การป้องกันการแพร่โรค คือ การใช้ยา gametocytocide ฆ่าเชื้อมาลาเรียระยะติดต่อ คือ แกมโตไซด์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งผู้ป่วยที่อยู่ในห้องที่มียุงพาหะ

2.8 โรคมาลาเรียในประเทศไทย

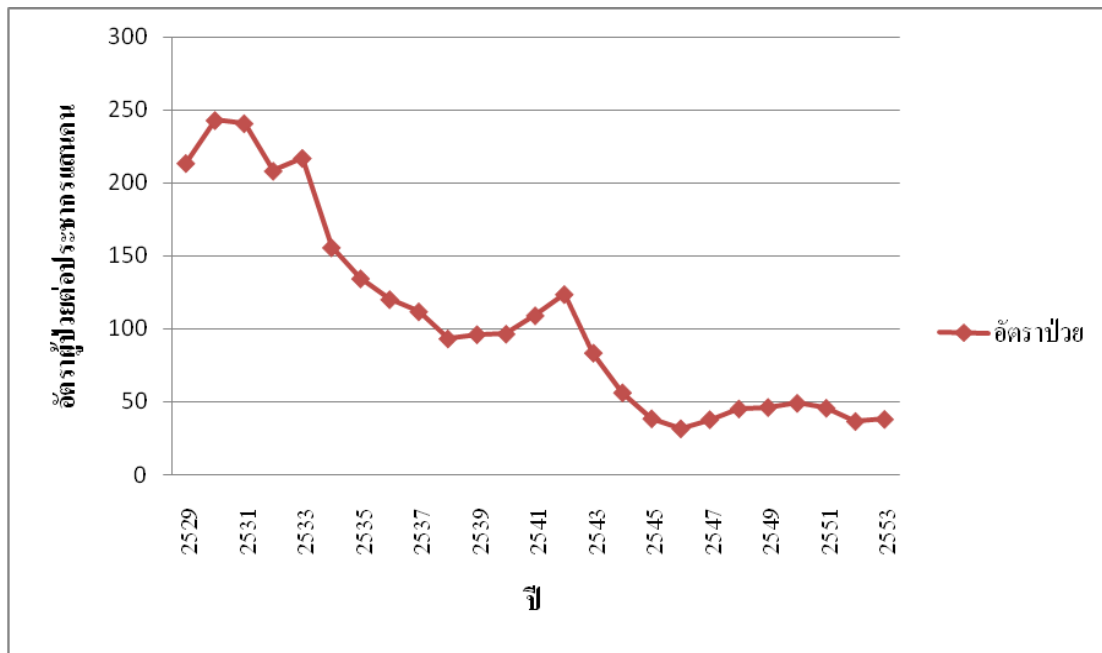
แหล่งระบาดของมาลาเรียในประเทศไทยจะอยู่ตามจังหวัดชายแดน โดยเฉพาะบริเวณชายแดนไทย - พม่า และไทย - กัมพูชา ซึ่งเป็นบริเวณที่เป็นภูเขาสูง ป่าทึบ และมีแหล่งน้ำ ลำธาร ซึ่งเป็นแหล่งแพร่พันธุ์ของยุงก้นปล่อง จังหวัดที่พบผู้ป่วยส่วนใหญ่ ได้แก่ แม่ฮ่องสอน ตาก ตรัง หนองคาย จันทบุรี สระแก้ว ประจวบคีรีขันธ์ ราชบุรี และชุมพร ในตอนกลางของประเทศพบผู้ป่วยมาลาเรียได้น้อย และไม่พบการติดเชื้อในกรุงเทพมหานคร และเขตปริมณฑล พบผู้ป่วยกระจายทุกกลุ่มอายุ โดยเฉพาะในกลุ่มอายุ 10-35 ปี อัตราส่วนของผู้ป่วยเพศชายจะมากกว่าเพศหญิงประมาณ 2 เท่า พบผู้ป่วยได้ตลอดทั้งปี แต่จะพบมากในช่วงฤดูฝน

ในปี 2553 จะพบว่าจังหวัดที่มีอัตราป่วยต่อแสนประชากรสูงที่สุด 5 อันดับ คือ ตาก (1509.06 ต่อแสนประชากร), หนองคาย (913.87 ต่อแสนประชากร), แม่ฮ่องสอน (477.99 ต่อแสนประชากร), ชุมพร (472.17 ต่อแสนประชากร), พังงา (459.75 ต่อแสนประชากร) โดย

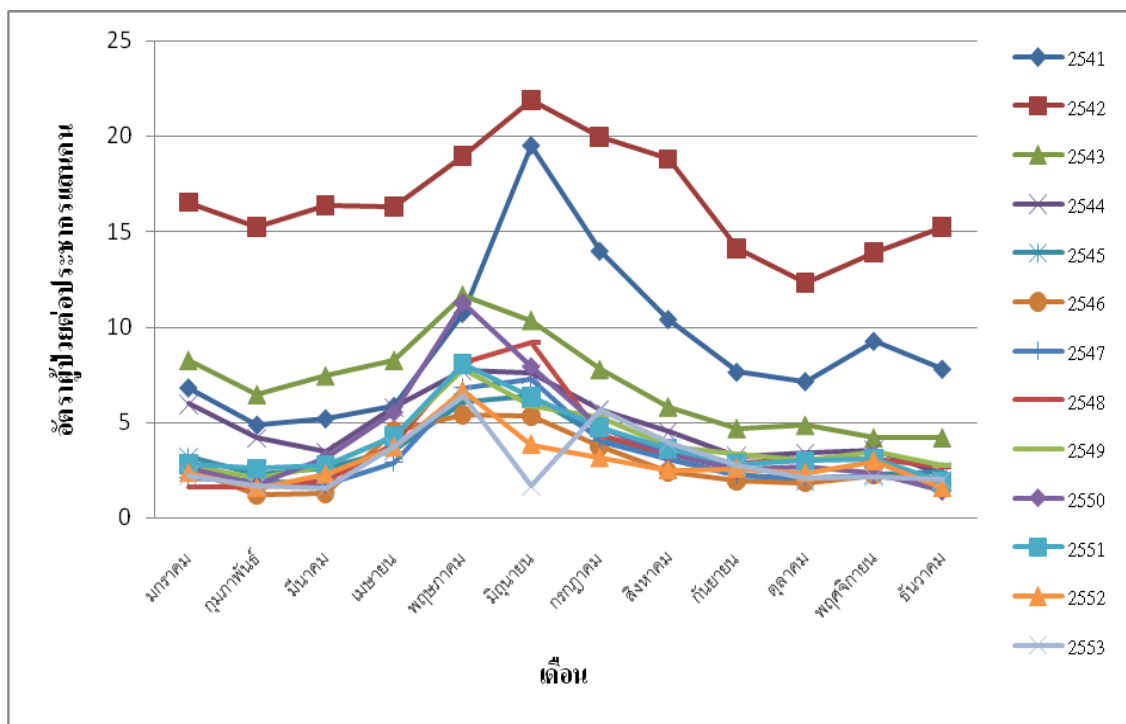
ภาคที่มีผู้ป่วยมากที่สุดได้แก่ ภาคใต้ 103.34 ต่อแสนประชากร, ภาคเหนือ 81.53 ต่อแสนประชากร และภาคกลาง 21.44 ต่อแสนประชากร



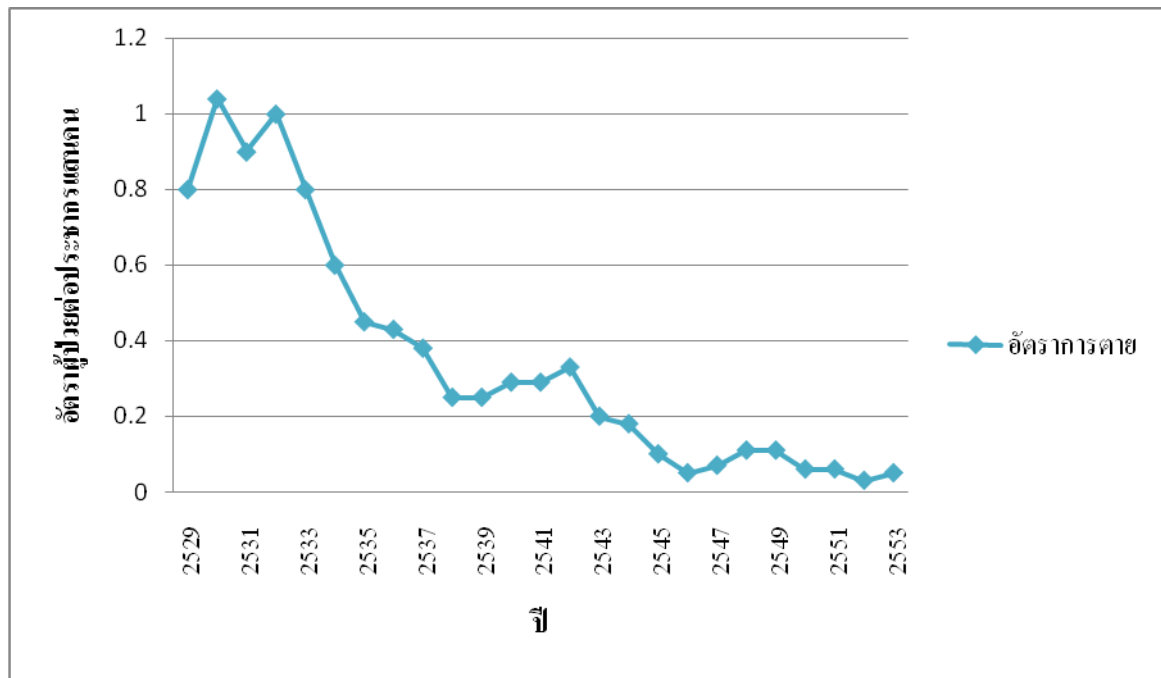
รูปที่ 2.6 แผนภาพแสดงความหนาแน่นของแต่ละบริเวณที่พบผู้ป่วยมาลาเรียในปี 2553 (มกราคม – 13 ธันวาคม)



รูปที่ 2.7 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยของโรคมาลาเรียในแต่ละปีในประเทศไทยตั้งแต่ปี 2529 ถึง 13 ธันวาคม 2553

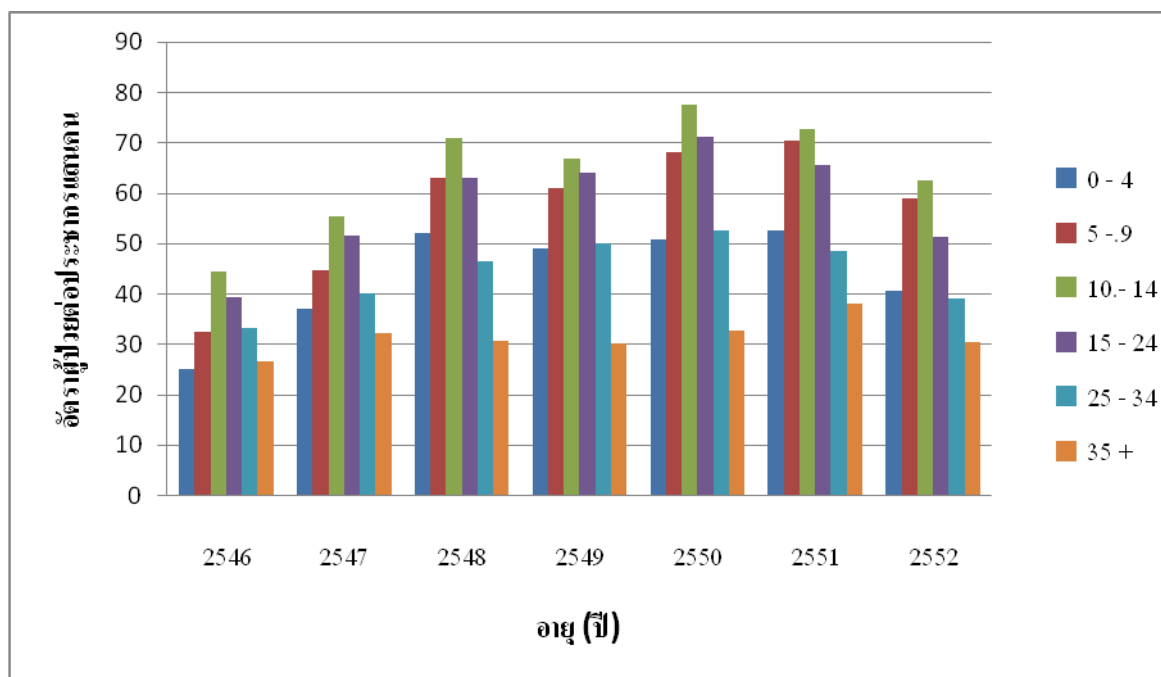


รูปที่ 2.8 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยของโรคมาลาเรียในแต่ละเดือนในประเทศไทย ตั้งแต่ปี 2541 ถึง 2553



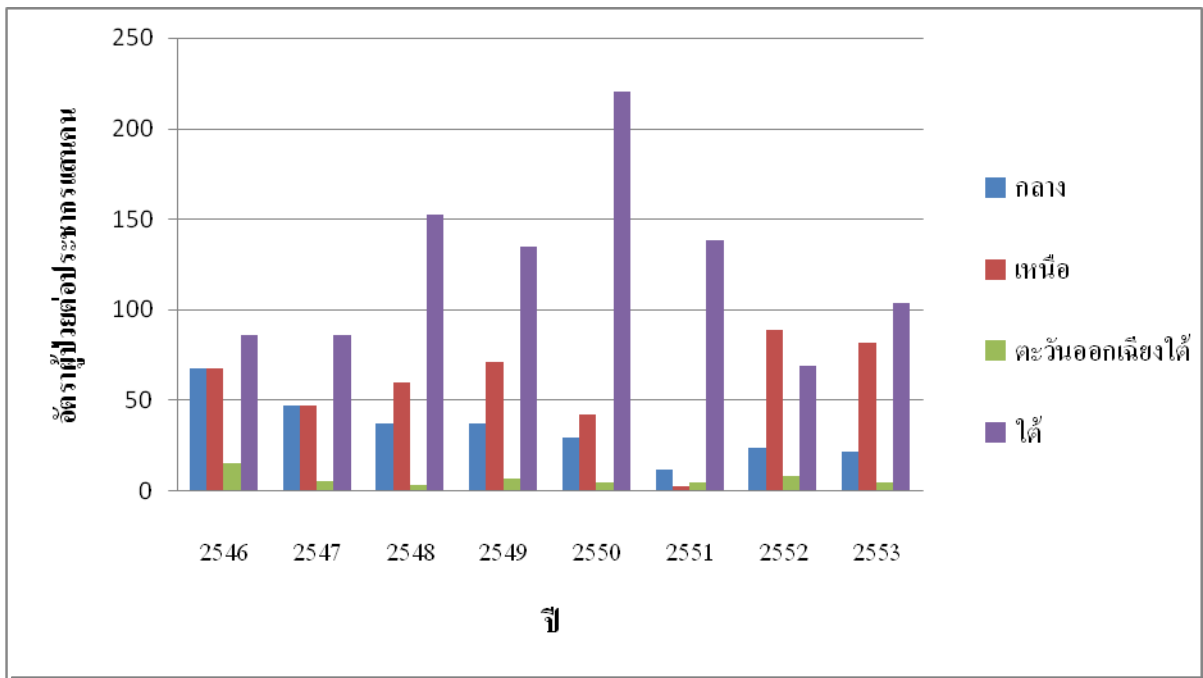
รูปที่ 2.9 กราฟแสดงอัตราการตายในแต่ละปีของโรคมาลาเรียในประเทศไทย

ตั้งแต่ปี 2546 ถึง 13 ธันวาคม 2553



รูปที่ 2.10 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยของโรคมาลาเรียในแต่ละช่วงอายุในประเทศไทยตั้งแต่ปี

2546 ถึง 2552



รูปที่ 2.11 กราฟแสดงอัตราผู้ป่วยของโรคมาลาเรียรายภาคในประเทศไทยตั้งแต่ปี 2546 ถึง 13

ธันวาคม 2553

บทที่ 3

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โรคมัลเรียของผู้เสี่ยง และผู้ติดเชื้อสำหรับเด็กและผู้ใหญ่ และ

การวิเคราะห์

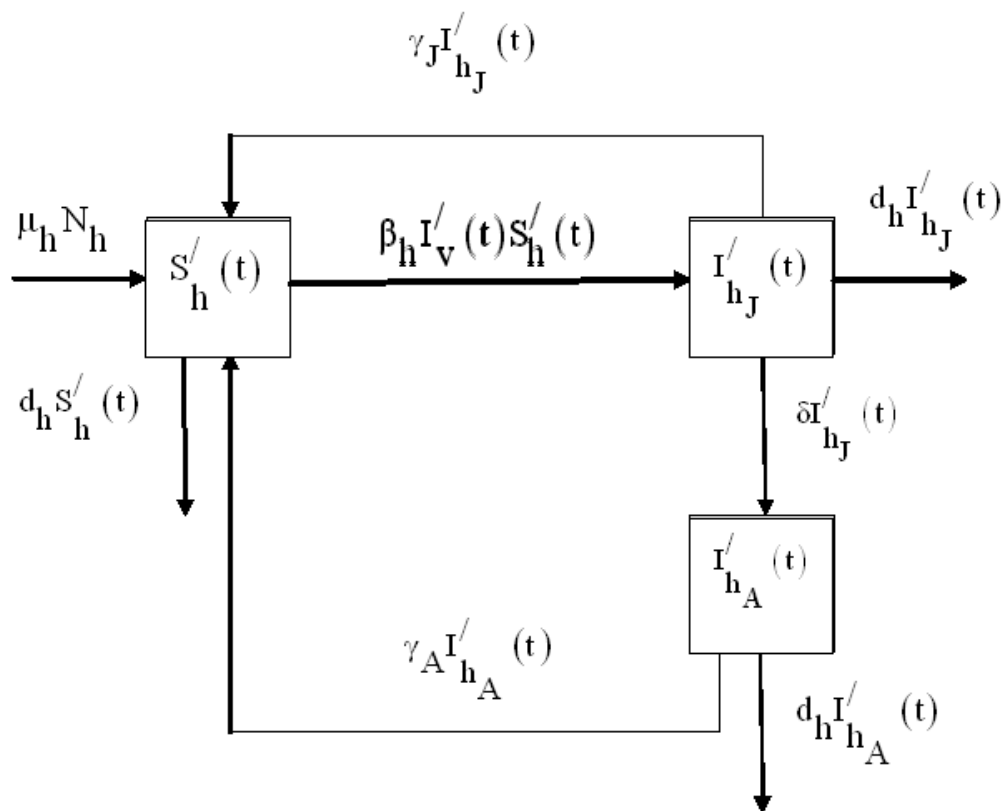
3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โรคมัลเรียของผู้เสี่ยง และผู้ติดเชื้อสำหรับเด็กและผู้ใหญ่

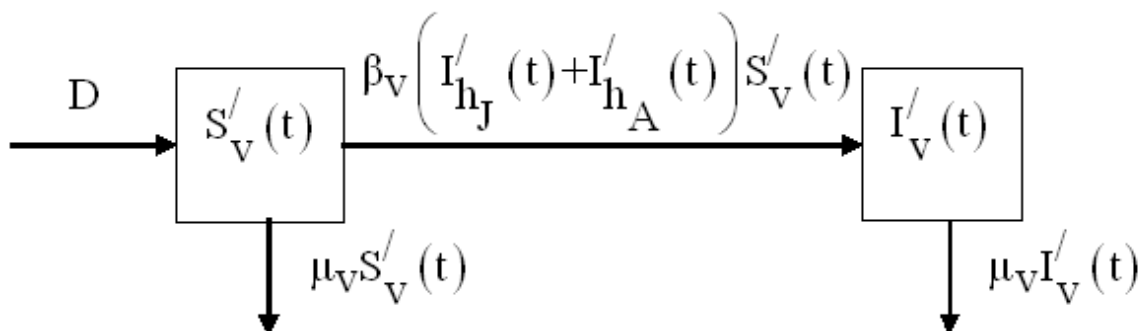
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคมัลเรีย ในบทนี้แบ่งประชากร

ออกเป็นเด็กและผู้ใหญ่ โดยที่ประชากรเด็กหมายถึงประชากรที่มีอายุน้อยกว่า 15 ปี และ

ผู้ใหญ่หมายถึงประชากรที่มีอายุตั้งแต่ 15 ปีขึ้นไป ประชากรแบ่งออกเป็น ผู้ที่เสี่ยงต่อการติด

เชื้อ และผู้ที่ติดเชื้อ และประชากรยังแบ่งออกเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ และผู้ที่ติดเชื้อ





รูปที่ 3.1 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้มาลาเรียเมื่อประชากรคน

แบ่งออกเป็นเด็ก และผู้ใหญ่

$$\frac{d}{dt} S'_h(t) = \mu_h N_h + \gamma_A I'_{h_A}(t) + \gamma_J I'_{h_J}(t) - \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - d_h S'_h(t)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{h_J}(t) = \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - \gamma_J I'_{h_J}(t) - \delta I'_{h_J}(t) - d_h I'_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{h_A}(t) = \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_A I'_{h_A}(t) - d_h I'_{h_A}(t)$$

$$\frac{d}{dt}S'_v(t) = D - \mu_v S'_v(t) - \beta_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t)$$

$$\frac{d}{dt}I'_v(t) = \beta_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t) - \mu_v I'_v(t)$$

โดยที่ตัวแปรในแบบจำลองมีความหมายดังนี้

$S'_h(t)$ คือจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

$I'_{h_J}(t)$ คือจำนวนของเด็กที่ติดเชื้อ

$I'_{h_A}(t)$ คือจำนวนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ

$S'_v(t)$ คือจำนวนของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

$I'_v(t)$ คือจำนวนของยุงที่ติดเชื้อ

พารามิเตอร์แต่ละตัวมีความหมายดังนี้

μ_h คือ อัตราการเกิดของประชากร

d_h คือ อัตราการเสียชีวิตของประชากร

N_h คือ จำนวนประชากรทั้งหมด

β_h คือ อัตราการถ่ายทอดเชื้อของโรคนี้จากยุงไปคน

γ_J คือ อัตราที่เด็กที่ติดเชื้อกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

γ_A คือ อัตราที่ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

δ คือ อัตราที่เด็กเติบโตเป็นผู้ใหญ่

β_v คือ อัตราการถ่ายทอดเชื้อของโรคนี้จากคนไปยุง

μ_v คือ อัตราการเสียชีวิตของยุง

D คือ จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น

N_v คือ จำนวนของยุงทั้งหมด

กำหนดให้จำนวนประชากรคนและยุงมีค่าคงที่ โดยที่

$$N_h = S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t)$$

และ

$$N_v = S'_v(t) + I'_v(t)$$

พิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรคน และประชากรยุง ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}N_h &= \frac{d}{dt}\left(S'_h(t)+I'_{h_J}(t)+I'_{h_A}(t)\right) \\
&= \frac{d}{dt}S'_h(t)+\frac{d}{dt}I'_{h_J}(t)+\frac{d}{dt}I'_{h_A}(t) \\
&= \mu_h N_h + \gamma_A I'_{h_A}(t) + \gamma_J I'_{h_J}(t) - \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - d_h S'_h(t) \\
&\quad + \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - \gamma_J I'_{h_J}(t) - \delta I'_{h_J}(t) - d_h I'_{h_J}(t) + \delta I'_{h_J}(t) \\
&\quad - \gamma_A I'_{h_A}(t) - d_h I'_{h_A}(t) \\
&= \mu_h N_h - d_h S'_h(t) - d_h I'_{h_J}(t) - d_h I'_{h_A}(t) \\
&= \mu_h N_h - d_h \left[S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right] \\
&= \mu_h N_h - d_h N_h \\
&= (\mu_h - d_h) N_h \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\mu_h = d_h$

หมายถึง อัตราการเกิดของประชากรคน เท่ากับ อัตราการเสียชีวิตของประชากรคน

จาก $N_v = S'_v(t) + I'_v(t)$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} N_V &= \frac{d}{dt} (S'_V(t) + I'_V(t)) \\
&= \frac{d}{dt} S'_V(t) + \frac{d}{dt} I'_V(t) \\
&= D - \mu_V S'_V(t) - \beta_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t) + \beta_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t) \\
&\quad - \mu_V I'_V(t) \\
&= D - \mu_V S'_V(t) - \mu_V I'_V(t) \\
&= D - \mu_V (S'_V(t) + I'_V(t)) \\
&= D - \mu_V N_V \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $N_V = D/\mu_V$ หมายถึงจำนวนประชากรยุงมีค่าเท่ากับสัดส่วนระหว่างจำนวนของยุง ณ

เวลาเริ่มต้น และอัตราการเสียชีวิตของยุง

3.2 ผลการวิเคราะห์แบบจำลอง

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
S_h(t) &= \frac{S'_h(t)}{N_h} & I_{h_J}(t) &= \frac{I'_{h_J}(t)}{N_h} & I_{h_A}(t) &= \frac{I'_{h_A}(t)}{N_h} \\
S_V(t) &= \frac{S'_V(t)}{N_V} & I_V(t) &= \frac{I'_V(t)}{N_V}
\end{aligned}$$

จาก

$$\frac{d}{dt} S_h(t) \text{ จะได้ว่า}$$

$$\begin{aligned}
S_h(t) &= \frac{S'_h(t)}{N_h} \\
S_h(t)N_h &= S'_h(t) \\
\frac{d}{dt}(S_h(t)N_h) &= \frac{d}{dt}S'_h(t) \\
N_h \frac{d}{dt}S_h(t) &= \frac{d}{dt}S'_h(t) \\
N_h \frac{d}{dt}S_h(t) &= \mu_h N_h + \gamma_A I'_{hA}(t) + \gamma_J I'_{hJ}(t) - \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - d_h S'_h(t) \\
\frac{d}{dt}S_h(t) &= \frac{\mu_h N_h}{N_h} + \frac{\gamma_A I'_{hA}(t)}{N_h} + \frac{\gamma_J I'_{hJ}(t)}{N_h} - \frac{\beta_h I'_v(t) S'_h(t)}{N_h} - \frac{d_h S'_h(t)}{N_h} \\
\frac{d}{dt}S_h(t) &= \mu_h + \gamma_A I_{hA}(t) + \gamma_J I_{hJ}(t) - \beta_h I'_v(t) S_h(t) - d_h S_h(t)
\end{aligned}$$

จาก $\mu_h = d_h$ และ $I'_v(t) = I_v(t)N_v$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S_h(t) &= d_h + \gamma_A I_{hA}(t) + \gamma_J I_{hJ}(t) - \beta_h I_v(t)N_v S_h(t) - d_h S_h(t) \\
\frac{d}{dt}S_h(t) &= d_h + \gamma_A I_{hA}(t) + \gamma_J I_{hJ}(t) - (\beta_h I_v(t)N_v + d_h) S_h(t)
\end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt}I_{hJ}(t)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
I_{hJ}(t) &= \frac{I'_{hJ}(t)}{N_h} \\
I_{hJ}(t)N_h &= I'_{hJ}(t) \\
\frac{d}{dt}(I_{hJ}(t)N_h) &= \frac{d}{dt}I'_{hJ}(t) \\
N_h \frac{d}{dt}I_{hJ}(t) &= \frac{d}{dt}I'_{hJ}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_h \frac{d}{dt} I_{h_J}(t) &= \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - \gamma_J I'_{h_J}(t) - \delta I'_{h_J}(t) - d_h I'_{h_J}(t) \\
\frac{d}{dt} I_{h_J}(t) &= \frac{\beta_h I'_v(t) S'_h(t)}{N_h} - \frac{\gamma_J I'_{h_J}(t)}{N_h} - \frac{\delta I'_{h_J}(t)}{N_h} - \frac{d_h I'_{h_J}(t)}{N_h} \\
\frac{d}{dt} I_{h_J}(t) &= \beta_h I'_v(t) S_h(t) - \gamma_J I_{h_J}(t) - \delta I_{h_J}(t) - d_h I_{h_J}(t)
\end{aligned}$$

จาก $I'_v(t) = I_v(t) N_v$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I_{h_J}(t) &= \beta_h I_v(t) N_v S_h(t) - \gamma_J I_{h_J}(t) - \delta I_{h_J}(t) - d_h I_{h_J}(t) \\
\frac{d}{dt} I_{h_J}(t) &= \beta_h I_v(t) N_v S_h(t) - (\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}(t)
\end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt} I_{h_A}(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$\begin{aligned}
I_{hA}(t) &= \frac{I'_{hA}(t)}{N_h} \\
I_{hA}(t)N_h &= I'_{hA}(t) \\
\frac{d}{dt} \left(I_{hA}(t)N_h \right) &= \frac{d}{dt} I'_{hA}(t) \\
N_h \frac{d}{dt} I_{hA}(t) &= \frac{d}{dt} I'_{hA}(t) \\
N_h \frac{d}{dt} I_{hA}(t) &= \delta I'_{hJ}(t) - \gamma_A I'_{hA}(t) - d_h I'_{hA}(t) \\
\frac{d}{dt} I_{hA}(t) &= \frac{\delta I'_{hJ}(t)}{N_h} - \frac{\gamma_A I'_{hA}(t)}{N_h} - \frac{d_h I'_{hA}(t)}{N_h} \\
\frac{d}{dt} I_{hA}(t) &= \delta I_{hJ}(t) - \gamma_A I_{hA}(t) - d_h I_{hA}(t) \\
\frac{d}{dt} I_{hA}(t) &= \delta I_{hJ}(t) - (\gamma_A + d_h) I_{hA}(t)
\end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt} S_v(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$\begin{aligned}
S_V(t) &= \frac{S'_V(t)}{N_V} \\
S_V(t)N_V &= S'_V(t) \\
\frac{d}{dt}S_V(t)N_V &= \frac{d}{dt}S'_V(t) \\
N_V \frac{d}{dt}S_V(t) &= \frac{d}{dt}S'_V(t) \\
N_V \frac{d}{dt}S_V(t) &= D - \mu_V S'_V(t) - \beta_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t) \\
\frac{d}{dt}S_V(t) &= \frac{D}{N_V} - \frac{\mu_V S'_V(t)}{N_V} - \frac{\beta_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t)}{N_V} \\
\frac{d}{dt}S_V(t) &= \mu_V - \mu_V S_V(t) - \beta_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S_V(t)
\end{aligned}$$

จาก $I'_{h_J}(t) = I_{h_J}(t)N_h$ และ $I'_{h_A}(t) = I_{h_A}(t)N_h$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}S_V(t) = \mu_V - \mu_V S_V(t) - \beta_V \left(I_{h_J}(t)N_h + I_{h_A}(t)N_h \right) S_V(t)$$

หา $\frac{d}{dt}I_V(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$\begin{aligned}
I_V(t) &= \frac{I'_V(t)}{N_V} \\
I_V(t)N_V &= I'_V(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(I_v(t)N_v) &= \frac{d}{dt}I'_v(t) \\
N_v \frac{d}{dt}I_v(t) &= \frac{d}{dt}I'_v(t) \\
N_v \frac{d}{dt}I_v(t) &= \beta_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t) - \mu_v I'_v(t) \\
\frac{d}{dt}I_v(t) &= \frac{\beta_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t)}{N_v} - \frac{\mu_v I'_v(t)}{N_v} \\
\frac{d}{dt}I_v(t) &= \beta_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S_v(t) - \mu_v I_v(t)
\end{aligned}$$

จาก $I'_{h_J}(t) = I_{h_J}(t)N_h$ และ $I'_{h_A}(t) = I_{h_A}(t)N_h$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}I_v(t) = \beta_v \left(I_{h_J}(t)N_h + I_{h_A}(t)N_h \right) S_v(t) - \mu_v I_v(t)$$

จะได้เงื่อนไขใหม่นี้

$$\begin{aligned}
S_h(t) + I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) &= \frac{S'_h(t)}{N_h} + \frac{I'_{h_J}(t)}{N_h} + \frac{I'_{h_A}(t)}{N_h} \\
&= \frac{S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t)}{N_h}
\end{aligned}$$

จาก $N_h = S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
S_h(t) + I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) &= \frac{N_h}{N_h} \\
&= 1
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} S_v(t) + I_v(t) &= \frac{S'_v(t)}{N_v} + \frac{I'_v(t)}{N_v} \\ &= \frac{S'_v(t) + I'_v(t)}{N_v} \end{aligned}$$

จาก $N_v = S'_v(t) + I'_v(t)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_v(t) + I_v(t) &= \frac{N_v}{N_v} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d}{dt} I_{h_A}(t) = \delta I_{h_J}(t) - (\gamma_A + d_h) I_{h_A}(t)$$

$$\frac{d}{dt} I_{h_J}(t) = \beta_h I_v(t) N_v S_h(t) - (\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} I_v(t) = \beta_v \left(I_{h_J}(t) N_h + I_{h_A}(t) N_h \right) S_v(t) - \mu_v I_v(t)$$

โดยที่ $S_h(t) + I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) = 1$ และ $S_v(t) + I_v(t) = 1$

จุดสมดุล $(I_{h_A}^*, I_{h_J}^*, I_v^*)$ หาได้จากการนำสมการข้างต้นมาเท่ากับศูนย์ จะได้

จาก $\delta I_{h_J}^*(t) - (\gamma_A + d_h) I_{h_A}^*(t) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\delta I_{h_J}^*(t) - (\gamma_A + d_h) I_{h_A}^*(t) &= 0 \\
(\gamma_A + d_h) I_{h_A}^*(t) &= \delta I_{h_J}^*(t) \\
I_{h_A}^*(t) &= \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_A + d_h}
\end{aligned} \tag{1}$$

จาก $\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) - (\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}^*(t) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) - (\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}^*(t) &= 0 \\
(\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) \\
I_{h_J}^*(t) &= \frac{\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t)}{\gamma_J + \delta + d_h}
\end{aligned} \tag{2}$$

จาก $\beta_v \left(I_{h_J}^*(t) N_h + I_{h_A}^*(t) N_h \right) S_v^*(t) - \mu_v I_v^*(t) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\beta_v \left(I_{h_J}^*(t) N_h + I_{h_A}^*(t) N_h \right) S_v^*(t) - \mu_v I_v^*(t) &= 0 \\
\mu_v I_v^*(t) &= \beta_v \left(I_{h_J}^*(t) N_h + I_{h_A}^*(t) N_h \right) S_v^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(I_{h_J}^*(t) N_h + I_{h_A}^*(t) N_h \right) S_v^*(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

นำสมการ (2) แทนลงในสมการ (1)

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta \left(\frac{\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t)}{\gamma_J + \delta + d_h} \right)}{\gamma_A + d_h}$$

$$(\gamma_A + d_h) I_{hA}^*(t) = \delta \left(\frac{\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t)}{\gamma_J + \delta + d_h} \right)$$

$$S_h^*(t) = \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) I_{hA}^*(t)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

จาก $S_h^*(t) = 1 - I_{hA}^*(t) - I_{hJ}^*(t)$ จะได้

$$1 - I_{hA}^*(t) - I_{hJ}^*(t) = \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) I_{hA}^*(t)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

$$1 - I_{hJ}^*(t) = I_{hA}^*(t) + \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) I_{hA}^*(t)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

$$1 - I_{hJ}^*(t) = \left[1 + \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \right] I_{hA}^*(t)$$

$$1 - I_{hJ}^*(t) = \left[1 + \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \right] \frac{\delta I_{hJ}^*(t)}{\gamma_A + d_h}$$

$$\left[1 - I_{hJ}^*(t) \right] \left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta I_{hJ}^*(t)} \right] = 1 + \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

$$\frac{\gamma_A + d_h}{\delta I_{hJ}^*(t)} - \frac{\gamma_A + d_h}{\delta} = 1 + \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

$$\frac{\gamma_A + d_h}{\delta I_{hJ}^*(t)} = 1 + \frac{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v} + \frac{\gamma_A + d_h}{\delta}$$

$$\frac{\gamma_A + d_h}{\delta I_{hJ}^*(t)} = \frac{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v + (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) + (\gamma_A + d_h)(\beta_h I_v^*(t) N_v)}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

$$I_{h_J}^*(t) = \left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta} \right] \left[\frac{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v + (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) + (\gamma_A + d_h)(\beta_h I_v^*(t) N_v)} \right]$$

$$I_{h_J}^*(t) = \left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta} \right] \left[\frac{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}{(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) + (\delta + \gamma_A + d_h)(\beta_h I_v^*(t) N_v)} \right]$$

จะได้ว่า

$$\left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta} \right] I_{h_A}^*(t) = \frac{\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t)}{\gamma_J + \delta + d_h}$$

$$S_h^*(t) = \left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta} \right] \left[\frac{\gamma_J + \delta + d_h}{\beta_h I_v^*(t) N_v} \right] I_{h_A}^*(t)$$

นำสมการที่ (1), (2) และ $S_h^*(t) = 1 - I_{h_A}^*(t) - I_{h_J}^*(t)$, $S_v^*(t) = 1 - I_v^*(t)$ แทนลงใน

สมการ (3) จะได้สมการ (3) ใหม่ดังนี้

$$I_v^*(t) = \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(I_{h_J}^*(t) N_h + I_{h_A}^*(t) N_h \right) S_v^*(t)$$

$$\begin{aligned}
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(I_{h_J}^*(t) N_h + \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_A + d_h} N_h \right) S_v^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h) I_{h_J}^*(t) N_h + \delta I_{h_J}^*(t) N_h}{\gamma_A + d_h} \right) S_v^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) N_h}{\gamma_A + d_h} \right) I_{h_J}^*(t) S_v^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) N_h}{\gamma_A + d_h} \right) \left(\frac{\beta_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t)}{\gamma_J + \delta + d_h} \right) (1 - I_v^*(t)) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) N_h}{\gamma_A + d_h} \right) \left(\frac{\beta_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_J + \delta + d_h} \right) (1 - I_v^*(t)) S_h^*(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) N_h}{\gamma_A + d_h} \right) \left(\frac{\beta_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_J + \delta + d_h} \right) (1 - I_v^*(t)) \left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta} \right] \left[\frac{\gamma_J + \delta + d_h}{\beta_h I_v^*(t) N_v} \right] I_{hA}^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) N_h}{\gamma_A + d_h} \right) (1 - I_v^*(t)) \left[\frac{\gamma_A + d_h}{\delta} \right] I_{hA}^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{\beta_v}{\mu_v} \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) N_h}{\delta} \right) (1 - I_v^*(t)) I_{hA}^*(t) \\
I_v^*(t) &= \left(\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h}{\mu_v \delta} \right) (1 - I_v^*(t)) I_{hA}^*(t) \\
I_v^*(t) &= \frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} - \frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_v^*(t) I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} \\
I_v^*(t) + \frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_v^*(t) I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} &= \frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} \\
I_v^*(t) \left[\frac{\mu_v \delta + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} \right] &= \frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} \\
I_v^*(t) &= \left[\frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta} \right] \left[\frac{\mu_v \delta}{\mu_v \delta + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)} \right] \\
I_v^*(t) &= \frac{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}{\mu_v \delta + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{hA}^*(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_v^*(t) \left[\mu_v \delta + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{h_A}^*(t) \right] &= (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{h_A}^*(t) \\
\mu_v \delta I_v^*(t) + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{h_A}^*(t) I_v^*(t) &= (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{h_A}^*(t) \\
\mu_v \delta I_v^*(t) &= (1 - I_v^*(t)) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_{h_A}^*(t) \\
I_{h_A}^*(t) &= \frac{\mu_v \delta I_v^*(t)}{(1 - I_v^*(t)) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h} \quad (*)
\end{aligned}$$

จากสมการ (2) นำ $S_h^*(t) = 1 - I_{h_A}^*(t) - I_{h_J}^*(t)$ แทนลงไป

$$\begin{aligned}
I_{h_J}^*(t) &= \frac{\beta_h I_v^*(t) N_v \left(1 - I_{h_A}^*(t) - I_{h_J}^*(t) \right)}{\gamma_J + \delta + d_h} \\
(\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v \left(1 - I_{h_A}^*(t) - I_{h_J}^*(t) \right) \\
(\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v - \beta_h I_v^*(t) N_v I_{h_A}^*(t) - \beta_h I_v^*(t) N_v I_{h_J}^*(t) \\
(\gamma_J + \delta + d_h) I_{h_J}^*(t) + \beta_h I_v^*(t) N_v I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v - \beta_h I_v^*(t) N_v I_{h_A}^*(t) \\
(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v \left(1 - I_{h_A}^*(t) \right)
\end{aligned}$$

นำสมการ (1) แทนค่าลงไป

$$\begin{aligned}
(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v \left(1 - I_{h_A}^*(t) \right) \\
(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v \left(1 - \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_A + d_h} \right) \\
\left(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v + \frac{\delta \beta_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_A + d_h} \right) I_{h_J}^*(t) &= \beta_h I_v^*(t) N_v \\
I_{h_J}^*(t) &= \left(\beta_h I_v^*(t) N_v \right) \left(\frac{\gamma_A + d_h}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \right)
\end{aligned}$$

จากสมการ (1) จะได้ว่า

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_A + d_h}$$

$$\begin{aligned}
I_{hA}^*(t) &= \frac{\delta(\beta_h I_v^*(t) N_v) \left(\frac{\gamma_A + d_h}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \right)}{\gamma_A + d_h} \\
I_{hA}^*(t) &= \frac{\left(\frac{(\gamma_A + d_h) \delta(\beta_h I_v^*(t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \right)}{\gamma_A + d_h} \\
I_{hA}^*(t) &= \frac{\delta(\beta_h I_v^*(t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \quad (**)
\end{aligned}$$

จาก(*) และ (**) นำสองสมการมาเท่ากันจะได้

$$I_{hA}^*(t) = \frac{\mu_v \delta I_v^*(t)}{(1 - I_v^*(t))(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h} \quad (*)$$

$$I_{hA}^*(t) = \frac{\delta(\beta_h I_v^*(t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \quad (**)$$

จะได้

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_v \delta I_v^*(t)}{(1 - I_v^*(t))(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h} = \frac{\delta (\beta_h I_v^*(t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v} \\
& \mu_v \delta I_v^*(t) \left[(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v \right] = \delta (\beta_h I_v^*(t) N_v) (1 - I_v^*(t)) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h \\
& (\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v)(\gamma_A + d_h) \mu_v I_v^*(t) + \delta \beta_h N_v \mu_v I_v^{*2}(t) = (\beta_h N_v I_v^*(t) - \beta_h N_v I_v^{*2}(t)) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h \\
& (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v I_v^*(t) + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v I_v^{*2}(t) = (\beta_h N_v I_v^*(t) - \beta_h N_v I_v^{*2}(t)) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h \\
& (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v I_v^*(t) + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v I_v^{*2}(t) = \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_v^*(t) - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_v^{*2}(t) \\
& \left[\begin{aligned} & (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v I_v^*(t) + (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v I_v^{*2}(t) \\ & - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_v^*(t) + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h I_v^{*2}(t) \end{aligned} \right] = 0 \\
& \left[\begin{aligned} & [(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] I_v^*(t) \\ & + [(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] I_v^{*2}(t) \end{aligned} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$I_v^*(t) \left([(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] + [(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] I_v^*(t) \right) = 0$$

ดังนั้นจะได้ $I_v^*(t) = 0$ และ

$$\begin{aligned}
& [(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] + [(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] I_v^*(t) = 0 \\
& [(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] I_v^*(t) = - [(\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] \\
& [(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h] I_v^*(t) = \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v \\
& I_v^*(t) = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h} \\
& I_v^*(t) = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h)(\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\mu_v + \beta_v N_h)(\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v}
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้จุดสมดุล (I_h^*, I_h^*, I_v^*) สองจุดคือจุดสมดุลในสภาวะไร้โรคคือ

$$E_0(0,0,0)$$

และในสภาวะระบาดเรื้อรังคือ

$$E_1 \left(I_{h_A}^*, I_{h_J}^*, I_v^* \right) \text{ โดยที่}$$

$$I_v^*(t) = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\mu_v + \beta_v N_h) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v}$$

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta (\beta_h I_v^*(t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v) (\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{(\gamma_A + d_h) (\beta_h I_v^*(t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^*(t) N_v) (\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^*(t) N_v}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรัง $I_v^* > 0$

จาก

$$I_v^*(t) = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\mu_v + \beta_v N_h) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\mu_v + \beta_v N_h) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v} > 0$$

$$\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v > 0$$

$$\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h > (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v$$

นั่นคือ $I_v^* > 0$ เมื่อ

$$\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h > (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v$$

$$\frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h}{(\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v} > 1$$

$$D_0 > 1$$

เมื่อ

$$D_0 = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h}{(\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}$$

พิจารณาความเสถียรภาพเชิงเส้น

จากสมการสามารถนำมาเขียนในรูปจาโคเบียนเมทริกซ์ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -(\gamma_A + d_h) & \delta & 0 \\ \beta_h I_v^* N_v & -\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) & \beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{h_A}^* & -I_{h_J}^* \end{pmatrix} \\ \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & -\beta_v N_h I_{h_J}^* - \beta_v N_h I_{h_A}^* - \mu_v \end{bmatrix}_{(I_{h_A}^*, I_{h_J}^*, I_v^*)}$$

ค่าเฉพาะของสมการหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_3) = 0$$

เมื่อ I_3 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_0(0,0,0)$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ของจุดสมดุลดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -(\gamma_A + d_h) & \delta & 0 \\ \beta_h I_v^* N_v & -\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) & \beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{h_A}^* & -I_{h_J}^* \end{pmatrix} \\ \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & -\beta_v N_h I_{h_J}^* - \beta_v N_h I_{h_A}^* - \mu_v \end{bmatrix}_{(0,0,0)}$$

$$J = \begin{bmatrix} -(\gamma_A + d_h) & \delta & 0 \\ 0 & -(\gamma_J + \delta + d_h) & \beta_h N_v \\ \beta_v N_h & \beta_v N_h & -\mu_v \end{bmatrix}$$

$$J - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -(\gamma_A + d_h) - \lambda & \delta & 0 \\ 0 & -(\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda & \beta_h N_v \\ \beta_v N_h & \beta_v N_h & -\mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -(\gamma_A + d_h) - \lambda & \delta & 0 \\ 0 & -(\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda & \beta_h N_v \\ \beta_v N_h & \beta_v N_h & -\mu_v - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I_3) &= \left(-(\gamma_A + d_h) - \lambda \right) \left(-(\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda \right) (-\mu_v - \lambda) + \delta \beta_h N_v \beta_v N_h \\ &\quad - \left(\beta_v N_h \beta_h N_v \left(-(\gamma_A + d_h) - \lambda \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \left(-(\gamma_A + d_h) - \lambda \right) \left(-(\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda \right) (-\mu_v - \lambda) + \delta \beta_h N_v \beta_v N_h - \left(\beta_v N_h \beta_h N_v \left(-(\gamma_A + d_h) - \lambda \right) \right) = 0 \\
 & \left((\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h) \lambda + (\gamma_J + \delta + d_h) \lambda + \lambda^2 \right) (-\mu_v - \lambda) + \delta \beta_h N_v \beta_v N_h \\
 & - \left(\beta_v N_h \beta_h N_v \left(-(\gamma_A + d_h) - \lambda \right) \right) = 0 \\
 & -\mu_v (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) - \mu_v (\gamma_A + d_h) \lambda - \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) \lambda - \mu_v \lambda^2 \\
 & -\lambda (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) - (\gamma_A + d_h) \lambda^2 - (\gamma_J + \delta + d_h) \lambda^2 - \lambda^3 = 0 \\
 & \mu_v (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) + \mu_v (\gamma_A + d_h) \lambda + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) \lambda + \mu_v \lambda^2 \\
 & + \lambda (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h) \lambda^2 + (\gamma_J + \delta + d_h) \lambda^2 + \lambda^3 = 0 \\
 & \lambda^3 + [\mu_v + \gamma_A + d_h + \gamma_J + \delta + d_h] \lambda^2 + [\mu_v (\gamma_A + d_h) + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h)] \lambda \\
 & + \mu_v (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) = 0
 \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \mu_v + \gamma_A + \gamma_J + \delta + 2d_h \\
 a_2 &= \mu_v (\gamma_A + d_h) + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h) \\
 a_3 &= \mu_v (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h)
 \end{aligned}$$

จะได้ $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$

จาก Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$H_1 = (a_1) \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\det H_1 = a_1$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3$$

$$\det H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็น

บวก

ดังนั้น จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\det H_1 = a_1 > 0$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$$

$$\det H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$$

พิจารณาเงื่อนไขข้างต้นดังนี้

พิจารณา $a_1 > 0$

จาก $a_1 = \mu_v + \gamma_A + \gamma_J + \delta + 2d_h$ พบว่าทุกพจน์ของ $a_1 > 0$ ดังนั้น $\det H_1 > 0$ ด้วย

พิจารณา $a_1 a_2 - a_3 > 0$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= [\mu_v + \gamma_A + \gamma_J + \delta + 2d_h] [\mu_v (\gamma_A + d_h) + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h)(\gamma_J + \delta + d_h)] \\ &\quad - \mu_v (\gamma_A + d_h)(\gamma_J + \delta + d_h) \\ &= [\gamma_A + \gamma_J + \delta + 2d_h] [\mu_v (\gamma_A + d_h) + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h)(\gamma_J + \delta + d_h)] \\ &\quad + \mu_v^2 (\gamma_A + d_h) + \mu_v^2 (\gamma_J + \delta + d_h) + \mu_v (\gamma_A + d_h)(\gamma_J + \delta + d_h) - \mu_v (\gamma_A + d_h)(\gamma_J + \delta + d_h) \\ &= [\gamma_A + \gamma_J + \delta + 2d_h] [\mu_v (\gamma_A + d_h) + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h)(\gamma_J + \delta + d_h)] \\ &\quad + \mu_v^2 (\gamma_A + d_h) + \mu_v^2 (\gamma_J + \delta + d_h) \end{aligned}$$

พบว่าทุกพจน์ของ $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ดังนั้น $\det H_2 > 0$ ด้วย

พิจารณา $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$

$$a_1 a_2 a_3 - a_3^2 = a_3 (a_1 a_2 - a_3)$$

จาก $a_3 = \mu_v (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h)$ พบว่าทุกพจน์ของ $a_3 > 0$ และ $a_1 a_2 - a_3 > 0$ นั้น

คือ $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0$ ดังนั้น $\det H_3 > 0$ ด้วย

จากการพิจารณาเงื่อนไขข้างต้นพบว่า determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็น

เป็นบวกแสดงว่าจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคมีความเสถียรภาพเมื่อ $D_0 < 1$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะได้จุดสมดุล $E_1 \left(I_{h_A}^*, I_{h_J}^*, I_v^* \right)$ เมื่อ

$$I_v^* (t) = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\mu_v + \beta_v N_h) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v}$$

$$I_{h_A}^* (t) = \frac{\delta (\beta_h I_v^* (t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^* (t) N_v) (\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^* (t) N_v}$$

$$I_{h_J}^* (t) = \frac{(\gamma_A + d_h) (\beta_h I_v^* (t) N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^* (t) N_v) (\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^* (t) N_v}$$

จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -(\gamma_A + d_h) & \delta & 0 \\ \beta_h I_v^* N_v & -\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) & \beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{h_A}^* & -I_{h_J}^* \end{pmatrix} \\ \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & -\beta_v N_h I_{h_J}^* - \beta_v N_h I_{h_A}^* - \mu_v \end{bmatrix}_{(I_{h_A}^*, I_{h_J}^*, I_v^*)}$$

$$J - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -(\gamma_A + d_h) - \lambda & \delta & 0 \\ \beta_h I_v^* N_v & -\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda & \beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{h_A}^* & -I_{h_J}^* \end{pmatrix} \\ \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & -\beta_v N_h I_{h_J}^* - \beta_v N_h I_{h_A}^* - \mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(J-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -(\gamma_A + d_h) - \lambda & \delta & 0 \\ \beta_h I_v^* N_v & -\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda & \beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{hA}^* & -I_{hJ}^* \end{pmatrix} \\ \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & \beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^* & -\beta_v N_h I_{hJ}^* - \beta_v N_h I_{hA}^* - \mu_v - \lambda \end{vmatrix} \\
\det(J-\lambda I_3) &= [-(\gamma_A + d_h) - \lambda] [-\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda] [-\beta_v N_h I_{hJ}^* - \beta_v N_h I_{hA}^* - \mu_v - \lambda] \\
&\quad + [S] \left[\beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{hA}^* & -I_{hJ}^* \end{pmatrix} \right] [\beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^*] \\
&\quad - [\beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^*] \left[\beta_h N_v \begin{pmatrix} 1 - I_{hA}^* & -I_{hJ}^* \end{pmatrix} \right] [-(\gamma_A + d_h) - \lambda] \\
&\quad - [-\beta_v N_h I_{hJ}^* - \beta_v N_h I_{hA}^* - \mu_v - \lambda] [\beta_h I_v^* N_v] [\delta] \\
\det(J-\lambda I_3) &= [-(\gamma_A + d_h) - \lambda] [-\beta_h I_v^* N_v - (\gamma_J + \delta + d_h) - \lambda] [-\beta_v N_h I_{hJ}^* - \beta_v N_h I_{hA}^* - \mu_v - \lambda] \\
&\quad + \delta \beta_h N_v \beta_v N_h - \delta \beta_h N_v \beta_v N_h I_{hA}^* - \delta \beta_h N_v \beta_v N_h I_{hJ}^* - \delta \beta_h N_v \beta_v N_h I_v^* \\
&\quad + \delta \beta_h N_v \beta_v N_h I_v^* I_{hA}^* + \delta \beta_h N_v \beta_v N_h I_v^* I_{hJ}^* \\
&\quad + [\beta_v N_h - \beta_v N_h I_v^*] \left[\beta_h N_v - \beta_h N_v I_{hA}^* - \beta_h N_v I_{hJ}^* \right] [(\gamma_A + d_h) + \lambda] \\
&\quad + \beta_v N_h \delta \beta_h I_v^* N_v I_{hJ}^* + \beta_v N_h \delta \beta_h I_v^* N_v I_{hA}^* + \mu_v \delta \beta_h I_v^* N_v + \lambda \delta \beta_h I_v^* N_v
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\det(J-\lambda I_3) = & -\lambda^3 - \delta\lambda^2 - \delta\lambda d_h - 2d_h\lambda^2 - d_h^2\lambda + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + \lambda N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v \\
& - \lambda \delta \gamma_A - \lambda^2 \gamma_A - \lambda d_h \gamma_A + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A - \lambda^2 \gamma_J - \lambda d_h \gamma_J - \lambda \gamma_J \gamma_A - \delta \lambda \mu_v - \lambda^2 \mu_v - \delta d_h \mu_v \\
& - 2\lambda d_h \mu_v - d_h^2 \mu_v - \delta \gamma_A \mu_v - \lambda \gamma_A \mu_v - d_h \gamma_A \mu_v - \lambda \gamma_J \mu_v - d_h \gamma_J \mu_v - \gamma_A \gamma_J \mu_v - \delta \lambda N_h \beta_v I_{hA}^* \\
& - \lambda^2 N_h \beta_v I_{hA}^* - \delta d_h N_h \beta_v I_{hA}^* - 2\lambda d_h N_h \beta_v I_{hA}^* - d_h^2 N_h \beta_v I_{hA}^* - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* \\
& - \lambda N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* - \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* - \lambda N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* \\
& - d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* - \lambda N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* \\
& - N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hA}^* - \delta \lambda N_h \beta_v I_{hJ}^* - \lambda^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* - \delta d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* - 2\lambda d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* \\
& - d_h^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* - \lambda N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* \\
& - \lambda N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* - N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hJ}^* + \delta \lambda N_v \beta_h I_v^* - \lambda^2 N_v \beta_h I_v^* - \lambda d_h N_v \beta_h I_v^* \\
& - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - \lambda N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - \lambda N_v \beta_h \gamma_A I_v^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* \\
& + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - \lambda N_v \beta_h \mu_v I_v^* - d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* - \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* I_v^* \\
& + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* I_v^*
\end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$$

เมื่อ

$$b_1 = \delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{hA}^* + N_h \beta_v I_{hJ}^* + N_v \beta_h I_v^*$$

$$\begin{aligned} b_2 = & \delta d_h + d_h^2 - N_h N_v \beta_h \beta_v + \delta \gamma_A + d_h \gamma_A + d_h \gamma_J + \gamma_A \gamma_J + \delta \mu_v + 2d_h \mu_v + \gamma_A \mu_v + \gamma_J \mu_v \\ & + \delta N_h \beta_v I_{hA}^* + 2d_h N_h \beta_v I_{hA}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* + N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* + \delta N_h \beta_v I_{hJ}^* \\ & + 2d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* - \delta N_v \beta_h I_v^* + d_h N_v \beta_h I_v^* \\ & + N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_v \beta_h \gamma_A I_v^* + N_v \beta_h \mu_v I_v^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 = & -\delta N_h N_v \beta_h \beta_v - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + \delta d_h \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v \\ & + \delta \gamma_A \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hA}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* \\ & + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* \\ & + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* \\ & + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* \\ & + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* I_v^* - \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* I_v^* \end{aligned}$$

จาก Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$H_1 = (b_1) \quad H_2 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\det H_1 = b_1$$

$$\det H_2 = b_1 b_2 - b_3$$

$$\det H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็น

บวก

ดังนั้น จดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\det H_1 = b_1 > 0$$

$$\det H_2 = b_1 b_2 - b_3 > 0$$

$$\det H_3 = b_1 b_2 b_3 - b^2_3 > 0$$

พิจารณาเงื่อนไขข้างต้นดังนี้

พิจารณา $b_1 > 0$

จาก $b_1 = \delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{hA}^* + N_h \beta_v I_{hJ}^* + N_v \beta_h I_v^*$ พบว่าทุกพจน์ของ

$$b_1 > 0$$

ดังนั้น $\det H_1 > 0$ ด้วย

พิจารณา $b_1 b_2 - b_3 > 0$

$$\begin{aligned} b_1 b_2 - b_3 = & \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A - \delta d_h \mu_v - d_h^2 \mu_v - \delta \gamma_A \mu_v - d_h \gamma_A \mu_v - d_h \gamma_J \mu_v - \gamma_A \gamma_J \mu_v \\ & - \delta d_h N_h \beta_v I_{hA}^* - d_h^2 N_h \beta_v I_{hA}^* - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* - \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* \\ & - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* - N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hA}^* - \delta d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* - d_h^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* \\ & - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* - \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* - N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hJ}^* \\ & - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* - N_v \beta_h \gamma_A \mu_v I_v^* \\ & + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* I_v^* + (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{hA}^* + N_h \beta_v I_{hJ}^* \\ & + N_v \beta_h I_v^*)(d_h^2 + \delta \gamma_A + \gamma_A \gamma_J + \delta \mu_v + \gamma_A \mu_v + \gamma_J \mu_v - \delta N_v \beta_h I_v^* + N_v \beta_h \gamma_A I_v^* + N_v \beta_h \mu_v I_v^* + d_h(\delta + \gamma_A \\ & + \gamma_J + 2\mu_v + 2N_h \beta_v I_{hA}^* + 2N_h \beta_v I_{hJ}^* + N_v \beta_h I_v^*) + N_h \beta_v ((\delta + \gamma_A + \gamma_J)(I_{hA}^* + I_{hJ}^*) + N_v \beta_h (-1 + I_{hA}^* + I_{hJ}^* + I_v^*))) \end{aligned}$$

พบว่า $b_1 b_2 - b_3 > 0$ เมื่อ

$$\begin{aligned}
 & \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A - \delta d_h \mu_v - d_h^2 \mu_v - \delta \gamma_A \mu_v - d_h \gamma_A \mu_v - d_h \gamma_J \mu_v - \gamma_A \gamma_J \mu_v \\
 & - \delta d_h N_h \beta_v I_{h_A}^* - d_h^2 N_h \beta_v I_{h_A}^* - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* - \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* \\
 & - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_A}^* - N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_A}^* - \delta d_h N_h \beta_v I_{h_J}^* - d_h^2 N_h \beta_v I_{h_J}^* - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* \\
 & - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* - \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* - d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_J}^* - N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_J}^* \\
 & - \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* - N_v \beta_h \gamma_A \mu_v I_v^* \\
 & + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* I_v^* + (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* \\
 & + N_v \beta_h I_v^*)(d_h^2 + \delta \gamma_A + \gamma_A \gamma_J + \delta \mu_v + \gamma_A \mu_v + \gamma_J \mu_v - \delta N_v \beta_h I_v^* + N_v \beta_h \gamma_A I_v^* + N_v \beta_h \mu_v I_v^* + d_h(\delta + \gamma_A \\
 & + \gamma_J + 2\mu_v + 2N_h \beta_v I_{h_A}^* + 2N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*) + N_h \beta_v ((\delta + \gamma_A + \gamma_J)(I_{h_A}^* + I_{h_J}^*) + N_v \beta_h (-1 + I_{h_A}^* + I_{h_J}^* + I_v^*))) \\
 & > 0
 \end{aligned}$$

นั้น

$$\begin{aligned}
 & \text{คือ } \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* I_v^* \\
 & + (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*)(d_h^2 + \delta \gamma_A + \gamma_A \gamma_J + \delta \mu_v + \gamma_A \mu_v + \gamma_J \mu_v + N_v \beta_h \gamma_A I_v^* + N_v \beta_h \mu_v I_v^* \\
 & + d_h(\delta + \gamma_A + \gamma_J + 2\mu_v + 2N_h \beta_v I_{h_A}^* + 2N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*) + N_h \beta_v ((\delta + \gamma_A + \gamma_J)(I_{h_A}^* + I_{h_J}^*) + N_v \beta_h (I_{h_A}^* + I_{h_J}^* + I_v^*))) \\
 & >
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \delta d_h \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta \gamma_A \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_A}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* \\
 & + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_A}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_A}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_J}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{h_J}^* \\
 & + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_J}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_J}^* \\
 & + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + N_v \beta_h \gamma_A \mu_v I_v^* + N_v \beta_h N_h \beta_v (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J \\
 & + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*) \delta N_v \beta_h I_v^* (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*)
 \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขข้างต้นจะทำให้ $\det H_2 > 0$ ด้วย

พิจารณา $b_1 b_2 b_3 - b_3^2 > 0$

$$b_1 b_2 b_3 - b_3^2 = (b_1 b_2 - b_3) b_3$$

เนื่องจาก $b_1 b_2 - b_3 > 0$ ดังนั้น $b_3 > 0$ จึงจะทำให้ $b_1 b_2 b_3 - b_3^2 > 0$ นั่นคือ

จาก

$$\begin{aligned} b_3 = & -\delta N_h N_v \beta_h \beta_v - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + \delta d_h \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v \\ & + \delta \gamma_A \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hA}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* \\ & + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* \\ & + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* \\ & + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* \\ & + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* I_v^* - \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* I_v^* \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& -\delta N_h N_v \beta_h \beta_v - d_h N_h N_v \beta_h \beta_v - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + \delta d_h \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v \\
& + \delta \gamma_A \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hA}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* \\
& + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* \\
& + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* \\
& + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* \\
& + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* I_v^* - \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* I_v^* > 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
& \delta d_h \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v + \delta \gamma_A \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hA}^* \\
& + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* \\
& + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hA}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hA}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{hJ}^* \\
& + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{hJ}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{hJ}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* \\
& + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* \\
& > \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hA}^* I_v^* \\
& + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{hJ}^* I_v^*
\end{aligned}$$

จากเงื่อนไขที่ทำให้ $\det H_2 > 0$ และเงื่อนไขที่ทำให้ $b_3 > 0$ ดังนั้น $\det H_3 > 0$ ด้วย

จากการพิจารณาเงื่อนไขข้างต้นพบว่า determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมด

มีค่าเป็นบวกเมื่อสอดคล้องกับสองเงื่อนไขดังนี้

เงื่อนไขที่ 1

$$\begin{aligned}
& \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* I_v^* \\
& + (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*) (d_h^2 + \delta \gamma_A + \gamma_A \gamma_J + \delta \mu_v + \gamma_A \mu_v + \gamma_J \mu_v + N_v \beta_h \gamma_A I_v^* + N_v \beta_h \mu_v I_v^* \\
& + d_h (\delta + \gamma_A + \gamma_J + 2\mu_v + 2N_h \beta_v I_{h_A}^* + 2N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*)) + N_h \beta_v ((\delta + \gamma_A + \gamma_J)(I_{h_A}^* + I_{h_J}^*) + N_v \beta_h (I_{h_A}^* + I_{h_J}^* + I_v^*)) \\
& >
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta d_h \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta \gamma_A \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_A}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* \\
& + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_A}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_A}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_J}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{h_J}^* \\
& + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_J}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_J}^* \\
& + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + N_v \beta_h \gamma_A \mu_v I_v^* + N_v \beta_h N_h \beta_v (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J \\
& + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*) \delta N_v \beta_h I_v^* (\delta + 2d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + N_h \beta_v I_{h_A}^* + N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_v \beta_h I_v^*)
\end{aligned}$$

เงื่อนไขที่ 2

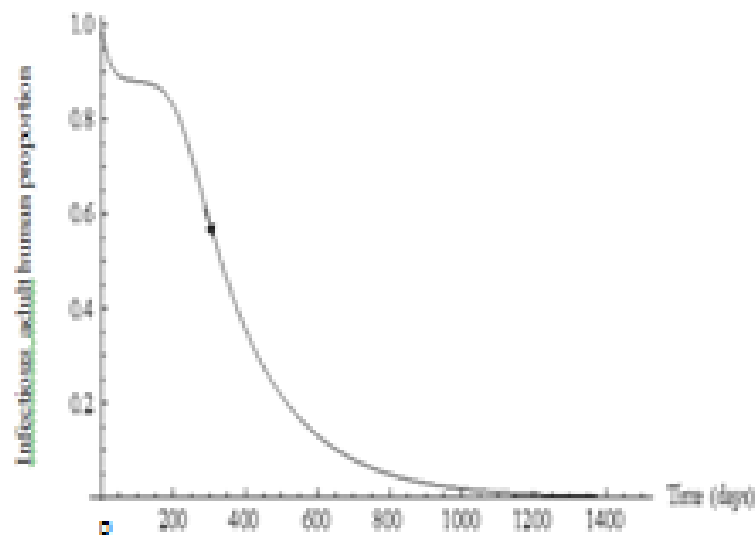
$$\begin{aligned}
& \delta d_h \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v + \delta \gamma_A \mu_v + d_h^2 \mu_v + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_A}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{h_A}^* \\
& + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* \\
& + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_A}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_A}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{h_J}^* \\
& + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_J}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_J}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* \\
& + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* \\
& > \delta N_h N_v \beta_h \beta_v + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* I_v^* \\
& + \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* + 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* I_v^*
\end{aligned}$$

แสดงว่าจุดสมดุลภายในได้สภาวะโรคระบาดเร็วรั้งมีความเสถียรภาพเมื่อ $D_0 > 1$

3.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ

ผลเฉลยที่แสดงในส่วนนี้ค่าของตัวแปรได้จากการสังเกตค่าจริง อายุเฉลี่ยของคนคือ 65 ปี อายุเฉลี่ยของยุงคือ 25 วัน จำนวนปีที่เด็กเป็นผู้ใหญ่คือ 15 ปี จำนวนปีที่ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้งคือ 2 ปี จำนวนปีที่เด็กที่ติดเชื้อกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้งคือ 1 ปี พารามิเตอร์ตัวอื่นเป็นการเลือกค่าที่เหมาะสม ใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้ผลดังนี้

สำหรับ $D_0 < 1$

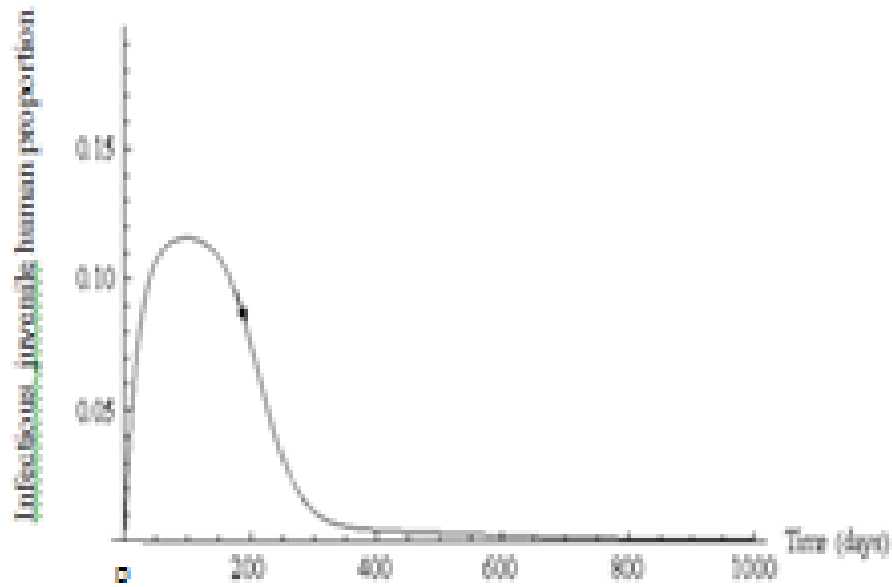


รูปที่ 3.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเมื่อเทียบกับเวลา

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=0.287901$, $\beta_h = 0.009$, $\beta_v = 0.0000000007$ ผลเฉลยเข้าสู่ผลเฉลยสภาวะไร้โรค (0,0,0)

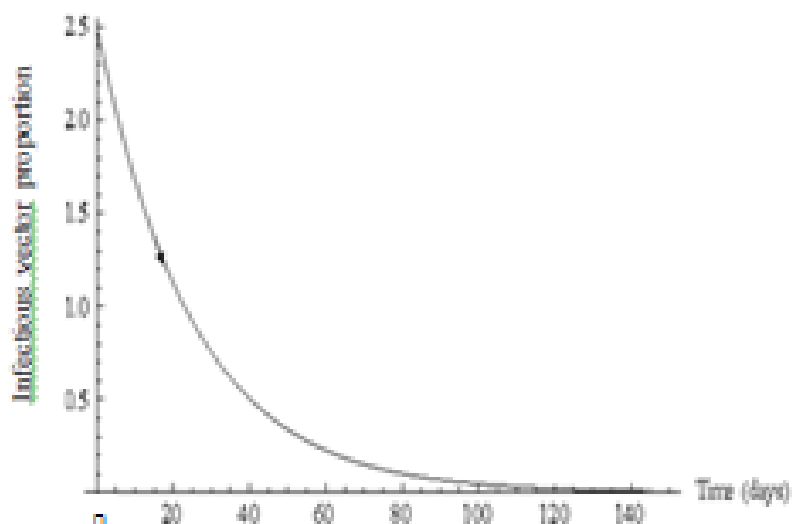


รูปที่ 3.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อเมื่อเทียบกับเวลา

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=0.287901$, $\beta_h=0.009$, $\beta_v=0.0000000007$. ผลเฉลยเข้าสู่ผลเฉลยสภาวะไร้โรค $(0,0,0)$

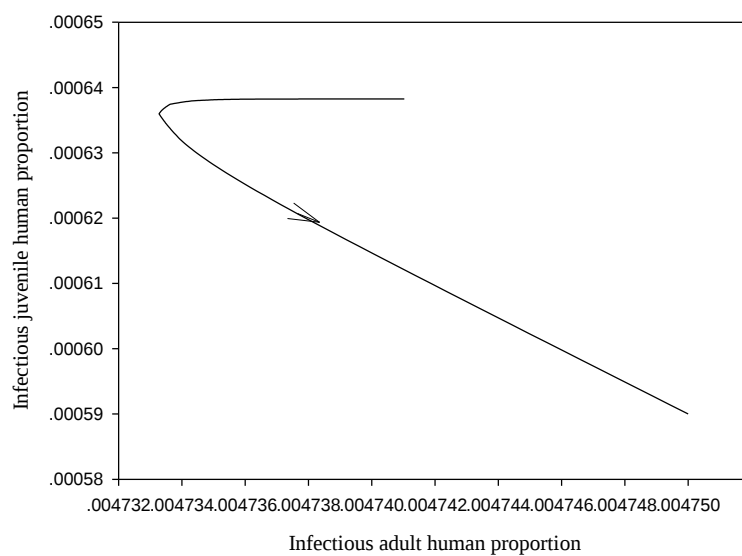


รูปที่ 3.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนยุงติดเชื้อเมื่อเทียบกับเวลา

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=0.287901$, $\beta_h=0.009$, $\beta_v=0.0000000007$. ผลเฉลยเข้าสู่ผลเฉลยสภาวะไร้โรค $(0,0,0)$

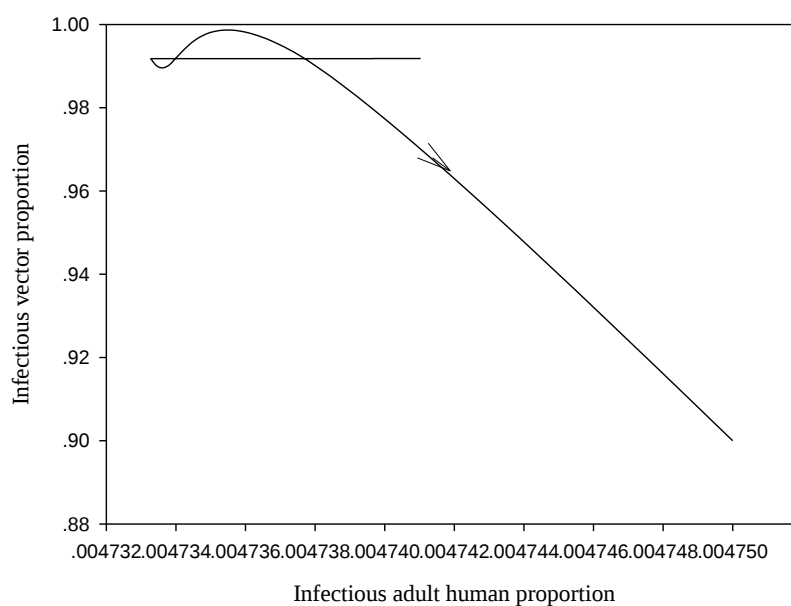


รูปที่ 3.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=0.287901$, $\beta_h=0.009$, $\beta_v=0.0000000007$. ผลเฉลยเข้าสู่ผลเฉลยสภาวะไร้โรค $(0,0,0)$

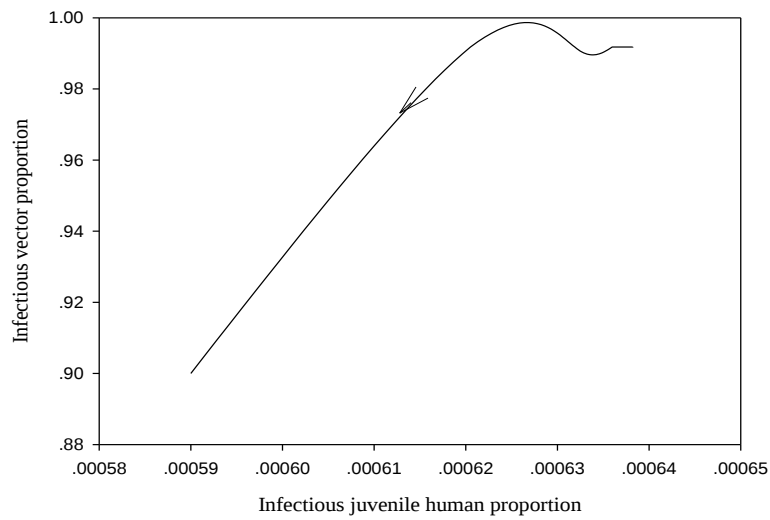


รูปที่ 3.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อมีความสัมพันธ์กับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=0.287901$, $\beta_h=0.009$, $\beta_v=0.0000000007$. ผลเฉลยเข้าสู่ผลเฉลยสภาวะไร้โรค $(0,0,0)$

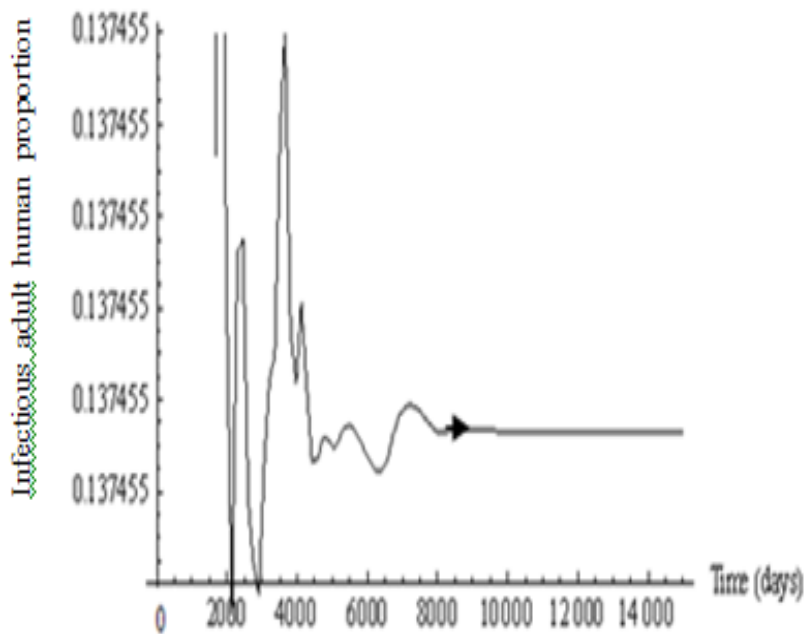


รูปที่ 3.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนยุงติดเชื้อมีความสัมพันธ์กับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=0.287901$, $\beta_h=0.009$, $\beta_v=0.0000000007$. ผลเฉลยเข้าสู่ผลเฉลยสภาวะไร้โรค $(0,0,0)$



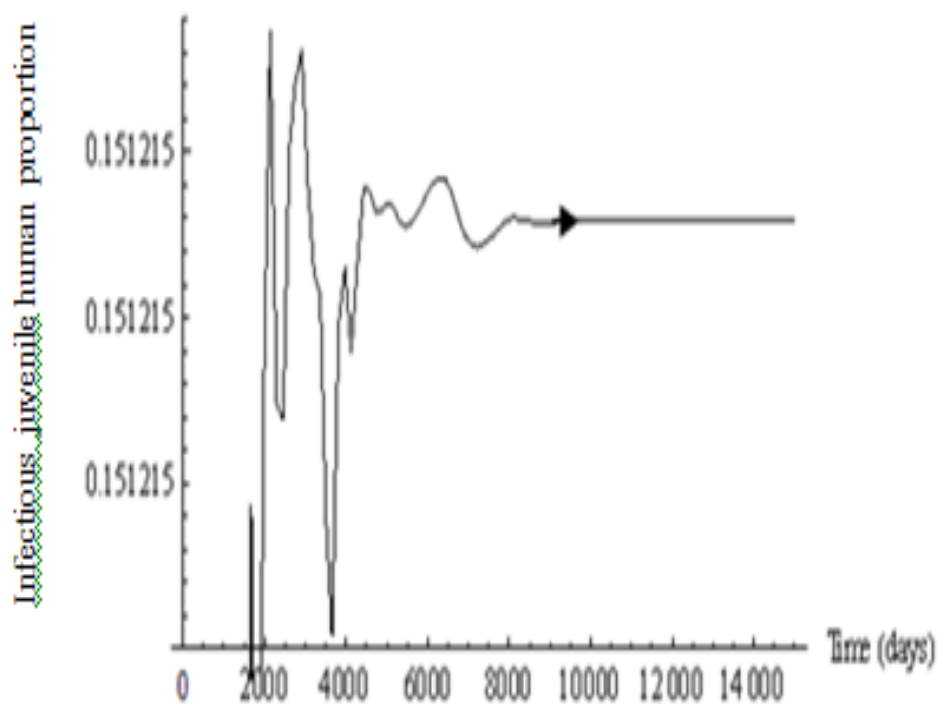
รูปที่ 3.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเมื่อเทียบกับเวลา

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$, $d_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$ day $^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1$ day $^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$, $\beta_h=0.000000007$.

ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะเรื้อรัง (0.00475034,0.000638251,0.99182)



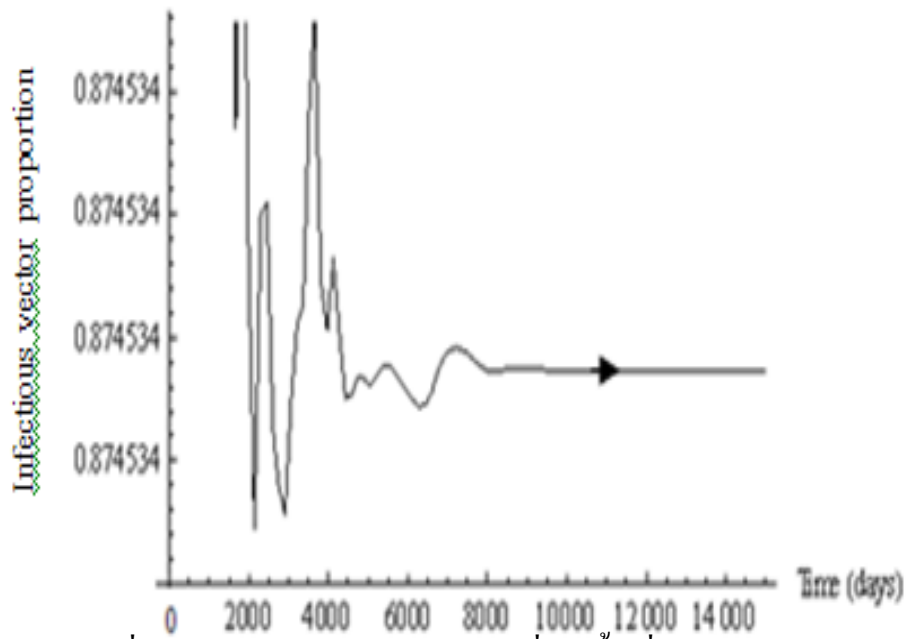
รูปที่ 3.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเด็กที่ติดเชื้อเมื่อเทียบกับเวลา

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$, $d_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$ day $^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1$ day $^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$, $\beta_h=0.000000007$.

ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะเรื้อรัง (0.00475034,0.000638251,0.99182)



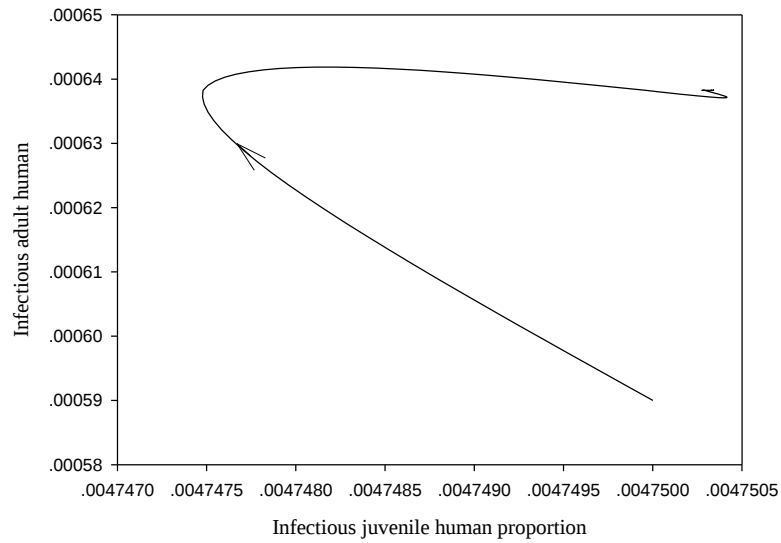
รูปที่ 3.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อเมื่อเทียบกับเวลา

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$, $d_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$ day $^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1$ day $^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$, $\beta_h=0.000000007$.

ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะเรื้อรัง (0.00475034,0.000638251,0.99182)



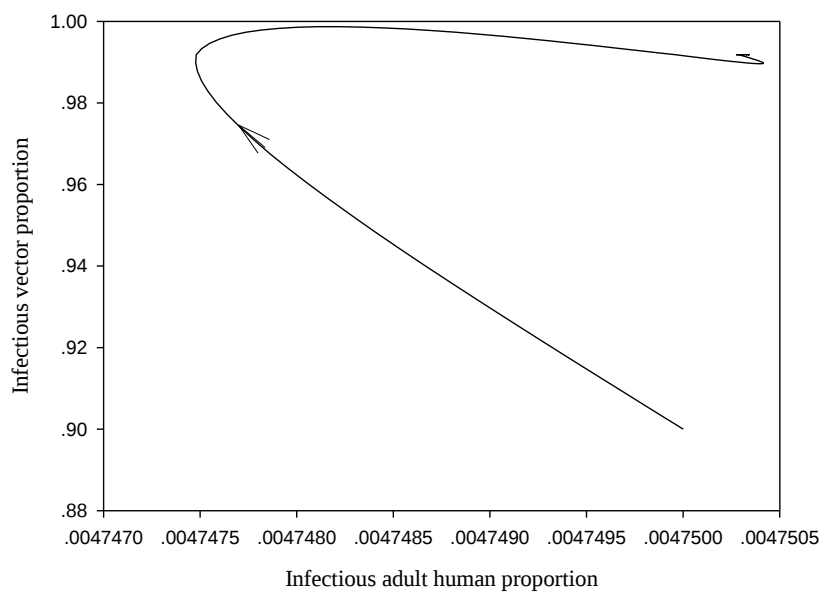
รูปที่ 3.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$, $d_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$ day $^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1$ day $^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$, $\beta_h=0.000000007$.

ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะเรื้อรัง (0.00475034, 0.000638251, 0.99182)



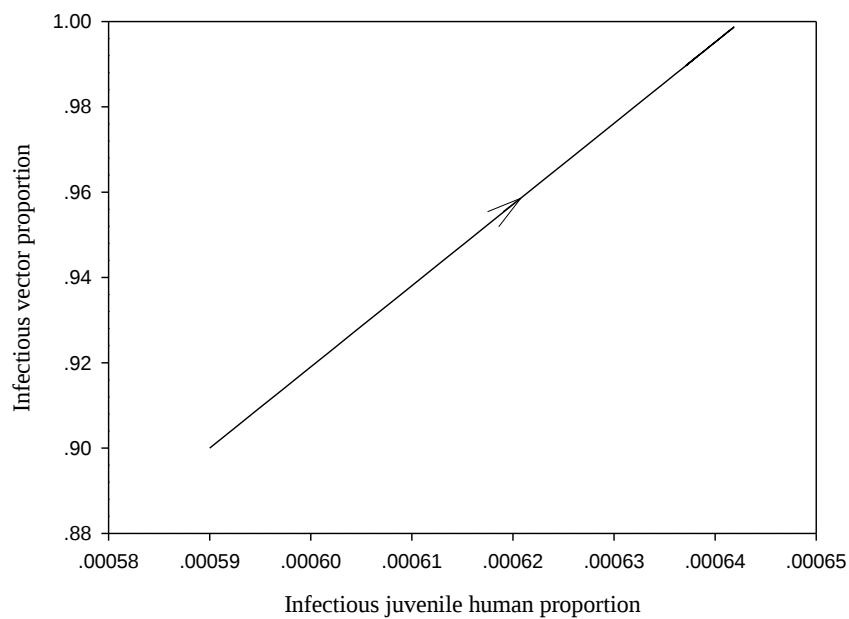
รูปที่ 3.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$, $d_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$ day $^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1$ day $^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$, $\beta_h=0.000000007$.

ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะเรื้อรัง (0.00475034,0.000638251,0.99182)



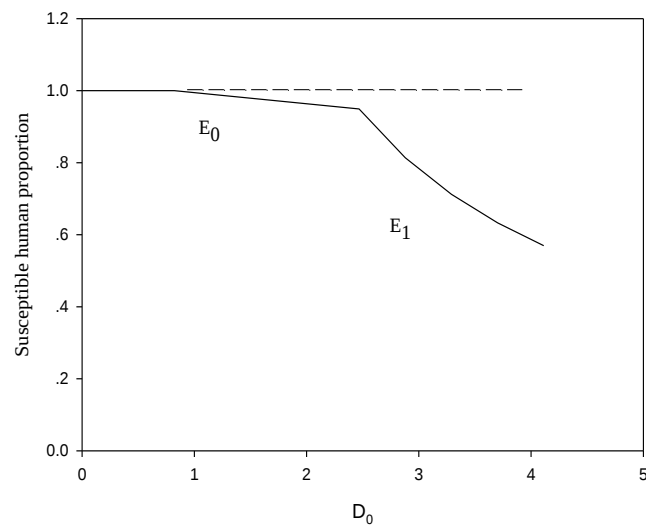
รูปที่ 3.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อเทียบกับสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อ

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$, $d_h=1/(365*65)$ day $^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$ day $^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1$ day $^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,

$D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$, $\beta_h=0.000000007$.

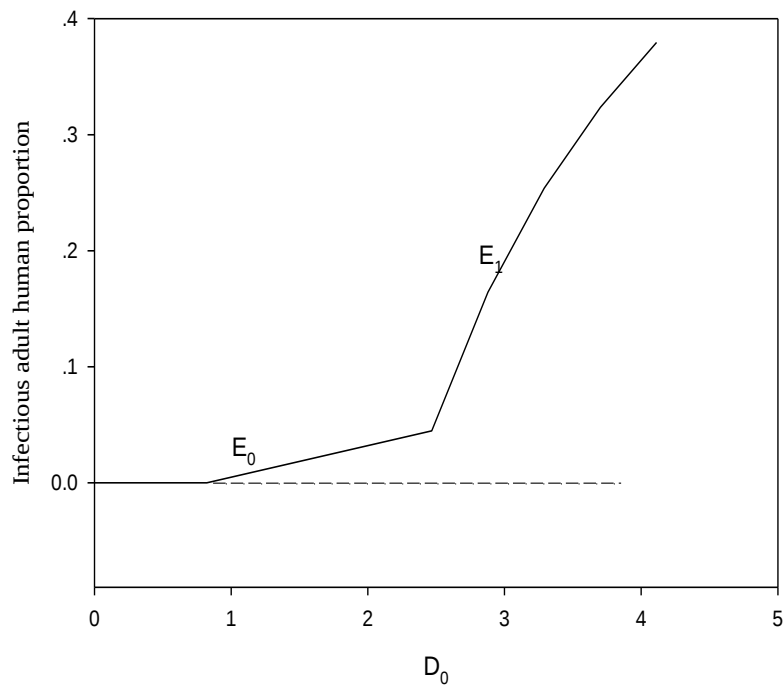
ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะเรื้อรัง (0.00475034, 0.000638251, 0.99182)



รูปที่ 3.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

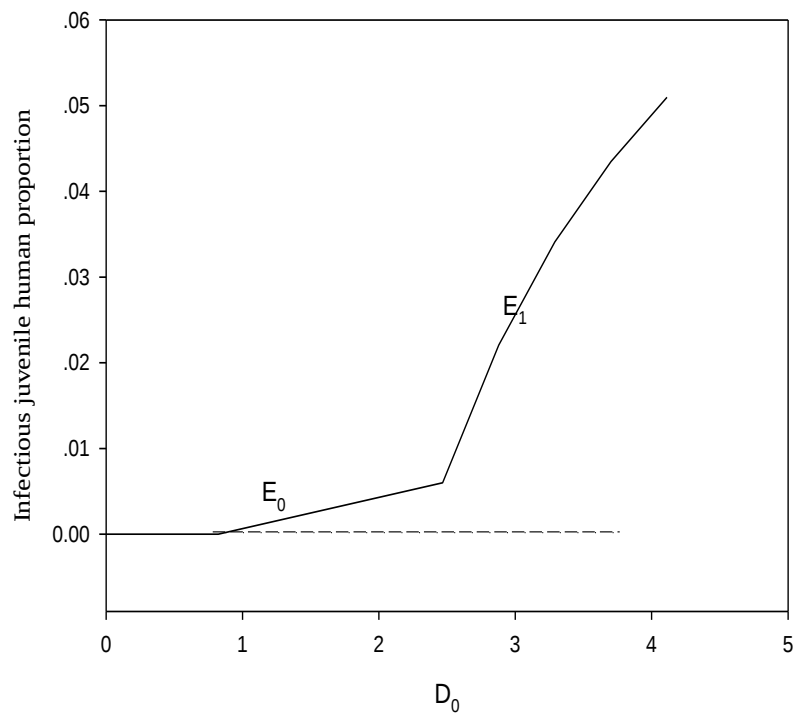
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.



รูปที่ 3.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเด็กที่ติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

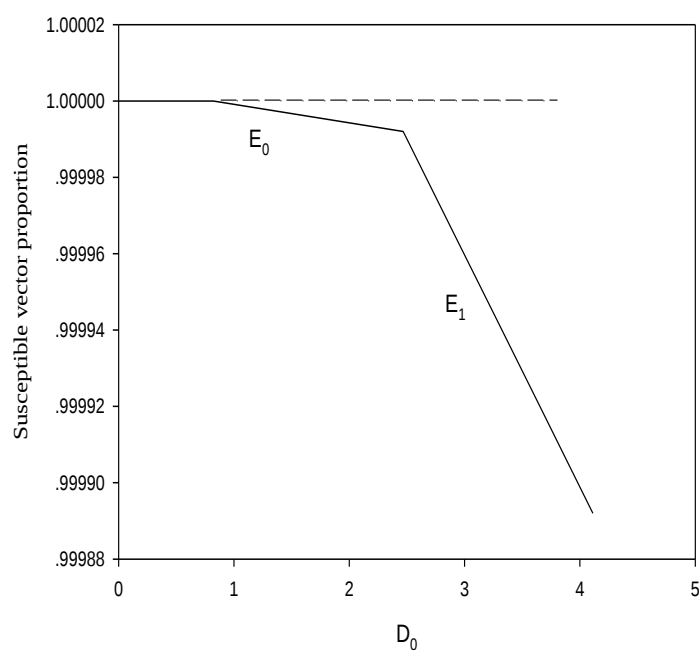
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.



รูปที่ 3.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเด็กที่ติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

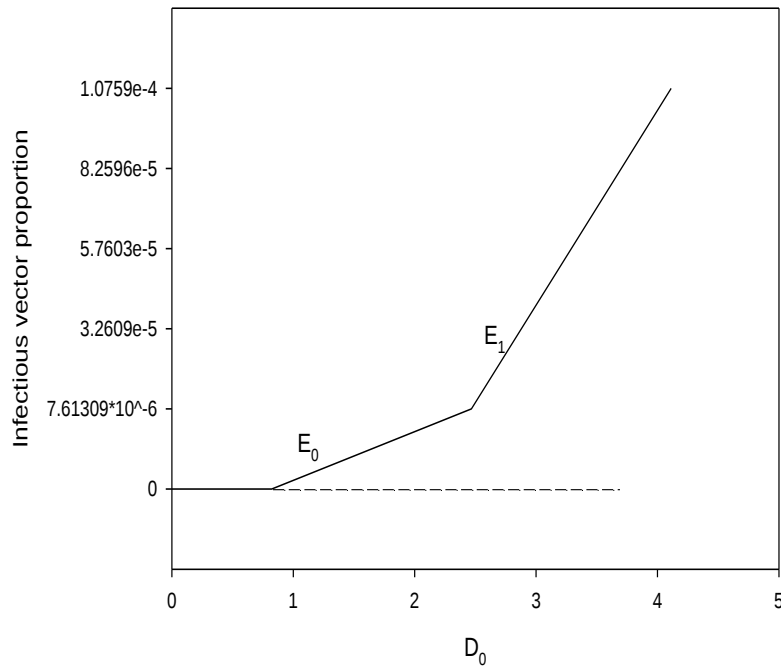
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_j=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.



รูปที่ 3.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเมื่อค่าสับพจน์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.



รูปที่ 3.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.

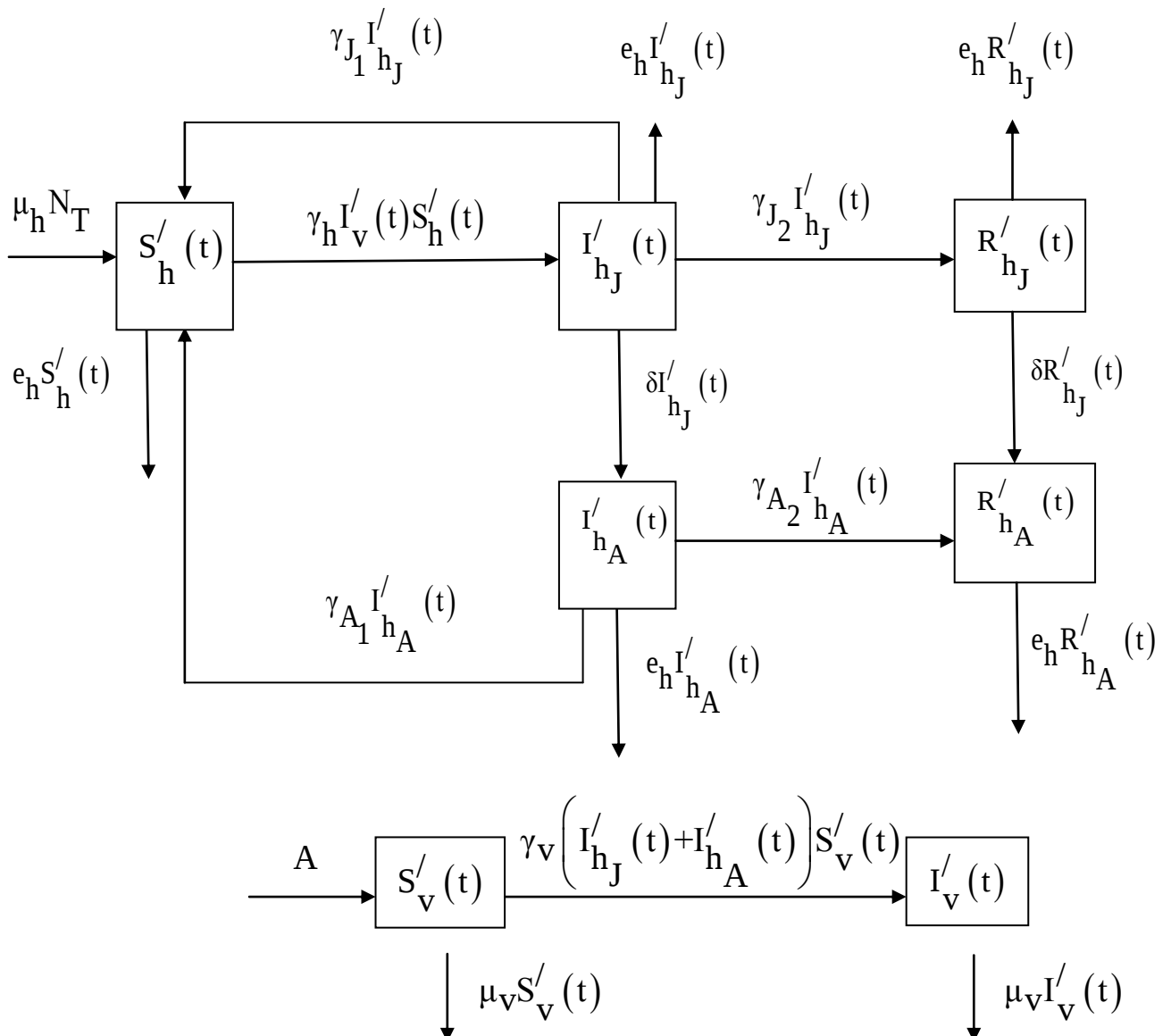
บทที่ 4

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โรคมัลเรียสำหรับเด็กและผู้ใหญ่ เมื่อพิจารณาการฟื้นไข้กลับ

ของเชื้อพลาสมาเดียว และการวิเคราะห์

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โรคมัลเรียสำหรับเด็กและผู้ใหญ่เมื่อพิจารณาการฟื้นไข้กลับของเชื้อพลาสมา

เดียว



รูปที่ 4.1 แผนภาพแสดงแบบจำลองนี้เมื่อพิจารณาการฟื้นไข้กลับของเชื้อพลาสมาเดียว

จาก diagram ของประชากรมนุษย์จะได้สมการ

$$\frac{d}{dt} S'_h(t) = \mu_h N_T + \gamma_{A_1} I'_{h_A}(t) + \gamma_{J_1} I'_{h_J}(t) - e_h S'_h(t) - \gamma_h I'_v(t) S'_h(t)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{h_J}(t) = \gamma_h I'_v(t) S'_h(t) - \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_{J_2} I'_{h_J}(t) - e_h I'_{h_J}(t) - \gamma_{J_1} I'_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{h_A}(t) = \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_{A_2} I'_{h_A}(t) - e_h I'_{h_A}(t) - \gamma_{A_1} I'_{h_A}(t)$$

$$\frac{d}{dt} R'_{h_J}(t) = \gamma_{J_2} I'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_J}(t) - \delta R'_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} R'_{h_A}(t) = \gamma_{A_2} I'_{h_A}(t) + \delta R'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_A}(t)$$

จาก diagram ของประชากรยุงจะได้สมการ

$$\frac{d}{dt} S'_v(t) = A - \mu_v S'_v(t) - \gamma_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t)$$

$$\frac{d}{dt} I'_v(t) = \gamma_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t) - \mu_v I'_v(t)$$

$$\text{จาก } N_T = S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) + R'_{h_J}(t) + R'_{h_A}(t)$$

โดยที่ตัวแปรในแบบจำลองมีความหมายดังนี้

$S'_h(t)$ คือจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

$I'_{h_J}(t)$ คือจำนวนของเด็กที่ติดเชื้อ

$I'_{hA}(t)$ คือจำนวนของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อ

$R'_{hJ}(t)$ คือจำนวนของเด็กที่ฟื้นไข้

$R'_{hA}(t)$ คือจำนวนของผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้

$S'_v(t)$ คือจำนวนของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

$I'_v(t)$ คือจำนวนของยุงที่ติดเชื้อ

พารามิเตอร์แต่ละตัวมีความหมายดังนี้

μ_h คือ อัตราการเกิดของประชากร

e_h คือ อัตราการเสียชีวิตของประชากร

N_T คือ จำนวนประชากรทั้งหมด

γ_h คือ อัตราการถ่ายทอดเชื้อของโรคนี้จากยุงไปคน

γ_{J1} คือ อัตราที่เด็กที่ติดเชื้อกลายเป็นเด็กที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

γ_{A1} คือ อัตราที่ผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อกลายเป็นผู้ใหญ่ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

γ_{J2} คือ อัตราการฟื้นไข้ของเด็ก

γ_{A2} คือ อัตราการฟื้นไข้ของผู้ใหญ่

δ คือ อัตราที่เด็กเติบโตเป็นผู้ใหญ่

β_v คือ อัตราการถ่ายทอดเชื้อของโรคนี้จากคนไปยุง

μ_v คือ อัตราการเสียชีวิตของยุง

A คือ จำนวนของยุง ณ เวลาเริ่มต้น

N_v คือ จำนวนของยุงทั้งหมด

จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} N_T &= \frac{d}{dt} \left(S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) + R'_{h_J}(t) + R'_{h_A}(t) \right) \\
 \frac{d}{dt} N_T &= \frac{d}{dt} S'_h(t) + \frac{d}{dt} I'_{h_J}(t) + \frac{d}{dt} I'_{h_A}(t) + \frac{d}{dt} R'_{h_J}(t) + \frac{d}{dt} R'_{h_A}(t) \\
 &= \mu_h N_T + \gamma_{A_1} I'_{h_A}(t) + \gamma_{J_1} I'_{h_J}(t) - e_h S'_h(t) - \gamma_h I'_v(t) S'_h(t) \\
 &\quad + \gamma_h I'_v(t) S'_h(t) - \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_{J_2} I'_{h_J}(t) - e_h I'_{h_J}(t) - \gamma_{J_1} I'_{h_J}(t) \\
 &\quad + \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_{A_2} I'_{h_A}(t) - e_h I'_{h_A}(t) - \gamma_{A_1} I'_{h_A}(t) \\
 &\quad + \gamma_{J_2} I'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_J}(t) - \delta R'_{h_J}(t) \\
 &\quad + \gamma_{A_2} I'_{h_A}(t) + \delta R'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_A}(t) \\
 &= \mu_h N_T - e_h S'_h(t) - e_h I'_{h_J}(t) - e_h I'_{h_A}(t) - e_h R'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_A}(t) \\
 &= \mu_h N_T - e_h \left(S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) + R'_{h_J}(t) + R'_{h_A}(t) \right) \\
 &= \mu_h N_T - e_h N_T \\
 &= (\mu_h - e_h) N_T \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

เมื่อ $\mu_h = e_h$

จาก $N_V = S'_V(t) + I'_V(t)$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} N_V &= \frac{d}{dt} (S'_V(t) + I'_V(t)) \\
&= \frac{d}{dt} S'_V(t) + \frac{d}{dt} I'_V(t) \\
&= A - \mu_V S'_V(t) - \gamma_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t) + \gamma_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t) \\
&\quad - \mu_V I'_V(t) \\
&= A - \mu_V S'_V(t) - \mu_V I'_V(t) \\
&= A - \mu_V (S'_V(t) + I'_V(t)) \\
&= A - \mu_V N_V \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } N_V = A/\mu_V$$

4.2 ผลการวิเคราะห์แบบจำลอง

กำหนดให้

$$\begin{aligned} S_h(t) &= \frac{S'_h(t)}{N_T} & I_{h_J}(t) &= \frac{I'_{h_J}(t)}{N_T} & I_{h_A}(t) &= \frac{I'_{h_A}(t)}{N_T} \\ R_{h_J}(t) &= \frac{R'_{h_J}(t)}{N_T} & R_{h_A}(t) &= \frac{R'_{h_A}(t)}{N_T} & S_v(t) &= \frac{S'_v(t)}{N_v} \\ I_v(t) &= \frac{I'_v(t)}{N_v} \end{aligned}$$

หาสมการได้ดังนี้

หา $\frac{d}{dt}S_h(t)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_h(t) &= \frac{S'_h(t)}{N_T} \\ N_T S_h(t) &= S'_h(t) \\ \frac{d}{dt}(N_T S_h(t)) &= \frac{d}{dt}S'_h(t) \\ N_T \frac{d}{dt}S_h(t) &= \frac{d}{dt}S'_h(t) \\ N_T \frac{d}{dt}S_h(t) &= \mu_h N_T + \gamma_{A_1} I'_{h_A}(t) + \gamma_{J_1} I'_{h_J}(t) - e_h S'_h(t) - \gamma_h I'_v(t) S'_h(t) \\ \frac{d}{dt}S_h(t) &= \frac{\mu_h N_T}{N_T} + \frac{\gamma_{A_1} I'_{h_A}(t)}{N_T} + \frac{\gamma_{J_1} I'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{e_h S'_h(t)}{N_T} - \frac{\gamma_h I'_v(t) S'_h(t)}{N_T} \\ \frac{d}{dt}S_h(t) &= \mu_h + \gamma_{A_1} I_{h_A}(t) + \gamma_{J_1} I_{h_J}(t) - e_h S_h(t) - \gamma_h I'_v(t) S_h(t) \end{aligned}$$

จาก $\mu_h = e_h$ และ $I'_v(t) = I_v(t)N_v$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_h(t) &= \mu_h + \gamma_{A_1}I_{h_A}(t) + \gamma_{J_1}I_{h_J}(t) - e_h S_h(t) - \gamma_h I'_v(t)S_h(t) \\ &= e_h + \gamma_{A_1}I_{h_A}(t) + \gamma_{J_1}I_{h_J}(t) - e_h S_h(t) - \gamma_h I_v(t)N_v S_h(t) \\ &= e_h + \gamma_{A_1}I_{h_A}(t) + \gamma_{J_1}I_{h_J}(t) - (e_h + \gamma_h I_v(t)N_v)S_h(t)\end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt}I_{h_J}(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$\begin{aligned}I_{h_J}(t) &= \frac{I'_{h_J}(t)}{N_T} \\ I_{h_J}(t)N_T &= I'_{h_J}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(I_{h_J}(t)N_T\right) &= \frac{d}{dt}I'_{h_J}(t) \\ N_T \frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \frac{d}{dt}I'_{h_J}(t) \\ N_T \frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \gamma_h I'_v(t)S'_h(t) - \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_{J_2}I'_{h_J}(t) - e_h I'_{h_J}(t) - \gamma_{J_1}I'_{h_J}(t) \\ \frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \frac{\gamma_h I'_v(t)S'_h(t)}{N_T} - \frac{\delta I'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{\gamma_{J_2}I'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{e_h I'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{\gamma_{J_1}I'_{h_J}(t)}{N_T} \\ \frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \gamma_h I'_v(t)S_h(t) - \delta I_{h_J}(t) - \gamma_{J_2}I_{h_J}(t) - e_h I_{h_J}(t) - \gamma_{J_1}I_{h_J}(t) \\ \frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \gamma_h I'_v(t)S_h(t) - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right)I_{h_J}(t)\end{aligned}$$

จาก $I'_V(t) = I_V(t)N_V$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \gamma_h I'_V(t)S_h(t) - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right)I_{h_J}(t) \\ \frac{d}{dt}I_{h_J}(t) &= \gamma_h I_V(t)N_V S_h(t) - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right)I_{h_J}(t)\end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt}I_{h_A}(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$\begin{aligned}I_{h_A}(t) &= \frac{I'_{h_A}(t)}{N_T} \\ I_{h_A}(t)N_T &= I'_{h_A}(t) \\ \frac{d}{dt}\left(I_{h_A}(t)N_T\right) &= \frac{d}{dt}I'_{h_A}(t) \\ N_T \frac{d}{dt}I_{h_A}(t) &= \frac{d}{dt}I'_{h_A}(t) \\ N_T \frac{d}{dt}I_{h_A}(t) &= \delta I'_{h_J}(t) - \gamma_{A_2} I'_{h_A}(t) - e_h I'_{h_A}(t) - \gamma_{A_1} I'_{h_A}(t) \\ \frac{d}{dt}I_{h_A}(t) &= \frac{\delta I'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{\gamma_{A_2} I'_{h_A}(t)}{N_T} - \frac{e_h I'_{h_A}(t)}{N_T} - \frac{\gamma_{A_1} I'_{h_A}(t)}{N_T} \\ \frac{d}{dt}I_{h_A}(t) &= \delta I_{h_J}(t) - \gamma_{A_2} I_{h_A}(t) - e_h I_{h_A}(t) - \gamma_{A_1} I_{h_A}(t) \\ \frac{d}{dt}I_{h_A}(t) &= \delta I_{h_J}(t) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}\right)I_{h_A}(t)\end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt}R'_{h_J}(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$R_{h_J}(t) = \frac{R'_{h_J}(t)}{N_T}$$

$$R_{h_J}(t)N_T = R'_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(R_{h_J}(t)N_T \right) = \frac{d}{dt} R'_{h_J}(t)$$

$$N_T \frac{d}{dt} R_{h_J}(t) = \frac{d}{dt} R'_{h_J}(t)$$

$$N_T \frac{d}{dt} R_{h_J}(t) = \gamma_{J_2} I'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_J}(t) - \delta R'_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} R_{h_J}(t) = \frac{\gamma_{J_2} I'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{e_h R'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{\delta R'_{h_J}(t)}{N_T}$$

$$\frac{d}{dt} R_{h_J}(t) = \gamma_{J_2} I_{h_J}(t) - e_h R_{h_J}(t) - \delta R_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} R_{h_J}(t) = \gamma_{J_2} I_{h_J}(t) - (e_h + \delta) R_{h_J}(t)$$

หา $\frac{d}{dt}R'_{h_A}(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$\begin{aligned}
 R'_{h_A}(t) &= \frac{R'_{h_A}(t)}{N_T} \\
 R_{h_A}(t)N_T &= R'_{h_A}(t) \\
 \frac{d}{dt}\left(R_{h_A}(t)N_T\right) &= \frac{d}{dt}R'_{h_A}(t) \\
 N_T \frac{d}{dt}R_{h_A}(t) &= \frac{d}{dt}R'_{h_A}(t) \\
 N_T \frac{d}{dt}R_{h_A}(t) &= \gamma_{A_2}I'_{h_A}(t) + \delta R'_{h_J}(t) - e_h R'_{h_A}(t) \\
 \frac{d}{dt}R_{h_A}(t) &= \frac{\gamma_{A_2}I'_{h_A}(t)}{N_T} + \frac{\delta R'_{h_J}(t)}{N_T} - \frac{e_h R'_{h_A}(t)}{N_T} \\
 \frac{d}{dt}R_{h_A}(t) &= \gamma_{A_2}I_{h_A}(t) + \delta R_{h_J}(t) - e_h R_{h_A}(t)
 \end{aligned}$$

หา $\frac{d}{dt}S_V(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$S_V(t) = \frac{S'_V(t)}{N_V}$$

$$S_V(t)N_V = S'_V(t)$$

$$\frac{d}{dt}S_V(t)N_V = \frac{d}{dt}S'_V(t)$$

$$N_V \frac{d}{dt}S_V(t) = \frac{d}{dt}S'_V(t)$$

$$N_V \frac{d}{dt}S_V(t) = A - \mu_V S'_V(t) - \gamma_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t)$$

$$\frac{d}{dt}S_V(t) = \frac{A}{N_V} - \frac{\mu_V S'_V(t)}{N_V} - \frac{\gamma_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_V(t)}{N_V}$$

$$\frac{d}{dt}S_V(t) = \mu_V - \mu_V S_V(t) - \gamma_V \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S_V(t)$$

จาก $I'_{h_J}(t) = I_{h_J}(t)N_T$ และ $I'_{h_A}(t) = I_{h_A}(t)N_T$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}S_V(t) = \mu_V - \mu_V S_V(t) - \gamma_V \left(I_{h_J}(t)N_T + I_{h_A}(t)N_T \right) S_V(t)$$

$$\frac{d}{dt}S_V(t) = \mu_V - \mu_V S_V(t) - \gamma_V \left(I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) \right) N_T S_V(t)$$

หา $\frac{d}{dt}I_v(t)$ จะได้ว่า

จาก

$$I_v(t) = \frac{I'_v(t)}{N_v}$$

$$I_v(t)N_v = I'_v(t)$$

$$\frac{d}{dt}(I_v(t)N_v) = \frac{d}{dt}I'_v(t)$$

$$N_v \frac{d}{dt}I_v(t) = \frac{d}{dt}I'_v(t)$$

$$N_v \frac{d}{dt}I_v(t) = \gamma_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t) - \mu_v I'_v(t)$$

$$\frac{d}{dt}I_v(t) = \frac{\gamma_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S'_v(t)}{N_v} - \frac{\mu_v I'_v(t)}{N_v}$$

$$\frac{d}{dt}I_v(t) = \gamma_v \left(I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) \right) S_v(t) - \mu_v I_v(t)$$

จาก $I'_{h_J}(t) = I_{h_J}(t)N_T$ และ $I'_{h_A}(t) = I_{h_A}(t)N_T$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}I_v(t) = \gamma_v \left(I_{h_J}(t)N_T + I_{h_A}(t)N_T \right) S_v(t) - \mu_v I_v(t)$$

จะได้เงื่อนไขใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} S_h(t) + I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) + R'_{h_J}(t) + R'_{h_A}(t) &= \frac{S'_h(t)}{N_T} + \frac{I'_{h_J}(t)}{N_T} + \frac{I'_{h_A}(t)}{N_T} + \frac{R'_{h_J}(t)}{N_T} + \frac{R'_{h_A}(t)}{N_T} \\ &= \frac{S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) + R'_{h_J}(t) + R'_{h_A}(t)}{N_T} \end{aligned}$$

$$\text{จาก } N_T = S'_h(t) + I'_{h_J}(t) + I'_{h_A}(t) + R'_{h_J}(t) + R'_{h_A}(t)$$

จะได้ว่า

$$S_h(t) + I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) + R_{h_J}(t) + R_{h_A}(t) = \frac{N_T}{N_T}$$

$$= 1$$

และ

$$S_v(t) + I_v(t) = \frac{S'_v(t)}{N_v} + \frac{I'_v(t)}{N_v}$$

$$= \frac{S'_v(t) + I'_v(t)}{N_v}$$

จาก $N_v = S'_v(t) + I'_v(t)$ จะได้ว่า

$$S_v(t) + I_v(t) = \frac{N_v}{N_v}$$

$$= 1$$

จะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d}{dt} I_{h_J}(t) = \gamma_h I_v(t) N_v S_h(t) - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} \right) I_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} I_{h_A}(t) = \delta I_{h_J}(t) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} \right) I_{h_A}(t)$$

$$\frac{d}{dt} R_{h_J}(t) = \gamma_{J_2} I_{h_J}(t) - (e_h + \delta) R_{h_J}(t)$$

$$\frac{d}{dt} R_{h_A}(t) = \gamma_{A_2} I_{h_A}(t) + \delta R_{h_J}(t) - e_h R_{h_A}(t)$$

$$\frac{d}{dt} I_v(t) = \gamma_v \left(I_{h_J}(t) N_T + I_{h_A}(t) N_T \right) S_v(t) - \mu_v I_v(t)$$

โดยที่ $S_h(t) + I_{h_J}(t) + I_{h_A}(t) + R_{h_J}(t) + R_{h_A}(t) = 1$ และ $S_v(t) + I_v(t) = 1$

จุดสมดุล $\left(I_{h_J}^*, I_{h_A}^*, R_{h_J}^*, R_{h_A}^*, I_v^*\right)$ หาได้จากการจับสมการข้างต้นมาเท่ากับศูนย์ จะได้

$$\text{จาก } \gamma_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right) I_{h_J}^*(t) = 0 \text{ จะได้}$$

$$\gamma_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right) I_{h_J}^*(t) = 0$$

$$\gamma_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t) = \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right) I_{h_J}^*(t)$$

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v S_h^*(t)}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} \quad (1)$$

$$\text{จาก } \delta I_{h_J}^*(t) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}\right) I_{h_A}^*(t) = 0 \text{ จะได้}$$

$$\delta I_{h_J}^*(t) = \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}\right) I_{h_A}^*(t)$$

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \quad (2)$$

$$\text{จาก } \gamma_{J_2} I_{h_J}^*(t) - (e_h + \delta) R_{h_J}^*(t) = 0 \text{ จะได้}$$

$$\gamma_{J_2} I_{h_J}^*(t) = (e_h + \delta) R_{h_J}^*(t)$$

$$R_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_{J_2} I_{h_J}^*(t)}{e_h + \delta} \quad (3)$$

$$\text{จาก } \gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t) + \delta R_{h_J}^*(t) - e_h R_{h_A}^*(t) = 0 \text{ จะได้}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t) + \delta R_{h_J}^*(t) &= e_h R_{h_A}^*(t) \\ R_{h_A}^*(t) &= \frac{\gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t) + \delta R_{h_J}^*(t)}{e_h} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_{h_A}^*(t) &= \frac{\gamma_{A_2} \delta}{e_h (\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1})} \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right] + \frac{\delta \gamma_{J_2}}{e_h (e_h + \delta)} \left(\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right) \\ R_{h_A}^*(t) &= \left[\frac{\gamma_{A_2} \delta}{e_h (\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1})} + \frac{\delta \gamma_{J_2}}{e_h (e_h + \delta)} \right] \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right] \end{aligned}$$

จาก $\gamma_v \left(I_{h_J}^*(t) N_T + I_{h_A}^*(t) N_T \right) S_v^*(t) - \mu_v I_v^*(t) = 0$ จะได้

$$\gamma_v \left(I_{h_J}^*(t) N_T + I_{h_A}^*(t) N_T \right) S_v^*(t) = \mu_v I_v^*(t)$$

$$I_v^*(t) = \frac{\gamma_v \left(I_{h_J}^*(t) N_T + I_{h_A}^*(t) N_T \right) S_v^*(t)}{\mu_v}$$

$$I_v^*(t) = \frac{\gamma_v}{\mu_v} \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right) N_T S_v^*(t) \quad (5)$$

นำ $S_h^*(t) = 1 - I_{h_J}^*(t) - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t)$ แทนลงในสมการที่ 1

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v \left[1 - I_{h_J}^*(t) - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right]}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}}$$

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} \left[1 - I_{h_J}^*(t) - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right]$$

$$I_{h_J}^*(t) + \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} \left[1 - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right]$$

$$\left[1 + \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} \right] I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} \left[1 - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right]$$

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}} \left[1 - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right] \left[\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v} \right]$$

$$I_{h_J}^*(t) = \left[1 - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right] \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v} \right]$$

นำ (2),(3),(4) แทนลงในสมการข้างบน

$$I_{h_J}^*(t) = \left[1 - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right] \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v} \right]$$

$$\begin{aligned}
I_{h_J}^*(t) &= \left[1 - \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} - \frac{\gamma_{J_2} I_{h_J}^*(t)}{e_h + \delta} - \frac{\gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t) + \delta R_{h_J}^*(t)}{e_h} \right] \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v} \right] \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &= \frac{1}{I_{h_J}^*(t)} \left[1 - \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} - \frac{\gamma_{J_2} I_{h_J}^*(t)}{e_h + \delta} - \frac{\gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t) + \delta R_{h_J}^*(t)}{e_h} \right] \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &= \frac{1}{I_{h_J}^*(t)} - \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} - \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} - \frac{\gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t)}{I_{h_J}^*(t) e_h} - \frac{\delta R_{h_J}^*(t)}{I_{h_J}^*(t) e_h} \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &+ \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} + \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)} - \frac{\gamma_{A_2} I_{h_A}^*(t)}{I_{h_J}^*(t) e_h} - \frac{\delta R_{h_J}^*(t)}{I_{h_J}^*(t) e_h} \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &+ \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} + \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)} \left[1 - \frac{\gamma_{A_2} \delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} - \frac{\delta \gamma_{J_2} I_{h_J}^*(t)}{e_h + \delta} \right] \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &+ \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} + \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} + \frac{\gamma_{A_2} \delta}{e_h (\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1})} + \frac{\delta \gamma_{J_2}}{e_h (e_h + \delta)} = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)} \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &+ \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} + \frac{\gamma_{A_2} \delta}{e_h (\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1})} + \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} + \frac{\delta \gamma_{J_2}}{e_h (e_h + \delta)} = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)} \\
\frac{\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} &+ \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \left(1 + \frac{\gamma_{A_2}}{e_h} \right) + \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} \left(1 + \frac{\delta}{e_h} \right) = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)}
\end{aligned}$$

$$\text{ให้ } P = \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \left(1 + \frac{\gamma_{A_2}}{e_h} \right) + \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} \left(1 + \frac{\delta}{e_h} \right), \quad M = \delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} \quad \text{จะได้}$$

$$\frac{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} + P = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)}$$

$$\frac{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} + P \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)}$$

$$\frac{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right)}{\gamma_h I_v^*(t) N_v} = \frac{1}{I_{h_J}^*(t)}$$

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right)}$$

$$\text{ดังนั้นจะได้} \quad I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \quad \text{นั่นคือ}$$

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta I_{h_J}^*(t)}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}}$$

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right)} \right]$$

และจะได้

$$\begin{aligned}
I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) &= \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} + \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right] \\
I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) &= \left[1 + \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \right] \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \quad (*)
\end{aligned}$$

นำ $S_v(t) = 1 - I_v(t)$ และ (*) แทนลงในสมการที่ 5

$$\begin{aligned}
I_v^*(t) &= \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right) (1 - I_v^*(t)) \\
I_v^*(t) &= \left(\frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_J}^*(t) + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_A}^*(t) \right) (1 - I_v^*(t)) \\
I_v^*(t) &= \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_J}^*(t) + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_A}^*(t) - \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_J}^*(t) I_v^*(t) - \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_A}^*(t) I_v^*(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_v^*(t) + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_J}^*(t) I_v^*(t) + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_A}^*(t) I_v^*(t) &= \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_J}^*(t) + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_A}^*(t) \\
\left(1 + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_J}^*(t) + \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} I_{h_A}^*(t) \right) I_v^*(t) &= \frac{\gamma_v N_T}{\mu_v} \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right) \\
I_v^*(t) &= \frac{\gamma_v N_T \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right)}{\mu_v + \gamma_v N_T \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right)} \\
I_v^*(t) &= \frac{\gamma_v N_T \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right)}{\mu_v + \gamma_v N_T \left(I_{h_J}^*(t) + I_{h_A}^*(t) \right)} \\
I_v^*(t) &= \frac{\left[1 + \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \right] \frac{\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right)}}{\mu_v + \left[1 + \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \right] \frac{\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_v^*(t) &= \frac{\left[\frac{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \right] \frac{\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)}}{\mu_v + \left[\frac{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \right] \frac{\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)}} \\
I_v^*(t) &= \frac{\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right)}{\mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v) \right) + \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right)} \\
&\mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v) \right) I_v^*(t) \\
&+ \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) I_v^*(t) = \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) \\
&\mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v) \right) I_v^*(t) \\
&+ \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) I_v^*(t) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) = 0 \\
I_v^*(t) &\left[\mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v) \right) + \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) \right] = 0 \\
&\mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v) \right) I_v^*(t) \\
&+ \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) I_v^*(t) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) = 0 \\
&\mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M I_v^*(t) + \gamma_h \left(I_v^*(t) \right)^2 N_v + P \left(\gamma_h \left(I_v^*(t) \right)^2 N_v \right) \right) \\
&+ \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h \left(I_v^*(t) \right)^2 N_v \right) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) = 0 \\
&\left(\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\mu_v M - (\gamma_v N_T \gamma_h N_v) \right) \right) I_v^*(t) + \left(\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \gamma_h N_v (\gamma_v N_T + \mu_v (1 + P)) \right) \left(I_v^*(t) \right)^2 = 0 \\
&\text{ดังนั้นจะได้ } I_v^*(t) = 0 \text{ และ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right) \right) \\
& + \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) - \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h N_v \right) = 0 \\
& \mu_v \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right) \right) \\
& + \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) = \left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h N_v \right) \\
& \mu_v \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right) \right) + \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) = \frac{\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right) \left(\gamma_v N_T \gamma_h N_v \right)}{\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} + \delta \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_v \left(M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P \left(\gamma_h I_v^*(t) N_v \right) \right) + \left(\gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v \right) = \gamma_v N_T \gamma_h N_v \\
& \mu_v M + \mu_v \gamma_h N_v I_v^*(t) + \mu_v P \gamma_h N_v I_v^*(t) + \gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v = \gamma_v N_T \gamma_h N_v \\
& \mu_v \gamma_h N_v I_v^*(t) + \mu_v P \gamma_h N_v I_v^*(t) + \gamma_v N_T \gamma_h I_v^*(t) N_v = \gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M \\
& \left(\mu_v \gamma_h N_v + \mu_v P \gamma_h N_v + \gamma_v N_T \gamma_h N_v \right) I_v^*(t) = \gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M \\
& I_v^*(t) = \frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M}{\mu_v \gamma_h N_v + \mu_v P \gamma_h N_v + \gamma_v N_T \gamma_h N_v}
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้จุดสมดุล $\left(I_{h_J}^*, I_{h_A}^*, R_{h_J}^*, R_{h_A}^*, I_v^* \right)$ สองจุดคือจุดสมดุลในสภาวะไร้โรคคือ

$$E_0(0,0,0,0,0) \text{ และในสภาวะระบาดเรื้อรัง } E_1 \left(I_{h_J}^*, I_{h_A}^*, R_{h_J}^*, R_{h_A}^*, I_v^* \right) \text{ เมื่อ}$$

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)}$$

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right]$$

$$R_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} \left(\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right)$$

$$R_{h_A}^*(t) = \left[\frac{\gamma_{A_2} \delta}{e_h (\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1})} + \frac{\delta \gamma_{J_2}}{e_h (e_h + \delta)} \right] \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right]$$

$$I_v^*(t) = \frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M}{\mu_v \gamma_h N_v + \mu_v P \gamma_h N_v + \gamma_v N_T \gamma_h N_v}$$

จากจุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะพบว่า $I_v^* > 0$ เมื่อ

จาก

$$I_v^*(t) = \frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M}{\mu_v \gamma_h N_v + \mu_v P \gamma_h N_v + \gamma_v N_T \gamma_h N_v}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M}{\mu_v \gamma_h N_v + \mu_v P \gamma_h N_v + \gamma_v N_T \gamma_h N_v} > 0$$

$$\gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M > 0$$

$$\gamma_v N_T \gamma_h N_v > \mu_v M$$

นั่นคือ $I_v^* > 0$ เมื่อ

$$\gamma_v N_T \gamma_h N_v > \mu_v M$$

$$\frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v}{\mu_v M} > 1$$

$$R_0 > 1$$

เมื่อ $R_0 = \frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v}{\mu_v M}$

พิจารณาความเสถียรภาพ

จากสมการสามารถนำมาเขียนในรูปจาโคเบียนเมทริกซ์ดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma_h^* I_v(t) N_v - \left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1} \right) & -\gamma_h^* I_v(t) N_v & -\gamma_h^* I_v(t) N_v & -\gamma_h^* I_v(t) N_v & \gamma_h N_v \left(1 - I_{hJ}(t) - I_{hA}(t) - R_{hJ}(t) - R_{hA}(t) \right) \\ \delta & -\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -\left(e_h + \delta \right) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h & 0 \\ \gamma_v N_T \left(1 - I_v(t) \right) & \gamma_v N_T \left(1 - I_v(t) \right) & 0 & 0 & -\gamma_v \left(I_{hJ}(t) N_T + I_{hA}(t) N_T \right) - \mu_v \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} I_{hJ}^* \\ I_{hA}^* \\ R_{hJ}^* \\ R_{hA}^* \\ I_v^* \end{pmatrix}$$

ค่าเฉพาะของสมการหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation)

$$\det(J - \lambda I_5) = 0$$

เมื่อ I_3 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 5×5

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค $E_0(0,0,0,0,0)$ จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ของจุดสมดุลดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma_h I_v^*(t) N_v - (\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}) & -\gamma_h I_v^*(t) N_v & -\gamma_h I_v^*(t) N_v & -\gamma_h I_v^*(t) N_v & \gamma_h N_v \left(1 - I_{h_J}^*(t) - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right) \\ \delta & -(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}) & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -(e_h + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h & 0 \\ \gamma_v N_T (1 - I_v^*(t)) & \gamma_v N_T (1 - I_v^*(t)) & 0 & 0 & -\gamma_v \left(I_{h_J}^*(t) N_T + I_{h_A}^*(t) N_T \right) - \mu_v \end{bmatrix}_{(0,0,0,0,0)}$$

$$J = \begin{bmatrix} -(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}) & 0 & 0 & 0 & \gamma_h N_v \\ \delta & -(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}) & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -(e_h + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h & 0 \\ \gamma_v N_T & \gamma_v N_T & 0 & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

$$J - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} -\left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right) - \lambda & 0 & 0 & 0 & \gamma_h N_v \\ \delta & -\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}\right) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -(e_h + \delta) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h - \lambda & 0 \\ \gamma_v N_T & \gamma_v N_T & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I_5) = \begin{vmatrix} -\left(\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}\right) - \lambda & 0 & 0 & 0 & \gamma_h N_v \\ \delta & -\left(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}\right) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -(e_h + \delta) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h - \lambda & 0 \\ \gamma_v N_T & \gamma_v N_T & 0 & 0 & -\mu_v - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I_5) =$$

$$(-\lambda - e_h)(-\delta - \lambda - e_h)(N_v \gamma_h (\delta N_T \gamma_v + \lambda N_T \gamma_v + e_h N_T \gamma_v + N_T \gamma_v \gamma_{A_1} +$$

$$N_T \gamma_v \gamma_{A_2}) + (-\lambda - e_h - \gamma_{A_1} - \gamma_{A_2})(-\delta - \lambda - e_h - \gamma_{J_1} - \gamma_{J_2})(-\lambda - \mu_v))$$

$$= 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & -\lambda^5 + \left(-\delta^4 e_h^{-\gamma_{A_1} - \gamma_{A_2} - \gamma_{J_1} - \gamma_{J_2} - \mu_v} \right) \lambda^4 + \left(\begin{aligned} & \delta^2 - 3\delta e_h^2 - 6e_h^2 + N_T N_v \gamma_h \gamma_v - \delta \gamma_{A_1} - 3e_h \gamma_{A_1} - \delta \gamma_{A_2} - 3e_h \gamma_{A_2} - 3e_h \gamma_{J_1} - \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} - \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \\ & - 3e_h \gamma_{J_2} - \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} - \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} - \delta \mu_v - 4e_h \mu_v - \gamma_{A_1} \mu_v - \gamma_{A_2} \mu_v - \gamma_{J_1} \mu_v - \gamma_{J_2} \mu_v \end{aligned} \right) \lambda^3 \\
 & + \left(\begin{aligned} & \delta^3 + 2\delta^2 e_h - 3\delta e_h^2 - 4e_h^3 + \delta N_T N_v \gamma_h \gamma_v + 3e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v + \delta^2 \gamma_{A_1} - 2\delta e_h \gamma_{A_1} - 3e_h^2 \gamma_{A_1} + N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} + \delta^2 \gamma_{A_2} - 2\delta e_h \gamma_{A_2} - 3e_h^2 \gamma_{A_2} \\ & + N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} + \delta^2 \gamma_{J_1} - 3e_h \gamma_{J_1} - 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} - 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} + \delta^2 \gamma_{J_2} - 3e_h \gamma_{J_2} - 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} - 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} + \delta^2 \mu_v - 3\delta e_h \mu_v - 6e_h \mu_v - \delta \gamma_{A_1} \mu_v \\ & - 3e_h \gamma_{A_1} \mu_v - \delta \gamma_{A_2} \mu_v - 3e_h \gamma_{A_2} \mu_v - 3e_h \gamma_{J_1} \mu_v - \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v - \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v - 3e_h \gamma_{J_2} \mu_v - \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v - \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v \end{aligned} \right) \lambda^2 \\
 & + \left(\begin{aligned} & \delta^3 e_h + \delta^2 e_h^2 - \delta e_h^3 - e_h^4 - \delta^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v + 2\delta e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v + 3e_h^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v + \delta^3 \gamma_{A_1} + \delta^2 e_h \gamma_{A_1} - \delta e_h^2 \gamma_{A_1} - e_h^3 \gamma_{A_1} + 2e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} + \delta^3 \gamma_{A_2} + \delta^2 e_h \gamma_{A_2} \\ & - \delta e_h^2 \gamma_{A_2} - e_h^3 \gamma_{A_2} + 2e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} + \delta^2 e_h \gamma_{J_1} - e_h^3 \gamma_{J_1} + \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} - e_h^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} + \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} - e_h^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} + \delta^2 e_h \gamma_{J_2} - e_h^3 \gamma_{J_2} + \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} - e_h^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} + \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \\ & - e_h^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} + \delta^2 \mu_v + 2\delta^2 e_h \mu_v - 3\delta e_h^2 \mu_v - 4e_h^3 \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_1} \mu_v - 2\delta e_h \gamma_{A_1} \mu_v - 3e_h^2 \gamma_{A_1} \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_2} \mu_v - 2\delta e_h \gamma_{A_2} \mu_v - 3e_h^2 \gamma_{A_2} \mu_v + \delta^2 \gamma_{J_1} \mu_v - 3e_h \gamma_{J_1} \mu_v - 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v \\ & - 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v + \delta^2 \gamma_{J_2} \mu_v - 3e_h^2 \gamma_{J_2} \mu_v - 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v - 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v \end{aligned} \right) \lambda \\
 & + \left(\begin{aligned} & -\delta^3 N_T N_v \gamma_h \gamma_v + N_T N_v \gamma_h \gamma_v + \delta N_T N_v \gamma_h \gamma_v - \delta^2 e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v - \delta^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} + e_h^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} - \delta^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} + e_h^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} - \delta e_h^3 \mu_v + \delta^2 e_h^2 \mu_v + \delta^3 e_h \mu_v \\ & - e_h^4 \mu_v + \delta^3 \gamma_{A_1} \mu_v + \delta^2 e_h \gamma_{A_1} \mu_v - \delta e_h^2 \gamma_{A_1} \mu_v - e_h^3 \gamma_{A_1} \mu_v + \delta^3 \gamma_{A_2} \mu_v + \delta^2 e_h \gamma_{A_2} \mu_v - \delta e_h^2 \gamma_{A_2} \mu_v - e_h^3 \gamma_{A_2} \mu_v + \delta^2 e_h \gamma_{J_1} \mu_v - e_h^3 \gamma_{J_1} \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v - e_h^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v \\ & - e_h^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v + \delta^2 e_h \gamma_{J_2} \mu_v - e_h^3 \gamma_{J_2} \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v - e_h^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v - e_h^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v \end{aligned} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

ให้

$$a_1 = \delta + 4e_h + \gamma_{A_1} + \gamma_{A_2} + \gamma_{J_1} + \gamma_{J_2} + \mu_v$$

$$a_2 = -\delta^2 + 3\delta e_h + 6e_h^2 - N_T N_v \gamma_h \gamma_v + \delta \gamma_{A_1} + 3e_h \gamma_{A_1} + \delta \gamma_{A_2} + 3e_h \gamma_{A_2} + 3e_h \gamma_{J_1} + \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} + \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} + 3e_h \gamma_{J_2} + \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} + \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} + \delta \mu_v + 4e_h \mu_v + \gamma_{A_1} \mu_v + \gamma_{A_2} \mu_v + \gamma_{J_1} \mu_v + \gamma_{J_2} \mu_v$$

$$a_3 = -\delta^3 - 2\delta^2 e_h + 3\delta e_h^2 + 4e_h^3 - \delta N_T N_v \gamma_h \gamma_v - 3e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v - \delta^2 \gamma_{A_1} + 2\delta e_h \gamma_{A_1} + 3e_h^2 \gamma_{A_1} - N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} - \delta^2 \gamma_{A_2} + 2\delta e_h \gamma_{A_2} + 3e_h^2 \gamma_{A_2} - N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} - \delta^2 \gamma_{J_1} + 3e_h \gamma_{J_1} + 2e_h^2 \gamma_{J_1} + 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} + 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} - \delta^2 \gamma_{J_2} + 3e_h \gamma_{J_2} + 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} + 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} - \delta^2 \mu_v + 3\delta e_h \mu_v + 6e_h^2 \mu_v + \delta \gamma_{A_1} \mu_v + 3e_h \gamma_{A_1} \mu_v + \delta \gamma_{A_2} \mu_v + 3e_h \gamma_{A_2} \mu_v + 3e_h \gamma_{J_1} \mu_v + \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v + \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v + 3e_h \gamma_{J_2} \mu_v + \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v + \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v$$

$$a_4 = -\delta^3 e_h - \delta^2 e_h^2 - \delta e_h^3 + e_h^4 + \delta^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v - 2\delta e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v - 3e_h^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v - \delta^3 \gamma_{A_1} - \delta^2 e_h \gamma_{A_1} + \delta e_h^2 \gamma_{A_1} + e_h^3 \gamma_{A_1} - 2e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} - \delta^3 \gamma_{A_2} - \delta^2 e_h \gamma_{A_2} + \delta e_h^2 \gamma_{A_2} + e_h^3 \gamma_{A_2} - 2e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} - \delta^3 \gamma_{J_1} - \delta^2 e_h \gamma_{J_1} + \delta e_h^2 \gamma_{J_1} + e_h^3 \gamma_{J_1} - 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} - \delta^3 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} - e_h^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} - \delta^2 e_h \gamma_{J_2} + e_h^3 \gamma_{J_2} - \delta^3 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} - e_h^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} - \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} + e_h^3 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} - \delta^3 \mu_v - 2\delta^2 e_h \mu_v + 3\delta e_h^2 \mu_v + 4e_h^3 \mu_v - \delta^2 \gamma_{A_1} \mu_v + 2\delta e_h \gamma_{A_1} \mu_v + 3e_h^2 \gamma_{A_1} \mu_v - \delta^2 \gamma_{A_2} \mu_v + 2\delta e_h \gamma_{A_2} \mu_v + 3e_h^2 \gamma_{A_2} \mu_v - \delta^2 \gamma_{J_1} \mu_v + 3e_h \gamma_{J_1} \mu_v + 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v + 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v - \delta^2 \gamma_{J_2} \mu_v + 3e_h \gamma_{J_2} \mu_v + 2e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v + 2e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v$$

$$\begin{aligned}
a_5 = & \delta^3 N_T N_v \gamma_h \gamma_v - N_T N_v \gamma_h \gamma_v - \delta N_T N_v \gamma_h \gamma_v + \delta^2 e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v + \delta^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} - e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_1} + \delta^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} - e_h N_T N_v \gamma_h \gamma_v \gamma_{A_2} \\
& + \delta^3 e_h \mu_v - \delta^2 e_h \mu_v - \delta^3 e_h \mu_v + e_h \mu_v - \delta^4 \gamma_{A_1} \mu_v \\
& - \delta^2 e_h \gamma_{A_1} \mu_v + \delta^2 e_h \gamma_{A_1} \mu_v + e_h \gamma_{A_1} \mu_v - \delta^3 \gamma_{A_2} \mu_v - \delta^2 e_h \gamma_{A_2} \mu_v + \delta^2 e_h \gamma_{A_2} \mu_v + e_h \gamma_{A_2} \mu_v - \delta^3 e_h \gamma_{J_1} \mu_v + e_h \gamma_{J_1} \mu_v - \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v + e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} \mu_v - \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v + e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} \mu_v - \delta^2 e_h \gamma_{J_2} \mu_v + e_h \gamma_{J_2} \mu_v \\
& - \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v + e_h \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v - \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v + e_h \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0$$

จาก The Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
H_1 &= (a_1) & H_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} & H_3 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \\
H_4 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{pmatrix} & H_5 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

จะได้

$$\det H_1 = a_1$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3$$

$$\det H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2$$

$$\det H_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_5 + 2a_1 a_4 a_5 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 - a_5^2$$

$$\det H_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5^2 + 2a_1 a_4 a_5^2 - a_3^2 a_4 a_5 - a_1^2 a_4^2 a_5 - a_1 a_2^2 a_5^2 - a_5^3$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก

ดังนั้น จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned}
\det H_1 &= a_1 &> 0 \\
\det H_2 &= a_1 a_2 - a_3 &> 0 \\
\det H_3 &= a_1 a_2 a_3 - a_3^2 &> 0 \\
\det H_4 &= a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_5 + 2a_1 a_4 a_5 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 - a_1 a_2^2 a_5 - a_5^2 &> 0 \\
\det H_5 &= a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5^2 + 2a_1 a_4 a_5^2 - a_3^2 a_4 a_5 - a_1^2 a_4^2 a_5 - a_1 a_2^2 a_5^2 - a_5^3 &> 0
\end{aligned}$$

จุดสมดุลภายใต้สภาวะระบาดเรื้อรังจะได้จุดสมดุล $E_1 \left(I_{h_J}^*, I_{h_A}^*, R_{h_J}^*, R_{h_A}^*, I_v^* \right)$

เมื่อ

$$I_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)}$$

$$I_{h_A}^*(t) = \frac{\delta}{\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}} \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right]$$

$$R_{h_J}^*(t) = \frac{\gamma_{J_2}}{e_h + \delta} \left(\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right)$$

$$R_{h_A}^*(t) = \left[\frac{\gamma_{A_2} \delta}{e_h (\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1})} + \frac{\delta \gamma_{J_2}}{e_h (e_h + \delta)} \right] \left[\frac{\gamma_h I_v^*(t) N_v}{M + \gamma_h I_v^*(t) N_v + P(\gamma_h I_v^*(t) N_v)} \right]$$

$$I_v^*(t) = \frac{\gamma_v N_T \gamma_h N_v - \mu_v M}{\mu_v \gamma_h N_v + \mu_v P \gamma_h N_v + \gamma_v N_T \gamma_h N_v}$$

สมมุติภายใต้สภาวะไร้โรค $E_1(I_{h_J}^*, I_{h_A}^*, R_{h_J}^*, R_{h_A}^*, I_v^*)$ จะได้จาโคเบียนเมทริกซ์ของจุดสมมูลดังนี้

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v - (\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}) & -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v & -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v & -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v & \gamma_{h_v} N_v \left(1 - I_{h_J}^*(t) - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right) \\ \delta & -(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}) & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -(e_h + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h & 0 \\ \gamma_v N_T \left(1 - I_v^*(t) \right) & \gamma_v N_T \left(1 - I_v^*(t) \right) & 0 & 0 & -\gamma_v \left(I_{h_J}^*(t) N_T + I_{h_A}^*(t) N_T \right) - \mu_v \end{bmatrix}$$

$$J - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v - (\delta + \gamma_{J_2} + e_h + \gamma_{J_1}) - \lambda & -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v & -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v & -\gamma_{h_v} I_v^*(t) N_v & \gamma_{h_v} N_v \left(1 - I_{h_J}^*(t) - I_{h_A}^*(t) - R_{h_J}^*(t) - R_{h_A}^*(t) \right) \\ \delta & -(\gamma_{A_2} + e_h + \gamma_{A_1}) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{J_2} & 0 & -(e_h + \delta) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A_2} & \delta & -e_h - \lambda & 0 \\ \gamma_v N_T \left(1 - I_v^*(t) \right) & \gamma_v N_T \left(1 - I_v^*(t) \right) & 0 & 0 & -\gamma_v \left(I_{h_J}^*(t) N_T + I_{h_A}^*(t) N_T \right) - \mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I_5) = 0$$

นั่นคือ

$$\lambda^5 + b_1 \lambda^4 + b_2 \lambda^3 + b_3 \lambda^2 + b_4 \lambda + b_5 = 0$$

จาก The Routh-Hurwitz Criteria จะได้ว่า

$$H_1 = (b_1) \quad H_2 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & b_5 & b_4 \end{pmatrix} \quad H_5 = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_5 & b_4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\det H_1 = b_1$$

$$\det H_2 = b_1 b_2 - b_3$$

$$\det H_3 = b_1 b_2 b_3 - b^2_3$$

$$\det H_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 + b_2 b_3 b_5 + 2b_1 b_4 b_5 - b^2_3 b_4 - b^2_1 b^2_4 - b_1 b^2_2 b_5 - b^2_5$$

$$\det H_5 = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 + b_2 b_3 b^2_5 + 2b_1 b_4 b^2_5 - b^2_3 b_4 b_5 - b^2_1 b^2_4 b_5 - b_1 b^2_2 b^2_5 - b^3_5$$

จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ determinants ของ Hurwitz matrices ทั้งหมดมีค่าเป็นบวก

ดังนั้น จุดสมมูลมีความเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ

$$\det H_1 = b_1 > 0$$

$$\det H_2 = b_1 b_2 - b_3 > 0$$

$$\det H_3 = b_1 b_2 b_3 - b^2_3 > 0$$

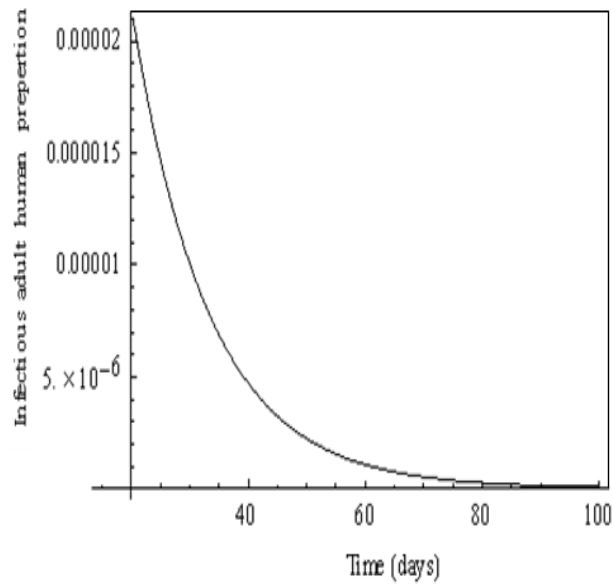
$$\det H_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 + b_2 b_3 b_5 + 2b_1 b_4 b_5 - b^2_3 b_4 - b^2_1 b^2_4 - b_1 b^2_2 b_5 - b^2_5 > 0$$

$$\det H_5 = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 + b_2 b_3 b^2_5 + 2b_1 b_4 b^2_5 - b^2_3 b_4 b_5 - b^2_1 b^2_4 b_5 - b_1 b^2_2 b^2_5 - b^3_5 > 0$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \delta^{+4} e_h^{+\gamma} A_1^{+\gamma} A_2^{+\gamma} J_1^{+\gamma} J_2^{+\gamma} \mu_v^{-1} N_v^{+\gamma} h^{-1} A_h^{N_T+2\gamma} v^{-1} h_J^{N_T} \\
b_2 &= \delta^2 + 3\delta e_h^2 + 6e_h^2 N_T N_v \gamma_h \gamma_v + (\delta + 3e_h) \left(\gamma_{A_1}^{+\gamma} A_2 \right) + \left(3e_h^{+\gamma} A_1^{+\gamma} A_2 \right) \left(\gamma_{J_1}^{+\gamma} J_2 \right) \\
&+ \left(\delta + 4e_h^{+\gamma} A_1^{+\gamma} A_2^{+\gamma} J_1^{+\gamma} J_2 \right) \mu_v^{+8\gamma} h + \left(-\delta - 3e_h^{-\gamma} A_1^{-\gamma} A_2^{-\gamma} J_2^{-\gamma} \mu_v \right) \left(N_v I_v^* \right) + \left(I_{h_A}^* + I_{h_J}^* \right) I_v^* \left(t \right) N_v N_T \\
&+ \left(\begin{array}{cccccc} \delta I_{h_A}^* & \delta I_{h_J}^* & -4e_h I_{h_A}^* & -4e_h I_{h_J}^* & & \\ -\gamma_{A_1} I_{h_A}^* & -\gamma_{A_1} I_{h_J}^* & -\gamma_{A_2} I_{h_A}^* & & & \\ -\gamma_{A_2} I_{h_J}^* & -\gamma_{J_1} I_{h_A}^* & -\gamma_{J_1} I_{h_J}^* & -\gamma_{J_2} I_{h_A}^* & -\gamma_{J_2} I_{h_J}^* & \end{array} \right) N_T + 14\gamma_v + \left(\begin{array}{cccccc} I_{h_A}^* & I_{h_J}^* & I_v^* & -I_{h_A}^* & I_v^* & \\ -I_{h_J}^* & I_v^* & +R_{h_A}^* & -R_{h_A}^* & I_v^* & \\ +R_{h_J}^* & -R_{h_J}^* & I_v^* & & & \end{array} \right) N_T N_v \gamma_h \gamma_v \\
b_3 &= \delta N_h N_v \beta_h \beta_v^{-d} h N_h N_v \beta_h \beta_v^{-N} h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A + \delta d_h \mu_v^{+\gamma} A \gamma_J \mu_v^{+d} h \gamma_J \mu_v^{+d} h \gamma_A \mu_v^{+\delta} \gamma_A \mu_v^{+d} h \mu_v^{+\delta} d_h N_h \beta_h \beta_v I_{h_A}^* \\
&+ d_h^2 N_h \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* + \delta N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_A}^* \\
&+ d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_A}^* + \delta d_h N_h \beta_v I_{h_J}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_A}^* + d_h^2 N_h \beta_v I_{h_J}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* + d_h N_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* - N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_{h_J}^* \\
&+ d_h N_h \beta_v \gamma_J I_{h_J}^* + N_h \beta_v \gamma_A \gamma_J I_{h_J}^* + \delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + d_h N_h N_v \beta_h \beta_v I_v^* + N_h N_v \beta_h \beta_v \gamma_A I_v^* + d_h N_v \beta_h \mu_v I_v^* + \gamma_A N_v \beta_h \mu_v I_v^* \\
&- 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_A}^* I_v^* - \delta N_v \beta_h \mu_v I_v^* - 2\delta N_h N_v \beta_h \beta_v I_{h_J}^* I_v^* \\
b_4 &= -e_h^4 - \delta^2 \left(-1 + I_v^* \right) N_T N_v \left(-1 + I_{h_A}^* + I_{h_J}^* + R_{h_A}^* + R_{h_J}^* \right) \gamma_h \gamma_v + \delta^3 \gamma_{A_1} + \delta^3 \gamma_{A_2} + \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_1} + \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_1} + \delta^2 \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} + \delta^2 \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} + \delta^3 \mu_v \\
&+ \delta^2 \gamma_{A_1} \mu_v + \delta^2 \gamma_{A_2} \mu_v + \delta^2 \gamma_{J_1} \mu_v + \delta^2 \gamma_{J_2} \mu_v - \delta^3 I_v^* N_v^{-\gamma} h - \delta^2 I_v^* N_v \gamma_{A_1}^{-\gamma} h - \delta I_v^* N_v \gamma_{A_1} \gamma_{J_2}^{-\gamma} h - \delta I_v^* N_v \gamma_{A_2} \gamma_{J_2}^{-\gamma} h - \delta^2 I_v^* N_v \mu_v \\
&- \gamma_h + \delta I_v^* N_v \gamma_{A_2} \mu_v - \gamma_h - \delta I_v^* N_v \gamma_{J_2} \mu_v - \gamma_h + I_v^* N_v \gamma_{A_1} \gamma_{J_2} \mu_v - \gamma_h + I_v^* N_v \gamma_{A_2} \gamma_{J_2} \mu_v - \gamma_h - e_h^3 \left(\delta + \gamma_{A_1} + \gamma_{A_2} + \gamma_{J_1} + \gamma_{J_2} + 4\mu_v - I_v^* N_v^{-\gamma} h \right) \\
&+ 4 \left(I_{h_A}^* + I_{h_J}^* \right) e_h^3 N_T^{-\gamma} v - \left(I_{h_A}^* + I_{h_J}^* \right) N_T \left(\delta^2 \left(\delta + \gamma_{A_1} + \gamma_{A_2} + \gamma_{J_1} + \gamma_{J_2} \right) + I_v^* N_v \left(\begin{array}{c} \delta \left(-\delta + \gamma_{A_2} \right) \\ + \left(-\delta + \gamma_{A_1} + \gamma_{A_2} \right) \gamma_{J_2} - \gamma_h \end{array} \right) \right) - \gamma_v \\
&+ e_h^2 \left(\begin{array}{c} \delta^2 - \left(\gamma_{A_1}^{+\gamma} A_2 \right) \left(\delta + \gamma_{J_1}^{+\gamma} J_2 \right) - 3 \left(\delta + \gamma_{A_1}^{+\gamma} A_2^{+\gamma} J_1^{+\gamma} J_2 \right) \mu_v \\ + N_v \left(\begin{array}{c} 3 \left(-1 + I_v^* \right) N_T \left(-1 + I_{h_A}^* + I_{h_J}^* + R_{h_A}^* + R_{h_J}^* \right) \gamma_h \gamma_v \\ + I_v^* \left(\delta + \gamma_{A_1}^{+\gamma} A_2^{+\gamma} J_1^{+\gamma} J_2 + 3\mu_v \right) - \gamma_h \\ + 3 \left(I_{h_A}^* + I_{h_J}^* \right) N_T \left(\delta + \gamma_{A_1}^{+\gamma} A_2^{+\gamma} J_1^{+\gamma} J_2 - I_v^* N_v^{-\gamma} h \right) - \gamma_v \end{array} \right) \end{array} \right) \\
b_5 &= \left(-1 + I_v^* \right) \left(\delta^2 - e_h^2 \right) N_T N_v \left(-1 + I_{h_A}^* + I_{h_J}^* + R_{h_A}^* + R_{h_J}^* \right) \gamma_h \gamma_v \left(\delta + e_h^{+\gamma} A_1^{+\gamma} A_2 \right) - \left(\delta^2 - e_h^2 \right) \left(e_h^{+\gamma} A_1^{+\gamma} A_2 \right) \left(\delta + e_h^{+\gamma} J_1^{+\gamma} J_2 \right) + I_v^* N_v \left(\begin{array}{c} \left(\delta^2 - e_h^2 \right) \left(\delta + e_h^{+\gamma} A_1 \right) \\ + e_h \left(\delta + e_h \right) \gamma_{A_2} - \left(\delta - e_h \right) \left(e_h^{+\gamma} A_1^{+\gamma} A_2 \right) \gamma_{J_2} \end{array} \right) - \gamma_h \\
&\left(\mu_v \left(I_{h_A}^* + I_{h_J}^* \right) N_T^{-\gamma} v \right)
\end{aligned}$$

4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ

จุดสมดุล ณ สถานะไร้โรค

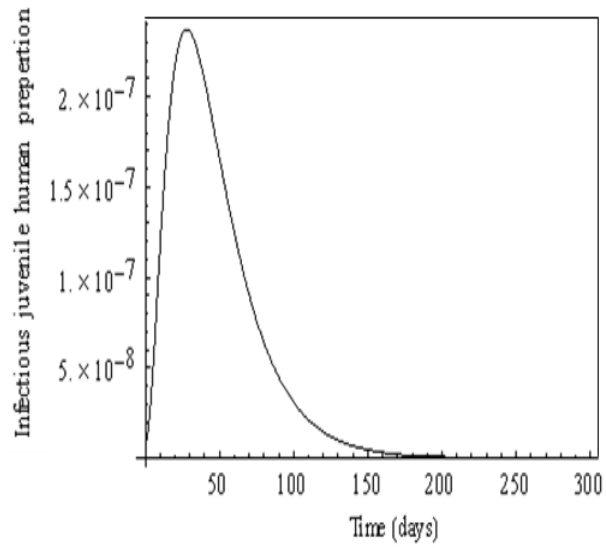


รูปที่ 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $N_T=500,000$,

$N_V=100$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $e_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $A=10,000$, $\gamma_{A_1}=1/365*2 \text{ day}^{-1}$,

$\gamma_{A_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_1}=1/365*3 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_V=1/25$.

$R_0=0.103489$, $\beta_h=0.99$, $\beta_V=0.0007$.

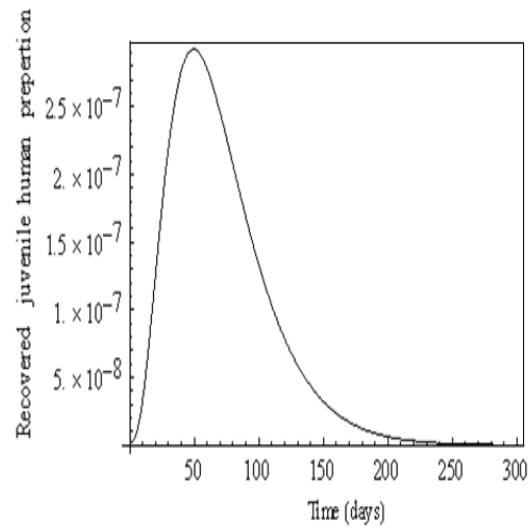


รูปที่ 4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของเด็กที่ติดเชื้อเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $N_T=500,000$,

$N_V=100$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $e_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $A=10,000$, $\gamma_{A_1}=1/365*2 \text{ day}^{-1}$,

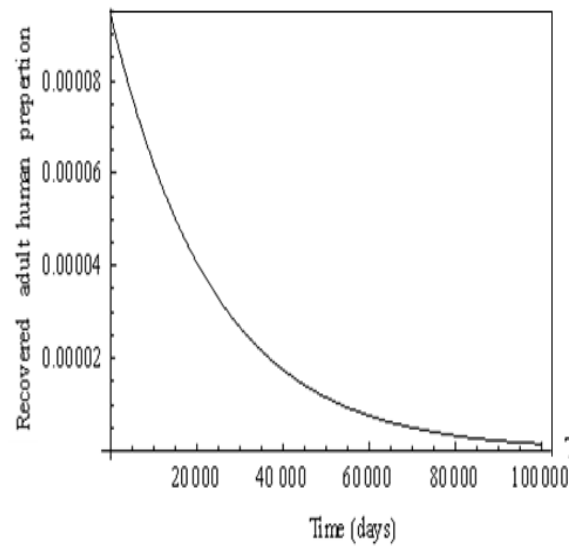
$\gamma_{A_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_1}=1/365*3 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.

$R_0=0.103489$, $\beta_h=0.99$, $\beta_v=0.0007$.

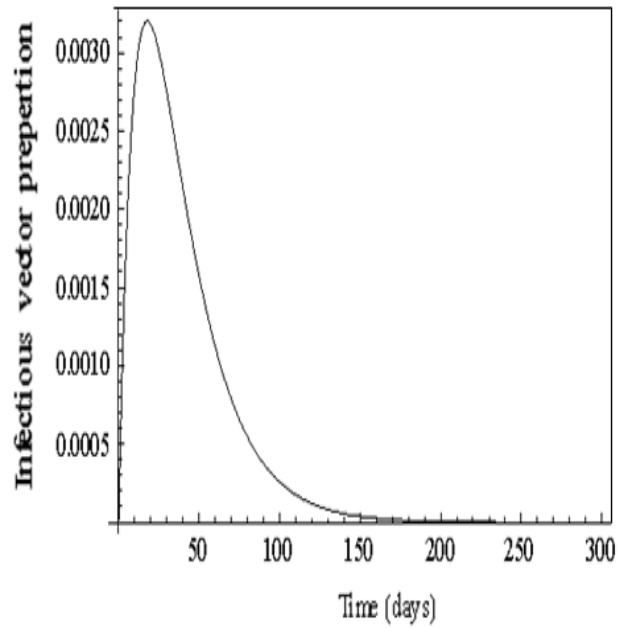


รูปที่ 4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของเด็กที่ฟื้นไข้เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 &N_T=500,000, N_V=100, \mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}, e_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}, A=10,000, \\
 &\gamma_{A_1}=1/365*2 \text{ day}^{-1}, \gamma_{A_2}=1/14 \text{ day}^{-1}, \gamma_{J_1}=1/365*3 \text{ day}^{-1}, \gamma_{J_2}=1/14 \text{ day}^{-1}, \delta=1/365*15, \\
 &\mu_V=1/25, R_0=0.103489, \beta_h=0.99, \beta_V=0.0007.
 \end{aligned}$$



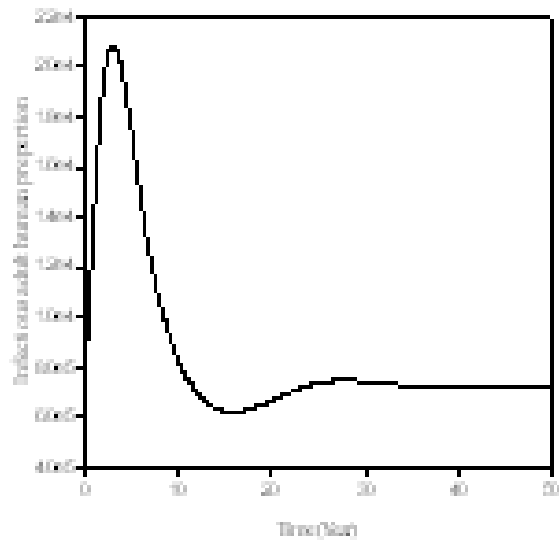
รูปที่ 4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้
 $N_T=500,000$, $N_V=100$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $e_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $A=10,000$,
 $\gamma_{A_1}=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{A_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_1}=1/365*3 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$,
 $\mu_V=1/25$. $R_0=0.103489$, $\beta_h=0.99$, $\beta_V=0.0007$.



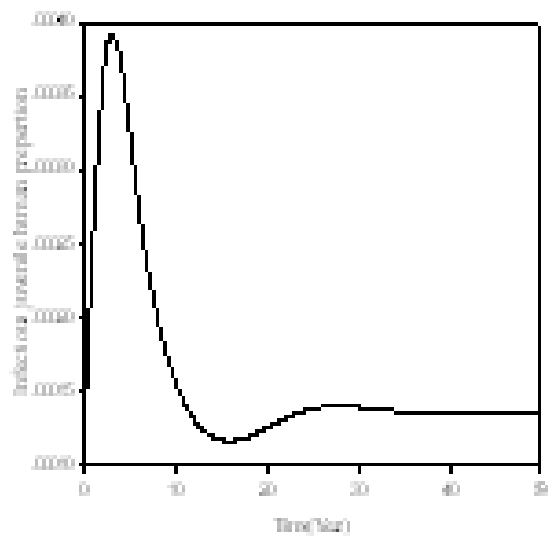
รูปที่ 4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของยุงที่ติดเชื้อเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 N_T &= 500,000, N_V = 100, \mu_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, e_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, A = 10,000, \\
 \gamma_{A_1} &= 1/365 \cdot 2 \text{ day}^{-1}, \gamma_{A_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \gamma_{J_1} = 1/365 \cdot 3 \text{ day}^{-1}, \gamma_{J_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \delta = 1/365 \cdot 15, \\
 \mu_V &= 1/25, R_0 = 0.103489, \beta_h = 0.99, \beta_V = 0.0007.
 \end{aligned}$$

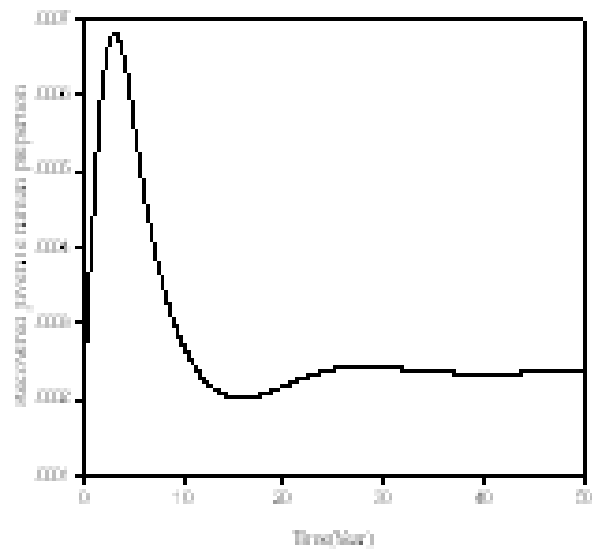
จุดสมดุล ณ สถานะเรื้อรัง



รูปที่ 4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $N_T=500,000$,
 $N_V=100$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $e_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $A=10,000$, $\gamma_{A_1}=1/365*2 \text{ day}^{-1}$,
 $\gamma_{A_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_1}=1/365*3 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$,
 $R_0=1.03489$, $\beta_v=0.99$, $\beta_h=0.00007$.

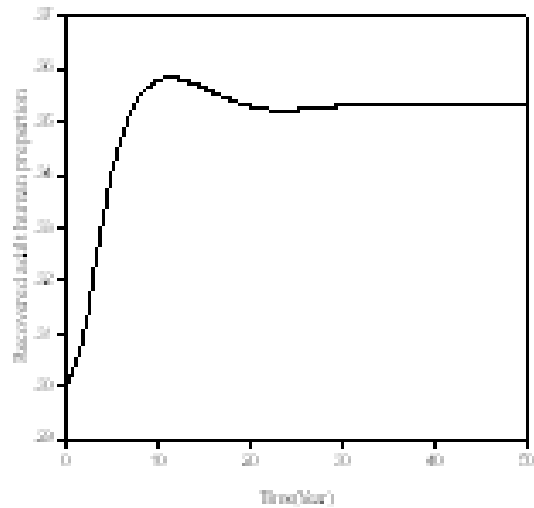


รูปที่ 4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของเด็กที่ติดเชื้อเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $N_T=500,000$, $N_V=100$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $e_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $A=10,000$, $\gamma_{A_1}=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{A_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_1}=1/365*3 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_{J_2}=1/14 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$, $R_0=1.03489$, $\beta_v=0.99$, $\beta_h=0.00007$.



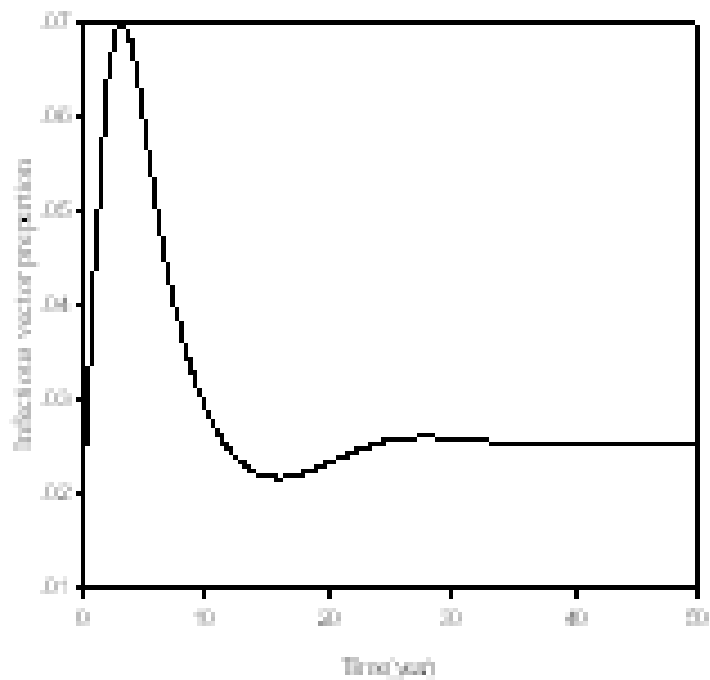
รูปที่ 4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของเด็กที่ป่วยเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 N_T &= 500,000, \quad N_V = 100, \quad \mu_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, \quad e_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, \quad A = 10,000, \\
 \gamma_{A_1} &= 1/365 \cdot 2 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{A_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{J_1} = 1/365 \cdot 3 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{J_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \quad \delta = 1/365 \cdot 15, \\
 \mu_V &= 1/25, \quad R_0 = 1.03489, \quad \beta_V = 0.99, \quad \beta_h = 0.00007.
 \end{aligned}$$



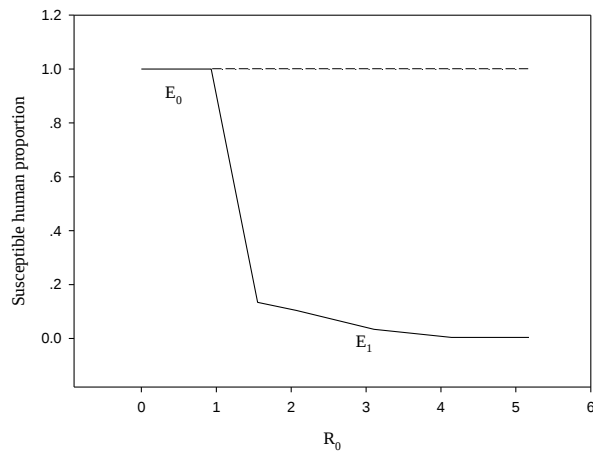
รูปที่ 4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 N_T &= 500,000, \quad N_V = 100, \quad \mu_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, \quad e_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, \quad A = 10,000, \\
 \gamma_{A_1} &= 1/365 \cdot 2 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{A_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{J_1} = 1/365 \cdot 3 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{J_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \quad \delta = 1/365 \cdot 15, \\
 \mu_v &= 1/25, \quad R_0 = 1.03489, \quad \beta_v = 0.99, \quad \beta_h = 0.00007.
 \end{aligned}$$



รูปที่ 4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขเทียบกับเวลาของยุงที่ติดเชื้อเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

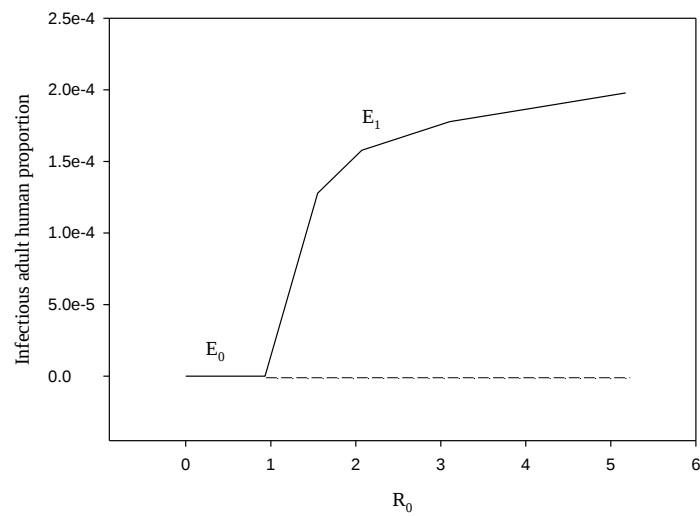
$$\begin{aligned}
 N_T &= 500,000, \quad N_V = 100, \quad \mu_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, \quad e_h = 1/(365 \cdot 65) \text{ day}^{-1}, \quad A = 10,000, \\
 \gamma_{A_1} &= 1/365 \cdot 2 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{A_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{J_1} = 1/365 \cdot 3 \text{ day}^{-1}, \quad \gamma_{J_2} = 1/14 \text{ day}^{-1}, \quad \delta = 1/365 \cdot 15, \\
 \mu_V &= 1/25, \quad R_0 = 1.03489, \quad \beta_V = 0.99, \quad \beta_h = 0.00007.
 \end{aligned}$$



รูปที่ 4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_H=1,000$, $N_V=9,500$, $\mu_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

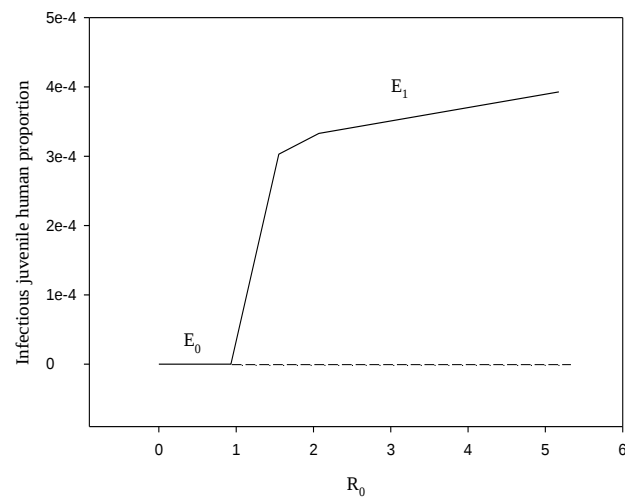
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_V=1/25$.



รูปที่ 4.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ใหญ่ที่ติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_H=1,000$, $N_V=9,500$, $\mu_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

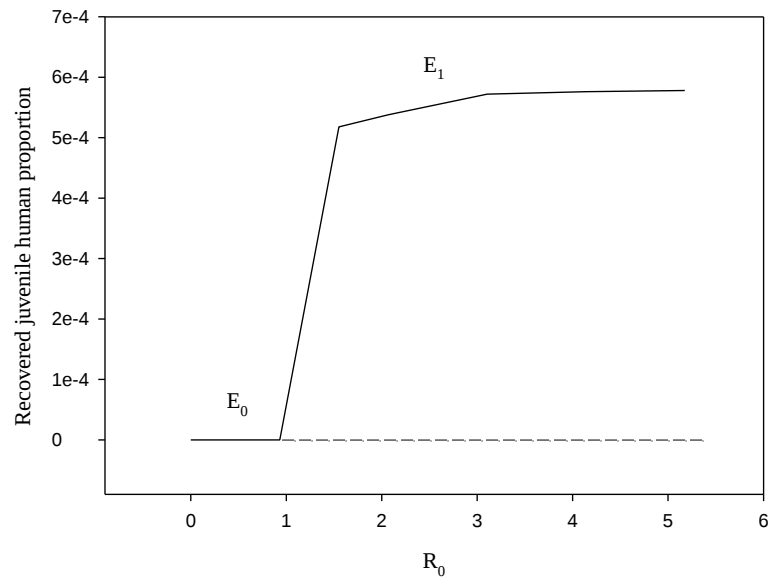
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_V=1/25$.



รูปที่ 4.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเด็กที่ติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_H=1,000$, $N_V=9,500$, $\mu_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

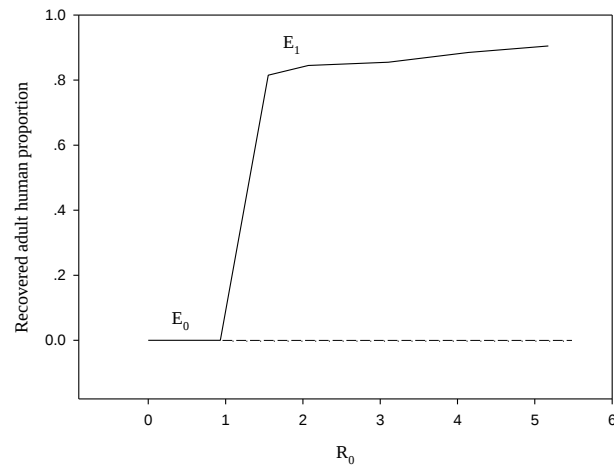
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_V=1/25$.



รูปที่ 4.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเด็กที่ฟื้นไข้เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

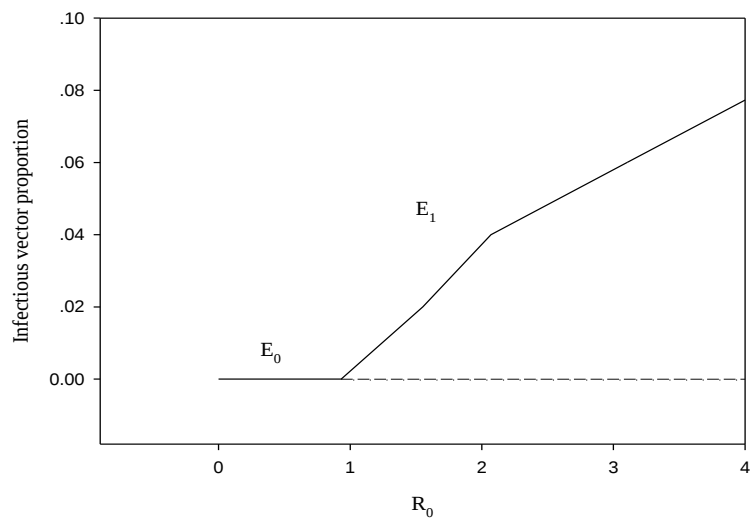
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.



รูปที่ 4.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ใหญ่ที่ฟื้นไข้เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_H=1,000$, $N_V=9,500$, $\mu_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_H=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_V=1/25$.



รูปที่ 4.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อมีค่าต่างกันเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน

ค่าของพารามิเตอร์ คือ $N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$, $d_h=1/(365*65) \text{ day}^{-1}$,

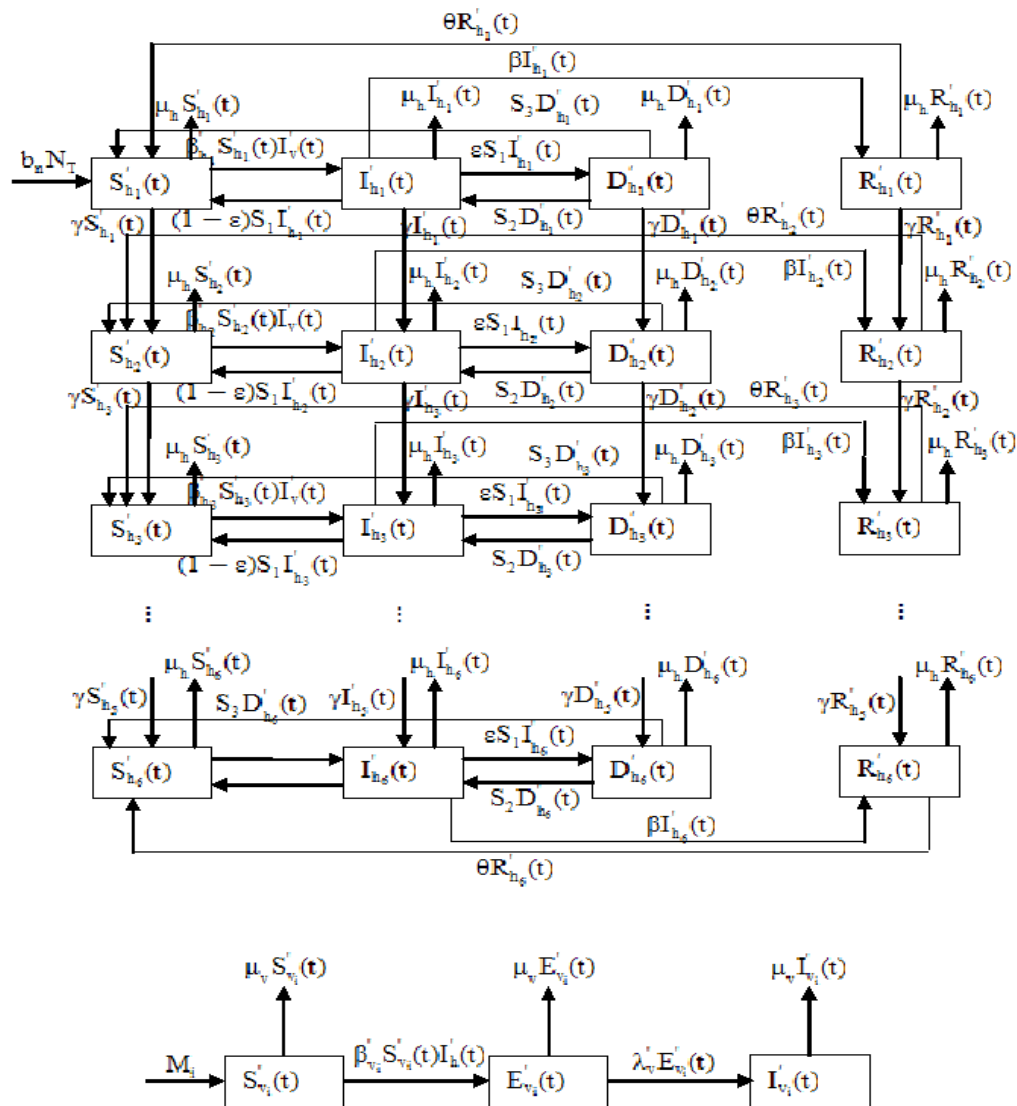
$D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2 \text{ day}^{-1}$, $\gamma_J=1/365*1 \text{ day}^{-1}$, $\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.

บทที่ 5

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โรคมัลเรียสำหรับประชากรแต่ละช่วงอายุตามฤดูกาลใน

ประเทศไทย และการวิเคราะห์

5.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์โรคมัลเรียสำหรับประชากรแต่ละช่วงอายุตามฤดูกาลในประเทศไทย



รูปที่ 5.1 แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ตามช่วงอายุและตามฤดูกาล

โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังต่อไปนี้

พารามิเตอร์	ความหมาย
b_h	อัตราการเกิดของประชากรมนุษย์
μ_h	อัตราการเสียชีวิตของประชากรมนุษย์
γ	อัตราที่ประชากรมนุษย์เปลี่ยนจากเด็กไปเป็นผู้ใหญ่
ε	ความน่าจะเป็นของประชากรมนุษย์ที่เปลี่ยนจากสถานะการติดเชื้อไปเป็นสถานะที่มีเชื้อฝังตัวอยู่
β'_{hj}	อัตราการติดเชื้อมาลาเรียของประชากรมนุษย์
$\frac{1}{S_1}$	อัตราการมีชีวิตหลงเหลืออยู่ของปรสิตในประชากรมนุษย์
S_2	อัตราของการมีไขกลับของประชากรมนุษย์
S_3	อัตราที่ประชากรที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง
θ	อัตราที่ผู้ฟื้นไขกลับไปเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง
β	อัตราการฟื้นไขของประชากรมนุษย์

ตารางที่ 5.1 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ของแบบจำลอง

ตัวแปรในแบบจำลองนิยามดังต่อไปนี้

$S'_{hj}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อกลุ่มที่ j ,

$I'_{hj}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ติดเชื้อกลุ่มที่ j ,

$D'_{hj}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่กลุ่มที่ j ,

$R'_{hj}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ฟื้นไขกลุ่มที่ j ,

โดยที่ $j = 1$ หมายถึงกลุ่มของประชากรมนุษย์ที่อายุระหว่าง 0 – 4 ปี

$j = 2$ หมายถึงกลุ่มของประชากรมนุษย์ที่อายุระหว่าง 5 – 9 ปี

$j = 3$ หมายถึงกลุ่มของประชากรมนุษย์ที่อายุระหว่าง 10 – 14 ปี

$j = 4$ หมายถึงกลุ่มของประชากรมนุษย์ที่อายุระหว่าง 15 – 24 ปี

$j = 5$ หมายถึงกลุ่มของประชากรมนุษย์ที่อายุระหว่าง 25 – 34 ปี

$j = 6$ หมายถึงกลุ่มของประชากรมนุษย์ที่อายุมากกว่า 35 ปี

จากแผนภาพในรูปที่ 5.1 สามารถนำมาเขียนเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

สำหรับประชากรมนุษย์

$$\frac{dS'_{h_1}(t)}{dt} = b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - \gamma S'_{h_1}(t) - \mu_h S'_{h_1}(t) + S_3 D'_{h_1}(t) + \theta R'_{h_1}(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI'_{h_1}(t)}{dt} = \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - \gamma I'_{h_1}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) + S_2 D'_{h_1}(t) - \mu_h I'_{h_1}(t) - \beta I'_{h_1}(t) \quad (2)$$

$$\frac{dD'_{h_1}(t)}{dt} = \varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) - S_2 D'_{h_1}(t) - S_3 D'_{h_1}(t) - \gamma D'_{h_1}(t) - \mu_h D'_{h_1}(t) \quad (3)$$

$$\frac{dR'_{h_1}(t)}{dt} = \beta I'_{h_1}(t) - \theta R'_{h_1}(t) - \gamma R'_{h_1}(t) - \mu_h R'_{h_1}(t) \quad (4)$$

สำหรับ $j = 2, 3, 4, 5$

$$\frac{dS'_{h_j}(t)}{dt} = S_3 D'_{h_j}(t) - \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) + \gamma (S'_{h_{j-1}}(t) - S'_{h_j}(t)) - \mu_h S'_{h_j}(t) + \theta R'_{h_j}(t) \quad (5)$$

$$\frac{dI'_{h_j}(t)}{dt} = \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) + S_2 D'_{h_j}(t) - \gamma (I'_{h_{j-1}}(t) - I'_{h_j}(t)) - \mu_h I'_{h_j}(t) - \beta I'_{h_j}(t)$$

(6)

$$\frac{dD'_{h_j}(t)}{dt} = \varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) - S_2 D'_{h_j}(t) - S_3 D'_{h_j}(t) + \gamma (D'_{h_{j-1}}(t) - D'_{h_j}(t)) - \mu_h D'_{h_j}(t) \quad (7)$$

$$\frac{dR'_{h_j}(t)}{dt} = \beta I'_{h_j}(t) - \theta R'_{h_j}(t) - \gamma R'_{h_j}(t) - \mu_h R'_{h_j}(t) \quad (8)$$

$$\frac{dS'_{h_6}(t)}{dt} = \gamma S'_{h_5}(t) + S_3 D'_{h_6}(t) - \beta'_{h_6} S'_{h_6}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_6}(t) - \mu_h S'_{h_6}(t) + \theta R'_{h_6}(t) \quad (9)$$

$$\frac{dI'_{h_6}(t)}{dt} = \beta'_{h_6} S'_{h_6}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_6}(t) + \gamma I'_{h_5}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_6}(t) + S_2 D'_{h_6}(t) - \mu_h I'_{h_6}(t) - \beta I'_{h_6}(t) \quad (10)$$

$$\frac{dD'_{h_6}(t)}{dt} = \varepsilon S_1 I'_{h_6}(t) - S_2 D'_{h_6}(t) - S_3 D'_{h_6}(t) + \gamma D'_{h_5}(t) - \mu_h D'_{h_6}(t) \quad (11)$$

$$\frac{dR'_{h_6}(t)}{dt} = \beta I'_{h_6}(t) + \gamma R'_{h_5}(t) - \theta R'_{h_6}(t) - \mu_h R'_{h_6}(t) \quad (12)$$

กำหนดให้ N_T เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด นั่นก็คือ

$$N_T = \sum_{j=1}^6 (S'_{h_j}(t) + I'_{h_j}(t) + D'_{h_j}(t) + R'_{h_j}(t))$$

เนื่องจากกำหนดให้ จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่ ดังนั้น

$$\frac{dN_T}{dt} = 0$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรมนุษย์ในแต่ละกลุ่มสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{dN_T}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^6 (S'_{h_j}(t) + I'_{h_j}(t) + D'_{h_j}(t) + R'_{h_j}(t)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^6 \frac{dS'_{h_j}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^6 \frac{dI'_{h_j}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^6 \frac{dD'_{h_j}(t)}{dt} + \sum_{j=1}^6 \frac{dR'_{h_j}(t)}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^6 \frac{dS'_{h_j}(t)}{dt} = b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - \gamma S'_{h_1}(t) - \mu_h S'_{h_1}(t) + S_3 D'_{h_1}(t) + \theta R'_{h_1}(t) \\ &\quad + \sum_{j=2}^5 (S_3 D'_{h_j}(t) - \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) + \gamma (S'_{h_{j-1}}(t) - S'_{h_j}(t)) - \mu_h S'_{h_j}(t) + \theta R'_{h_j}(t)) \\ &\quad + \gamma S'_{h_5}(t) + S_3 D'_{h_5}(t) - \beta'_{h_5} S'_{h_5}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_5}(t) - \mu_h S'_{h_5}(t) + \theta R'_{h_5}(t) \\ &= b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) \right) - \gamma S'_{h_1}(t) + \gamma \sum_{j=2}^5 (S'_{h_{j-1}}(t) - S'_{h_j}(t)) \\ &\quad + \gamma S'_{h_5}(t) - \mu_h \sum_{j=1}^6 S'_{h_j}(t) + S_3 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) + \theta \sum_{j=1}^6 R'_{h_j}(t) \\ &= b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) \right) - \mu_h \sum_{j=1}^6 S'_{h_j}(t) + S_3 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) \\ &\quad + \theta \sum_{j=1}^6 R'_{h_j}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_h(t) - I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) \right) - \mu_h S'_h(t) + S_3 D'_h(t) + \theta R'_h(t) \\
\sum_{j=1}^6 \frac{dI'_{h_j}(t)}{dt} &= \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - \gamma I'_{h_1}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) + S_2 D'_{h_1}(t) - \mu_h I'_{h_1}(t) - \beta I'_{h_1}(t) \\
&+ \sum_{j=2}^5 (\beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) + S_2 D'_{h_j}(t) + \gamma(I'_{h_{j-1}}(t) - I'_{h_j}(t))) \\
&- \mu_h I'_{h_j}(t) + \beta I'_{h_j}(t) + \beta'_{h_6} S'_{h_6}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_6}(t) + \gamma I'_{h_5}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_6}(t) + S_2 D'_{h_6}(t) \\
&- \mu_h I'_{h_6}(t) - \beta I'_{h_6}(t) \\
&= \sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - \gamma I'_{h_1}(t) + \gamma(I'_{h_1}(t) - I'_{h_2}(t) + I'_{h_2}(t) - I'_{h_3}(t) \\
&+ I'_{h_3}(t) - I'_{h_4}(t) + I'_{h_4}(t) - I'_{h_5}(t) + I'_{h_5}(t)) + \beta'_{h_6} S'_{h_6}(t) I'_v(t) - \varepsilon S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) + S_2 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) \\
&+ \mu_h \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - \beta \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) \\
&= \sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - \varepsilon S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) + S_2 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) - \mu_h \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) \\
&- \beta \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) \\
&= I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) \right) - (S_1 - \varepsilon S_1 + \varepsilon S_1) \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) + S_2 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) - (\mu_h + \beta) \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) \\
&= I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) \right) - I'_h(t) (S_1 + \mu_h + \beta) + S_2 D'_h(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^6 \frac{dD'_{h_j}(t)}{dt} &= \varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) - S_2 D'_{h_1}(t) - S_3 D'_{h_1}(t) - \gamma D'_{h_1}(t) - \mu_h D'_{h_1}(t) + \sum_{j=2}^5 (\varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) - S_2 D'_{h_j}(t) \\
&\quad - S_3 D'_{h_j}(t) + \gamma(D'_{h_{j-1}}(t) - D'_{h_j}(t)) - \mu_h D'_{h_j}(t)) + \varepsilon S_1 I'_{h_6}(t) - S_2 D'_{h_6}(t) - S_3 D'_{h_6}(t) + \gamma D'_{h_5}(t) \\
&\quad - \mu_h D'_{h_6}(t) \\
&= \varepsilon S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - S_2 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) - S_3 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) - \gamma D'_{h_1}(t) + \gamma(D'_{h_1}(t) - D'_{h_2}(t) + D'_{h_2}(t) \\
&\quad - D'_{h_3}(t) + D'_{h_3}(t) - D'_{h_4}(t) + D'_{h_4}(t) - D'_{h_5}(t)) + \gamma D'_{h_5}(t) - \mu_h \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) \\
&= \varepsilon S_1 \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - S_2 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) - S_3 \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) - \mu_h \sum_{j=1}^6 D'_{h_j}(t) \\
&= \varepsilon S_1 I'_h(t) - (S_2 + S_3) D'_h(t) - \mu_h D'_h(t) \\
\sum_{j=1}^6 \frac{dR'_{h_j}(t)}{dt} &= \beta I'_{h_1}(t) - \theta R'_{h_1}(t) - \gamma R'_{h_1}(t) - \mu_h R'_{h_1}(t) + \sum_{j=2}^5 (\beta I'_{h_j}(t) - \theta R'_{h_j}(t) - \gamma R'_{h_j}(t) + \gamma R'_{h_{j-1}}(t) \\
&\quad - \mu_h R'_{h_j}(t)) + \beta I'_{h_6}(t) + \gamma R'_{h_5}(t) - \theta R'_{h_6}(t) - \mu_h R'_{h_6}(t) \\
&= \beta \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - \theta \sum_{j=1}^6 R'_{h_j}(t) - \mu_h \sum_{j=1}^6 R'_{h_j}(t) - \gamma R'_{h_1}(t) + \gamma(-R'_{h_2}(t) + R'_{h_1}(t) - R'_{h_3}(t) + R'_{h_2}(t) \\
&\quad - R'_{h_4}(t) + R'_{h_3}(t) - R'_{h_5}(t) + R'_{h_4}(t)) + \gamma R'_{h_5}(t) \\
&= \beta \sum_{j=1}^6 I'_{h_j}(t) - \theta \sum_{j=1}^6 R'_{h_j}(t) - \mu_h \sum_{j=1}^6 R'_{h_j}(t) \\
&= \beta I'_h(t) - \theta R'_h(t) - \mu_h R'_h(t)
\end{aligned}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรมนุษย์แต่ละกลุ่มสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dS'_h(t)}{dt} = b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_h(t) - I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{hj} S'_{hj}(t) \right) - \mu_h S'_h(t) + S_3 D'_h(t) + \theta R'_h(t)$$

$$\frac{dI'_h(t)}{dt} = I'_v(t) \left(\sum_{j=1}^6 \beta'_{hj} S'_{hj}(t) \right) + I'_h(t) (S_1 (\varepsilon - 1) - \varepsilon S_1 - \mu_h - \beta) + S_2 D'_h(t)$$

$$\frac{dD'_h(t)}{dt} = \varepsilon S_1 I'_h(t) - (S_2 + S_3) D'_h(t) - \mu_h D'_h(t)$$

$$\frac{dR'_h(t)}{dt} = \beta I'_h(t) - \theta R'_h(t) - \mu_h R'_h(t)$$

โดยที่ $S'_h(t) = \sum_{j=1}^6 S'_{hj}(t)$, $I'_h(t) = \sum_{j=1}^6 I'_{hj}(t)$, $D'_h(t) = \sum_{j=1}^6 D'_{hj}(t)$, $R'_h(t) = \sum_{j=1}^6 R'_{hj}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{dN_T}{dt} &= \frac{dS'_h(t)}{dt} + \frac{dI'_h(t)}{dt} + \frac{dD'_h(t)}{dt} + \frac{dR'_h(t)}{dt} \\ &= b_h N_T - \mu_h (S'_h(t) + I'_h(t) + D'_h(t) + R'_h(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั่นก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรมนุษย์ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 0

จาก $\frac{dN_T}{dt} = 0$, จะได้ว่า $b_h = \mu_h$ (อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการเสียชีวิตของประชากร)

$$(N_T = S'_h(t) + I'_h(t) + D'_h(t) + R'_h(t))$$

สำหรับประชากรยุง สมการของอัตราการเปลี่ยนแปลงสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{dS'_{vi}(t)}{dt} = M_i - \beta'_{vi} S'_{vi}(t) I'_h(t) - \mu_v S'_{vi}(t), \quad (13)$$

$$\frac{dE'_{vi}(t)}{dt} = \beta'_{vi} S'_{vi}(t) I'_h(t) - \lambda_v E'_{vi}(t) - \mu_v E'_{vi}(t), \quad (14)$$

$$\frac{dI'_{vi}(t)}{dt} = \lambda_v E'_{vi}(t) - \mu_v I'_{vi}(t), \quad (15)$$

โดยที่พารามิเตอร์นิยามดังนี้

พารามิเตอร์	ความหมาย
M_i	อัตราการเกิดใหม่ของยุง ณ ฤดูกาลที่ i
β'_v	อัตราการติดเชื้อของยุง ณ ฤดูกาลที่ i
λ'_v	อัตราการฟักตัวของเชื้อพลาสมาโมเดียมในยุงก้นปล่อง
μ_v	อัตราการเสียชีวิตของยุงก้นปล่อง

ตารางที่ 5.2 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ตามนิยามของแบบจำลอง

ตัวแปรในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กำหนดได้ดังนี้

$S'_{vi}(t)$ = จำนวนของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ ฤดูกาลที่ i,

$E'_{vi}(t)$ = จำนวนของยุงที่ติดเชื้อ แต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ ฤดูกาลที่ i,

$I'_{vi}(t)$ = จำนวนของยุงที่ติดเชื้อ และสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ ฤดูกาลที่ i,

โดยที่ i = 1 หมายถึง ฤดูฝน (ช่วงระหว่างกลางเดือนพฤษภาคมถึงกลางเดือนตุลาคม)

i=2 หมายถึง ฤดูหนาว (ช่วงระหว่างกลางเดือนตุลาคมถึงกลางเดือนกุมภาพันธ์)

i=3 หมายถึง ฤดูร้อน (ช่วงระหว่างกลางเดือนกุมภาพันธ์ถึงกลางเดือนพฤษภาคม)

นิยาม ให้ N_v = จำนวนยุงทั้งหมด นั่นก็คือ

$$N_v = S'_v(t) + E'_v(t) + I'_v(t)$$

$$S'_v(t) = \sum_{i=1}^3 S'_{vi}(t), E'_v(t) = \sum_{i=1}^3 E'_{vi}(t), I'_v(t) = \sum_{i=1}^3 I'_{vi}(t)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{dN_v}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dS'_{vi}}{dt} + \frac{dE'_{vi}}{dt} + \frac{dI'_{vi}}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (M_i N_T - \beta'_v S'_{vi}(t) I'_v(t) - \mu_v S'_{vi}(t) + \beta'_v S'_{vi}(t) I'_v(t) - \lambda'_v E'_{vi}(t) - \mu_v E'_{vi}(t) + \lambda'_v E'_{vi}(t) - \mu_v I'_{vi}(t)) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^3 M_i - \mu_v N_v$$

เพราะจำนวนยุงเป็นค่าคงที่ ดังนั้น $\sum_{i=1}^3 M_i - \mu_v N_v = 0$, นั่นก็คือ $N_v = \frac{\sum_{i=1}^3 M_i}{\mu_v}$

5.2 ผลการวิเคราะห์แบบจำลอง

หาจุดสมดุลโดยการจัดอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรแต่ละกลุ่มให้เท่ากับ 0

$$\text{นั่นก็คือ } \frac{dS_{h_1}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \mu_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - \gamma S'_{h_1}(t) - \mu_h S'_{h_1}(t) + S_3 D'_{h_1}(t) + \theta R'_{h_1}(t) = 0$$

$$; (b_h = \mu_h)$$

$$\frac{dI'_{h_1}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - \gamma I'_{h_1}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) + S_2 D'_{h_1}(t) - (\mu_h + \beta) I'_{h_1}(t) = 0$$

$$\frac{dD'_{h_1}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) - S_2 D'_{h_1}(t) - S_3 D'_{h_1}(t) - \gamma D'_{h_1}(t) - \mu_h D'_{h_1}(t) = 0$$

$$\frac{dR'_{h_1}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \beta I'_{h_1}(t) - \theta R'_{h_1}(t) - \gamma R'_{h_1}(t) - \mu_h R'_{h_1}(t) = 0$$

สำหรับ $j = 2, 3, 4, 5$

$$\frac{dS'_{h_j}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow S_3 D'_{h_j}(t) - \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) + \gamma (S'_{h_{j-1}}(t) - S'_{h_j}(t)) - \mu_h S'_{h_j}(t) + \theta R'_{h_j}(t) = 0$$

$$\frac{dI'_{h_j}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) + S_2 D'_{h_j}(t) + \gamma (I'_{h_{j-1}}(t) - I'_{h_j}(t)) - \mu_h I'_{h_j}(t) - \beta I'_{h_j}(t) = 0$$

$$\frac{dD'_{h_j}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) - S_2 D'_{h_j}(t) - S_3 D'_{h_j}(t) + \gamma (D'_{h_{j-1}}(t) - D'_{h_j}(t)) - \mu_h D'_{h_j}(t) = 0$$

$$\frac{dR'_{h_j}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \beta I'_{h_j}(t) - (\theta + \gamma + \mu_h) R'_{h_j}(t) + \gamma R'_{h_{j-1}}(t) = 0$$

$$\frac{dS'_{h_s}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \gamma S'_{h_s}(t) + S_3 D'_{h_s}(t) - \beta'_{h_s} S'_{h_s}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_s}(t) - \mu_h S'_{h_s}(t) + \theta R'_{h_s}(t) = 0$$

$$\frac{dI'_{h_s}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \beta'_{h_s} S'_{h_s}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_s}(t) + \gamma I'_{h_s}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h_s}(t) + S_2 D'_{h_s}(t) - \mu_h I'_{h_s}(t) - \beta I'_{h_s}(t) = 0$$

$$\frac{dD'_{h_s}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon S_1 I'_{h_s}(t) - S_2 D'_{h_s}(t) - S_3 D'_{h_s}(t) + \gamma D'_{h_s}(t) - \mu_h D'_{h_s}(t) = 0$$

$$\frac{dR'_{h_j}(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \beta I'_{h_s}(t) + \gamma R'_{h_s}(t) - \theta R'_{h_s}(t) - \mu_h R'_{h_s}(t) = 0$$

ดังนั้น

$$\mu_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_1}(t) - (\beta'_{h_1} I'_v(t) + \gamma + \mu_h) S'_{h_1}(t) + S_3 D'_{h_1}(t) + \theta R'_{h_1}(t) = 0 \quad (16)$$

$$\beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) - [(1 - \varepsilon) S_1 + \gamma + \varepsilon S_1 + (\mu_h + \beta)] I'_{h_1}(t) + S_2 D'_{h_1}(t) = 0 \quad (17)$$

$$\varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) - (S_2 + S_3 + \gamma + \mu_h) D'_{h_1}(t) = 0 \quad (18)$$

$$\beta I'_{h_1}(t) - (\theta + \gamma + \mu_h) R'_{h_1}(t) = 0 \quad (19)$$

$$S_3 D'_{h_j}(t) - (\beta'_{h_j} I'_v(t) + \gamma + \mu_h) S'_{h_j}(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) + \gamma S'_{h_{j-1}}(t) + \theta R'_{h_j}(t) = 0 \quad (20)$$

$$\beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) - [(1 - \varepsilon) S_1 + \varepsilon S_1 + \gamma + \mu_h + \beta] I'_{h_j}(t) + \gamma I'_{h_{j-1}}(t) + S_2 D'_{h_j}(t) = 0 \quad (21)$$

$$\varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) - (S_2 + S_3 + \gamma + \mu_h) D'_{h_j}(t) + \gamma D'_{h_{j-1}}(t) = 0 \quad (22)$$

$$\beta I'_{h_j}(t) - (\theta + \gamma + \mu_h) R'_{h_j}(t) + \gamma R'_{h_{j-1}}(t) = 0 \quad (23)$$

$$\gamma S'_{h_5}(t) + S_3 D'_{h_5}(t) - \beta'_{h_5} S'_{h_5}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_5}(t) - \mu_h S'_{h_5}(t) + \theta R'_{h_5}(t) = 0 \quad (24)$$

$$\beta'_{h_5} S'_{h_5}(t) I'_v(t) - [(1 - \varepsilon) S_1 + \varepsilon S_1 + \mu_h + \beta] I'_{h_5}(t) + \gamma I'_{h_5}(t) + S_2 D'_{h_5}(t) = 0 \quad (25)$$

$$\varepsilon S_1 I'_{h_5}(t) - (S_2 + S_3 + \mu_h) D'_{h_5}(t) + \gamma D'_{h_5}(t) = 0 \quad (26)$$

$$\beta I'_{h_5}(t) + \gamma R'_{h_5}(t) - (\theta + \mu_h) R'_{h_5}(t) = 0 \quad (27)$$

$$\text{จากสมการ (15), } D'_{h_1}(t) = \frac{\varepsilon S_1 I'_{h_1}(t)}{S_2 + S_3 + \gamma + \mu_h}$$

$$\text{จากสมการ (16), } R'_{h_1}(t) = \frac{\beta I'_{h_1}(t)}{\theta + \gamma + \mu_h}$$

$$\text{จากสมการ (14), } \beta'_{h_1} S'_{h_1}(t) I'_v(t) = [S_1 + \gamma + \mu_h + \beta] I'_{h_1}(t) - S_2 D'_{h_1}(t)$$

$$I'_v(t) = \frac{[S_1 + \gamma + \mu_h + \beta] I'_{h_1}(t) - S_2 D'_{h_1}(t)}{\beta'_{h_1} S'_{h_1}(t)}$$

$$\text{จากสมการ (20), } \beta I'_{h_j}(t) = (\theta + \gamma + \mu_h) R'_{h_j}(t) + \gamma R'_{h_{j-1}}(t)$$

$$R'_{h_j}(t) = \frac{\beta I'_{h_j}(t) - \gamma R'_{h_{j-1}}(t)}{(\theta + \gamma + \mu_h)}$$

$$\text{จากสมการ (19), } D'_{h_j}(t) = \frac{\varepsilon S_1 I'_{h_1}(t) - \gamma D'_{h_{j-1}}(t)}{(S_2 + S_3 + \gamma + \mu_h)}$$

$$\text{จากสมการ (18), } \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t) I'_v(t) = [S_1 + \gamma + \mu_h + \beta] I'_{h_j}(t) - \gamma I'_{h_{j-1}}(t) - S_2 D'_{h_j}(t)$$

$$\text{จากสมการ (17), } S_3 D'_{h_j}(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) + \gamma S'_{h_{j-1}}(t) + \theta R'_{h_j}(t) = (\beta'_{h_j} I'_v(t) + \gamma + \mu_h) S'_{h_j}(t)$$

$$S'_{h_j}(t) = \frac{S_3 D'_{h_j}(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_j}(t) + \gamma S'_{h_{j-1}}(t) + \theta R'_{h_j}(t)}{\beta'_{h_j} I'_v(t) + \gamma + \mu_h}$$

$$\text{จากสมการ (23), } \varepsilon S_1 I'_{h_5}(t) + \gamma D'_{h_5}(t) = (S_2 + S_3 + \mu_h) D'_{h_5}(t)$$

$$D'_{h_5}(t) = \frac{\varepsilon S_1 I'_{h_5}(t) + \gamma D'_{h_5}(t)}{S_2 + S_3 + \mu_h}$$

จากสมการ (24), $R'_{h_5}(t) = \frac{\beta I'_{h_5}(t) + \gamma R'_{h_5}(t)}{\theta + \mu_h}$

จากสมการ (22), $\beta'_{h_5} S'_{h_5}(t) I'_v(t) = [S_1 + \mu_h + \beta] I'_{h_5}(t) - \gamma I'_{h_5}(t) - S_2 D'_{h_5}(t)$

จากสมการ (21), $\gamma S'_{h_5}(t) + S_3 D'_{h_5}(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h_5}(t) + \theta R'_{h_5}(t) = S'_{h_5}(t) (\beta'_{h_5} I'_v(t) + \mu_h)$

สำหรับประชากรยุง เราจัดสมการทางขวามือของสมการ(13) ถึง สมการ(15) ให้เท่ากับ 0

ดังนั้นสำหรับ $i = 1, 2, 3$

$$M_i - S'_{v_i}(t) (\beta'_{v_i} I'_h(t) + \mu_v) = 0$$

$$\therefore S'_{v_i}(t) = \frac{M_i}{\beta'_{v_i} I'_h(t) + \mu_v}$$

$$\beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - (\lambda'_v + \mu_v) E'_{v_i}(t) = 0$$

$$\therefore E'_{v_i}(t) = \frac{\beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t)}{\lambda'_v + \mu_v}$$

$$\lambda'_v E'_{v_i}(t) = \mu_v I'_{v_i}(t)$$

$$\therefore I'_{v_i}(t) = \frac{\lambda'_v E'_{v_i}(t)}{\mu_v}$$

ให้

$$S'_v(t) = \sum_{i=1}^3 S'_{v_i}(t)$$

$$E'_v(t) = \sum_{i=1}^3 E'_{v_i}(t)$$

$$I'_v(t) = \sum_{i=1}^3 I'_{v_i}(t)$$

แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{dS'_v(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 S'_{v_i}(t) \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{dS'_{v_i}(t)}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^3 \left(M_i - \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - \mu_v S'_{v_i}(t) \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 M_i - \sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - \mu_v S'_v(t) \\
\frac{dE'_v(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 E'_{v_i}(t) \\
&= \sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - \lambda'_v \sum_{i=1}^3 E'_{v_i}(t) - \mu_v \sum_{i=1}^3 E'_{v_i}(t) \\
&= \sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - \lambda'_v E'_v(t) - \mu_v E'_v(t) \\
&= \sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - (\lambda'_v + \mu_v) E'_v(t) \\
\frac{dI'_v(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 I'_{v_i}(t) \\
&= \lambda'_v \sum_{i=1}^3 E'_{v_i}(t) - \mu_v \sum_{i=1}^3 I'_{v_i}(t) \\
&= \lambda'_v E'_v(t) - \mu_v I'_v(t)
\end{aligned}$$

เพื่อที่จะหาจุดสมดุล เราพิจารณา

$$\frac{dS'_v(t)}{dt} = \frac{dE'_v(t)}{dt} = \frac{dI'_v(t)}{dt} = 0.$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^3 M_i - \sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - \mu_v S_v(t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t) - (\lambda'_v + \mu_v) E_v(t) = 0$$

$$\lambda'_v E_v(t) - \mu_v I_v(t) = 0.$$

จะได้ว่า

$$S_v(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 M_i - \sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t)}{\mu_v} \quad (28)$$

$$E_v(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t) I'_h(t)}{\lambda'_v + \mu_v} \quad (29)$$

$$I_v(t) = \frac{\lambda'_v E_v(t)}{\mu_v} \quad (30)$$

สำหรับประชากรมนุษย์

$$\frac{dS'_h(t)}{dt} = \frac{dI'_h(t)}{dt} = \frac{dD'_h(t)}{dt} = \frac{dR'_h(t)}{dt} = 0$$

$$b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_h(t) - \langle \beta_H \rangle S'_h(t) I'_v(t) - \mu_h S'_h(t) + S_3 D'_h(t) + \theta R'_h(t) = 0 \quad (31)$$

$$\langle \beta_H \rangle S'_h(t) I'_v(t) + I'_h(t) (S_1 (\varepsilon - 1) - \varepsilon S_1 - \mu_h - \beta) + S_2 D'_h(t) = 0 \quad (32)$$

$$\varepsilon S_1 I'_h(t) - (S_2 + S_3 + \mu_h) D'_h(t) = 0 \quad (33)$$

$$\beta I'_h(t) - (\theta + \mu_h) R'_h(t) = 0 \quad (34)$$

$$\text{โดยที่ } \langle \beta_H \rangle = \frac{\sum_{j=1}^6 \beta'_{h_j} S'_{h_j}(t)}{S'_h(t)}$$

จุดสมดุลสามารถของประชากรแต่ละกลุ่มสามารถหาได้ดังสมการข้างล่างนี้

$$R'_h(t) = \frac{\beta}{\theta + \mu_h} I'_h(t)$$

$$D'_h(t) = \frac{\varepsilon S_1}{S_2 + S_3 + \mu_h} I'_h(t)$$

$$S'_h(t) = N_T - I'_h(t) - D'_h(t) - R'_h(t)$$

$$E'_v(t) = \frac{(\beta'_v) S'_v(t) I'_h(t)}{\lambda'_v + \mu_v} I'_h(t)$$

$$I'_v(t) = \frac{\lambda'_v E'_v(t)}{\mu_v}$$

$$S'_v(t) = N_v - E'_v(t) - I'_v(t)$$

และ $\langle \beta_v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^3 \beta'_{v_i} S'_{v_i}(t)}{S_v(t)}$

จุดสมดุลของกลุ่มย่อยของประชากรแต่ละกลุ่มสามารถหาได้ดังนี้

$$D'_{h_1}(t) = \frac{\varepsilon S_1 I'_{h_1}(t)}{S_2 + S_3 + \gamma + \mu_h}$$

$$R'_{h_1}(t) = \frac{\beta I'_{h_1}(t)}{\theta + \gamma + \mu_h}$$

$$S'_{h_1}(t) = N_{T_1} - I'_{h_1}(t) - D'_{h_1}(t) - R'_{h_1}(t)$$

สำหรับ $j = 2, 3, 4, 5$

$$D'_{h_j}(t) = \frac{\varepsilon S_1 I'_{h_j}(t) - \gamma D'_{h_{j-1}}(t)}{S_2 + S_3 + \gamma + \mu_h}$$

$$R'_{h_j}(t) = \frac{\beta I'_{h_j}(t) - \gamma R'_{h_{j-1}}(t)}{\theta + \gamma + \mu_h}$$

$$S'_{h_j}(t) = N_{T_j} - I'_{h_j}(t) - D'_{h_j}(t) - R'_{h_j}(t)$$

$$D'_{h_5}(t) = \frac{\varepsilon S_1 I'_{h_5}(t) + \gamma D'_{h_5}(t)}{S_2 + S_3 + \mu_h}$$

$$R'_{h_5}(t) = \frac{\beta I'_{h_5}(t) + \gamma R'_{h_5}(t)}{\theta + \mu_h}$$

$$S'_{h\delta}(t) = N_{T\delta} - I'_{h\delta}(t) - D'_{h\delta}(t) - R'_{h\delta}(t)$$

$$\text{กำหนดให้ } S_h = \frac{S'_h}{N_t}, I_h = \frac{I'_h}{N_t}, D_h = \frac{D'_h}{N_t}, R_h = \frac{R'_h}{N_t}$$

$$S_v = \frac{S'_v}{(M/\mu_v)}, E_v = \frac{E'_v}{(M/\mu_v)}, I_v = \frac{I'_v}{(M/\mu_v)}$$

แล้วสมการสามารถลดรูปได้เป็น

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h + (1 - \varepsilon)S_1 I_h - \langle \beta_H \rangle S_h I_v (M/\mu_v) - \mu_h S_h + S_3 D_h + \theta R_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \langle \beta_H \rangle S_h I_v (M/\mu_v) + I_h (S_1 (\varepsilon - 1) - \varepsilon S_1 - \mu_h - \beta) + S_2 D_h$$

$$\frac{dD_h}{dt} = \varepsilon S_1 I_h - (S_2 + S_3 + \mu_h) D_h$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v - \langle \beta_v \rangle S_v I_h N_t - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \lambda'_v E_v - \mu_v I_v$$

หาจุดสมดุลโดยการจัสมการที่ลดรูปแล้วให้เท่ากับ

จุดสมดุลสามารถหาได้ 2 จุด ดังนี้

i) จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $(1, 0, 0, 1, 0)$

ii) จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง $(S_h^*, I_h^*, D_h^*, S_v^*, I_v^*)$

โดยที่

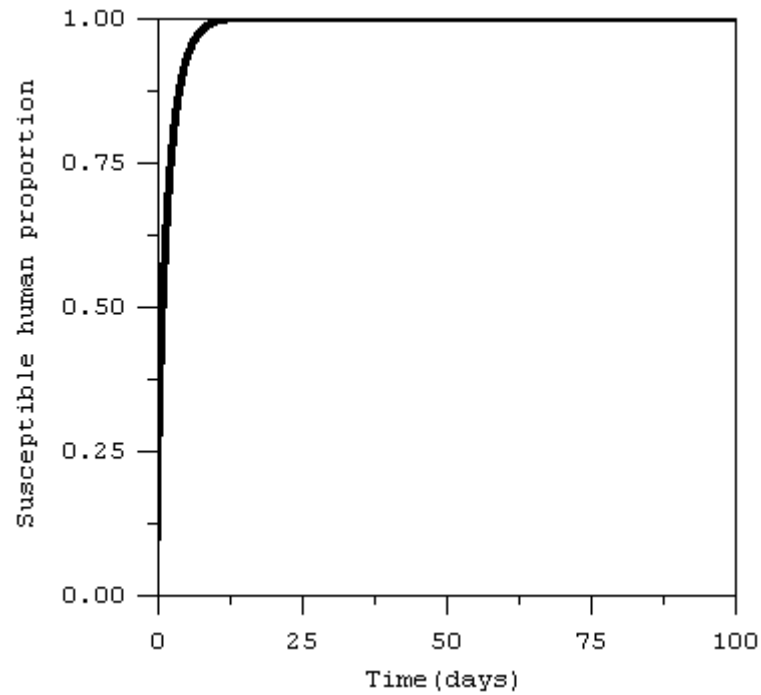
$$I_h^* = \frac{\mu_h N_t - \frac{\mu_h \mu_v^2 (\lambda_v' + \mu_v) \left(\beta + \mu_h + S_1 - \frac{\varepsilon S_1 S_2}{\mu_h + S_2 + S_3} \right)}{(\beta_h) (\beta_v) \lambda_v' M}}{N_t \left(\frac{\mu_h ((\beta_h) \lambda_v' M (\mu_h + \varepsilon S_1 S_2 S_3) \mu_v (\lambda_v' + \mu_v) (\mu_h^2 + \beta (\mu_h + S_2 + S_3) + \mu_h (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 (S_2 - \varepsilon S_2 S_3)))}{(\beta_v) \lambda_v' M (\mu_h + S_2 + S_3)} + \frac{\beta \mu_h}{\mu_h + \theta} \right)}$$

$$D_h^* = \frac{\varepsilon I_h^* S_1}{\mu_h + S_2 + S_3}$$

$$S_h^* = 1 - I_h^* - D_h^* - \frac{\beta I_h^*}{\mu_h + \theta}$$

5.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ

จุดสมดุล ณ สภาวะไร้โรค



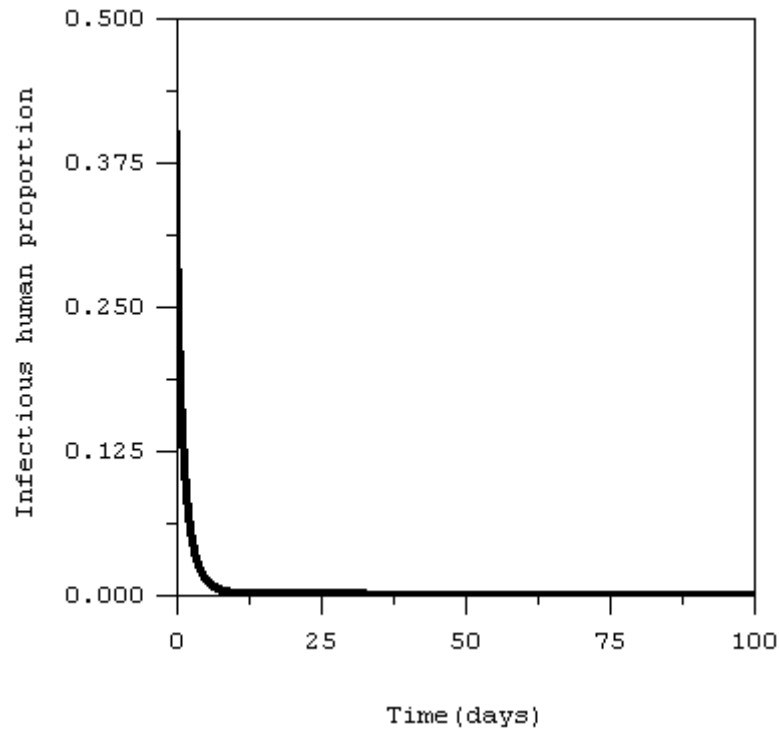
รูปที่ 5.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h =$

$$1/(365 \cdot 65), \langle \beta_h \rangle = 0.000001, \varepsilon = 0.0001, S_1 = 1/(365 \cdot 4), S_2 = 1/(365 \cdot 3), S_3 = 1/(365 \cdot 5), \theta =$$

$$1/(365 \cdot 5),$$

$$\beta = 1/(365 \cdot 5), \mu_v := 1/25, \lambda'_v := 1/14, \langle \beta_v \rangle = 0.000002, M = 100, N_t = 1000.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



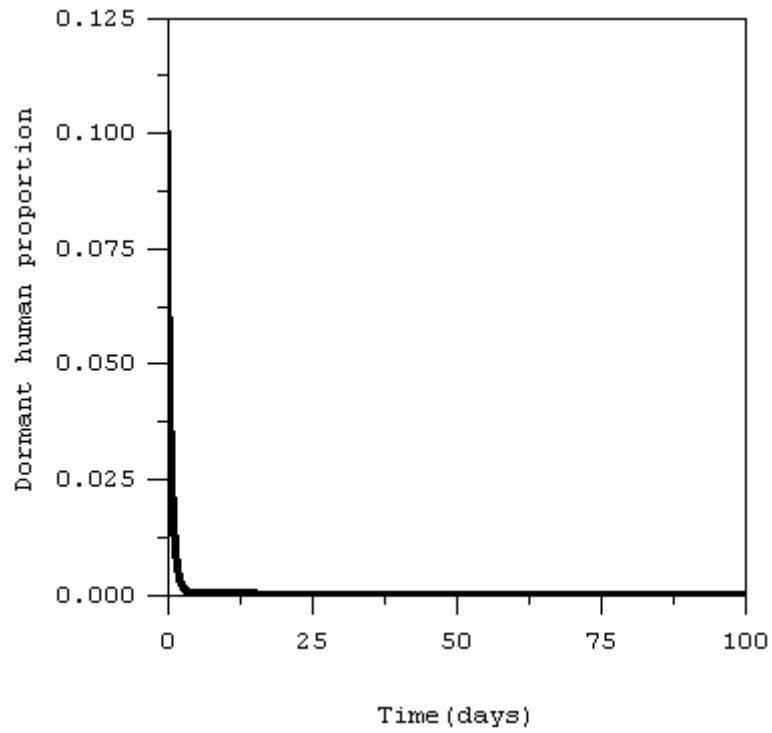
รูปที่ 5.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา โดยที่กำหนด

พารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.000001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$,

$S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.000002$, $M = 100$,

$$N_t = 1000.$$

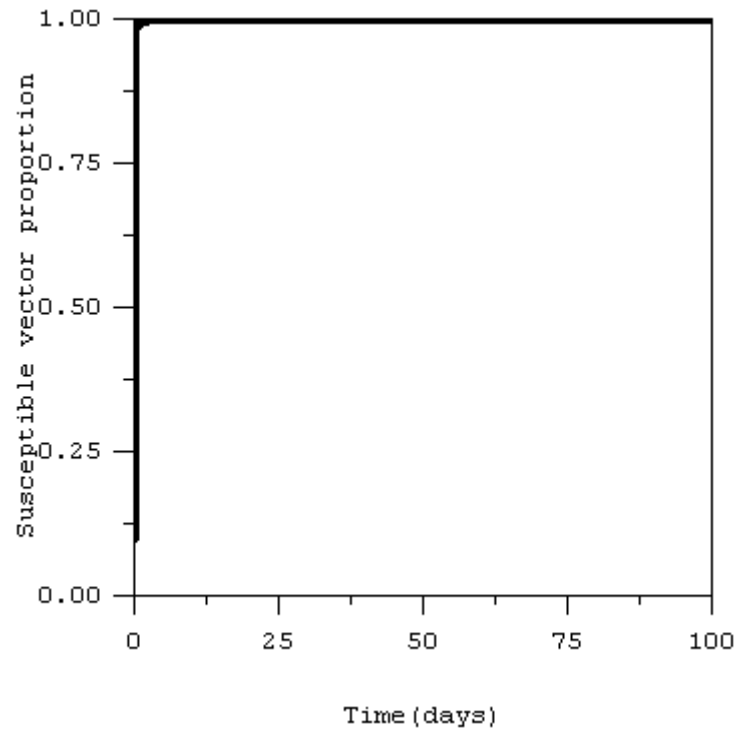
ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



รูปที่ 5.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.000001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$,

$\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.000002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



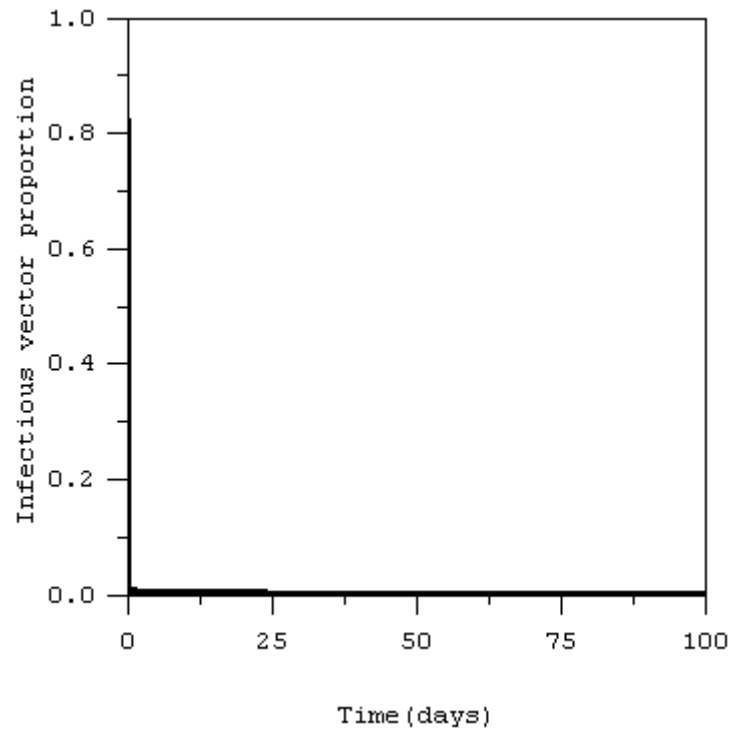
รูปที่ 5.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h =$

$$1/(365 \cdot 65), \langle \beta_h \rangle = 0.000001, \varepsilon = 0.0001, S_1 = 1/(365 \cdot 4), S_2 = 1/(365 \cdot 3), S_3 = 1/(365 \cdot 5), \theta =$$

$$1/(365 \cdot 5),$$

$$\beta = 1/(365 \cdot 5), \mu_v := 1/25, \lambda'_v := 1/14, \langle \beta_v \rangle = 0.000002, M = 100, N_t = 1000.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



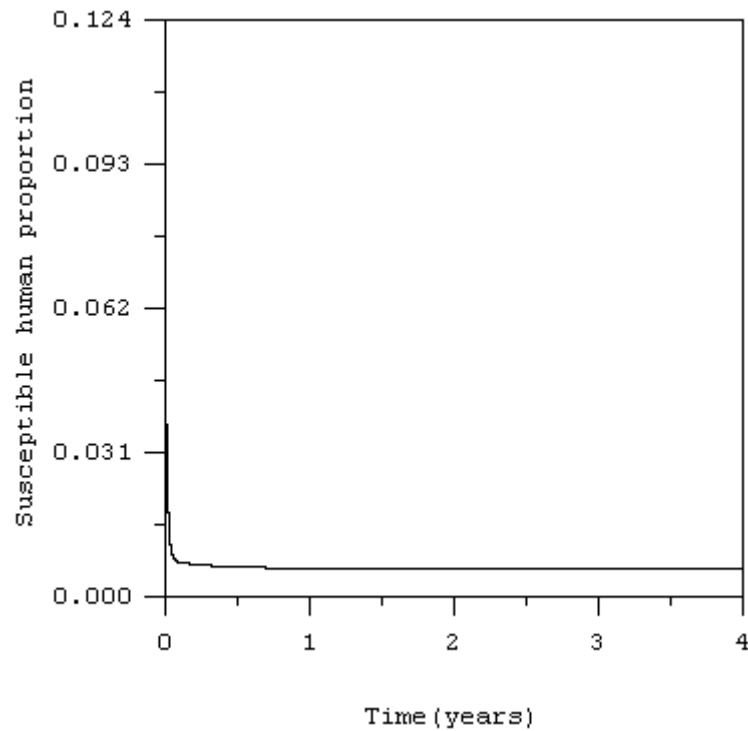
รูปที่ 5.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา โดยที่กำหนด

พารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.000001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.000002$, $M = 100$,

$$N_t = 1000.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค

จุดสมดุล ณ สถานะเรื้อรัง

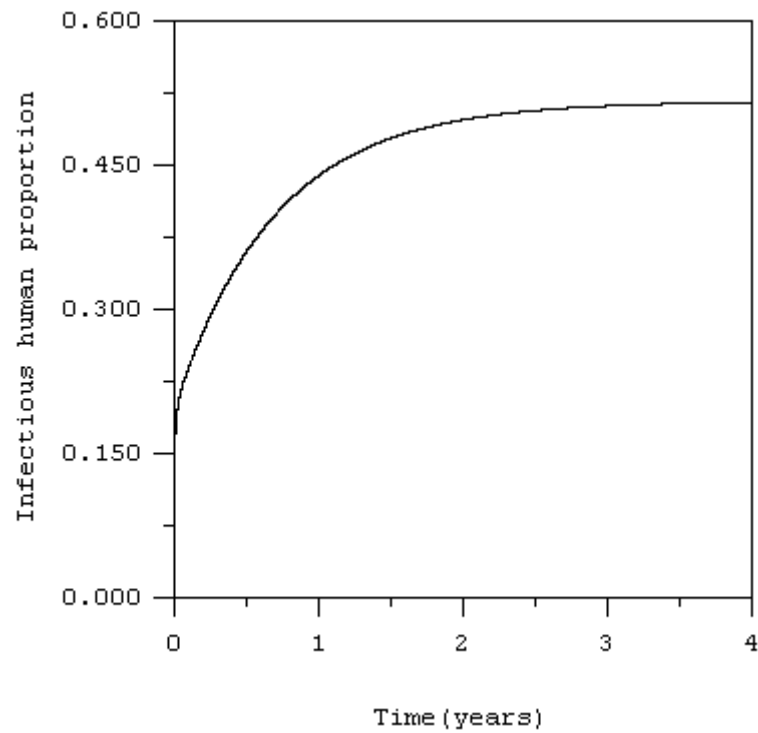


รูปที่ 5.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h =$

$$1/(365 \cdot 65), \langle \beta_h \rangle = 0.0001, \varepsilon = 0.0001, S_1 = 1/(365 \cdot 4), S_2 = 1/(365 \cdot 3), S_3 = 1/(365 \cdot 5), \theta =$$

$$1/(365 \cdot 5), \beta = 1/(365 \cdot 5), \mu_v := 1/25, \lambda'_v := 1/14, \langle \beta_v \rangle = 0.0002, M = 100, N_t = 1000.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง

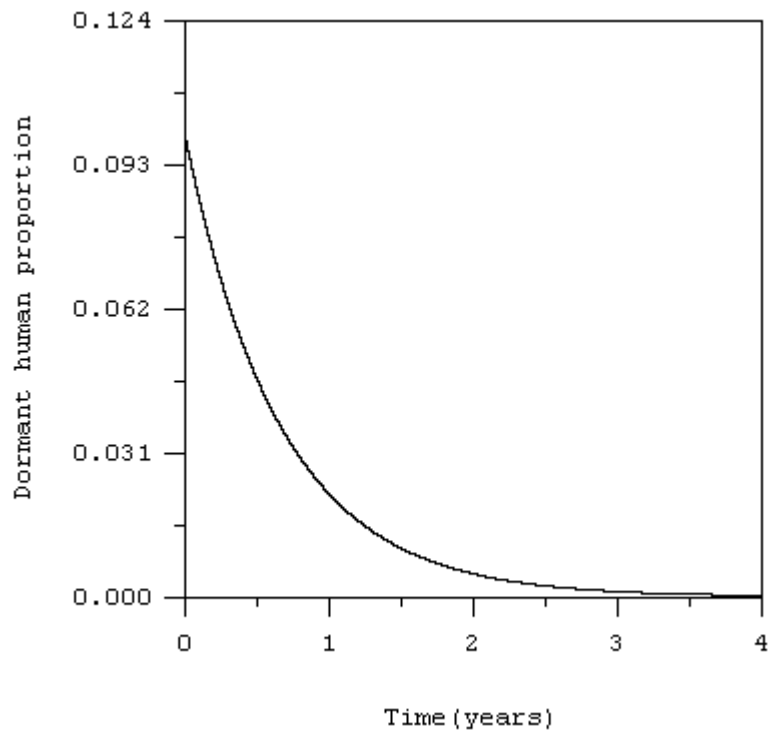


รูปที่ 5.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h =$

$$1/(365 \cdot 65), \langle \beta_h \rangle = 0.0001, \varepsilon = 0.0001, S_1 = 1/(365 \cdot 4), S_2 = 1/(365 \cdot 3), S_3 = 1/(365 \cdot 5), \theta =$$

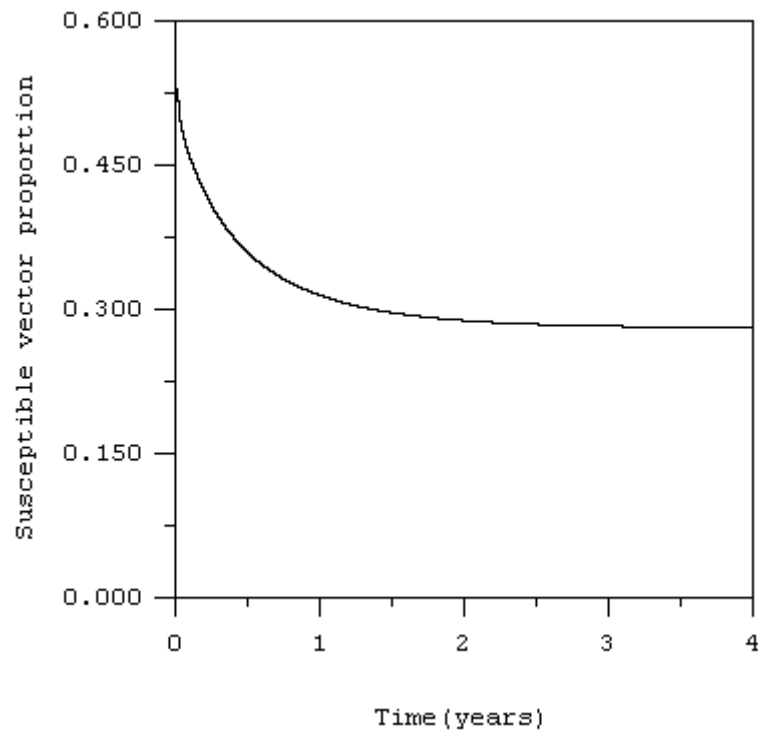
$$1/(365 \cdot 5), \beta = 1/(365 \cdot 5), \mu_v := 1/25, \lambda'_v := 1/14, \langle \beta_v \rangle = 0.0002, M = 100, N_t = 1000.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



รูปที่ 5.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง

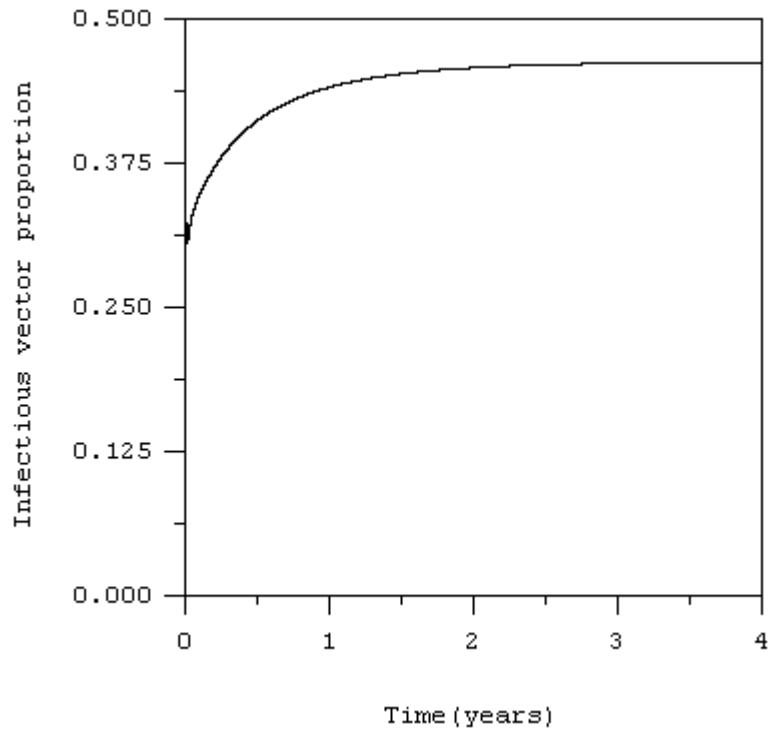


รูปที่ 5.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้

$$\mu_h = 1/(365*65), \langle \beta_h \rangle = 0.0001, \varepsilon = 0.0001, S_1 = 1/(365*4), S_2 = 1/(365*3), S_3 = 1/(365*5), \theta =$$

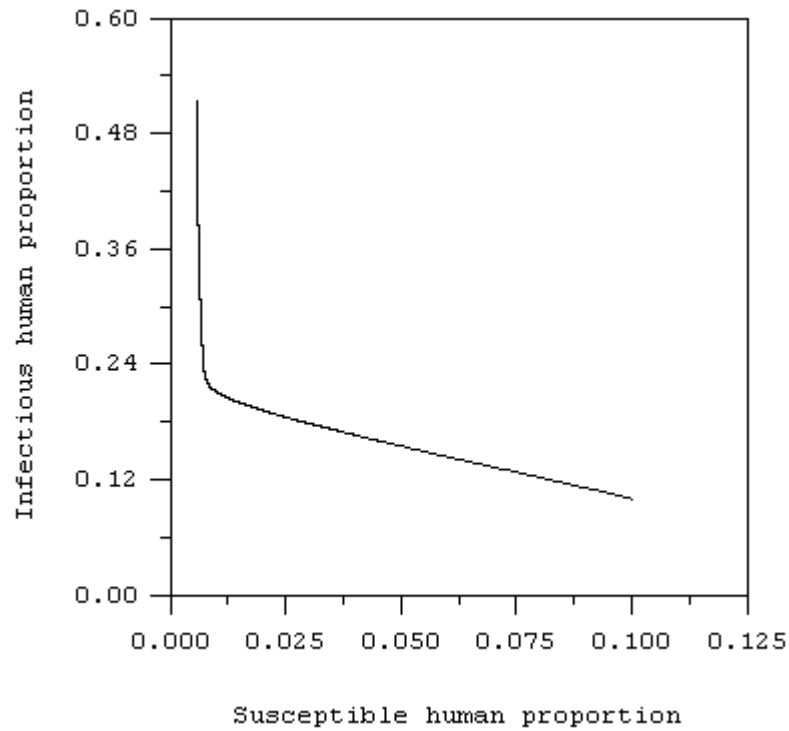
$$1/(365*5), \beta = 1/(365*5), \mu_v := 1/25, \lambda'_v := 1/14, \langle \beta_v \rangle = 0.0002, M = 100, N_t = 1000.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



รูปที่ 5.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับเวลา โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

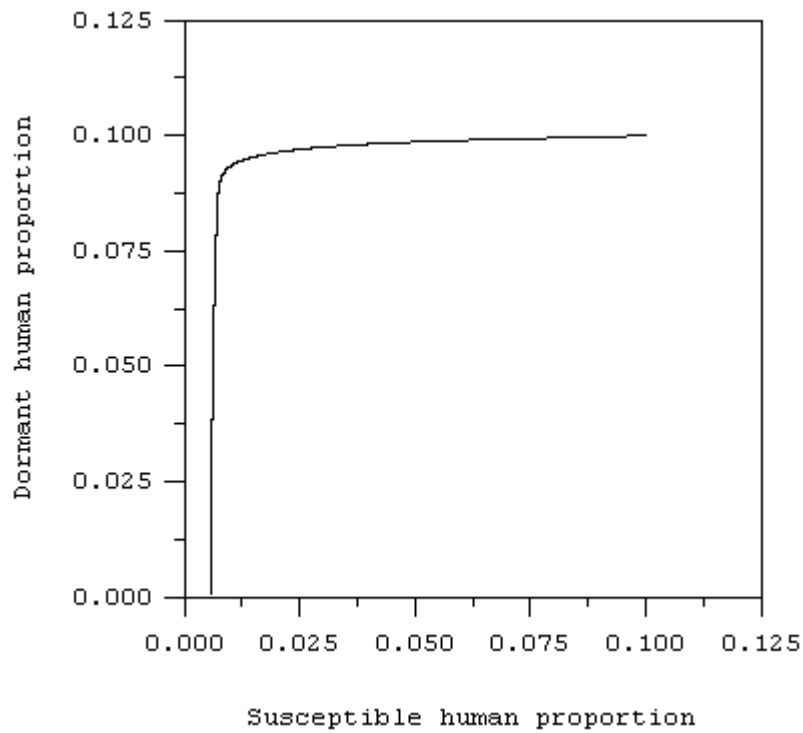
ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



รูปที่ 5.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

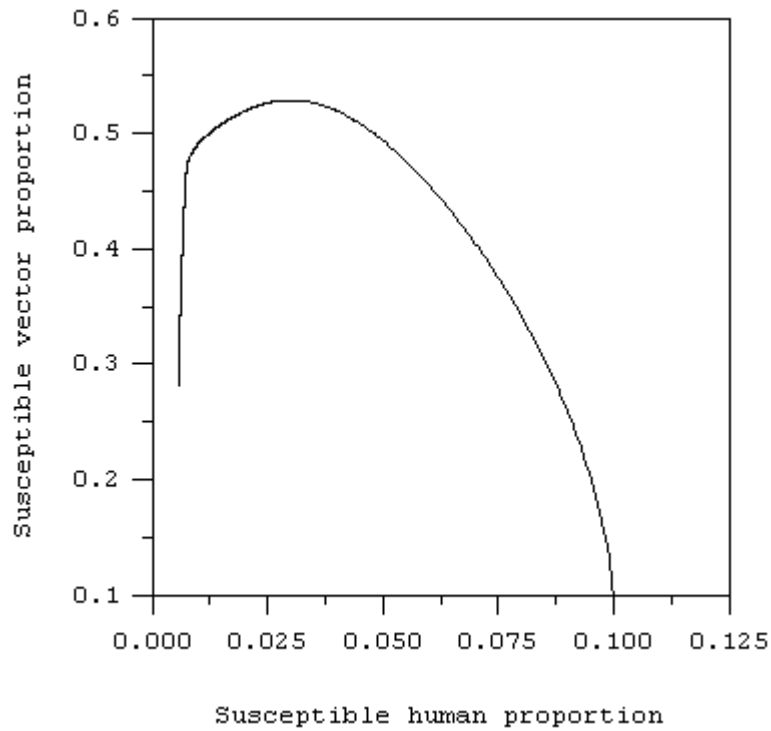
โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



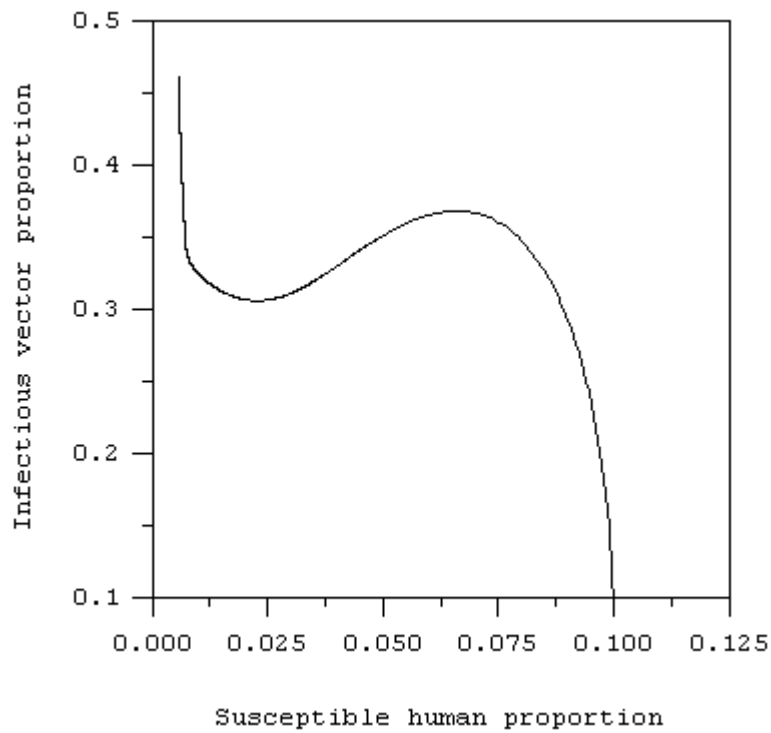
รูปที่ 5.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง



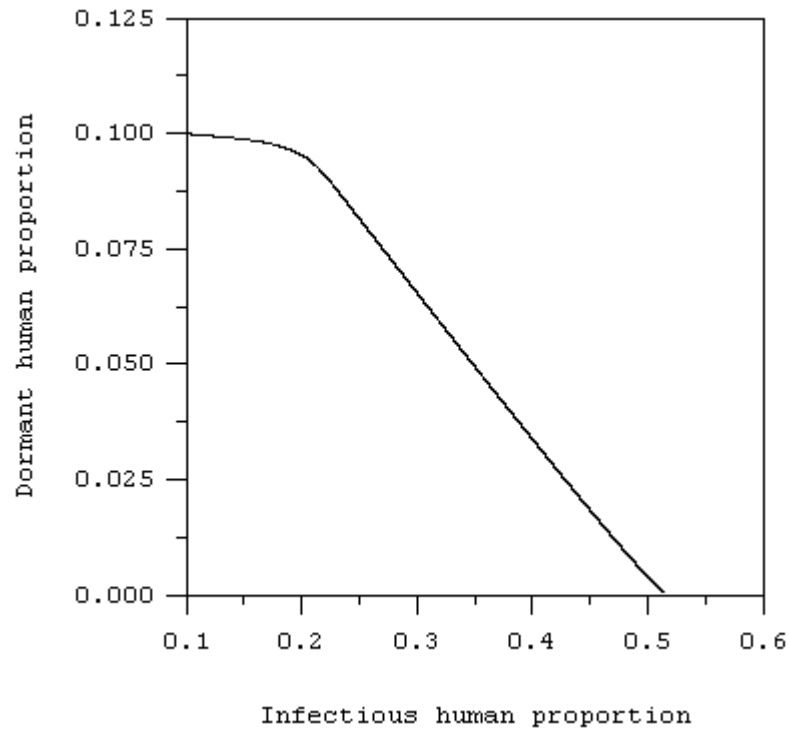
รูปที่ 5.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



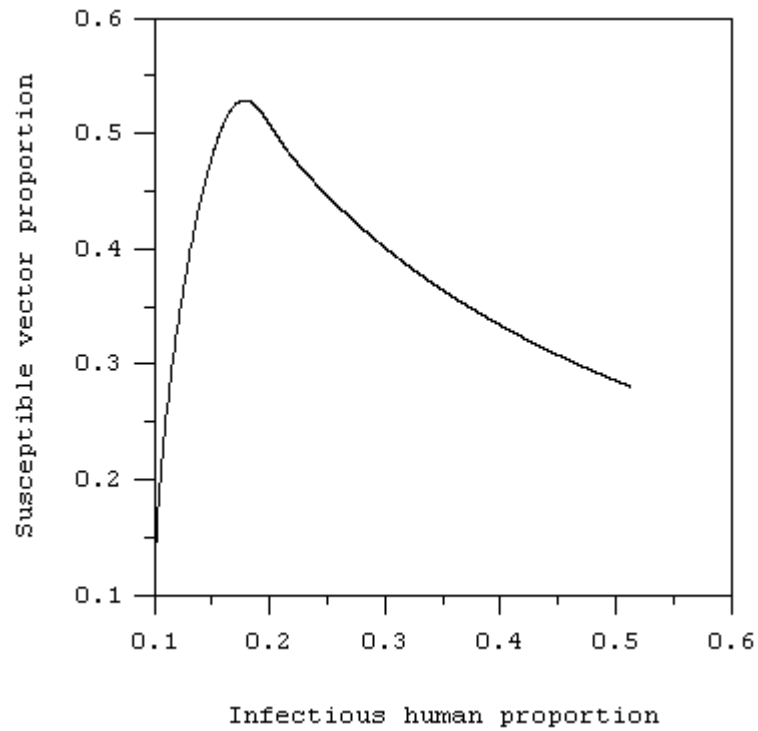
รูปที่ 5.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$. ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเร็ว



รูปที่ 5.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เทียบกับผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ โดยที่
กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$,
 $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$,
 $N_t = 1000$.

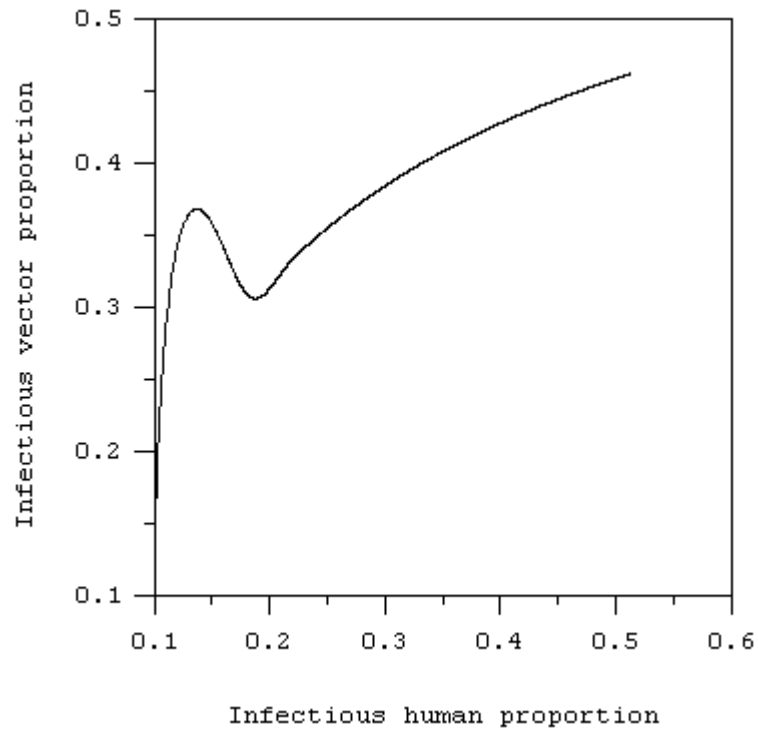
ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



รูปที่ 5.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้

โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง



รูปที่ 5.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับผู้ที่ติดเชื้อและสามารถ

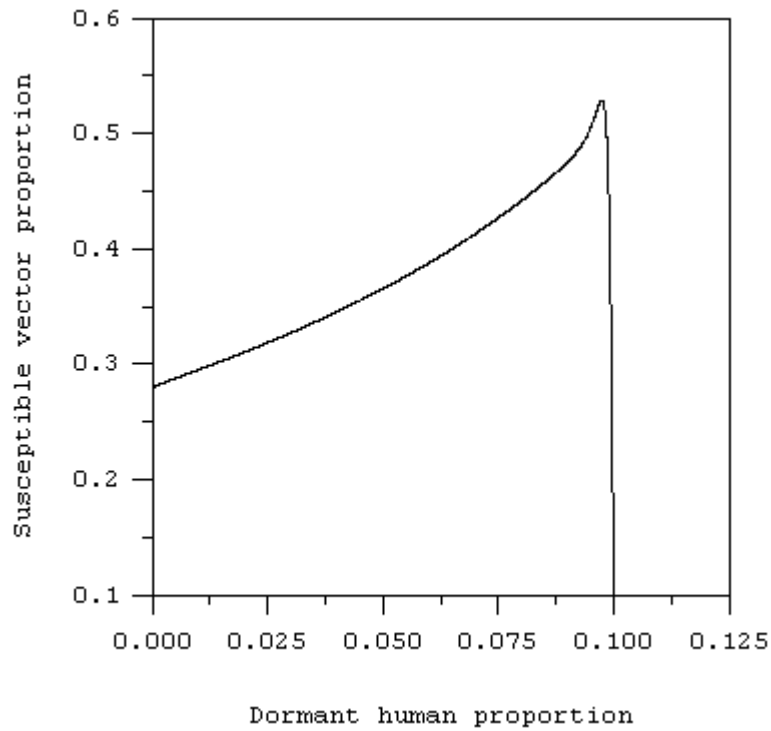
ถ่ายทอดเชื้อได้ โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 =$

$1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$,

$$\langle \beta_v \rangle = 0.0002,$$

$$M = 100, N_t = 1000.$$

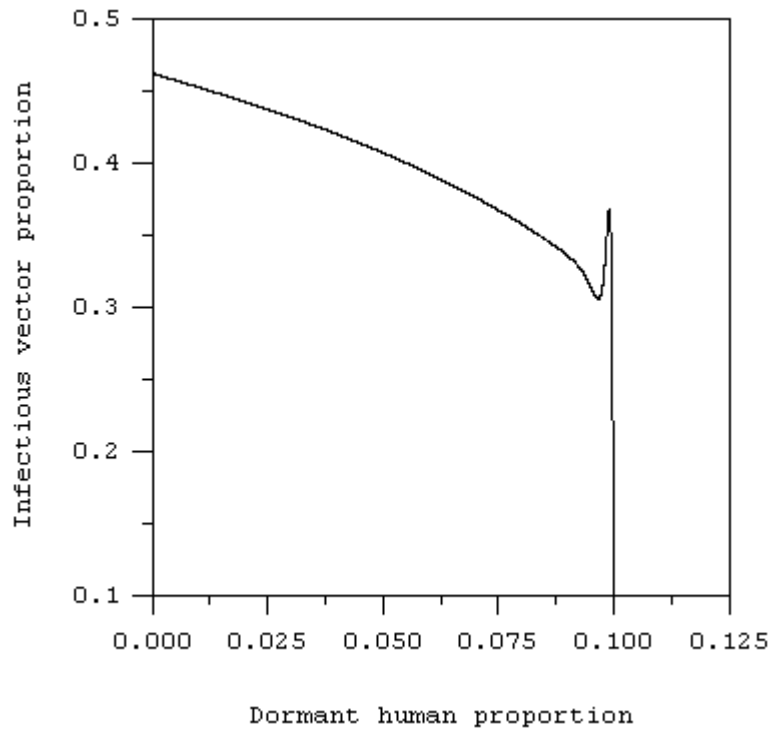
ผลเฉลยเชิงตัวเลขคู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง



รูปที่ 5.19 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่ โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง

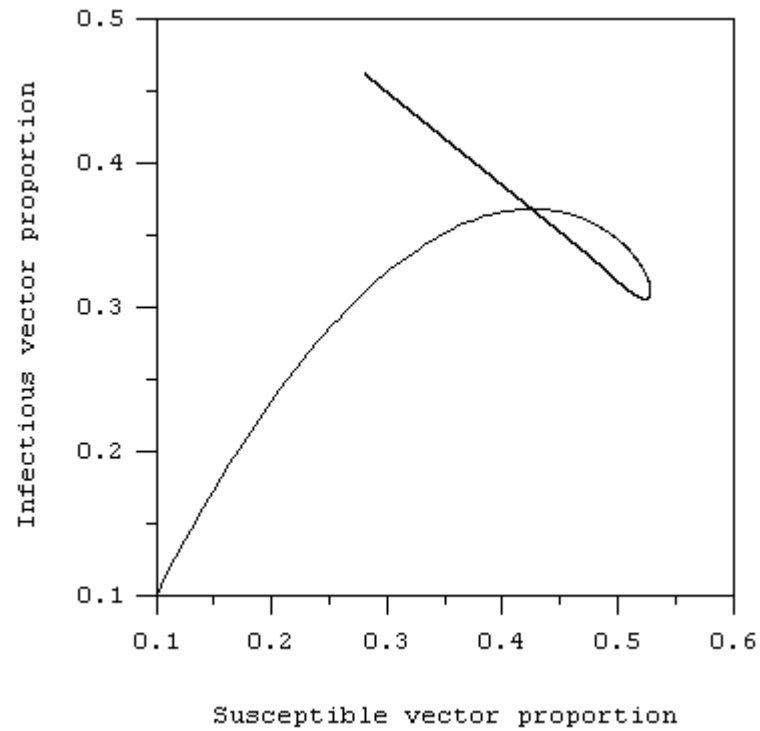
\



รูปที่ 5.20 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของบู่งที่เสี่ยงติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับผู้ที่มิเชื้อฝังตัวอยู่

โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

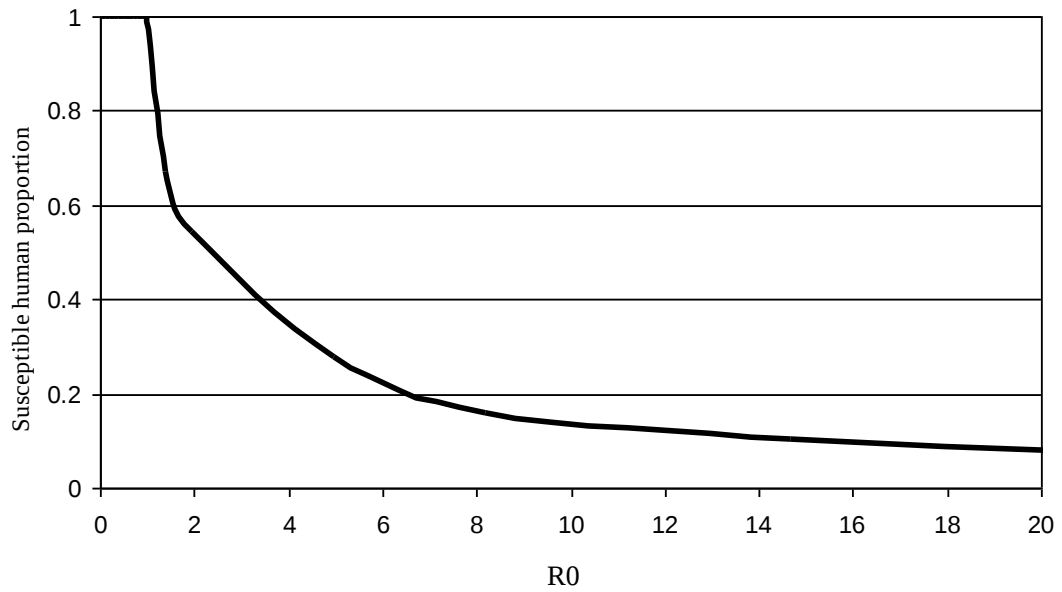
ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง



รูปที่ 5.21 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เทียบกับยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\langle \beta_h \rangle = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $\langle \beta_v \rangle = 0.0002$, $M = 100$, $N_t = 1000$.

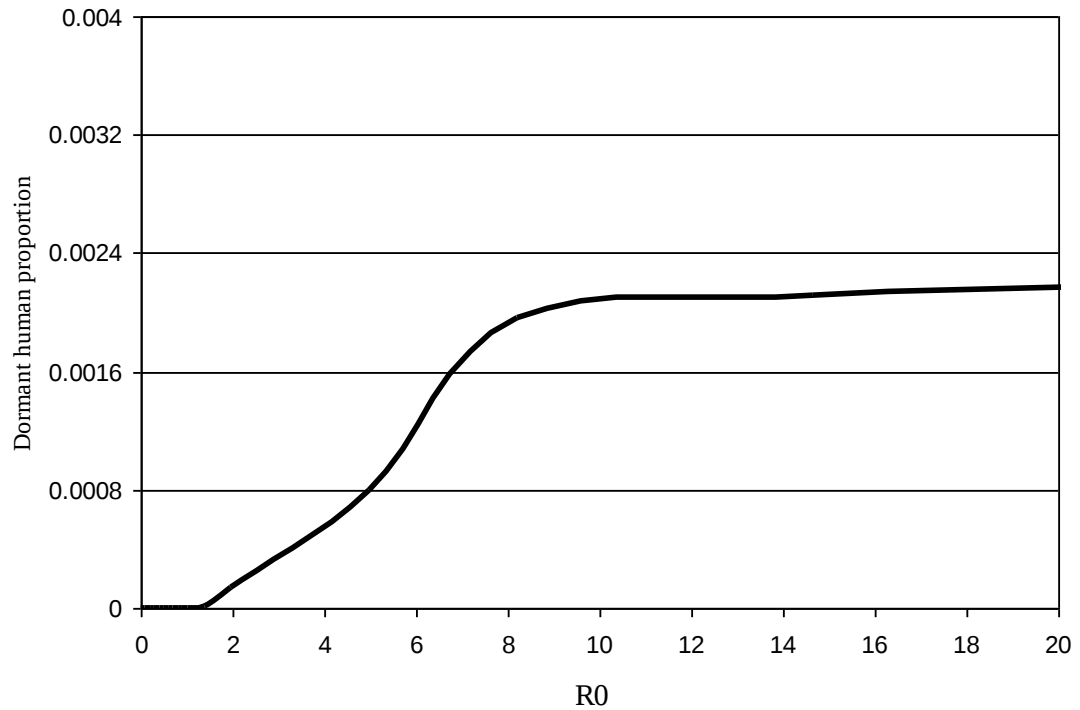
ผลเฉลยเชิงตัวเลขเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง



รูปที่ 5.22 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน โดยที่กำหนด

พารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$,

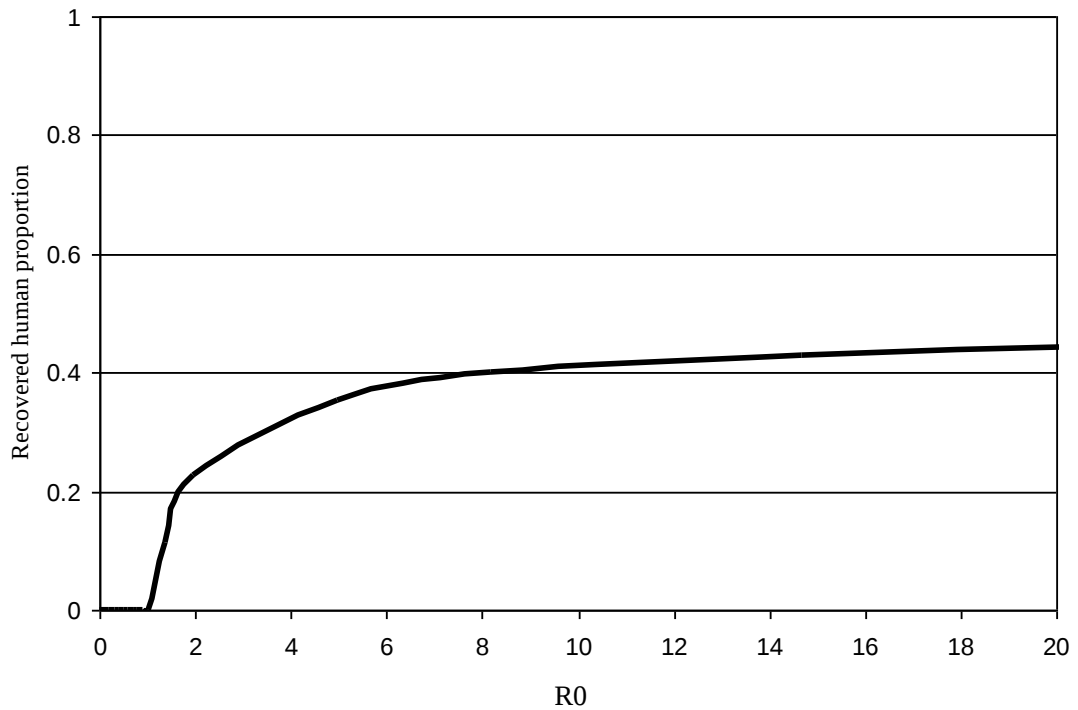
$\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $M = 100$, $N_t = 1000$



รูปที่ 5.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่มีเชื้อฝังตัวอยู่เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน โดยที่กำหนด

พารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365 \cdot 65)$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365 \cdot 4)$, $S_2 = 1/(365 \cdot 3)$, $S_3 = 1/(365 \cdot 5)$, $\theta =$
 $1/(365 \cdot 5)$,

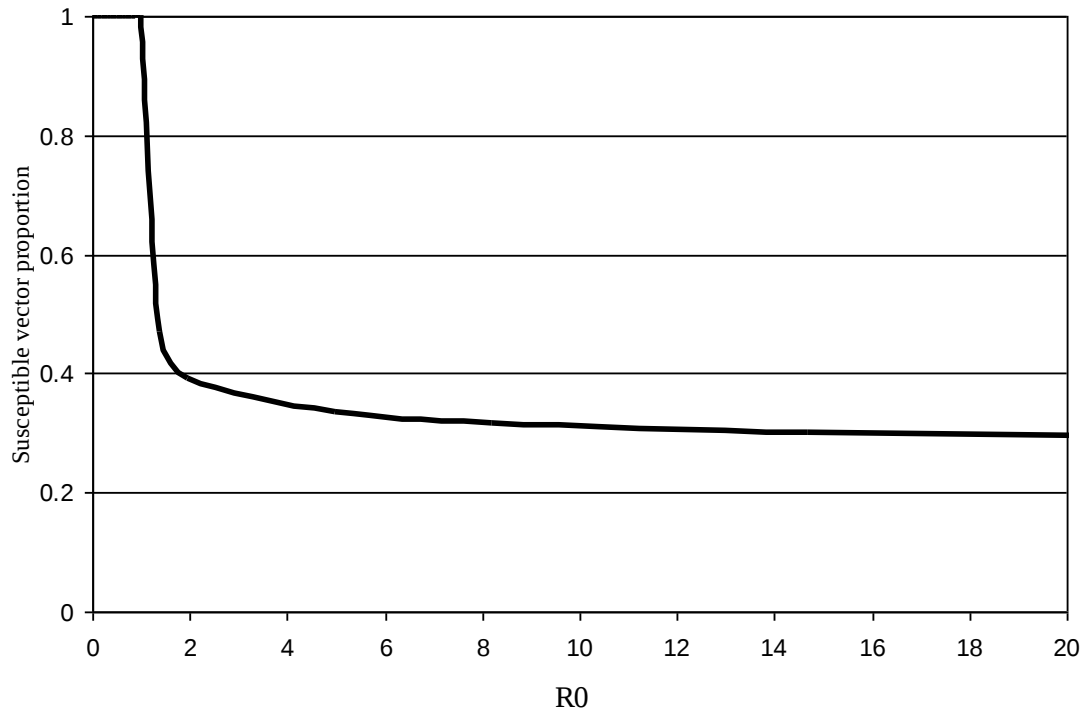
$\beta = 1/(365 \cdot 5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda_v' := 1/14$, $M = 100$, $N_t = 1000$



รูปที่ 5.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ที่ฟื้นไข้เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน โดยที่กำหนดพารามิเตอร์

ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$,

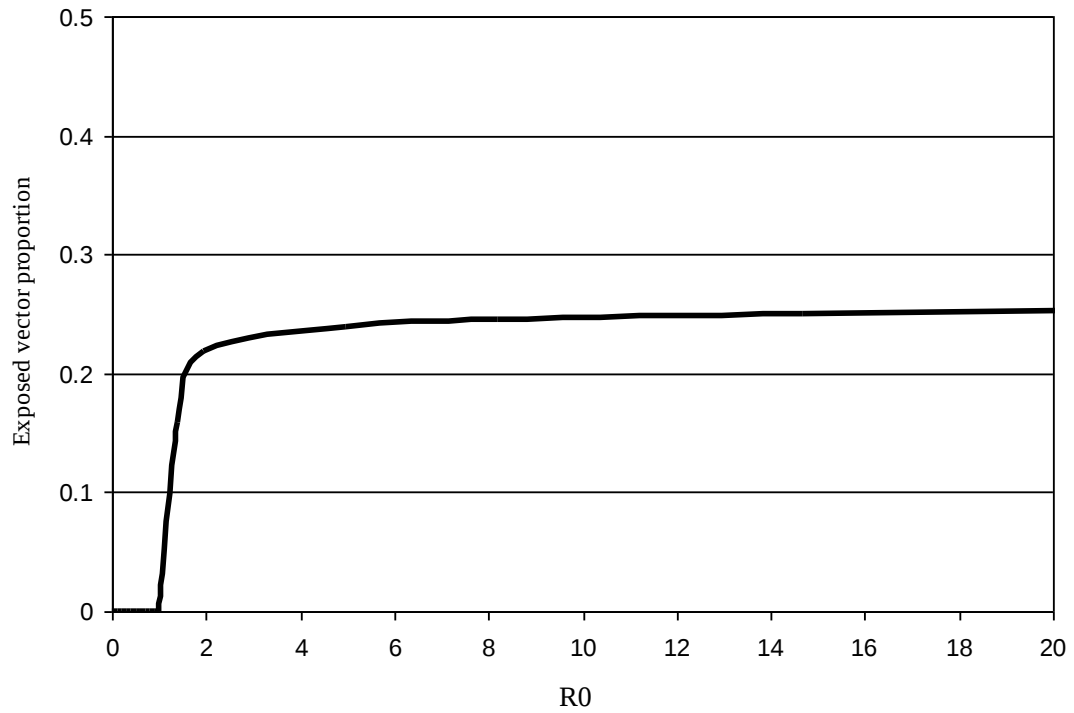
$$\beta = 1/(365*5), \mu_v := 1/25, \lambda'_v := 1/14, M = 100, N_t = 1000$$



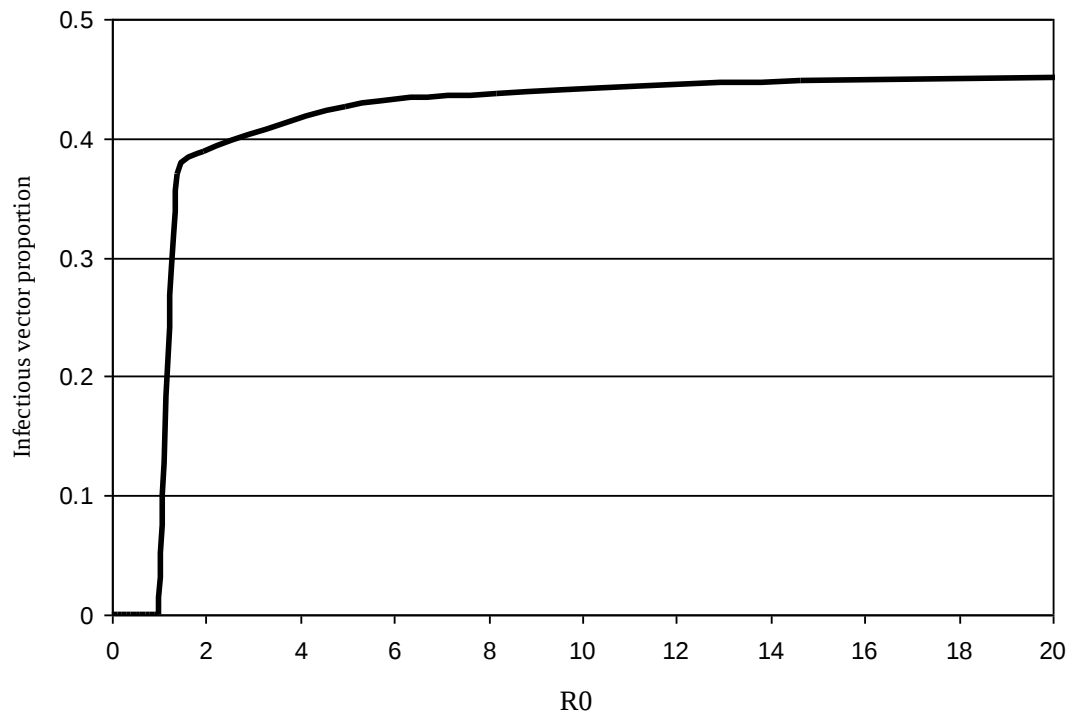
รูปที่ 5.24 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน โดยที่กำหนด

พารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$,

$\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $M = 100$, $N_t = 1000$



รูปที่ 5.25 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อแต่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เมื่อค่าสปีพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $M = 100$, $N_t = 1000$



รูปที่ 5.26 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าต่างกัน โดยที่กำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu_h = 1/(365*65)$, $\varepsilon = 0.0001$, $S_1 = 1/(365*4)$, $S_2 = 1/(365*3)$, $S_3 = 1/(365*5)$, $\theta = 1/(365*5)$, $\beta = 1/(365*5)$, $\mu_v := 1/25$, $\lambda'_v := 1/14$, $M = 100$, $N_t = 1000$

บทที่ 6

สรุป วิจัย และเสนอแผนงานวิจัยในอนาคต

ในงานวิจัยฉบับนี้เราได้ศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยในแบบจำลองโดยคำนึงถึงอิทธิพลของอายุของประชากรที่เป็นโรคมะเร็งและฤดูกาลในประเทศไทยโดยประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน ทำให้ได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยการใช้เงื่อนไข Routh-Hurwitz ตรวจสอบความเสถียรของแต่ละจุดสมดุล ผลที่ได้จากทฤษฎี ทำให้ได้ชุดของค่าพารามิเตอร์ที่สามารถลดการระบาดของโรคได้ ซึ่งแสดงในรูปของเงื่อนไข ซึ่งครอบคลุมถึงความเสถียรของสภาวะระบาดภายในและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง ซึ่งชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ได้นั้นจะมีผลทำให้ลดการระบาดของโรคนี้ ซึ่งในทางการแพทย์นั้น ชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ทำให้เกิดความเสถียรนั้นสามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้

นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยชิ้นนี้ยังไม่ได้คำนึงถึงระยะเวลาของการพักตัวของเชื้อไวรัส โมเดียมในคนและในยุงก้นปล่อง ซึ่งระยะเวลาการพักตัวนี้มีอิทธิพลต่อการระบาดของโรคนี้ งานวิจัยในอนาคตนั้นควรมีการคำนึงถึงอิทธิพลนี้

บรรณานุกรม

- [1] <http://www.britannica.com/bcom/cb/article/310,5716,1092831+40,00.html> 2000.
- [2] Center for Disease Control and prevention. Malaria Surveillance-United states 1998. Georgia: US Department of Health and Human Services, CDC, 2001 ; 50
- [3] WHO World malaria situation in 1994. Weekly Epidemiological Record. WHO 1997 ; 72(38) : 269-276,285-292.
- [4] Garnhan PCC: Malaria parasites of man: life-cycles and morphology (excluding unltrastructure. In Malaria, edited by Wernsdorfer WH, McGregor I. Edinburgh: Churchill Livingstone; 1988.
- [5] Martents P, Hall L. Malaria on the move: Human population movement and malaria transmission. Emerging Infectious Disease 2000 ; 6(2) : 103-109.
- [6] Luxemburg C, Vugt MV, Jonathan S, McGready R, Looareesuwan S, White NJ, Nosten F. Treatment of vivax malaria on the western border of Thailand. Trans R Soc Trop Med Hyg 1999 ; 93 :433-438.
- [7] Echiverri CP. Integration of Vaccine with Other Malaria Control Programs in the Philippine. Strategies for Vaccine Trials II. Malaria Eradication Service. Ministry of Health. Philippine ; 598-602.
- [8] Lertprapai S. Factors which effect the transmission of malaria and its control in the rainy season: a case study in Tak province [M.S. Thesis in Applied Mathematics]. Bangkok: Facutly of Graduate Studies, Mahidol University ;1998.
- [9] Anderson RM, May RM. Infectious disease of humans (Dynamics and Control). New York: Oxford U press ; 1992.

- [10] Kammanee A, Kanyamee N, Tang IM. Basic reproduction number for transmission of *Plasmodium vivax* malaria. *Southeast Asian J Trop Med Public Health* 2001; 32: 702-706.
- [11] Phillipe RS. *Malaria*. London : Edward Arnold; 1983
- [12] Price R.N., Emiliana T., Guerra C.A., Yeung S., White N.J., and Anstey N.M., *Vivax Malaria: Neglected and Not Benign*, *Am J Trop Med Hyg* 2007, 77: 79-87.
- [13] วิฑูรย์ ไวยนันท์, พีรพรรณ ตันอารีย์. *ปรสิตวิทยาทางการแพทย์. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยมหิดล; 2537.*
- [14] Wongsrichanalai C, Sirichaisinthop J, Karwacki JJ, Congpuong K, Miller SR, Thimasarn LP, Thimasarn K: Drug Resistant Malaria on the Thai-Myanmar and Thai-Cambodian Borders. *SEA J Trop Med Pub Health* 2001, 32: 41-49.
- [15] inichpongse S: The Current Situation of the Anti-Malaria Programme in Thailand. *Preceeding of the Asia and Pacific Conference on Malaria*, Honolulu, Hawaii 1985: 92-98.
- [16] Annual Epidemiological Surveillance Report. Division of Epidemiology, Ministry of Public Health, Royal Thai Government; 1965-2006.
- [17] Sina B., Focus on *Plasmodium Vivax*., *Trends in Parasitology* 2002, 18: 87-289
- [18] Gilles MH, Warrell AD. Epidemiology of malaria. In: Edward A, editor. *Essential Malariology*. 3 rd ed. London: Bruce-Chwatt's, 1993: 124-163.
- [19] Anderson RM, May RM. *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [20] Anderson RM. *The population dynamics of infectious diseases: theory and applications*. 1 st ed. London: Chapman and Hall, 1982.

- [21] Esteva L, Vargas C. Analysis of a dengue disease transmission model. *Mathematical biosciences* 1998; 150 : 131-151.
- [22] Mason DP, McKenzie FE. Blood-stage dynamics and clinical implications of mixed *Plasmodium vivax* – *Plasmodium falciparum* infection. *The American Society of Tropical Medicine and Hygiene* 1999; 60(3): 367-374.
- [23] McKenzie FE, Bossert WH. Multispecies *Plasmodium* infections of humans. *The Journal of Parasitology* 1999; 85: 12-18.
- [24] Maitland K, Williams TN, Bennett S, Newbold CI, Peto TEA, Viji J, et al. The Interaction between *Plasmodium falciparum* and *Plasmodium vivax* in children on Espiritu Santo island, Vanuatu. *Transactions of the Royal Society of Tropical Medicine and Hygiene* 1996; 90: 614-20.
- [25] Agiza H.N. On the Analysis of Stability, Bifurcation, Chaos and Chaos Control of Kopel Map. *Chaos, Solitons, & Fractals* 1999; 10: 1909- 1916.
- [26] Yassen M.T. Chaos control of Chen chaotic dynamical system, *Chaos, Solitons & Fractals* 2003; 15: 271-283.
- [27] Leah E.K., *Mathematical models in biology*; 1988, Random House, Inc.
- [28] Cowell L.G., Davila M., Yang K., Kepler T.B. and Kelsoe G. Prospective Estimation of Recombination Signal Efficiency and Identification of Functional Cryptic Signals in the Genome by Statistical Modeling, *The Journal of Experimental Medicine* 2003; 197: 207-220.

- [29] Duffy K.J., Page B.R., Swart J.H. and Bajic V.B. Realistic parameter assessment for a well known elephant-tree ecosystem model reveals that limit cycles are unlikely. *Ecol Modelling* 1999; 121: 115-125.
- [30] MacDonald G., *The epidemiology and control of malaria*. Oxford University Press, London (1957).
- [31] Ruan S., and Wei J., On the zeros of a third degree exponential polynomial with application to a delay model for control of testosterone secretion, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.*, 2001; 18: 41-52.
- [32] Khan Q.L.A., and Greenhalgh D., Hopf bifurcation in epidemic models with a time delay in vaccination. *IMA, J. Math. Appl. Med. Bio.*, 1998; 16: 113-142.
- [33] Robert M. *Stability and complexity in model ecosystem*; 1973, Princeton university press.
- [34] Marsden J.E., and McCracken M., *The Hopf Bifurcation and its application*. New York: Springer-Verlag; 1976.

ภาคผนวก ก

นิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

A1. Theoretical Background

Many biological problems can be explained mathematically by a set of differential equation, which may be nonlinear. In many situations, it is possible to replace the nonlinear differential equation by a set of related linear differential equation that approximates the real nonlinear equation close enough to give useful effects. The method of “linearization” may not always be appropriated. Then the original nonlinear differential equation must be considered. The study of nonlinear differential equation is usually confined to a variety of special cases and we have to use various approximation methods. In this part, we shall give an introduction to the method which we use in this research.

Definition A.1 A point $X_e \in \mathfrak{R}^n$ is an equilibrium point (or stationary point, singular point, critical point or rest point) of

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X)$$

(A.1)

if $f(t, X_e) = 0$ for all $t \geq t^*$.

If X_e is an equilibrium point of (A.1) at t^* , then it is an equilibrium point for all $\tau \geq t^*$.

Definition A.2 The equilibrium point $X = 0$ of (A.1) is stable if for every $\delta > 0$ and any $t_0 \in \mathfrak{R}^+$ there is a $\omega(\delta, t_0) > 0$ such that

$$|u(t, t_0, \gamma)| < \delta \quad \text{for every } t \geq t_0$$

whenever $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$ where $u(t, \gamma)$ is the solution of (A.1).

Definition A.3 The equilibrium point $X = 0$ of (A.1) is asymptotically stable if

1) it is stable and

2) for every $t_0 \geq 0$ there is an $\varepsilon(t_0) > 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, t_0, \gamma) = 0 \quad \text{whenever } |\gamma| < \varepsilon \quad [54] \quad (\text{A.2})$$

Definition A.4 The equilibrium point $X = 0$ of (A.1) is unstable if it is not stable.

In this case there is a $t_0 \geq 0$ and a sequence $\gamma_n \rightarrow 0$ of initial points and a sequence t_m such that $|u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m)| \geq \gamma$ for every m , $t_m \geq 0$.

For more general setting, consider a system of two autonomous first-order differential equations :

$$\frac{dX}{dt} = g_1(X, Y) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dY}{dt} = g_2(X, Y) \quad (\text{A.4})$$

where g_1 and g_2 are nonlinear functions. We let $(\bar{X}, \bar{Y})$ is the equilibrium point, then

$$g_1(\bar{X}, \bar{Y}) = g_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Setting the solution at any time in the form

$$X(t) = \bar{X} + x(t) \quad (\text{A.6})$$

and

$$Y(t) = \bar{Y} + y(t). \quad (\text{A.7})$$

This method is called perturbation of the equilibrium point. We substitute $X(t)$ and $Y(t)$ from (A.6) and (A.7) into (A.3) and (A.4) ,

$$\frac{d}{dt}(\bar{X} + x) = g_1(\bar{X} + x, \bar{Y} + y) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{Y} + y) = g_2(\bar{X} + x, \bar{Y} + y) \quad (\text{A.9})$$

On the left hand side, we expand the derivatives and on the right hand side, we expand g_1 and g_2 in a Taylor series about the equilibrium point $(\bar{X}, \bar{Y})$. Then we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} &= g_1(\bar{X}, \bar{Y}) + g_{1_x}(\bar{X}, \bar{Y})x + g_{1_y}(\bar{X}, \bar{Y})y \\ &+ \text{terms of order } x^2, y^2, xy \text{ and higher,} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{dy}{dt} = g_2(\bar{X}, \bar{Y}) + g_{2_x}(\bar{X}, \bar{Y})x + g_{2_y}(\bar{X}, \bar{Y})y \quad (\text{A.11})$$

+ terms of order x^2, y^2, xy and higher,

where $g_{1_x}(\bar{X}, \bar{Y})$ is $\frac{\partial g_1}{\partial x}$ calculated at $(\bar{X}, \bar{Y})$ and similarly for $g_{1_y}(\bar{X}, \bar{Y}), g_{2_x}(\bar{X}, \bar{Y}), g_{2_y}(\bar{X}, \bar{Y})$ and other terms.

By the definition of the equilibrium point, we have $\frac{d\bar{X}}{dt} = 0, \frac{d\bar{Y}}{dt} = 0, g_1(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ and $g_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$. We consider only linear term. Thus from (A.10) and (A.11), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

We denote J as the Jacobian matrix of equations (A.3) and (A.4) and is given by

$$J(\bar{X}, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}.$$

Letting $\alpha = a_{11} + a_{22}$

$$\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

and $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$ is called the discriminant.

Then the characteristic equation is $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$

The eigenvalues are obtained from:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\gamma}}{2}$$

A linear system can have at most one equilibrium point, $(0,0)$ if $\beta = \det J \neq 0$.

Theorem A.1 The equilibrium point $X = 0$ of (A.1) is stable if all eigenvalues of J have negative real parts and every eigenvalues of J which has a zero real part is a simple zero of the characteristic polynomial of J .

The behavior of the equilibrium points of the system of equations (A.3) and (A.4) can be determined by considering the different kinds of eigenvalues of the Jacobian matrix.

The different behavior of equilibrium points are determined from the characteristics of eigenvalues of J .

i) The eigenvalues of J are real and distinct.

ii) The eigenvalues of J are real and repeated.

iii) The eigenvalues of J are complex.

The behaviors of the equilibrium points for all three cases are described as follows.

Case I The eigenvalues of J are real and distinct. There are three possible behaviors.

- a. If both eigenvalues of J are negative, the equilibrium point will be a stable-two tangent node (Figure A.1).

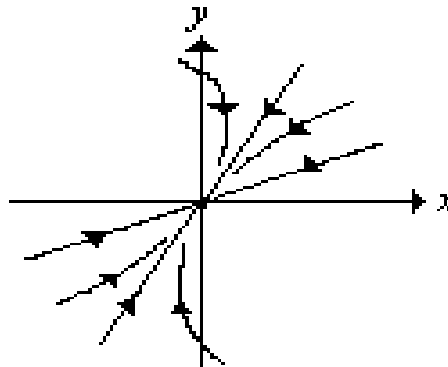


Figure A.1 A stable two-tangent node.

- b. If both eigenvalues of J are positive, the equilibrium point will be an unstable two - tangent node(Figure A.2).
-

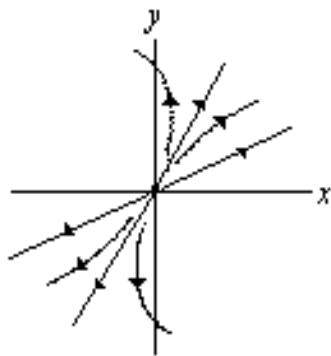


Figure A.2 An unstable two-tangent node.

- c. If the eigenvalues of J have opposite signs, the critical point will be a saddle point (Figure A.3).

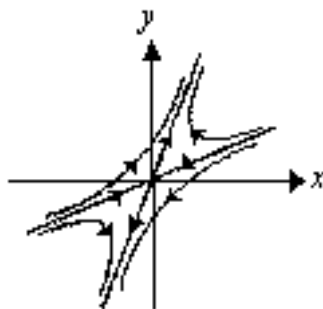
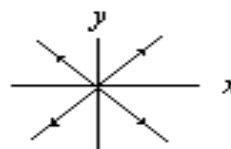
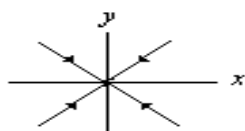


Figure A.3 A saddle point.

- ii) The eigenvalues of J are real and repeated. There are two possible behaviors.

- a. If J is diagonal and J is similar to the matrix as $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, then the critical point is called a stellar node which be stable if $\lambda < 0$ and unstable if



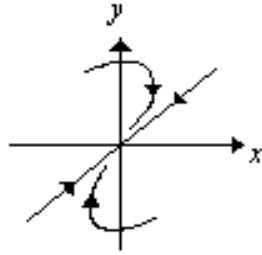
$\lambda > 0$ (Figure A.4).

(a) Stable

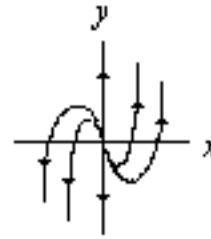
(b) Unstable

Figure A.4 A stellar node.

b. If J is not diagonal, then it is not similar to a diagonal matrix. The critical



(a) Stable



(b) Unstable

point is called a stable one-tangent node if $\lambda < 0$, and an unstable one-tangent node if $\lambda > 0$ (Figure A.5).

Figure A.5 The one-tangent node.

iii) The eigenvalues of J are complex.

It is necessary and sufficient that $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$ is negative and then

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm i\sqrt{-\gamma}}{2}$$

There are six possible behaviors as follows.

- If $\alpha > 0$ and $\beta > 0$, then the equilibrium point will be unstable node.
- If $\alpha < 0$ and $\beta > 0$, then the equilibrium point will be stable node.
- If $\alpha < 0$ then the equilibrium point will be a saddle point.
- If $\alpha^2 < 4\beta$ and $\alpha > 0$, then the equilibrium point will be an unstable spiral node (Figure A.6).

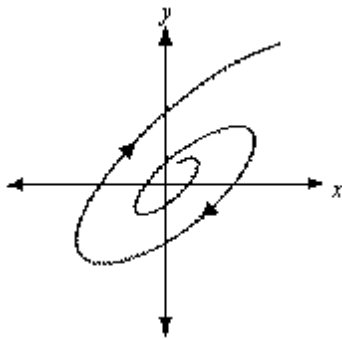


Figure A.6 An unstable spiral node.

e. If $\alpha^2 < 4\beta$ and $\alpha < 0$, then the equilibrium point will be a stable spiral node

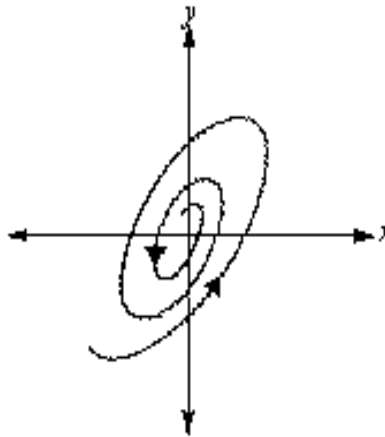


Figure A.7 A stable spiral node.

f. If $\alpha^2 < 4\beta$ and $\alpha = 0$ mean that the eigenvalues of J are purely imaginary, then the critical point will be a center (Figure A.8).

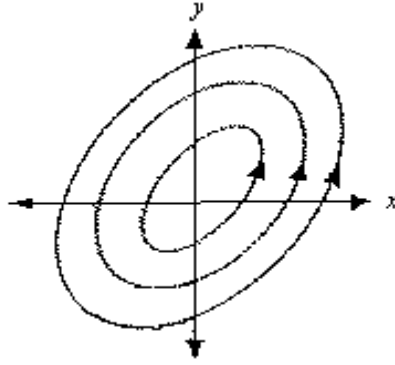


Figure A.8 A center.

In this section, we use the above ideas to apply for systems of $n > 2$ equations.

Consider

$$\frac{dX}{dt} = f_j(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad \text{where } j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{A.12})$$

or in the form of vector notation

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (\text{A.13})$$

for $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ and $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ where each function f_j depend on all or some $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$. The equilibrium point $\bar{Y}$ is obtained by solving $F(Y) = 0$. The next step is to determine stability properties of this equilibrium point.

When we linearize equation (A.13), the Jacobian is obtained by setting

$$J = \frac{\partial}{\partial X} F(\bar{Y}) \quad (\text{A.14})$$

where J is a $k \times k$ matrix. The eigenvalues λ of the matrix satisfy $\det(J - \lambda I) = 0$. We obtain a characteristic equation in the form

$$\lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_k = 0 \quad (\text{A.15})$$

The stability of the equilibrium point can be determined without solving the actual values of eigenvalues by using the Routh-Hurwitz criteria.

Definition A.5 (Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability)

Take the characteristic equation (A.15), define k matrices as follows:

$$\begin{aligned}
H_1 &= [b_1], \\
H_2 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}, \\
H_3 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}, \dots, \\
H_j &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ b_{2j-1} & b_{2j-2} & b_{2j-3} & b_{2j-4} & \dots & b_j \end{bmatrix}, \dots, \\
H_k &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & b_k \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

where the (l,m) term in the matrix H_j is

$$\begin{aligned}
&b_{2l-m} \quad \text{for } 0 < 2l-m < k \\
&1 \quad \text{for } 2l = m \\
&0 \quad \text{for } 2l < m \text{ or } 2l > k+m.
\end{aligned}$$

Then all eigenvalues have negative real part. This means that the equilibrium point $\bar{X}$ is stable if and only if the determination of all Hurwitz matrices are positive which is

$$\text{Det } H_j > 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Next, we show conditions of Routh-Hurwitz criteria for case $k = 3$ and 5 which are appeared in the thesis.

For $k = 3$;

We need to show that $\text{Det } H_j > 0$ for $j = 1, 2$ and 3 .

$$\begin{aligned}
H_1 &= [b_1]; & \text{Det } H_1 &= b_1, \\
H_2 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}; & \text{Det } H_2 &= b_1 b_2 - b_3, \\
H_3 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}; & \text{Det } H_3 &= b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 + b_1 b_5.
\end{aligned}$$

Since coefficients b_4 and b_5 in 3^{rd} order characteristic polynomial equation equal to zero then we have

$$\text{Det } H_1 = b_1,$$

$$\text{Det } H_2 = b_1 b_2 - b_3 \quad \text{and}$$

$$\text{Det } H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 = b_3(b_1 b_2 - b_3).$$

So the three conditions which correspond to $\text{Det } H_j > 0$ for $j = 1, 2$ and 3 are $b_1 > 0$, $b_3 > 0$ and $b_1 b_2 > b_3$.

Therefore the three conditions of Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability in 3^{rd} order characteristic polynomial equation are

$$\text{i) } b_1 > 0,$$

$$\text{ii) } b_3 > 0 \quad \text{and}$$

$$\text{iii) } b_1 b_2 > b_3.$$

For $k = 5$

We need to show that $\text{Det } H_j > 0$ for $j = 1, 2, 3, 4$ and 5 .

$$H_1 = [b_1]; \quad \text{Det } H_1 = b_1,$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_2 = b_1 b_2 - b_3,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 + b_1 b_5,$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 \end{bmatrix};$$

$$\text{Det } H_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 - b_3^2 b_4 - b_1^2 b_4^2 - b_1 b_2^2 b_5 + b_2 b_3 b_5 + 2b_1 b_4 b_5 - b_5^2 + b_1^2 b_2 b_6 - b_1 b_3 b_6$$

$$- b_1 b_2 b_7 + b_3 b_7,$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 \\ b_9 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{Det } H_5 = & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 - b_3^2 b_4 b_5 - b_1^2 b_4^2 b_5 - b_1 b_2^2 b_5^2 + b_2 b_3 b_5^2 + 2b_1 b_4 b_5^2 - b_5^3 - b_1 b_2 b_3^2 b_6 \\
& + b_3^2 b_6 + b_1^2 b_3 b_4 b_6 + 2b_1^2 b_2 b_5 b_6 - 3b_1 b_3 b_5 b_6 - b_1^3 b_6^2 + b_1 b_2^2 b_3 b_7 - b_2 b_3^2 b_7 \\
& - b_1^2 b_2 b_4 b_7 - b_1 b_2 b_5 b_7 + 2b_3 b_5 b_7 + 2b_1^2 b_6 b_7 - b_1 b_7^2 - b_1^2 b_2 b_3 b_8 + b_1 b_3^2 b_8 \\
& + b_1^3 b_4 b_8 - b_1^2 b_5 b_8 + b_1 b_2 b_3 b_9 - b_3^2 b_9 - b_1^2 b_4 b_9 + b_1 b_5 b_9.
\end{aligned}$$

Since the coefficients b_6 , b_7 , b_8 and b_9 in 5^{th} order characteristic polynomial equation equal to zero then we have

$$\text{Det } H_1 = b_1,$$

$$\text{Det } H_2 = b_1 b_2 - b_3,$$

$$\begin{aligned}
\text{Det } H_3 = & b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 + b_1 b_5 \\
= & b_3(b_1 b_2 - b_3) - b_1(b_1 b_4 - b_5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Det } H_4 = & b_1 b_2 b_3 b_4 - b_3^2 b_4 - b_1^2 b_4^2 - b_1 b_2^2 b_5 + b_2 b_3 b_5 + 2b_1 b_4 b_5 - b_5^2 \\
= & b_4(b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5(b_1 b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Det } H_5 = & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 - b_3^2 b_4 b_5 - b_1^2 b_4^2 b_5 - b_1 b_2^2 b_5^2 + b_2 b_3 b_5^2 + 2b_1 b_4 b_5^2 - b_5^3 \\
= & b_5(b_4(b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5(b_1 b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5))
\end{aligned}$$

So the conditions which correspond to $\text{Det } H_j > 0$ for $j = 1, 2, 3, 4$ and 5 .

$$\begin{aligned}
\text{are } b_1 & > 0, \\
b_1 b_2 - b_3 & > 0, \\
b_3(b_1 b_2 - b_3) - b_1(b_1 b_4 - b_5) & > 0, \\
b_4(b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5(b_1 b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5) & > 0.
\end{aligned}$$

After we rearrange all above inequalities, we get the conditions of Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability in 5^{th} order characteristic polynomial equation

- i) $b_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)
- ii) $b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4$ and
- iii) $(b_1 b_4 - b_5)(b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) > b_5(b_1 b_2 - b_3)^2 + b_1 b_5^2$.

A2. Numerical Solutions of Differential Equations

In this research, we use Runge-Kutta-Fehlberg's method [13] which is one of the most widely used methods, and is particularly suitable in cases when the computation of higher derivatives is complicated. It can be used for equations of arbitrary order by means of a transformation to a system of first-order equations. We shall discuss the solution of three first-order equations. Let this system be

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z, t)\end{aligned}$$

with initial point (x_0, y_0, z_0, t_0) and interval length h .

Runge-Kutta-Fehlberg's method for finding approximate values of x, y and z at each step is

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{(2375k_1 + 11264k_3 + 10985k_4 - 4104k_5)}{20520}, \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{(2375r_1 + 11264r_3 + 10985r_4 - 4104r_5)}{20520}, \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{(2375s_1 + 11264s_3 + 10985s_4 - 4104s_5)}{20520}\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n, z_n, t_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{k_1}{4}, y_n + \frac{r_1}{4}, z_n + \frac{s_1}{4}, t_n + \frac{h}{4}), \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{(3k_1 + 9k_2)}{32}, y_n + \frac{(3r_1 + 9r_2)}{32}, z_n + \frac{(3s_1 + 9s_2)}{32}, t_n + \frac{3h}{8}), \\ k_4 &= hf(x_n + \frac{(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)}{2197}, \\ &\quad y_n + \frac{(1922r_1 - 7200r_2 + 7296r_3)}{2197}, \\ &\quad z_n + \frac{(1932s_1 - 7200s_2 + 7296s_3)}{2197}, t_n + \frac{12h}{13}),\end{aligned}$$

$$k_5 = hf(x_n + \frac{(8341k_1 - 32832k_2 + 29440k_3 - 845k_4)}{4104},$$

$$y_n + \frac{(8341r_1 - 32832r_2 + 29440r_3 - 854r_4)}{4104},$$

$$z_n + \frac{(8341s_1 - 32832s_2 + 29440s_3 - 854s_4)}{4104}, t_n + h),$$

$$k_6 = hf(x_n + \frac{(-6080k_1 + 41040k_2 - 28352k_3 + 9295k_4 - 5643k_5)}{20520},$$

$$y_n + \frac{(-6080r_1 + 41040r_2 - 28352r_3 + 9295r_4 - 5643r_5)}{20520},$$

$$z_n + \frac{(-6080s_1 + 41040s_2 - 28352s_3 + 9295s_4 - 5643s_5)}{20520}, t_n + \frac{h}{2}),$$

and the error for each step will be

$$\text{Error} = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50}.$$

$r_1, r_2, \dots, r_6$ and the error of y value can be evaluated from the above equations.

$s_1, s_2, \dots, s_6$ and the error of z value can be evaluated from the above equations. $k_1, k_2, \dots, k_6$ and error of x by replacing function f with function g and function h .

Runge-Kutta-Fehlberge's method can be applied directly to a system of n first-order differential equations

ภาคผนวก ข

ผลงานการวิจัย

1. Puntani Pongsumpun and Preeyaporn Mumtong, Malaria transmission model of juvenile and adult humans, *Proceeding of The 4th Biomedical Engineering International Conference* (BMEiCON-2011), Chiangmai, Thailand, January 29-31, 2012, pp.11-16.

2. Puntani Pongsumpun, Age Structural Model of *Plasmodium Falciparum* Malaria Transmission, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(7), pp. 6358-6366.

3. Puntani Pongsumpun, Seasonal Transmission Model of Malaria by Age Group of Population, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(7), pp.6657-6669.

Malaria transmission model of juvenile and adult humans

Puntani Pongsumpun* and Preeyaporn Mumtong

Industrial Mathematics Research unit, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand.

e-mail: kppuntan@kmitl.ac.th*

Abstract—A major public health problem in Thai population is due to Malaria. This disease is caused by the multiplication of protozoa parasite of the genus *Plasmodium*; *Plasmodium falciparum*, *Plasmodium vivax*, *Plasmodium malariae* and *Plasmodium ovale*. Malaria is found along the border with Burma, Cambodia and Malaysia. There are the different transmission rates of this disease between Thai juvenile and adult humans. In this study, the transmission of Malaria is considered by using Mathematical model. The analysis of this model is given by method of standard dynamical modeling. The local stability conditions are shown to point the way for decreasing the outbreak of the disease.

Keywords—*Plasmodium*, standard dynamical modeling, equilibrium states, Malaria, local stability.

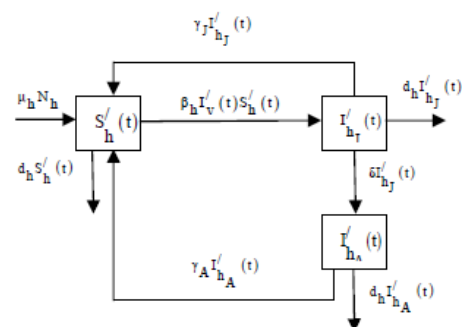
I. INTRODUCTION

Malaria is a contagious disease in the tropical countries. The infected parasite caused by a single cell in the class sporozoa, genus *Plasmodium*. There are four species; *P. falciparum*, *P. vivax*, *P. ovale* and *P. malariae*. In Thailand, the most people has infected with *P. falciparum* and *P. vivax*[1]. Sick due to this disease causes significant economic loss. The *Anopheles* mosquito is the epidemic vector for this disease. The contact of the disease from an infected mother to the fetus is rare. In the first two months of life, children may not contact malaria or their manifestations may be mild with low-grade parasitemia[2], due to the passive immunity offered by the maternal antibodies. The contact of the disease by means of a blood transfusion may be found in cases where the donor density of malaria parasites in the blood is low and no symptom. Situations of global temperatures rise affects the life cycle of a mosquito vector[3]-[5]. The period of mosquito eggs and larvae molt growth as a mosquito can take 7-10 days. The average life expectancy of the mosquito is 45 days. In Thailand, Malaria is found along the border with Burma, Cambodia, and Malaysia. The most Malaria patients are found in Songkhla, Yala,

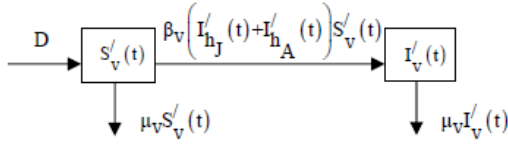
Mae Hong Son, Tak, Kanchanaburi, Prachuap Khiri Khan, Chumphon, Ranong, Chanthaburi and Narathiwat. The symptoms of Malaria patients appear after the *Plasmodium* incubates in the body. The period of incubation for *Plasmodium* depends on its type, about 10-14 days. The period of incubation for *Plasmodium vivax* is higher than *Plasmodium falciparum*. In 2009, number of patients who be infected with Malaria are 23,327 people. There are 13,616 and 9,486 cases who be infected with *Plasmodium vivax* and *Plasmodium falciparum*, respectively[5]. In Thailand, there are the different transmission rates of this disease between juvenile and adult humans [6]. Pongsumpun and Tang [7] had proposed mathematical model for the transmission of *Plasmodium Vivax* between human and mosquito populations but they did not consider the different of this disease between juvenile and adult humans.

II. MATHEMATICAL MODEL

The transmission of the disease between human and mosquitoes is considered by formulating the mathematical model. The human is divided into two groups; juvenile and adult humans. The adult group is the group of people who age not less than 15 years old. The human and vector populations are separated into susceptible and infectious classes. The diagram of the transmission is presented in figure 1.



1a) For the human population



1b) For the vector population

Fig.1. Flow chart of the model.

Each population size is assumed to be constant. The dynamical equations of human and mosquito populations can be explained as follows:

$$\frac{d}{dt} S'_h(t) = \mu_h N_h + \gamma_A I'_{hA}(t) + \gamma_J I'_{hj}(t) - \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - d_h S'_h(t) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{hj}(t) = \beta_h I'_v(t) S'_h(t) - \gamma_J I'_{hj}(t) - \delta I'_{hj}(t) - d_h I'_{hj}(t) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{hA}(t) = \delta I'_{hj}(t) - \gamma_A I'_{hA}(t) - d_h I'_{hA}(t) \quad (3)$$

where $S'_h(t)$, $I'_{hj}(t)$ and $I'_{hA}(t)$ are the number of susceptible, infectious juvenile and infectious adult human populations, respectively. The parameters in the above equations are defined as follows:

μ_h is the birth rate of human population,

d_h is the death rate of human population,

N_h is the total human population,

β_h is the transmission rate of this disease from vector to human,

γ_J is the rate at which the infectious juvenile human can be susceptible again,

γ_A is the rate at which the infectious adult human can be susceptible again,

δ is the rate at which the juvenile human become to be adult human,

β_v is the transmission rate of this disease from human to vector,

μ_v is the death rate of human population,

D is the constant recruitment rate of vector population,

since *P. vivax* infection is non lethal, the death rates will be the same for all human classes and we will have

$$N_h = S'_h(t) + I'_{hj}(t) + I'_{hA}(t).$$

The dynamical equations of the vector population are described by

$$\frac{d}{dt} S'_v(t) = D - \mu_v S'_v(t) - \beta_v (I'_{hj}(t) + I'_{hA}(t)) S'_v(t) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} I'_v(t) = \beta_v (I'_{hj}(t) + I'_{hA}(t)) S'_v(t) - \mu_v I'_v(t) \quad (5)$$

where $S'_v(t)$ and $I'_v(t)$ are the number of susceptible and infectious vector, respectively.

$N_v = S'_v(t) + I'_v(t)$ is the total vector population. The total human and vector populations are assumed to be

constant. Therefore $\frac{dN_h}{dt} = 0$ and $\frac{dN_v}{dt} = 0$.

Since $N_h = S'_h(t) + I'_{hj}(t) + I'_{hA}(t)$,

therefore the new equation becomes:

$$\frac{d}{dt} N_h = \frac{d}{dt} S'_h(t) + \frac{d}{dt} I'_{hj}(t) + \frac{d}{dt} I'_{hA}(t) = 0 \quad (6)$$

The rate of change in each class is equal to zero. Setting the right hand side of (6) to zero, we obtain

$\mu_h = d_h$ (birth rate equals to death rate). From

$N_v = S'_v(t) + I'_v(t)$, the new equation is defined as follows.

$$\frac{d}{dt} N_v = \frac{d}{dt} S'_v(t) + \frac{d}{dt} I'_v(t) = 0 \quad (7)$$

In the same manner, setting the right hand side of (7) to zero, we obtain $\mu_v = D/N_v$ (Mortality rate equal to the ratio between the constant recruitment rate and the total number of vector). This gives $N_v = D/\mu_v$. We introduce the normalized populations:

$$S_h(t) = S'_h(t) / N_h,$$

$$I_{hj}(t) = I'_{hj}(t) / N_h, \quad I_{hA}(t) = I'_{hA}(t) / N_h,$$

$S_v = S'_v / N_v$ and $I_v = I'_v / N_v$. then (1)–(5) can be rewritten as

$$\frac{d}{dt} S_h(t) = \mu_h S_h(t) - (\gamma_A + d_h) I_{hA}(t) \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} I_{hj}(t) = \beta_h I_v(t) N_v S_h(t) - (\gamma_J + \delta + d_h) I_{hj}(t) \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} I_v(t) = \beta_v (I_{hj}(t) + I_{hA}(t)) S_v(t) - \mu_v I_v(t) \quad (10)$$

The dynamical equations for $S_h(t)$ and $S_v(t)$ are not necessary because $S_h(t) + I_{hJ}(t) + I_{hA}(t) = 1$ and $S_v(t) + I_v(t) = 1$.

III. ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL

A. Equilibrium Points

The equilibrium points are obtained by setting the right hand side of (8)–(10) equal to zero. We get two equilibrium points, the disease free state $E_0(0, 0, 0)$ and the endemic disease state $E_1(I_{hA}^*, I_{hJ}^*, I_v^*)$ where

$$I_v^* = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h - (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}{(\mu_v + \beta_v N_h) (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v} \quad (11)$$

$$I_{hA}^* = \frac{\delta (\beta_h I_v^* N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^* N_v) (\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^* N_v} \quad (12)$$

$$I_{hJ}^* = \frac{(\gamma_A + d_h) (\beta_h I_v^* N_v)}{(\gamma_J + \delta + d_h + \beta_h I_v^* N_v) (\gamma_A + d_h) + \delta \beta_h I_v^* N_v} \quad (13)$$

and I_v^* are the solutions of

$$A_1 I_v^{*2} + A_2 I_v^* = 0 \quad (14)$$

The solutions of (14) are

$$I_v^* = 0 \quad (15)$$

and

$$I_v^* = -A_2 / A_1 \quad (16)$$

where

$$A_2 = (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_h N_v \mu_v + \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h$$

and

$$A_1 = (\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v - \beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h$$

I_v^* is positive for $D_0 > 1$, where

$$D_0 = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h}{(\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}$$

B. Local Asymptotical Stability

The local stability of an equilibrium point is determined from the signs of eigenvalues of the Jacobian matrix of the right hand side of the above set of differential equations.

C. Disease Free State

For the equations (8)–(10), the Jacobian matrix evaluated at E_0 is given by

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -(\gamma_A + d_h) & \delta & 0 \\ 0 & -(\gamma_J + \delta + d_h) & \beta_h N_v \\ \beta_v N_h & \beta_h N_h & -\mu_v \end{pmatrix}$$

The eigenvalues are obtained by solving the characteristic equation; $\det(J - \lambda I_3) = 0$ where I_3 is the identity matrix dimension 3×3 . The characteristic equation for the disease free state is given by

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (17)$$

where

$$a_1 = \mu_v + \gamma_A + \gamma_J + \delta + 2d_h$$

$$a_2 = \mu_v (\gamma_A + d_h) + \mu_v (\gamma_J + \delta + d_h) + (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h)$$

$$a_3 = \mu_v (\gamma_A + d_h) (\gamma_J + \delta + d_h)$$

The eigenvalues are found by solving $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$. The signs of these eigenvalues are negatives when they satisfy the Routh-Hurwitz criteria[6];

$$\det H_1 = a_1 > 0 \quad (18)$$

$$\det H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0 \quad (19)$$

$$\det H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 > 0 \quad (20)$$

We found that the disease free state is locally stable state when $D_0 < 1$.

D. Endemic Disease State

The local stability of the endemic state, E_1 , is determined by looking at the signs of the eigenvalues of the Jacobian evaluated at E_1 . The Jacobian matrix for this state is

$$J_H = \begin{pmatrix} -(\gamma_A + d_h) & \delta & 0 \\ \beta_h N_v^* & \beta_h N_v^* - (\gamma_J + d_h) & \beta_h N_v^* (1 - I_h^* - I_v^*) \\ \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* & \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* & -\beta_h N_v^* \beta_v I_v^* - \mu_v \end{pmatrix}$$

where I_{hA}^* , I_{hJ}^* and I_v^* are defined in (11)–(13) and

$D_0 > 1$. The characteristic equation for the endemic state is given by

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0 \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} b_1 &= \delta + d_h + \gamma_A + \gamma_J + \mu_v + \beta_h N_v^* I_{hA}^* + \beta_h N_v^* I_{hJ}^* + \beta_h N_v^* I_v^* \\ b_2 &= \delta d_h + d_h^2 + \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + \delta \gamma_A + d_h \gamma_A + d_h \gamma_J + \delta \mu_v \\ &\quad + 2d_h \mu_v + \gamma_A \mu_v + \gamma_J \mu_v + \beta_h N_v^* I_{hA}^* + 2d_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* \\ &\quad + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* \\ &\quad + 2d_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* \\ &\quad + \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + d_h N_v^* \beta_v I_v^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + \beta_h N_v^* \gamma_A I_v^* + \beta_h N_v^* \gamma_J I_v^* \\ b_3 &= \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* \gamma_A + \delta d_h \mu_v + \gamma_A \gamma_J \mu_v \\ &\quad + d_h \gamma_J \mu_v + d_h \gamma_A \mu_v + \delta \mu_v^2 + \delta d_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + d_h^2 N_v^* \beta_v I_{hA}^* \\ &\quad + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* \\ &\quad + \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_{hA}^* + \delta d_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* \\ &\quad + d_h^2 N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* + \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* \\ &\quad + d_h \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_{hJ}^* + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* \\ &\quad + \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_v^* + d_h \beta_h N_v^* \beta_v \gamma_A I_v^* + \gamma_A \beta_h N_v^* \beta_v I_v^* + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* I_v^* \\ &\quad + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_{hJ}^* I_v^* + \delta \beta_h N_v^* \beta_v I_{hA}^* I_v^* \end{aligned}$$

The eigenvalues are found by solving $\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$. The signs of these eigenvalues are negatives when they satisfy the Routh-Hurwitz criteria[7];

$$\det H_1 = b_1 > 0 \quad (22)$$

$$\det H_2 = b_1 b_2 - b_3 > 0 \quad (23)$$

$$\det H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 > 0 \quad (24)$$

Thus, the endemic equilibrium state is locally stable for $D_0 > 1$.

E. Numerical Results

In this section, we analyze the model given by equations (8)–(10). The trajectories of the solutions when the parameter values will lead to a disease free equilibrium state and when they will lead to the endemic equilibrium state are shown in the following figures.

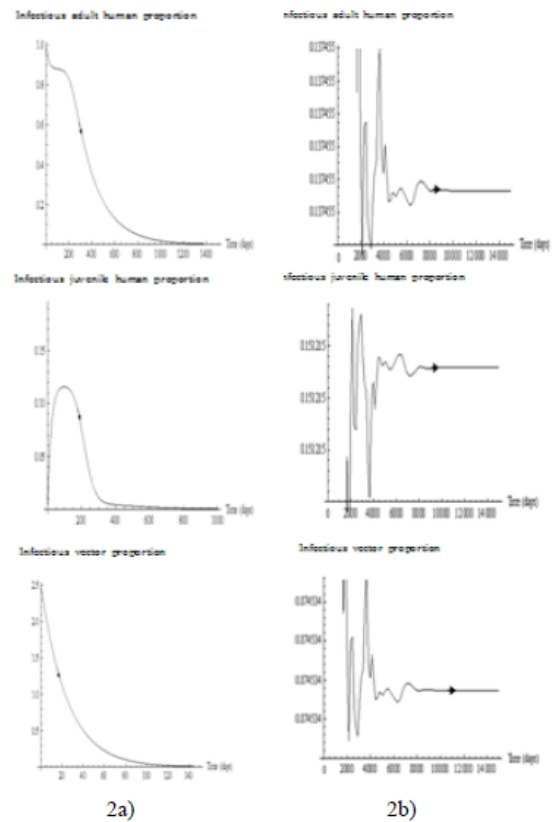


Fig. 2 Time series solutions of infectious adult human, infectious juvenile human and infectious vector, respectively. The value of parameters are

$N_h=1,000$, $N_v=9,500$, $\mu_h=1/(365*65)$ day⁻¹,
 $d_h=1/(365*65)$ day⁻¹, $D=40,000$, $\gamma_A=1/365*2$
 day⁻¹, $\gamma_J=1/365*1$ day⁻¹,

$\delta=1/365*15$, $\mu_v=1/25$.

2a) $D_0 < 1$, $D_0=0.287901$, $\beta_h=0.009$,

$\beta_v=0.0000000007$. The fractions of populations

$(I_{hA}^*, I_{hJ}^*, I_v^*)$ approach to the disease free
 state $(0, 0, 0)$.

2b) $D_0 > 1$, $D_0=287.901$, $\beta_v=0.0009$,

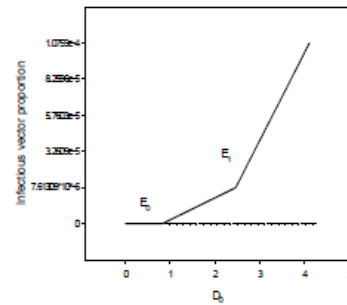
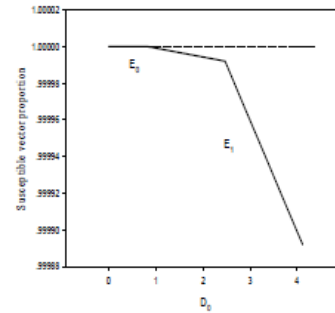
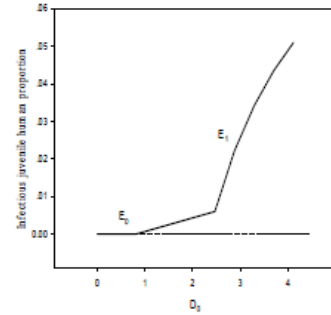
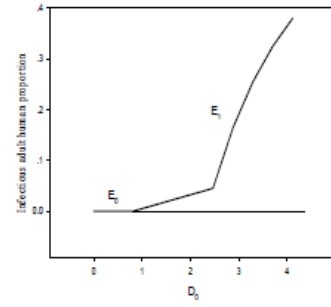
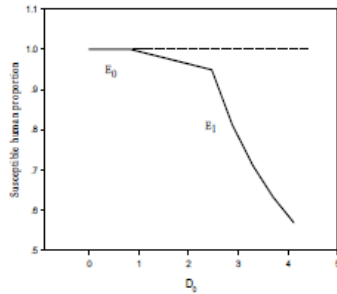
$\beta_h=0.000000007$. The trajectory of the six state
 variable solution $(I_{hA}^*, I_{hJ}^*, I_v^*)$ spirals into the
 endemic disease equilibrium state
 $(0.00475034, 0.000638251, 0.99182)$.

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

In this study, we analyze the mathematical model of
 Malaria between juvenile and adult human
 populations. The threshold number is defined by D_0
 where

$$D_0 = \frac{\beta_h N_v (\gamma_A + d_h + \delta) \beta_v N_h}{(\gamma_J + \delta + d_h) (\gamma_A + d_h) \mu_v}.$$

If the threshold number (D_0) is less than one, then the
 disease free state is local stability. The endemic
 disease state is local stability for D_0 greater than
 one. The bifurcation diagrams are shown in fig.3.



2)

Fig. 3 The bifurcation diagrams of each population
 group. The parameters are similarly to fig.2.

From the above figure, if the basic reproductive number is less than or equal to one, then an infective replace itself with less than one new infective, the disease die out. If the basic reproductive number is more than one, then the fraction of susceptible classes decrease and the fraction of infectious classes increase. These behaviors occur because there are enough susceptible human to be infected from infectious mosquitoes. The results of this study should point the way for decreasing the outbreak of this disease.

ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. Preeyaporn Mumtong would like to thank Centre of Excellence in Mathematics. The authors would like to thank Prof. Dr. I-Ming Tang at Mahidol University, Thailand.

REFERENCES

- [1] www.thaivbd.org
- [2] <http://epid.moph.go.th/>
- [3] http://www.siamhealth.net/public_html/Disease/infectious/malaria/distribution.htm
- [4] Ashley E, McGready R, Proux S, Nosten F Malaria, Review Travel Medicine and Infectious Disease 2006;4:159-173.
- [5] Na-Bangchang K and Congpuong K Current Malaria Status and Distribution of Drug Resistance in East and Southeast Asia with Special Focus to Thailand Tohoku J. Exp. Med. 2007;211:99-113.
- [6] Annual Epidemiological Surveillance Report, Division of Epidemiology, Ministry of Public Health, Royal Thai Government.
- [7] P. Pongsumpun, and I. M. Tang, "Mathematics model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria," Int j math models and methods in applied sci, vol. 3, pp. 117-121, 2007.



Age Structural Model of *Plasmodium Falciparum* Malaria Transmission

Puntani Pongsumpun*

Industrial Mathematics Research unit, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

ABSTRACT

Malaria is a major public health problem in Thailand. This disease is caused by the multiplication of protozoa parasite of the genus *Plasmodium*, ie. *Plasmodium falciparum*, *Plasmodium vivax*, *Plasmodium malariae* and *Plasmodium ovale*. Malaria is found along the border with Burma, Cambodia and Malaysia. There are the different transmission rates of this disease between Thai juvenile and adult humans. In this study, the transmission of *Plasmodium falciparum* Malaria is studied by using Mathematical model. The analysis of this model is given by method of standard dynamical modeling. The local stability conditions are shown to point the way for decreasing the outbreak of the disease. The comparison of numerical solutions when there is the effect of age structure and nonage structure is given.

KEYWORDS: *Plasmodium falciparum*, standard dynamical modeling, equilibrium states, Malaria, local stability.

INTRODUCTION

Malaria is a disease caused by protozoa. There are four species; *Plasmodium falciparum*, *Plasmodium vivax*, *Plasmodium ovale* and *Plasmodium malariae*. In Thailand, the most people has infected with *P. falciparum* and *P. vivax*. *P. falciparum* can cause severe illness or death. *P. vivax* and *P. ovale* can hide in the liver for a long time [1]. Sick due to this disease causes significant economic loss. The *Anopheles* mosquito is the epidemic vector for this disease. The contact of the disease from an infected mother to the fetus is rare. In the first two months of life, children may not contact malaria or their manifestations may be mild with low-grade parasitemia[2], due to the passive immunity offered by the maternal antibodies. The contact of the disease by means of a blood transfusion may be found in cases that the density of malaria parasites in the blood is low and no symptom. The rise of global temperatures affect the life cycle of a mosquito vector[3-5]. The period of mosquito eggs and larvae molt growth as a mosquito can take 7-10 days. The average life expectancy of the mosquito is 4-5 days. The most Malaria patients are found in Tak(5,844), Yala(2,693), Chumphon(1,970), Kanchanaburi(1,531), Mae Hong Son(1,341), Ranong(993), Prachuap Khiri Khan(990), Phangnga(805), Narathiwat (721) and Si Sa Ket(686). The symptoms of Malaria patients appear after the *Plasmodium* incubates in the body. The period of incubation for *Plasmodium* depends on its type, about 10-14 days. The period of incubation for *Plasmodium vivax* is higher than *Plasmodium falciparum*. In 2010, number of patients who be infected with Malaria are 22,770 people. The ratio between *Plasmodium falciparum* cases and *Plasmodium vivax* cases is 1:1.6 [6]. In Thailand, there are the different transmission rates of this disease between juvenile and adult humans as shown in fig. 1.

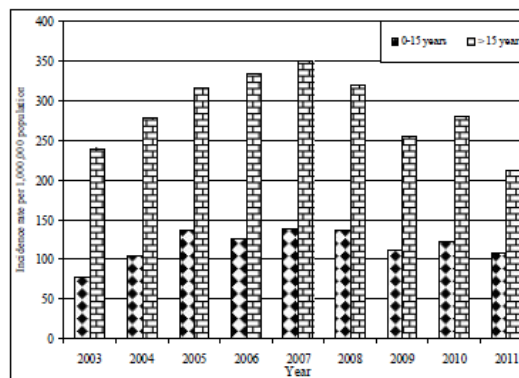


Fig. 1. Situation of Malaria cases classified by age structure [7].

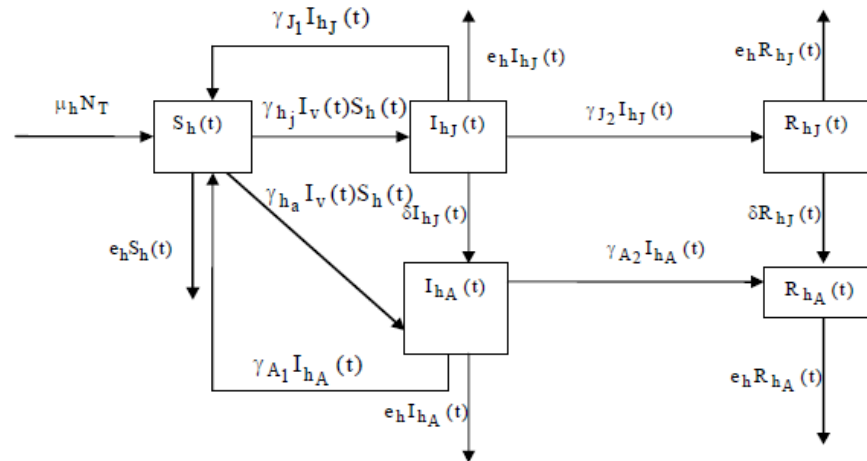
Ronald Ross demonstrated that malaria is transmitted by *Anopheles* mosquitoes, also developed the first mathematical model of malaria transmission that were two-dimensional variables with one variable representing humans and the other representing mosquitoes [8]. Ross-MacDonald (RM) model [9] described the transmission of the

*Corresponding Author: Puntani Pongsumpun, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand. Email: kppuntan@kmitl.ac.th

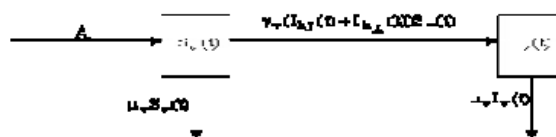
plasmodium falciparum malaria, which does not contain the possibility of relapses of the illness. In addition, models of malaria was the inclusion of acquired immunity proposed by Dietz, Molineaux and Thomas [10], Aron [11] and Bailey [12]. Ngwa and Shu [13] analyzed a model which was a deterministic differential equation model for endemic malaria involving variable human and mosquito populations. In 2006, Chitnis et.al. [14] presented an ordinary differential equation for the spread of malaria in human and mosquito populations by using bifurcation analysis. J.T. Griffin et al.[15] developed an individual simulation model for *Plasmodium Falciparum* Malaria in Africa. Pongsumpun and Tang [16] introduced mathematical model for the transmission of *Plasmodium Vivax* between human and vector but they did not consider the different transmission rate of this disease between juvenile and adult humans. From the data of Malaria cases in Thailand(fig.1), we found that there are the different number of cases between juvenile and adult humans. Therefore the effect of age structure should be included in the model for describing the situation of Malaria cases in Thailand.

MATHEMATICAL MODEL

The transmission of the disease between human and mosquitoes is considered by formulating the mathematical model. We assume that the human and vector population have constant size. Let N_T and N_V be the human and vector population sizes, respectively. Human population is divided into two classes such that juvenile human (less than 15 years old) and adult human (not less than 15 years old). Each human class is separated into susceptible, infectious and recovered subclasses. Mosquito population is separated into susceptible and infectious classes. The mathematical model for this transmission is based on the transmission diagram in Fig 2.



2a) For the human population



2b) For the vector population
Fig.2. Flow chart of the model.

The dynamical equations of human and mosquito populations can be explained as follows:

$$\frac{d}{dt} S_h(t) = \mu_h N_T + \gamma_{A1} I_{hA}(t) + \gamma_{J1} I_{hJ}(t) - e_h S_h(t) - (\gamma_{hj} + \gamma_{ha}) I_v(t) S_h(t) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} I_{hJ}(t) = \gamma_{hj} I_v(t) S_h(t) - \delta I_{hJ}(t) - (\gamma_{J1} + \gamma_{J2}) I_{hJ}(t) - e_h I_{hJ}(t) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} I_{hA}(t) = \gamma_{ha} I_v(t) S_h(t) + \delta I_{hJ}(t) - (\gamma_{A1} + \gamma_{A2}) I_{hA}(t) - e_h I_{hA}(t) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}R_{hJ}(t) = \gamma_{J_2}I_{hJ}(t) - (e_h + \delta)R_{hJ}(t) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}R_{hA}(t) = \gamma_{A_2}I_{hA}(t) + \delta R_{hJ}(t) - e_h R_{hA}(t) \quad (5)$$

where $S_h(t)$, $I_{hJ}(t)$, $I_{hA}(t)$, $R_{hJ}(t)$ and $R_{hA}(t)$ are the number of susceptible, infectious juvenile, infectious adult, recovered juvenile and recovered adult human populations, respectively. $N_T = S_h(t) + I_{hJ}(t) + I_{hA}(t) + R_{hJ}(t) + R_{hA}(t)$ is the total number of human population. The parameters in the above equations are defined as follows:

μ_h is the birth rate of human population,

e_h is the death rate of human population,

N_T is the total human population,

γ_{hJ} is the transmission rate of this disease from vector to juvenile human,

γ_{hA} is the transmission rate of this disease from vector to adult human,

γ_{J_1} is the rate at which infectious juvenile human become susceptible human again,

γ_{J_2} is the recovery rate of the infectious juvenile human,

γ_{A_1} is the rate at which infectious adult human become susceptible human again,

γ_{A_2} is the recovery rate of the infectious adult human,

γ_v is the transmission rate of the disease from human to vector,

δ is the rate at which juvenile pass into adult,

μ_v is the death rate of vector population,

A is the constant recruitment rate of vector population,

The dynamical equations of the vector population are described by

$$\frac{d}{dt}S_v(t) = A - \mu_v S_v(t) - \gamma_v(I_{hJ}(t) + I_{hA}(t))S_v(t) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}I_v(t) = \gamma_v(I_{hJ}(t) + I_{hA}(t))S_v(t) - \mu_v I_v(t) \quad (7)$$

where $S_v(t)$ and $I_v(t)$ are the number of susceptible and infectious vector, respectively.

$N_v = S_v(t) + I_v(t)$ is the total vector population. Because $N_T = S_h(t) + I_{hJ}(t) + I_{hA}(t) + R_{hJ}(t) + R_{hA}(t)$, therefore the new equation becomes:

$$\frac{d}{dt}N_T = \frac{d}{dt}S_h(t) + \frac{d}{dt}I_{hJ}(t) + \frac{d}{dt}I_{hA}(t) + \frac{d}{dt}R_{hJ}(t) + \frac{d}{dt}R_{hA}(t). \quad (8)$$

We suppose that the total human and vectors are constant. Thus, the rate of change in each class equals to zero. Setting the right hand side of (8) to zero, we obtain $\mu_h = e_h$ (birth rate equals to death rate). From $N_v = S_v(t) + I_v(t)$, the new equation is defined as follows.

$$\frac{d}{dt}N_v = \frac{d}{dt}S_v(t) + \frac{d}{dt}I_v(t) \quad (9)$$

In the same manner, setting the right hand side of (9) to zero, we obtain $\mu_v = A/N_v$ (Mortality rate equal to the ratio between the constant recruitment rate and the total number of vector). This gives $N_v = A/\mu_v$.

We introduce the normalized populations:

$$s_h(t) = \frac{S_h(t)}{N_T}, i_{hJ}(t) = \frac{I_{hJ}(t)}{N_T}, i_{hA}(t) = \frac{I_{hA}(t)}{N_T}, r_{hJ}(t) = \frac{R_{hJ}(t)}{N_T}, r_{hA}(t) = \frac{R_{hA}(t)}{N_T}, s_v(t) = \frac{S_v(t)}{N_v}, i_v(t) = \frac{I_v(t)}{N_v}.$$

Thus, (1)-(7) can be rewritten as

$$\frac{d}{dt}i_{hJ}(t) = \gamma_{hJ}i_v(t)N_v s_h(t) - (\delta + \gamma_{J_1} + \gamma_{J_2} + e_h)i_{hJ}(t) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt}i_{hA}(t) = \gamma_{hA}i_v(t)N_v s_h(t) + \delta i_{hJ}(t) - (\gamma_{A_1} + \gamma_{A_2} + e_h)i_{hA}(t) \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}r_{hJ}(t) = \gamma_{J_2}i_{hJ}(t) - (\delta + e_h)r_{hJ}(t) \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} r_{hA}(t) = \gamma_{A2} i_{hA}(t) + \delta r_{hJ}(t) - e_h r_{hA}(t) \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} i_v(t) = \gamma_v(i_{hJ}(t) + i_{hA}(t)) N_T s_v(t) - \mu_v i_v(t) \quad (14)$$

The dynamical equations for $s_h(t)$ and $s_v(t)$ are not necessary because

$$s_h(t) + i_{hJ}(t) + i_{hA}(t) + r_{hJ}(t) + r_{hA}(t) = 1 \quad \text{and} \quad s_v(t) + i_v(t) = 1 \quad (15)$$

ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL

A. Equilibrium States

The equilibrium states are obtained by setting the right hand side of (10)–(14) equal to zero. We get two equilibrium states; the disease free state $E_0(0, 0, 0, 0, 0)$ and the endemic disease state $E_1(i_{hJ}^*, i_{hA}^*, r_{hJ}^*, r_{hA}^*, i_v^*)$ where

$$i_v^* = \frac{\gamma_v N_T (i_{hJ}^* + i_{hA}^*)}{\mu_v + \gamma_v N_T (i_{hJ}^* + i_{hA}^*)} \quad (16)$$

$$r_{hJ}^* = \frac{\gamma_{J2}}{e_h + \delta} i_{hJ}^* \quad (17)$$

$$r_{hA}^* = \frac{1}{e_h} \left(\frac{\delta \gamma_{J2}}{e_h + \delta} i_{hJ}^* + \gamma_{A2} i_{hA}^* \right) \quad (18)$$

where

$$i_{hJ}^* = \frac{e_h (e_h + \gamma_A) \gamma_{hJ} (A((\delta + e_h) \gamma_h + \gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_J \gamma_{hA}) \gamma_v N_T - (e_h + \gamma_A)(\delta + e_h + \gamma_J) \mu_v^2)}{((\delta + e_h) \gamma_h + \gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_J \gamma_{hA}) \gamma_v (A(\gamma_h (e_h + \gamma_{A2})(\delta + e_h) + e_h (\gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_J \gamma_{hA}) + \gamma_{A2} \gamma_{hA} \gamma_{J1} + (\gamma_{A2} \gamma_{hA} + (e_h + \gamma_A) \gamma_{hJ}) \gamma_{J2}) + e_h (e_h + \gamma_A)(\delta + e_h + \gamma_J) \mu_v) N_T} \quad (19)$$

$$i_{hA}^* = \frac{e_h (\delta \delta_h + \gamma_{hA} (e_h + \gamma_J)) (A((\delta + e_h) \gamma_h + \gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_J \gamma_{hA}) \gamma_v N_T - (e_h + \gamma_A)(\delta + e_h + \gamma_J) \mu_v^2)}{((\delta + e_h) \gamma_h + \gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_J \gamma_{hA}) \gamma_v (A(\gamma_h (e_h + \gamma_{A2})(\delta + e_h) + e_h (\gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_J \gamma_{hA}) + \gamma_{A2} \gamma_{hA} \gamma_{J1} + (\gamma_{A2} \gamma_{hA} + (e_h + \gamma_A) \gamma_{hJ}) \gamma_{J2}) + e_h (e_h + \gamma_A)(\delta + e_h + \gamma_J) \mu_v) N_T} \quad (20)$$

$$\text{where} \quad \gamma_A = \gamma_{A1} + \gamma_{A2}, \quad \gamma_J = \gamma_{J1} + \gamma_{J2} \quad \text{and} \quad \gamma_h = \gamma_{hA} + \gamma_{hJ} \quad (21)$$

It can be easily seen that i_v^* is positive for $R_0 > 1$ where

$$R_0 = \frac{(A / \mu_v)((\delta + e_h) \gamma_h + \gamma_A \gamma_{hJ} + \gamma_{hA} \gamma_J) \gamma_v N_T}{(e_h + \gamma_A)(\delta + e_h + \gamma_J) \mu_v} \quad (22)$$

B. Local Stability

The local stability of an equilibrium state is determined from the signs of eigenvalues of Jacobian matrix of the right hand side of (10–14). If the eigenvalues have negative real part, then that equilibrium state will be locally stable.

-Disease Free State

For the equations (10)–(14), the Jacobian matrix evaluated at E_0 is given by

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -(\delta + \gamma_{J1} + \gamma_{J2} + e_h) & 0 & 0 & 0 & \gamma_{hJ}(A / \mu_v) \\ \delta & -(\gamma_{A1} + \gamma_{A2} + e_h) & 0 & 0 & \gamma_{hA}(A / \mu_v) \\ \gamma_{J2} & 0 & -(\delta + e_h) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A2} & \delta & -e_h & 0 \\ \gamma_v N_T & \gamma_v N_T & 0 & 0 & -\mu_v \end{pmatrix}$$

The eigenvalues are obtained by solving the characteristic equation; $\det(J - \lambda I_5) = 0$ where I_5 is the identity matrix dimension 5×5 . The characteristic equation for the disease free state is given by

$$(e_h + \lambda)(\delta + e_h + \lambda)(\lambda^3 + F_2 \lambda^2 + F_1 \lambda + F_0) \quad (23)$$

$$F_2 = \delta + 2e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{A2} + \gamma_{J1} + \gamma_{J2} + \mu_v \quad (24)$$

$$F_1 = (e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{A2})(\delta + e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{A2}) + (\delta + 2e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{A2} + \gamma_{J1} + \gamma_{J2}) \mu_v - (A / \mu_v)(\gamma_{hA} + \gamma_{hJ}) \gamma_v N_T \quad (25)$$

$$F_0 = (e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{A2})(\delta + e_h + \gamma_{J1} + \gamma_{J2})\mu_v - (A/\mu_v)((\gamma_{A1} + \gamma_{A2})\gamma_{hJ} + (\delta + e_h)(\gamma_{hA} + \gamma_{hJ}) + \gamma_{hA}(\gamma_{J1} + \gamma_{J2}))\gamma_v N_T \quad (26)$$

Thus the eigenvalues are $\lambda_1 = -e_h$, $\lambda_2 = -e_h - \delta$ and the remaining eigenvalues λ_3, λ_4 and λ_5 are found by solving $\lambda^3 + F_2\lambda^2 + F_1\lambda + F_0$ where F_2, F_1 and F_0 are given by (24)-(26). The signs of these eigenvalues are negatives when they satisfy the Routh-Hurwitz criteria[17];

- i) $F_2 > 0$
- ii) $F_0 > 0$
- iii) $F_2F_1 - F_0 > 0$

From our evaluations, we found that i) to iii) are satisfied when $R_0 < 1$ where

$$R_0 = \frac{(A/\mu_v)((\delta + e_h)\gamma_{hJ} + \gamma_{hA}\gamma_{hJ} + \gamma_{hA}\gamma_{J1})\gamma_v N_T}{(e_h + \gamma_{A1})(\delta + e_h + \gamma_{J1})\mu_v} \quad (27)$$

So the disease free steady state is locally stable for $R_0 < 1$.

-Endemic Disease State

The local stability of the endemic state, E_1 , is determined by looking at the signs of the eigenvalues of the Jacobian matrix evaluated at E_1 . The Jacobian matrix for this state is

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -\gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* - (\delta + \gamma_{J1} + \gamma_{J2} + e_h) & -\gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & -\gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & -\gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & \gamma_{hJ}(A\mu_v)(1-i_{hJ}^* - i_{hA}^* - i_{hJ}^* - i_{hA}^*) \\ \delta - \gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & -(\gamma_{A1} + \gamma_{A2} + e_h) - \gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & -\gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & -\gamma_{hJ}(A\mu_v)i_v^* & \gamma_{hJ}(A\mu_v)(1-i_{hJ}^* - i_{hA}^* - i_{hJ}^* - i_{hA}^*) \\ \gamma_{J1} & 0 & -(\delta + e_h) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{A1} & \delta & -e_h & 0 \\ \gamma_v N_T(1-i_v^*) & \gamma_v N_T(1-i_v^*) & 0 & 0 & -\gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*) - \mu_v \end{pmatrix}$$

where $i_{hJ}^*, i_{hA}^*, i_{hJ}^*, i_{hA}^*$ and i_v^* are defined in (16-20) and $R_0 > 1$. The characteristic equation for the endemic state is given by

$$(\lambda + \delta + e_h)(\lambda^4 + T_3\lambda^3 + T_2\lambda^2 + T_1\lambda + T_0) = 0 \quad (28)$$

where

$$T_3 = (A/\mu_v)\gamma_{hJ}i_v^* + (\delta + 3e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{J1} + \mu_v + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*)) \quad (29)$$

$$T_2 = (A/\mu_v)((\delta + 2e_h)\gamma_{hJ} + \gamma_{A2}\gamma_{hA} + \gamma_{A1}\gamma_{hJ} + \gamma_{hJ}\gamma_{J2} + \gamma_{hJ}\mu_v)i_v^* + \gamma_{hJ}\gamma_v N_T(1-i_{hJ}^* + (1-i_{hA}^*)i_v^* N_T + (1-i_v^*)N_T i_{hJ}^* + \gamma_{hJ}\gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*)) \\ + (3e_h^2 + \gamma_{A1}\gamma_{J1} + (\mu_v + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*))) (\gamma_{A1} + \gamma_{J1}) + \delta(2e_h + \gamma_{A1} + \mu_v + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*)) + e_h(2(\gamma_{A1} + \gamma_{J1}) + 3(\mu_v + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*))) \quad (30)$$

$$T_1 = (A/\mu_v)(e_h^2\gamma_{hJ}i_v^* + \gamma_{A2}\gamma_{hA}\gamma_{J1}i_v^* + \gamma_{A1}\gamma_{hJ}\gamma_{J2}i_v^* + (\gamma_{A2}\gamma_{hJ} + \gamma_{hJ}\gamma_{J1} + \gamma_{hJ}(\gamma_{A1} + \gamma_{J2}))i_v^*\mu_v + \gamma_{A1}\gamma_{hJ}\gamma_v N_T(1-i_{hA}^*) + \gamma_v(\gamma_{hJ}\gamma_{J1} + \gamma_{A1}\gamma_{hJ}i_{hA}^*)N_T) \\ + ((1-i_{hA}^*)\gamma_v i_v^* N_T + \gamma_v N_T i_{hJ}^*(1-i_v^*))(\gamma_{A1}\gamma_{hJ} + \gamma_{J1}\gamma_{hA}) + \gamma_v(\gamma_{hJ}(\gamma_{A1} + \gamma_{J2}i_v^*) + \gamma_{hA}(\gamma_{J1} + \gamma_{A2}i_v^*))N_T i_{hJ}^* + \gamma_v(\gamma_{hJ}(\gamma_{A1} + \gamma_{J2}i_v^*) \\ + \gamma_{hA}(\gamma_{J1} + \gamma_{A2}i_v^*))N_T i_{hA}^* + \delta\gamma_{hJ}(e_h + \gamma_{A2} + \mu_v) + \gamma_v N_T(1-i_v^*)(i_{hJ}^* + i_v^*(1-i_{hA}^*)) + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*) \\ + e_h(\gamma_{A2}\gamma_{hJ} + \gamma_{hA}\gamma_{J1} + \gamma_{hJ}(\gamma_{A1} + \gamma_{J2}))i_v^* + 2\gamma_{hJ}i_v^*\mu_v + 2\gamma_{hJ}\gamma_v N_T(i_{hJ}^*(1-i_v^*) + i_v^*(1-i_{hA}^*)) + 2\gamma_{hJ}\gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*) \quad (31)$$

$$T_0 = e_h(e_h + \gamma_{A1})(\delta + e_h + \gamma_{J1})(\mu_v + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*)) + e_h^2\gamma_{hJ}(i_v^*(\mu_v + \gamma_v N_T(1-i_{hJ}^* - i_{hA}^*)) + \gamma_v N_T(1-i_{hJ}^* - i_{hA}^* - i_{hJ}^* - i_{hA}^*)) \\ + \delta\gamma_{hJ}(\gamma_{A2}i_v^*(\mu_v + \gamma_v N_T(i_{hJ}^* + i_{hA}^*)) + e_h(i_v^*(\mu_v + \gamma_v N_T(1-i_{hJ}^* - i_{hA}^*)) + \gamma_v N_T(1-i_{hJ}^* - i_{hA}^* - i_{hJ}^* - i_{hA}^*))) + e_h\gamma_{hJ}\gamma_{J1}(\mu_v i_v^* + \gamma_v i_{hA}^* N_T) \quad (32)$$

The eigenvalues are $\lambda_1 = -\delta - e_h$ and the remaining eigenvalues are found by solving $\lambda^4 + T_3\lambda^3 + T_2\lambda^2 + T_1\lambda + T_0$ where T_3, T_2, T_1 and T_0 are given in (30)-(33). These eigenvalues are negatives when they satisfy the Routh-Hurwitz criteria[17];

$$T_3 > 0 \quad (33)$$

$$T_1 > 0 \quad (34)$$

$$T_0 > 0 \quad (35)$$

$$T_3T_2T_1 - T_1^2 - T_3^2T_0 > 0 \quad (36)$$

From our calculations, the endemic steady state is locally stable for $R_0 > 1$.

NUMERICAL RESULTS

In this section, we analyze the model given by equations (10)-(14). The trajectories of the solutions when the parameter values will lead to a disease free equilibrium state and when they will lead to the endemic equilibrium state are shown in the following figures. The parameters are determined from real life observations

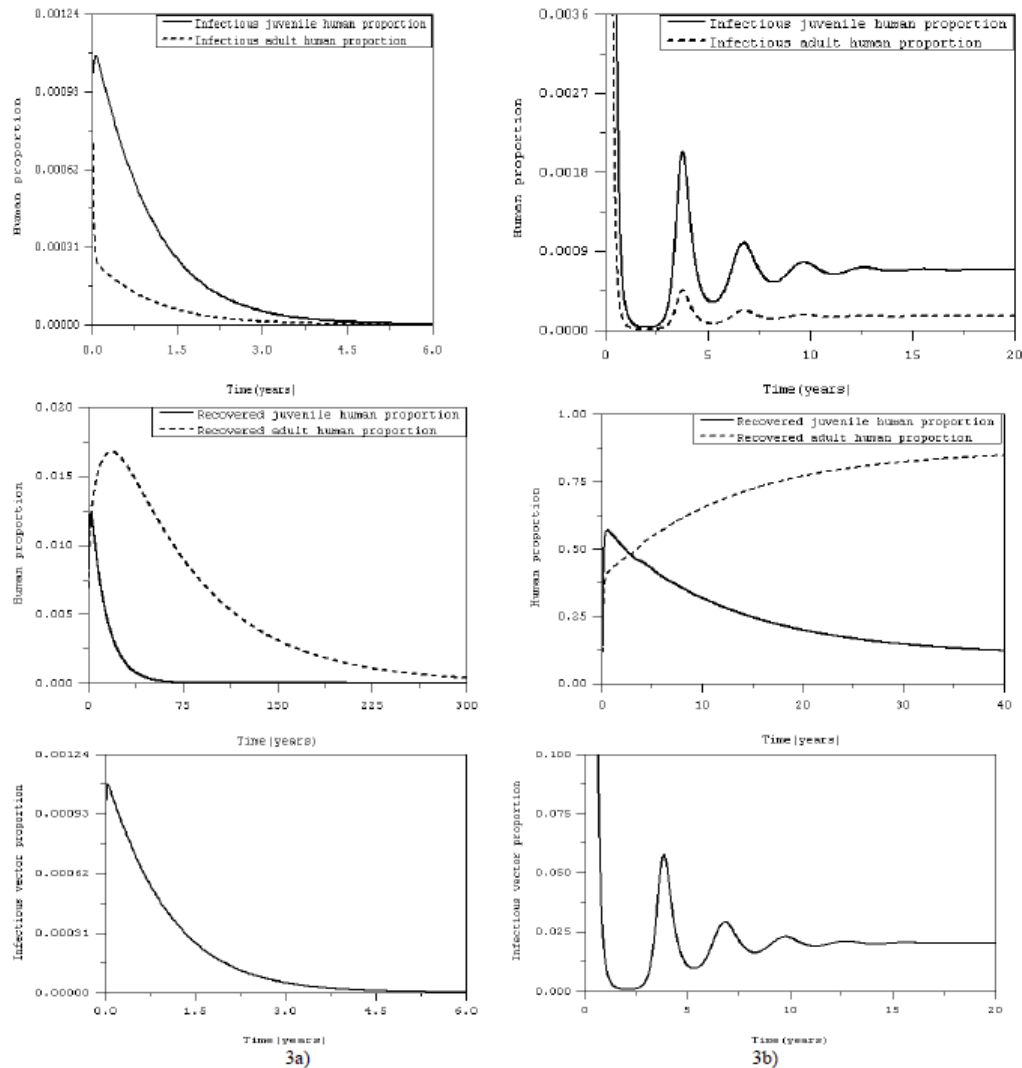


Fig. 3. Time series solutions of infectious juvenile human, infectious adult human, recovered juvenile human, recovered adult human and infectious vector, respectively. The value of parameters are $\gamma_{hj} = 0.000009$, $\gamma_{ha} = 0.000002$,

$A = 600$, $\mu_v = 1/25$, $\delta = 1/(365 \cdot 15)$, $\gamma_{J1} = 1/10$, $\gamma_{J2} = 1/30$, $e_h = 1/(365 \cdot 70)$, $\gamma_{A1} = 1/30$, $\gamma_{A2} = 1/10$, $\gamma_v = 0.0001$,

3a) $R_0 < 1$; $N_T = 300$, $R_0 = 0.928$. The fractions of populations $(i_{hj}^*, i_{ha}^*, i_{hj}^*, i_{ha}^*, i_v^*)$ approach to the disease free state $(0, 0, 0, 0, 0)$.

3b) $R_0 > 1$; $N_T = 10,000$, $R_0 = 30.928$. The trajectory of the six state variable solution $(i_{hj}^*, i_{ha}^*, i_{hj}^*, i_{ha}^*, i_v^*)$ spirals into the endemic disease equilibrium state $(0.00068, 0.00015, 0.10, 0.86, 0.02)$.

DISCUSSION AND CONCLUSION

In this study, we analyze the mathematical model of Malaria between juvenile and adult human populations. The threshold condition is defined by R_0 where

$$R_0 = \frac{(A/\mu_v)((\delta + e_h)(\gamma_{ha} + \gamma_{hj}) + (\gamma_{A1} + \gamma_{A2})\gamma_{hj} + (\gamma_{J1} + \gamma_{J2})\gamma_{ha})\gamma_v N_T}{(e_h + \gamma_{A1} + \gamma_{A2})(\delta + e_h + \gamma_J)\mu_v} \quad (37)$$

If the threshold condition (R_0) is less than one, then the disease free state is local stability. The endemic disease state is local stability for R_0 is greater than one. The bifurcation diagrams of all population groups are shown in fig.4.

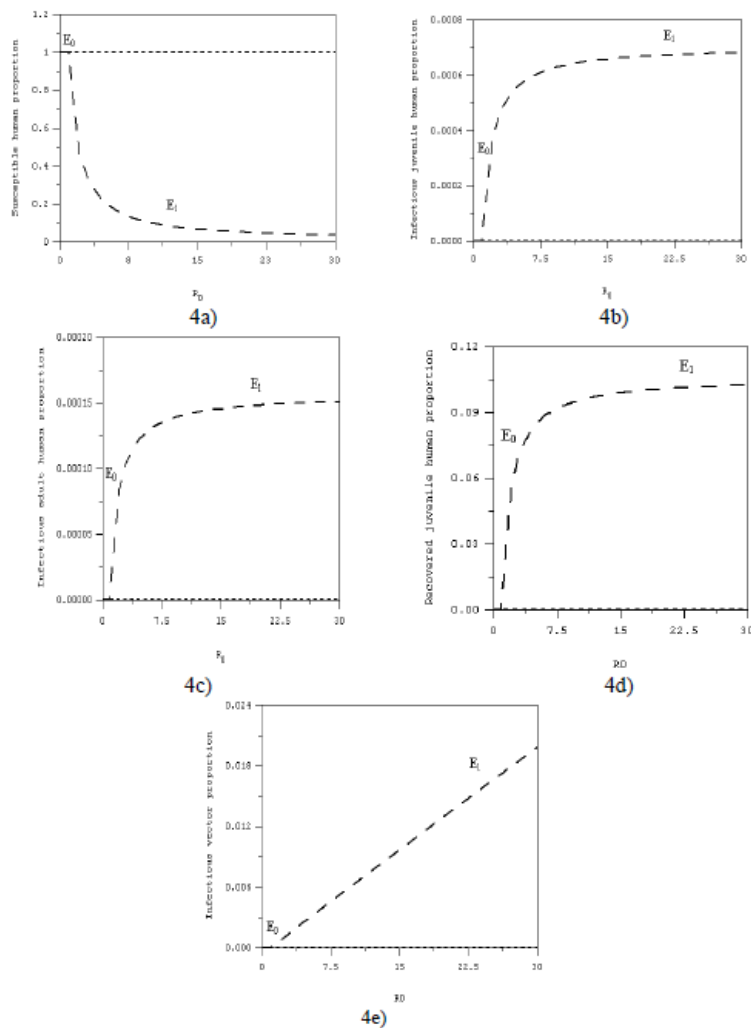


Fig.4. Bifurcation diagram of (10)-(14) demonstrates the equilibrium solutions of each population class for the different values of R_0 . The dashed line represents stable solutions and dotted line represents the unstable solutions.

From the above figures, when $R_0 < 1$, E_0 will be stable and for $R_0 > 1$, E_1 will be stable. If the basic reproductive number is less than or equal to one, then an infective replace itself with less than one new infective, the disease die out. If the basic reproductive number is more than one, then the fraction of susceptible classes decrease and the fraction of infectious classes increase. These behaviors occur because there are enough susceptible human to be infected from infectious mosquitoes.

Furthermore, when we set δ , γ_{A1} , γ_{A2} and γ_{ha} equal to zero, this means that the age structure are not included into the model. We compare the numerical solutions of the age structured and non-age structured model. The solutions are given in figure 5.



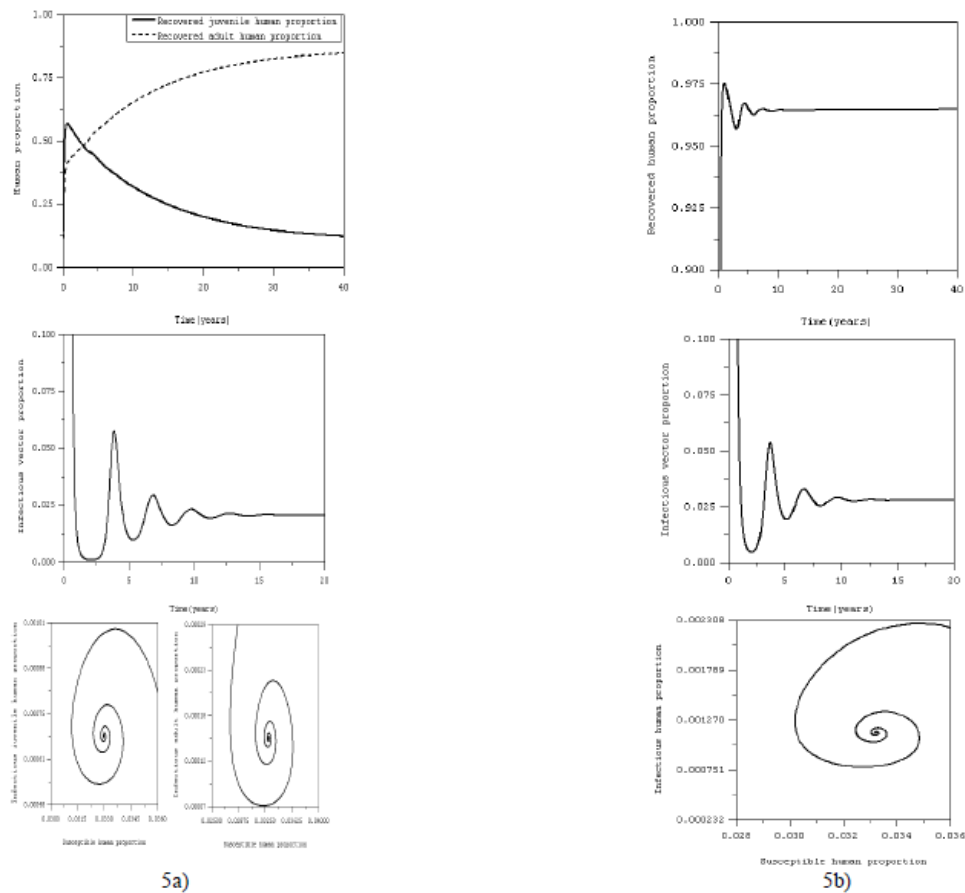


Fig.5 The numerical solutions of the model when there is the age structure and nonage structure. The parameters are same as in figure 2b)

5a) age structured model

5b) nonage structure model

The quantity $R_0' = \sqrt{R_0}$ is the *basic reproductive number* of the disease, it indicates the average number of secondary patients that one patient can produce if introduced into a susceptible population. The different diseases produce different threshold conditions [16,18,19]. As we see from (37), if we can reduce the transmission rate of *Plasmodium Falciparum* Malaria then this threshold number will be reduced. The outbreak of this disease will be reduced. From the definition of basic reproductive number (R_0') and the parameters in fig.5a) and fig.5b), we get $R_0' = 5.56$ and 5.03 , respectively. We can estimate the period of the oscillations as they approach to the endemic state by means of the solutions of the linearized system. We obtain $2\pi/0.0059 \approx 2.92$ years and $2\pi/0.0053 \approx 3.25$ years for fig.5a) and fig.5b), respectively. The endemic state is the stable spiral state. As we see, the periods of fluctuations in the number of individuals in each class are much shorter in the absence of any age structure. The spiraling in is much more severe in the nonage structure. The age structure appears to calm down the fluctuations. Moreover, rainfall is also effect to the number of mosquitoes. Therefore in the future, the rainfall will be considered to develop our model.

Acknowledgment

This work is supported by Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. Preeyaporn Mumtong is the research assistant of this study.

REFERENCES

- [1] <http://www.tn.mahidol.ac.th/tmho/malaria.htm>
- [2] <http://epid.moph.go.th/>

- [3] L.J. Bruce-Chwatt. 1980. "Essential malariaology", London: Heinemann.
- [4] E.Ashley et al. 2006. "Malaria", *Travel Medicine and Infectious Disease*, 4:159-173.
- [5] K.Na-Bangchang and K.Congpuong. 2007. "Current Malaria Status and Distribution of Drug Resistance in East and Southeast Asia with Special Focus to Thailand", *The Tohoku Journal of Experimental Medicine*, 211:99-113.
- [6] http://www.thaivbd.org/malaria_monthly.php?year=2554&month=1
- [7] Annual Epidemiological Surveillance Report, Division of Epidemiology, Ministry of Public Health, Royal Thai Government.
- [8] R.Ross. 1911. "The prevention of malaria", London.
- [9] R.M. Anderson, and R.M. May. 1911. "Infectious Disease of Humans, Dynamics and Control. Oxford U. Press, Oxford.
- [10] K.Dietz, L.Molineaux and A.Thomas. 1974. "A malaria model tested in the African savannah, Bull", *World Health Organization*, 28: 347-357.
- [11] J.L.Aron. 1988. "Mathematical modeling of immunity to malaria", *Mathematical Biosciences*, 90; 385-396
- [12] N.J.T.Bailey. 1975. "The mathematical theory of infectious diseases and its application, Griffin, London.
- [13] G.A. Ngwa and W.S Shu. 2000. "A mathematical model for endemic malaria with variable human and mosquito populations ", *Mathematical and Computer Modelling*, 32: 747-763.
- [14] N.Chitnis, J.M.Cushing and J.M. Hyman. 2006. "Bifurcation analysis of a mathematical model for malaria transmission", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67, 1: 24-45
- [15] J.T. Griffin et al. 2010. "Reducing Plasmodium falciparum Malaria Transmission in Africa: A Model-Based Evaluation of Intervention Strategies", *PLoS Medicine*, 7(8) :1-17.
- [16] P. Pongsumpun, and I. M. Tang. 2007. "Mathematical model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria", *International Journal of Mathematical Models and method in Applied Sciences*, 3:117-121.
- [17] M.Robert. 1973. "Stability and complexity in model ecosystem", Princeton university press.
- [18] R.Kongnuy and P.Pongsumpun. 2010. "Mathematical modeling for dengue transmission with the effect of season", *International Journal of Biological and Medical Sciences*, 5(2): 74-78.
- [19] L.Esteva and C.Vargas C. 1998. "Analysis of a dengue disease transmission model", *Mathematical Biosciences* , 150: 131-151.



Seasonal Transmission Model of Malaria by Age Group of Population

Puntani Pongsumpun*

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalokkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand.

ABSTRACT

Malaria, one of the most well known diseases and leading cause of death in many countries, the most affected groups are young children and pregnant women. Malaria is an infectious disease that is transmitted between people through biting of an infected female *Anopheles* mosquito. In Thailand, season and age of patients are influence to the transmission of this disease. In this study, we construct the transmission model of Malaria by including effects of age and season into the model. Steady state solutions of our model are found. The conditions for local stable of steady state solutions are given. The infection rate of this disease in each age group of human is given. The trajectories of solutions are shown to compare the different situations.

KEYWORDS: *Anopheles* mosquito, Age group, *Anopheles* mosquito, local stable, Malaria, seasonal transmission model.

INTRODUCTION

Malaria is transmitted between human by the biting of the *Anopheles* mosquitoes. There are 480 species of *Anopheles*, only about 50 species can transmit malaria, with every continent having its own species of these mosquitoes [1,2]. This type of mosquito becomes infected with one of the four plasmodium parasites that cause malaria in humans, through a previous blood meal from an infected person. Four types of human malaria, namely, *Plasmodium falciparum*, *Plasmodium vivax*, *Plasmodium malariae* and *Plasmodium ovale*. Malaria with *Plasmodium falciparum* causes the most serious illness and it is the most common cause of infection in Africa and South East Asia, and is responsible for about 80% of all malaria cases and about 90% of deaths [3,4]. The general symptoms of Malaria include headache, nausea, fever and flu. These symptoms can vary depending on the type of plasmodium that caused infection. Symptoms usually appear between 10 and 15 days after the infected mosquito bite. If it is not treated, malaria can quickly become life-threatening by disrupting the blood supply to vital organs [3]. Not only human are the host (vertebrate) of human but also the *Anopheles* mosquitoes are also a host (invertebrate). This disease can also be transmitted accidentally through blood transfusion when the donor has the malaria parasite. This is one of the reasons why people who have been infected with disease can never donate blood. Congenital infection of a newborn from an infected mother also happens, but it is comparatively rare [5]. Generally, transmission of malaria depends on the presence of the relationship between the three basic factors: the host, the agent, and the environment. Temperature and humidity are the most important environment factors for the growth of Malaria parasites. Malaria parasites stop developing in the mosquitoes when the temperature is below 16 °C. The best condition for the development of disease is within the range of 20 – 30 °C and the average relative humidity is at least 60% [6]. A high relative humidity lengthens the life of the mosquito and it enables them to live long enough to transmit the infection to several persons. From the data of Malaria in Thailand during 2003 and 2010 as shown in fig. 1 and fig. 2, we can see that age and season effect to the transmission of this disease [7].

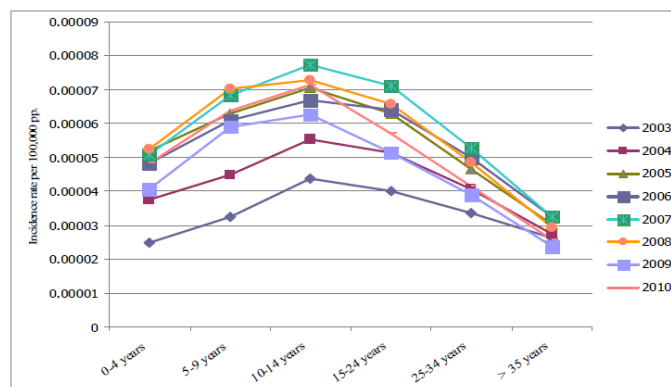


Fig. 1. Situation of Malaria cases classified by age group of human [7].

*Corresponding Author: Puntani Pongsumpun, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalokkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand. Email: kppuntan@kmitl.ac.th

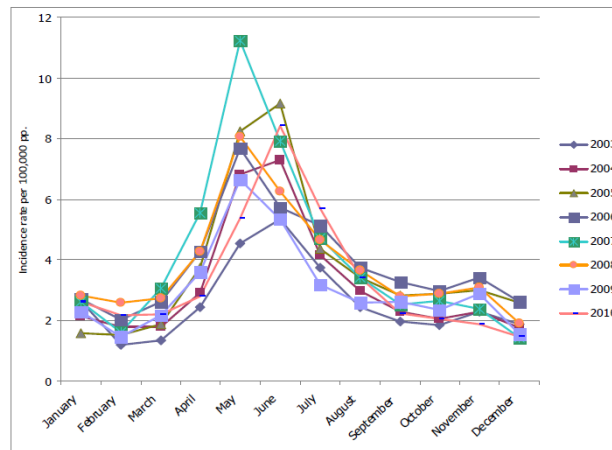
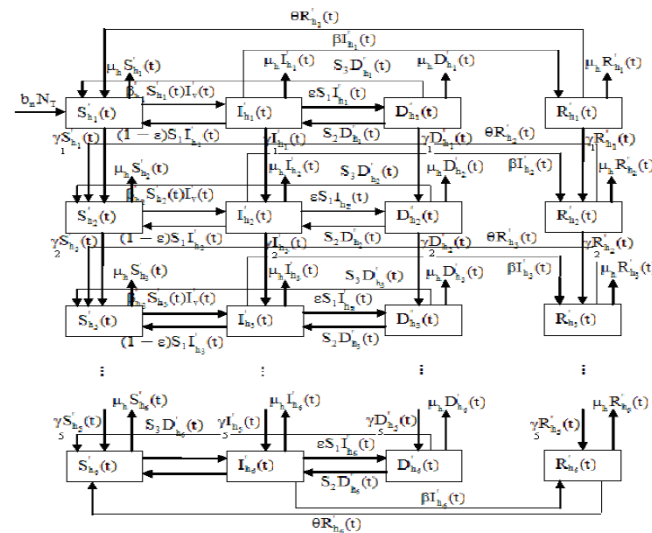


Fig. 2. Situation of Malaria cases classified by month [7].

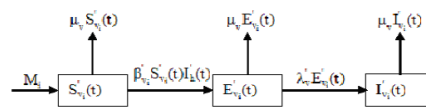
The transmission of malaria was first explained by the Ross-MacDonald (RM) model [8]. However, this model is only suitable for the transmission of *Plasmodium falciparum* malaria since it does not consider the possibility of relapses of the illness. In 2007, we introduced the mathematical model for the transmission of *Plasmodium vivax* and considering the relapse of *Plasmodium vivax* but age group and season are not considered in our model [9]. We have introduced a mathematical model [10] to describe the transmission of malaria by separating the human into juvenile and adults groups but we did not consider age group of human and season in Thailand. To develop the model more appropriate in Thailand, age of human and season should be considered in this study.

MATHEMATICAL MODEL

Age group of human and season are considered in our model. We separate population into two groups, ie. human and vector populations. Human is divided into 4 classes such that susceptible, infectious, dormant and recovered classes. Vector is divided into 3 classes such that susceptible, infectious and recovered classes. Each human class is subdivided into 6 age groups such as 0-4 years old, 5-9 years old, 10-14 years old, 15-24 years old, 25-34 years old and more than 35 years old. In Thailand, there are three seasons: The dry (or cool season) is between November and February. The hot season is between March and June. The rainy season is between July and October. The transmission model can be described based on the diagram in Fig 3.



3a) For the human population



3b) For the vector population

Fig.3. Diagram of our model.

The variables and parameters of our model are defined in Table 1.

Variables/Parameters	Definition
b_h	Birth rate of human population.
μ_h	Death rate of human population.
γ_1	Rate at which human change from one age group to the another age group.
ε	Rate at which human change from infected status to be dormant status.
β_{hj}	Infection rate of Malaria from vector to human age group j.
$\frac{1}{S_1}$	Rate at which infectious human in whom some hypnozoites remain in the liver
S_2	Relapsing rate of human
S_3	Rate at which human change from dormant human to be susceptible human
θ	Rate at which human change from recovered human to be susceptible human
β	Recovery rate
M_i	Constant recruitment rate of vector at season i
β'_v	Infection rate of Malaria from human to vector at season i
λ'_v	Incubation rate of Plasmodium in vector
μ_v	Death rate of vector
$S'_{hj}(t)$	Number of susceptible human of group age j; j =1,2,3,4,5,6
$I'_{hj}(t)$	Number of infectious human of group age j; j =1,2,3,4,5,6
$D'_{hj}(t)$	Number of dormant human of group age j; j =1,2,3,4,5,6
$R'_{hj}(t)$	Number of recovered human of group age j; j =1,2,3,4,5,6
$S'_{vi}(t)$	Number of susceptible vector at season i; i=1,2,3
$E'_{vi}(t)$	Number of exposed vector at season i; i=1,2,3
$I'_{vi}(t)$	Number of infectious vector at season i; i=1,2,3

Table 1. Definition of variables/parameters in our model.

The rate of change for human population can be described as following equations:

For the first age group:

$$\frac{d}{dt} S'_{h1}(t) = b_h N_T + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h1}(t) - \beta'_{h1} S'_{h1}(t) I'_v(t) - (\gamma_1 + \mu_h) S'_{h1}(t) + S_3 D'_{h1}(t) + \theta R'_{h1}(t), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{h1}(t) = \beta'_{h1} S'_{h1}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h1}(t) - \gamma_1 I'_{h1}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h1}(t) + S_2 D'_{h1}(t) - (\beta + \mu_h) I'_{h1}(t), \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} D'_{h1}(t) = \varepsilon S_1 I'_{h1}(t) - (S_2 + S_3 + \gamma_1 + \mu_h) D'_{h1}(t), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} R'_{h1}(t) = \beta I'_{h1}(t) - (\theta + \gamma_1 + \mu_h) R'_{h1}(t). \quad (4)$$

For age group j; j = 2,3,4,5:

$$\frac{d}{dt} S'_{hj}(t) = S_3 D'_{hj}(t) - \beta'_{hj} S'_{hj}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{hj}(t) + \gamma_{j-1} S'_{hj-1}(t) - \gamma_j S'_{hj}(t) - \mu_h S'_{hj}(t) + \theta R'_{hj}(t), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{hj}(t) = \beta'_{hj} S'_{hj}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{hj}(t) - \varepsilon S_1 I'_{hj}(t) + S_2 D'_{hj}(t) + \gamma_{j-1} I'_{hj-1}(t) - \gamma_j I'_{hj}(t) - (\mu_h + \beta) I'_{hj}(t), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} D'_{hj}(t) = \varepsilon S_1 I'_{hj}(t) - (S_2 + S_3 + \gamma_j + \mu_h) D'_{hj}(t) + \gamma_{j-1} D'_{hj-1}(t), \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} R'_{hj}(t) = \beta I'_{hj}(t) - (\theta + \gamma_j + \mu_h) R'_{hj}(t) + \gamma_{j-1} R'_{h,j-1}(t). \quad (8)$$

For the last age group:

$$\frac{d}{dt} S'_{h6}(t) = \gamma_5 S'_{h5}(t) + S_3 D'_{h6}(t) - \beta'_{h6} S'_{h6}(t) I'_v(t) + (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h6}(t) - \mu_h S'_{h6}(t) + \theta R'_{h6}(t), \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{h6}(t) = \beta'_{h6} S'_{h6}(t) I'_v(t) - (1 - \varepsilon) S_1 I'_{h6}(t) + \gamma_5 I'_{h5}(t) - \varepsilon S_1 I'_{h6}(t) + S_2 D'_{h6}(t) - (\mu_h + \beta) I'_{h6}(t), \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} D'_{h6}(t) = \varepsilon S_1 I'_{h6}(t) - (S_2 + S_3 + \mu_h) D'_{h6}(t) + \gamma_5 D'_{h5}(t), \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} R'_{hj}(t) = \beta I'_{h6}(t) + \gamma_5 R'_{h5}(t) - (\theta + \mu_h) R'_{h6}(t). \quad (12)$$

$j = 1$ means group of human age 0-4 years old.

$j = 2$ means group of human age 5-9 years old.

$j = 3$ means group of human age 10-14 years old.

$j = 4$ means group of human age 15-24 years old.

$j = 5$ means group of human age 25-34 years old.

$j = 6$ means group of human age more than 35 years old.

We define N_T is the total human population. This means that

$$N_T = \sum_{j=1}^6 (S'_{hj}(t) + I'_{hj}(t) + D'_{hj}(t) + R'_{hj}(t)).$$

Because we suppose that N_T is the constant number, thus the dynamical change for N_T equals to zero. From

$$\frac{d}{dt} N_T = 0; \text{ we can have } b_h = \mu_h \text{ or birth rate and death rate of human are equivalent.}$$

The rate of change for vector population can be described as following equations:

$$\frac{d}{dt} S'_{vi}(t) = M_i - \beta'_{vi} S'_{vi}(t) I'_h(t) - \mu_v S'_{vi}(t), \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} E'_{vi}(t) = \beta'_{vi} S'_{vi}(t) I'_h(t) - \lambda_v E'_{vi}(t) - \mu_v E'_{vi}(t), \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} I'_{vi}(t) = \lambda_v E'_{vi}(t) - \mu_v I'_{vi}(t). \quad (15)$$

We define $N_v (= S'_v(t) + E'_v(t) + I'_v(t))$ is the total vector and supposed it to be constant; this means that

$$\frac{d}{dt} N_v = 0 \text{ where } S'_v(t) = \sum_{i=1}^3 S'_{vi}(t), E'_v(t) = \sum_{i=1}^3 E'_{vi}(t) \text{ and } I'_v(t) = \sum_{i=1}^3 I'_{vi}(t) \quad (16)$$

From setting the rate of change for vector population equals to zero, we obtain $N_v = \frac{\sum_{i=1}^3 M_i}{\mu_v}$.

We suppose that number of vectors is different in each season. We define $i = 1$ means the dry or cool season, $i = 2$ means the hot season and $i = 3$ means the rainy season.

We reduce eqs.(1) to (15) by letting

$$s_{hj} = S'_{hj} / N_{Tj}, i_{hj} = I'_{hj} / N_{Tj}, d_{hj} = D'_{hj} / N_{Tj}, r_{hj} = R'_{hj} / N_{Tj},$$

$$s_{vi} = S'_{vi} / N_{vi}, e_{vi} = E'_{vi} / N_{vi}, i_{vi} = I'_{vi} / N_{vi};$$

where N_{Tj} is the total human population for age group $j(j=1,2,3,4,5,6)$ and N_{vi} is the total vector for season

$i(i=1,2,3)$. Thus, The normalized equations become:

For human population;

The first age group:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_{h1}(t) &= b_h + (1 - \varepsilon) S_1 i_{h1}(t) - \beta'_{h1} s_{h1}(t) (i_{v1}(t) N_{v1} + i_{v2}(t) N_{v2} + i_{v3}(t) N_{v3}) \\ &\quad - (\gamma_1 + \mu_h) s_{h1}(t) + S_3 d_{h1}(t) + \theta r_{h1}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_{h1}(t) &= \beta'_{h1} s_{h1}(t) (i_{v1}(t) N_{v1} + i_{v2}(t) N_{v2} + i_{v3}(t) N_{v3}) - (1 - \varepsilon) S_1 i_{h1}(t) - \gamma_1 i_{h1}(t) - \varepsilon S_1 i_{h1}(t) \\ &\quad + S_2 d_{h1}(t) - (\beta + \mu_h) i_{h1}(t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt}d_{h1}(t) = \varepsilon S_1 i_{h1}(t) - (S_2 + S_3 + \gamma_1 + \mu_h)d_{h1}(t), \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}r_{h1}(t) = \beta i_{h1}(t) - (\theta + \gamma_1 + \mu_h)r_{h1}(t). \quad (20)$$

Age group j; j = 2,3,4,5:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s_{hj}(t) = & S_3 d_{hj}(t) - \beta'_{hj} s_{hj}(t)(i_{v1}(t)N_{v1} + i_{v2}(t)N_{v2} + i_{v3}(t)N_{v3}) + (1-\varepsilon)S_1 i_{hj}(t) \\ & + \gamma_{j-1} s_{hj-1}(t) - \gamma_j s_{hj}(t) - \mu_h s_{hj}(t) + \theta r_{hj}(t), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_{hj}(t) = & \beta'_{hj} s_{hj}(t)(i_{v1}(t)N_{v1} + i_{v2}(t)N_{v2} + i_{v3}(t)N_{v3}) - (1-\varepsilon)S_1 i_{hj}(t) - \varepsilon S_1 i_{hj}(t) + S_2 d_{hj}(t) \\ & + \gamma_{j-1} i_{hj-1}(t) - \gamma_j i_{hj}(t) - (\mu_h + \beta) i_{hj}(t), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt}d_{hj}(t) = \varepsilon S_1 i_{hj}(t) - (S_2 + S_3 + \gamma_j + \mu_h)d_{hj}(t) + \gamma_{j-1} d_{hj-1}(t), \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt}r_{hj}(t) = \beta i_{hj}(t) - (\theta + \gamma_j + \mu_h)r_{hj}(t) + \gamma_{j-1} r_{hj-1}(t). \quad (24)$$

The last age group:

$$\frac{d}{dt}s_{h6}(t) = \gamma_5 s_{h5}(t) + S_3 d_{h6}(t) - \beta'_{h6} s_{h6}(t)(i_{v1}(t)N_{v1} + i_{v2}(t)N_{v2} + i_{v3}(t)N_{v3}) + (1-\varepsilon)S_1 i_{h6}(t) - \mu_h s_{h6}(t) + \theta r_{h6}(t), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_{h6}(t) = & \beta'_{h6} s_{h6}(t)(i_{v1}(t)N_{v1} + i_{v2}(t)N_{v2} + i_{v3}(t)N_{v3}) - (1-\varepsilon)S_1 i_{h6}(t) + \gamma_5 i_{h5}(t) - \varepsilon S_1 i_{h6}(t) + S_2 d_{h6}(t) \\ & - (\mu_h + \beta) i_{h6}(t), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}d_{h6}(t) = \varepsilon S_1 i_{h6}(t) - (S_2 + S_3 + \mu_h)d_{h6}(t) + \gamma_5 d_{h5}(t), \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}r_{h6}(t) = \beta i_{h6}(t) + \gamma_5 r_{h5}(t) - (\theta + \mu_h)r_{h6}(t). \quad (28)$$

For vector population;

$$\frac{d}{dt}s_{vi}(t) = (M_i / N_{vi}) - \beta'_{vi} s_{vi}(t) \left(\sum_{j=1}^6 i_{hj} N_{Tj} \right) - \mu_v s_{vi}(t), \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}e_{vi}(t) = \beta'_{vi} s_{vi}(t) \left(\sum_{j=1}^6 i_{hj} N_{Tj} \right) - \lambda_v e_{vi}(t) - \mu_v e_{vi}(t), \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt}i_{vi}(t) = \lambda_v e_{vi}(t) - \mu_v i_{vi}(t), \quad (31)$$

Let $s_h(t) = \sum_{j=1}^6 s_{hj}(t)$, $i_h(t) = \sum_{j=1}^6 i_{hj}(t)$, $d_h(t) = \sum_{j=1}^6 d_{hj}(t)$, $r_h(t) = \sum_{j=1}^6 r_{hj}(t)$ and

$$s_v(t) = \sum_{i=1}^3 s_{vi}(t), \quad e_v(t) = \sum_{i=1}^3 e_{vi}(t), \quad i_v(t) = \sum_{i=1}^3 i_{vi}(t) \quad \text{then}$$

$$\frac{d}{dt}s_h(t) = \mu_h + (1-\varepsilon)S_1 i_h(t) - i_v(M/\mu_v) \langle \beta_h \rangle s_h(t) + S_3 d_h(t) - \mu_h s_h(t) + \theta(1-s_h - i_h - d_h), \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt}i_h(t) = i_v(M/\mu_v) \langle \beta_h \rangle s_h(t) - S_1 i_h(t) + S_2 d_h(t) - (\beta + \mu_h) i_h(t), \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt}d_h(t) = \varepsilon S_1 i_h(t) - (S_2 + S_3 + \mu_h) d_h(t), \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt}s_v = \mu_v - i_h N_T \langle \beta_v \rangle s_v(t) - \mu_v s_v(t), \quad (35)$$

$$\frac{d}{dt}e_v = i_h N_T \langle \beta_v \rangle s_v(t) - (\lambda_v + \mu_v) e_v(t), \quad (36)$$

$$\text{where } \langle \beta_h \rangle = \frac{\sum_{j=1}^6 \beta'_{hj} s_{hj}(t)}{s_h(t)}, \langle \beta_v \rangle = \frac{\sum_{i=1}^3 \beta'_{vi} s_{vi}(t)}{s_v(t)}, i_h = \frac{\sum_{j=1}^6 i_{hj} N_{Tj}}{N_T}, i_v = \frac{\sum_{i=1}^3 i_{vi} N_{vi}}{N_v}, M = \frac{\sum_{i=1}^3 M_i}{i}$$

$$\text{and } s_h + i_h + d_h + r_h = 1, s_v + e_v + i_v = 1.$$

MODEL ANALYSIS

The steady state solutions $(s_{hj}^*, i_{hj}^*, d_{hj}^*, r_{hj}^*)$ for $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ and $(s_{vi}^*, e_{vi}^*, i_{vi}^*)$ for $i = 1, 2, 3$ are obtained by setting the right hand side of eqs.(17) to (31) equals to zero. The steady state solutions are as follows:

For human population:

The first age group:

$$s_{h1}^* = \frac{b_h + (1-\varepsilon)S_1 i_{h1}^* + S_3 d_{h1}^* + \theta r_{h1}^*}{(\beta_{h1}' (i_{v1}^* N_{v1} + i_{v2}^* N_{v2} + i_{v3}^* N_{v3}) + (\gamma_1 + \mu_h))}, \quad (37)$$

$$i_{h1}^* = \frac{\beta_{h1}' s_{h1}^* (i_{v1}^* N_{v1} + i_{v2}^* N_{v2} + i_{v3}^* N_{v3}) + S_2 d_{h1}^*}{((1-\varepsilon)S_1 + \gamma_1 + \varepsilon S_1 + (\beta + \mu_h))}, \quad (38)$$

$$d_{h1}^* = \frac{\varepsilon S_1 i_{h1}^*}{(S_2 + S_3 + \gamma_1 + \mu_h)}, \quad (39)$$

$$r_{h1}^* = \frac{\beta i_{h1}^*}{(\theta + \gamma_1 + \mu_h)}. \quad (40)$$

Age group j ; $j = 2, 3, 4, 5$:

$$s_{hj}^* = \frac{S_3 d_{hj}^* + (1-\varepsilon)S_1 i_{hj}^* + \gamma_{j-1} s_{hj-1}^* + \theta r_{hj}^*}{(\beta_{hj}' (i_{v1}^* N_{v1} + i_{v2}^* N_{v2} + i_{v3}^* N_{v3}) + \gamma_j + \mu_h)}, \quad (41)$$

$$i_{hj}^* = \frac{\beta_{hj}' s_{hj}^* (i_{v1}^* N_{v1} + i_{v2}^* N_{v2} + i_{v3}^* N_{v3}) + S_2 d_{hj}^* + \gamma_{j-1} i_{hj-1}^*}{(S_1 + \gamma_j + \mu_h + \beta)}, \quad (42)$$

$$d_{hj}^*(t) = \frac{\varepsilon S_1 i_{hj}^*(t) + \gamma_{j-1} d_{hj-1}^*(t)}{(S_2 + S_3 + \gamma_j + \mu_h)}, \quad (43)$$

$$r_{hj}^*(t) = \frac{\beta i_{hj}^*(t) + \gamma_{j-1} r_{hj-1}^*(t)}{(\theta + \gamma_j + \mu_h)}. \quad (44)$$

The last age group:

$$s_{h6}^*(t) = \frac{\gamma_5 s_{h5}^*(t) + S_3 d_{h6}^*(t) + (1-\varepsilon)S_1 i_{h6}^*(t) + \theta r_{h6}^*(t)}{(\beta_{h6}' (i_{v1}^*(t) N_{v1} + i_{v2}^*(t) N_{v2} + i_{v3}^*(t) N_{v3}) + \mu_h)}, \quad (45)$$

$$i_{h6}^*(t) = \frac{\beta_{h6}' s_{h6}^*(t) (i_{v1}^*(t) N_{v1} + i_{v2}^*(t) N_{v2} + i_{v3}^*(t) N_{v3}) + \gamma_5 i_{h5}^*(t) + S_2 d_{h6}^*(t)}{(\mu_h + \beta + S_1)}, \quad (46)$$

$$d_{h6}^*(t) = \frac{\varepsilon S_1 i_{h6}^*(t) + \gamma_5 d_{h5}^*(t)}{(S_2 + S_3 + \mu_h)}, \quad (47)$$

$$r_{h6}^*(t) = \frac{\beta i_{h6}^*(t) + \gamma_5 r_{h5}^*(t)}{(\theta + \mu_h)}. \quad (48)$$

For vector population:

$$s_{vi}^*(t) = \frac{(M_i / N_{vi})}{(\beta_{vi}' (\sum_{j=1}^6 i_{hj}^* N_{Tj}) - \mu_v)}, \quad (49)$$

$$e_{vi}^*(t) = \frac{\beta_{vi}' s_{vi}^*(t) (\sum_{j=1}^6 i_{hj}^* N_{Tj})}{(\lambda_v + \mu_v)}, \quad (50)$$

$$i_{vi}^*(t) = \frac{\lambda_v e_{vi}^*(t)}{\mu_v}. \quad (51)$$

From (32)-(36), the steady state solutions are given by

$$s_h^* = \frac{\mu_v(\lambda_v + \mu_v)(\mu_v + \beta_v > i_h^* N_T)(\mu_h^2 + (\beta + \mu_h)(\mu_h + S_2 + S_3) + S_1(S_2(1 - \varepsilon) + S_3))}{\beta_h > \beta_v > \lambda_v M N_T(\mu_h + S_2 + S_3)}, \quad (52)$$

$$d_h^* = \frac{\varepsilon i_h^* S_1}{\mu_h + S_2 + S_3}, \quad (53)$$

$$s_v^* = \frac{\mu_v}{\mu_v + \beta_v > i_h^* N_T}, \quad (54)$$

$$e_v^* = \frac{\beta_v > i_h^* N_T s_v^*}{\mu_v + \lambda_v}, \quad (55)$$

$$i_h^* = \frac{W(\mu_h + \theta)}{G}(B_0 - 1),$$

$$W = \mu_v^2(\lambda_v + \mu_v)(\beta + \mu_h + S_1)(\mu_h + S_2 + S_3), \quad (56)$$

$$G = \langle \beta_v \rangle N_T ((\langle \beta_h \rangle \lambda_v M(\mu_h + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3) + \mu_v(\lambda_v + \mu_v)(\mu_h + S_1 + S_2 + S_3) + S_1(S_2(1 - \varepsilon) + S_3))(\mu_h + \theta) + \beta(\mu_h + S_2 + S_3)(\langle \beta_h \rangle \lambda_v M + \mu_v)(\mu_h + \theta))) \quad (57)$$

and

$$B_0 = \frac{1}{\beta + \mu_h + S_1} \left(\frac{\langle \beta_h \rangle \langle \beta_v \rangle \lambda_v M N_T}{\mu_v^2(\lambda_v + \mu_v)} + \frac{\varepsilon S_1 S_2}{\mu_h + S_2 + S_3} \right). \quad (58)$$

It can be seen from the above equations that the steady state solution is positive for $B_0 > 1$.

A. Local Stable

We determine the local stable of steady state solutions from the signs of eigenvalues of Jacobian matrix of the right hand side of eqs. (32) to (36). If the eigenvalues have negative real part, then the steady solution will be locally stable [11].

For equations (32)-(36), the Jacobian matrix evaluated at the steady state solution is given by

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu_h - \langle \beta_h \rangle (M / \mu_v)(1 - s_v^* - e_v^*) - \theta & (1 - \varepsilon) S_1 - \theta & S_3 - \theta & \frac{\langle \beta_h \rangle M s_h^*}{\mu_v} & \frac{\langle \beta_h \rangle M s_h^*}{\mu_v} \\ \langle \beta_h \rangle (M / \mu_v)(1 - s_v^* - e_v^*) & -\beta - \mu_h - S_1 & S_2 & -\frac{\langle \beta_h \rangle M s_h^*}{\mu_v} & -\frac{\langle \beta_h \rangle M s_h^*}{\mu_v} \\ 0 & \varepsilon S_1 & -\mu_h - S_2 - S_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\langle \beta_v \rangle N_T s_v^* & 0 & -\mu_v - \langle \beta_v \rangle i_h^* N_T & 0 \\ 0 & \langle \beta_v \rangle N_T s_v^* & 0 & \langle \beta_v \rangle i_h^* N_T & -\lambda_v - \mu_v \end{pmatrix}$$

The eigenvalues are obtained by solving the characteristic equation; $\det(J - \lambda I_5) = 0$ where I_5 is the identity matrix dimension 5×5 . The characteristic equation for the steady state solution is given by

$$\lambda^5 + Z_4 \lambda^4 + Z_3 \lambda^3 + Z_2 \lambda^2 + Z_1 \lambda + Z_0 = 0 \quad (59)$$

where

$$Z_4 = \frac{(-1 + B_0)^2 < \beta_v >^2 \mu_v(\lambda_v + \mu_v) N_T^2 W^2 (\mu_h + \theta)^2 + G^2 \mu_v^2 (\lambda_v + \mu_v) \lambda_v + 3 \mu_h + 2 \mu_v + S_1 + S_2 + S_3 + \theta > \beta > G \mu_v (\lambda_v + \mu_v)}{(G \mu_v + (-1 + B_0) < \beta_v > N_T W (\mu_h + \theta)) + (-1 + B_0) < \beta_v > G N_T W (\mu_h + \theta) (\langle \beta_h \rangle \lambda_v M + \mu_v (\lambda_v + \mu_v) (\lambda_v + 3(\mu_h + \mu_v) + S_1 + S_2 + S_3 + \theta))} \quad (60)$$

$$Z_3 = \frac{(-1 + B_0)^2 < \beta_v >^2 N_T^2 W^2 (\mu_h + \theta)^2 (\langle \beta_h \rangle \lambda_v M + \mu_v (\lambda_v + \mu_v) (\lambda_v + 3 \mu_h + \mu_v + S_1 + S_2 + S_3 + \theta)) + G^2 \mu_v^2 (\lambda_v + \mu_v) \left(\frac{3 \mu_h^2 + \mu_v^2 + (S_1 + S_2) 2 \mu_v + (1 - \varepsilon) S_1 S_2 + (2 \mu_v + S_1) S_3 + (2 \mu_v + S_1 + S_2 + S_3) \theta + \lambda_v (3 \mu_h + \mu_v + S_1 + S_2 + S_3 + \theta)}{2 \mu_h (3 \mu_v + S_1 + S_2 + S_3 + \theta)} \right) + < \beta > \left((-1 + B_0)^2 < \beta_v > \mu_v (\lambda_v + \mu_v) N_T^2 W^2 (\mu_h + \theta)^2 + G^2 \mu_v^2 (\lambda_v + \mu_v) \lambda_v + 2(\mu_h + \mu_v) + S_2 + S_3 + \theta + (-1 + B_0) < \beta_v > G N_T W (\mu_h + \theta) \right)}{(G \mu_v + (-1 + B_0) < \beta_v > N_T W (\mu_h + \theta)) \left(\langle \beta_h \rangle \lambda_v M (\lambda_v + 2(\mu_h + \mu_v) + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_v (\lambda_v + \mu_v) + (-1 + B_0) < \beta_v > G N_T W (\mu_h + \theta) \right) \left(\frac{3 \mu_h^2 + 2 \mu_v^2 + (S_1 + S_2) 2 \mu_v + (1 - \varepsilon) S_1 S_2 + (3 \mu_v + S_1) S_3 + (3 \mu_v + S_1 + S_2 + S_3) \theta + \lambda_v (3 \mu_h + 2 \mu_v + S_1 + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_h (2 \mu_v + 2(S_1 + S_2 + S_3 + \theta))}{\lambda_v (3 \mu_h + 2 \mu_v + S_1 + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_h (2 \mu_v + 2(S_1 + S_2 + S_3 + \theta))} \right)} \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
& \beta(\mu_h + S_2 + S_3) \left\{ \begin{aligned} & (-1 + B_0)^2 < \beta_V^2 > N_T^2 W^2 (\mu_h + \theta)^2 < \beta_h > \lambda_V M + \mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\lambda_V + 2\mu_h + \mu_V + S_2 + S_3 + \theta) + G^2 \mu_V^2 (\lambda_V + \mu_V) \\ & \mu_h^2 + 2\mu_V (S_2 + S_3) + (2\mu_V + S_2 + S_3) \theta + \lambda_V (2\mu_h + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_h (4\mu_V + S_2 + S_3 + \theta) + (-1 + B_0) < \beta_V^2 > N_T W (\mu_h + \theta) \\ & < \beta_h > \lambda_V M (\lambda_V + \mu_h + 2\mu_V + S_2 + S_3) + \mu_V (\lambda_V + \mu_V) \left\{ \begin{aligned} & \mu_h^2 + \mu_V (\mu_V + 3(S_2 + S_3)) + \\ & (3\mu_V + S_2 + S_3) \theta + \lambda_V (2\mu_h + \mu_V + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_h (6\mu_V + S_2 + S_3 + \theta) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \\
& + (-1 + B_0)^2 < \beta_V^2 > N_T^2 (\mu_h + S_2 + S_3) W^2 (\mu_h + \theta)^2 \\
& \left\{ \begin{aligned} & < \beta_h > \lambda_V M (\lambda_V + 2\mu_h + \mu_V + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_V (\lambda_V + \mu_V) \left\{ \begin{aligned} & 3\mu_h^2 + (S_1 + S_2) \mu_V + (1 - \varepsilon) S_1 S_2 + (\mu_V + S_1) S_3 + (\mu_V + S_1 + S_2 + S_3) \theta + \\ & \lambda_V (3\mu_h + S_1 + S_2 + S_3 + \theta) + \mu_h (3\mu_V + 2(S_1 + S_2 + S_3 + \theta)) \end{aligned} \right\} \\ & + G^2 \mu_V^2 (\lambda_V + \mu_V) \\ & \left(\begin{aligned} & \mu_h^4 + \mu_V (\mu_V + S_1) (S_2 + S_3)^2 + \varepsilon S_1 S_2 (\mu_V - 2(S_2 + S_3)) + (S_2 + S_3) (\mu_V^2 + 2\mu_V (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 ((1 - \varepsilon) S_2 + S_3) \theta + \\ & \mu_h^3 (6\mu_V + S_1 + 2(S_2 + S_3) + \theta) + \mu_h^2 (2\mu_V^2 + S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3 + \theta) + (S_2 + S_3) (S_2 + S_3 + 2\theta) + 2\mu_V (2S_1 + 5(S_2 + S_3) + 2\theta)) \\ & + \mu_h (-S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + (S_2 + S_3)^2 \theta + S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3) \theta + \mu_h^2 (3(S_2 + S_3) + \theta) + \mu_V (4(S_2 + S_3)^2 + 6(S_2 + S_3) \theta + 2S_1 ((3 - \varepsilon) S_2 + 3S_3 + \theta))) + \\ & \lambda_V (3\mu_h^3 - \varepsilon S_1 S_2 (-\mu_V + S_2 + S_3) + \mu_h^2 (2\mu_V + S_1 + \theta) + 5(S_2 + S_3)) + (S_2 + S_3) (\mu_V + S_1) (S_2 + S_3) + (\mu_V + S_1 + S_2 + S_3) \theta \end{aligned} \right) \\ & \left(\begin{aligned} & \mu_h^4 (S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) \theta + \mu_h^3 (4\mu_V + S_1 + 2(S_2 + S_3) + \theta) \\ & + \mu_V (-S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + 2(S_2 + S_3)^2 \theta + S_1 ((1 + \varepsilon) S_2 + S_3) \theta) + \\ & \mu_h (S_2 + S_3) (3\mu_V (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 ((1 - \varepsilon) S_2 + S_3)) + \frac{(S_2 + S_3)^2 + S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3) + \theta}{\mu_V (S_1 + 5(S_2 + S_3))} \theta \end{aligned} \right) + \\ & \mu_h^2 (S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3 + \theta) + (S_2 + S_3) (S_2 + S_3 + 2\theta) + \mu_V (2S_1 + 7(S_2 + S_3) + 3\theta)) \\ & \left(\begin{aligned} & 3\mu_h^4 - \mu_V S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + 3\mu_h (S_2 + S_3) (\mu_V (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 ((1 - \varepsilon) S_2 + S_3) + \\ & (-3S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + \mu_V (2(S_2 + S_3)^2 + S_1 ((1 + \varepsilon) S_2 + S_3)) \theta) \\ & + \mu_h (\mu_V (S_1 + 5(S_2 + S_3)) + 3(S_2 + S_3)^2 + S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3)) \theta + \mu_h^3 (4\mu_V + 3(S_1 + (S_2 + S_3) + \theta)) \\ & + \mu_h^2 (\mu_V (2S_1 + 7C + 3\theta) + 3(S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3 + \theta) + (S_2 + S_3) (S_2 + S_3 + 2\theta))) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \\
Z_2 = \frac{G\mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\mu_h + S_2 + S_3) (G\mu_V + (-1 + B_0) < \beta_V > N_T W (\mu_h + \theta))}{G\mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\mu_h + S_2 + S_3) (G\mu_V + (-1 + B_0) < \beta_V > N_T W (\mu_h + \theta))} \quad (62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - B_0) < \beta_V > G N_T W \\
& \left\{ \begin{aligned} & < \beta_h > \lambda_V M (\mu_h + S_2 + S_3) \left\{ \begin{aligned} & \mu_V (2\mu_h^2 + \mu_V (\varepsilon S_1 + S_2 + S_3) + (\mu_V + 2(\varepsilon S_1 + S_2 + S_3)) \theta + 2\mu_h (\mu_V + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3 + \theta)) + \\ & \lambda_V (\mu_h^2 + \mu_V (\varepsilon S_1 + S_2 + S_3) + (\mu_V + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3) \theta + \mu_h (2\mu_V + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3 + \theta)) \end{aligned} \right\} + \\ & \left(\begin{aligned} & \mu_h^4 - S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) \theta + \mu_h^3 (4\mu_V + S_1 + 2(S_2 + S_3) + \theta) \\ & + \mu_V (-S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + 2(S_2 + S_3)^2 \theta + S_1 ((1 + \varepsilon) S_2 + S_3) \theta) + \\ & \mu_h (S_2 + S_3) (3\mu_V (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 ((1 - \varepsilon) S_2 + S_3)) + \frac{(S_2 + S_3)^2 + S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3) + \theta}{\mu_V (S_1 + 5(S_2 + S_3))} \theta \end{aligned} \right) + \\ & \mu_h^2 (S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3 + \theta) + (S_2 + S_3) (S_2 + S_3 + 2\theta) + \mu_V (2S_1 + 7(S_2 + S_3) + 3\theta)) \\ & \left(\begin{aligned} & 3\mu_h^4 - \mu_V S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + 3\mu_h (S_2 + S_3) (\mu_V (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 ((1 - \varepsilon) S_2 + S_3) + \\ & (-3S_1 ((-1 + \varepsilon) S_2 - S_3) (S_2 + S_3) + \mu_V (2(S_2 + S_3)^2 + S_1 ((1 + \varepsilon) S_2 + S_3)) \theta) \\ & + \mu_h (\mu_V (S_1 + 5(S_2 + S_3)) + 3(S_2 + S_3)^2 + S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3)) \theta + \mu_h^3 (4\mu_V + 3(S_1 + (S_2 + S_3) + \theta)) \\ & + \mu_h^2 (\mu_V (2S_1 + 7C + 3\theta) + 3(S_1 ((2 - \varepsilon) S_2 + 2S_3 + \theta) + (S_2 + S_3) (S_2 + S_3 + 2\theta))) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \\
Z_1 = \frac{G\mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\mu_h + S_2 + S_3) (G\mu_V + (-1 + B_0) < \beta_V > N_T W (\mu_h + \theta))}{G\mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\mu_h + S_2 + S_3) (G\mu_V + (-1 + B_0) < \beta_V > N_T W (\mu_h + \theta))} \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1 + B_0) < \beta_V > N_T W (\mu_h + \theta) \left\{ \begin{aligned} & < \beta_h > \lambda_V M (\mu_h + \varepsilon S_1 + S_2 + S_3) + \mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\mu_h^2 + \mu_h (S_1 + S_2 + S_3) + S_1 ((1 - \varepsilon) S_2 + S_3)) (\mu_h + \theta) \\ & < \beta > (\mu_h + S_2 + S_3) < \beta_h > \lambda_V M + \mu_V (\lambda_V + \mu_V) (\mu_h + \theta) \end{aligned} \right\} \\
Z_0 = \frac{G\mu_V}{G\mu_V} \quad (64)
\end{aligned}$$

We use Routh-Hurwitz criteria [11] for determining signs of all eigenvalues. If they satisfy the following conditions, then a steady state solution will be local stable. The Routh-Hurwitz criteria is given by

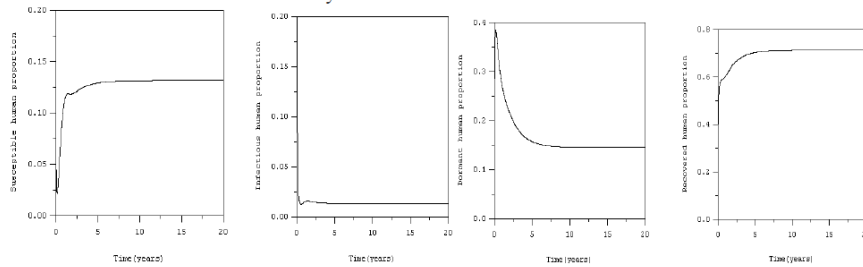
- $Z_1 > 0$; $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$
- $Z_4 Z_3 Z_2 - (Z_2^2 + Z_4^2 Z_1) > 0$
- $(Z_4 Z_1 - Z_0)(Z_4 Z_3 Z_2 - (Z_2^2 + Z_4^2 Z_1)) - (Z_0(Z_4 Z_3 - Z_2)^2 + Z_4 Z_0^2) > 0$

From our calculations, we found that i) to iii) are satisfied when $B_0 > 1$ where

$$B_0 = \frac{1}{\beta + \mu_h + S_1} \left(\frac{\langle \beta_h \rangle \langle \beta_V \rangle \lambda_V M N_T}{\mu_V^2 (\lambda_V + \mu_V)} + \frac{\varepsilon S_1 S_2}{\mu_h + S_2 + S_3} \right). \quad (65)$$

Thus the steady state solution is local stable for $B_0 > 1$.

We simulate eqs. (32)-(36) by using numerical method. The parameters satisfy the real life observations. The trajectories of the solutions will lead to a steady state solution.



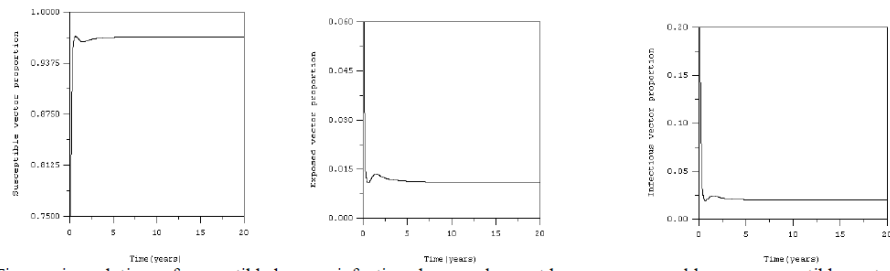


Fig. 4. Time series solutions of susceptible human, infectious human, dormant human, recovered human, susceptible vector, exposed vector and infectious vector, respectively.

The value of parameters are $\mu_h = 1/(365 \times 70)$, $\varepsilon = 0.8$, $M = 100,000,000$, $\mu_v = 1/25$, $\langle \beta_h \rangle = 0.000000001$, $\langle \beta_v \rangle = 0.000001$, $S_1 = 1/30$, $S_2 = 1/(365 \times 2)$, $S_3 = 1/(365 \times 3)$, $\theta = 1/(365 \times 5)$, $\beta = 1/30$, $N_t = 6000000$, $\lambda_v = 1/14$, $B_0 = 3600$. The solution oscillates to the steady state solution (0.13, 0.013, 0.14, 0.71, 0.97, 0.01, 0.02).

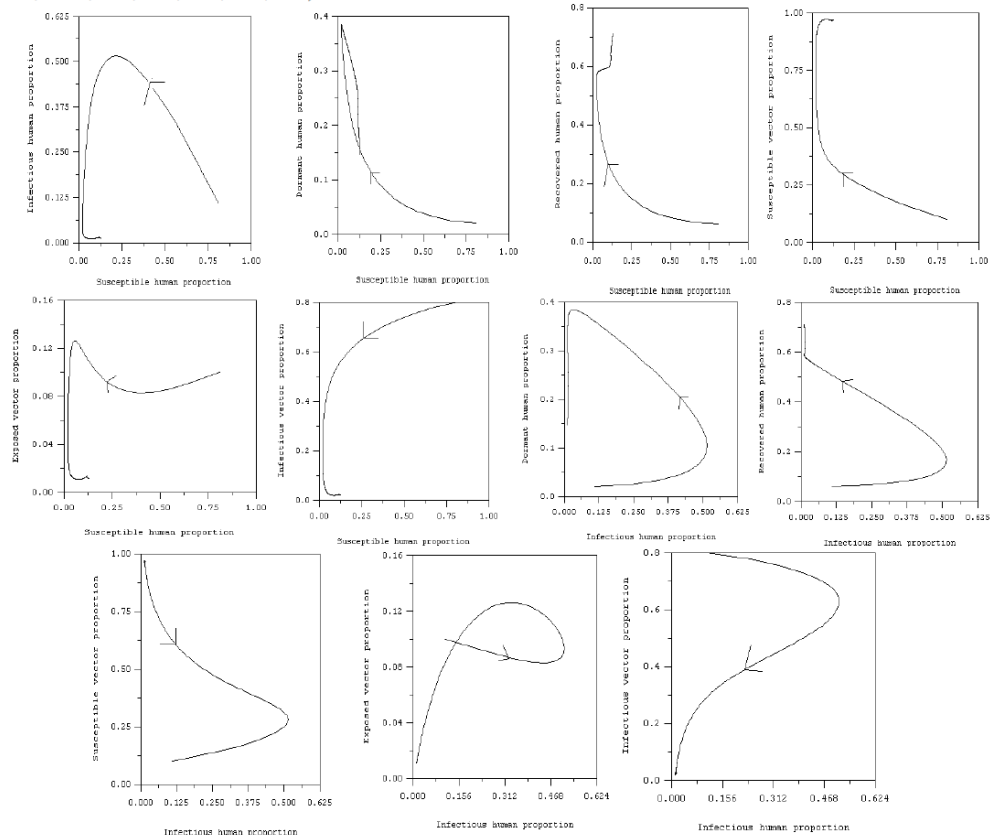


Fig. 5. Numerical solution of eqs. (32)-(36) demonstrates the solution trajectories. The values of parameters are similar to fig.4.

We use real data of Malaria patients and simulate β'_{hj} for $j = 1, 2, 3, 4, 5$ by using eqs.(17) – (31). The results are shown in fig.6.

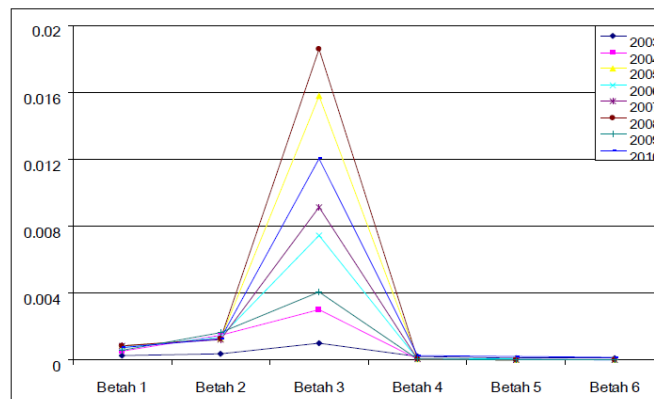


Fig.6. The values of β'_h , for $j = 1, 2, 3, 4, 5$ simulated from eqs.(17) – (31).

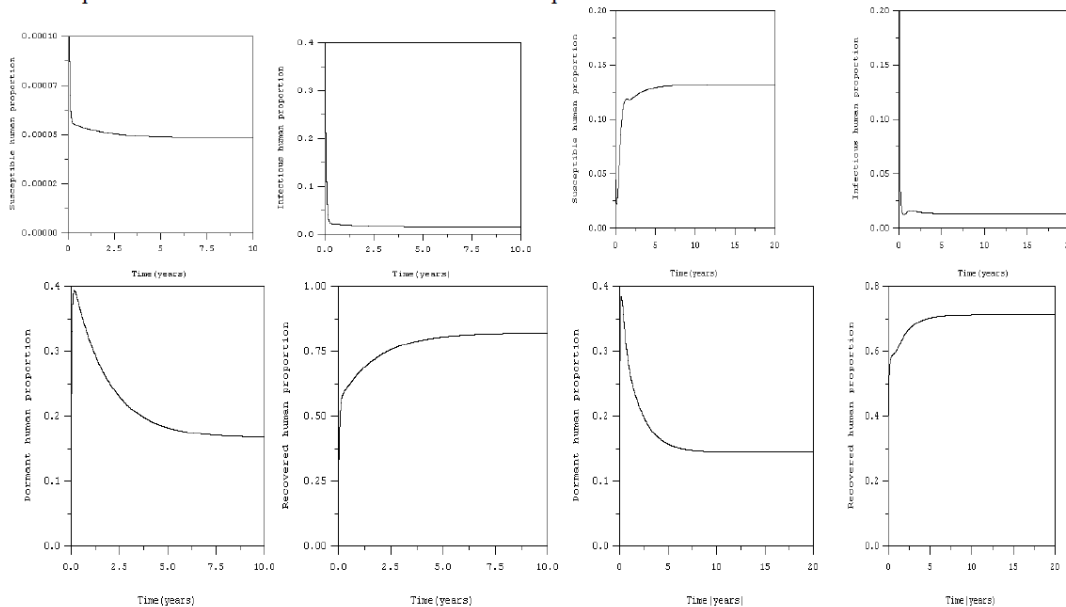
We can see that the highest infection rate of this disease is occurred in the human age group 10-14 years. This is corresponding to fig.1.

DISCUSSION AND CONCLUSION

In this paper, we analyze the transmission of Malaria by considering age group of human and season in Thailand. The basic reproductive number is defined by

$$B_0 = \frac{1}{\beta + \mu_h + S_1} \left(\frac{\langle \beta_h \rangle \langle \beta_v \rangle \lambda_v M N_T}{\mu_v^2 (\lambda_v + \mu_v)} + \frac{\epsilon S_1 S_2}{\mu_h + S_2 + S_3} \right).$$

If $B_0 > 1$, the steady state solution will be local stable, then we can reduce the outbreak of this disease. The basic reproductive number are used for reducing the outbreak of different diseases[9-10,12-14]. We compare the numerical solutions for the different basic reproductive numbers



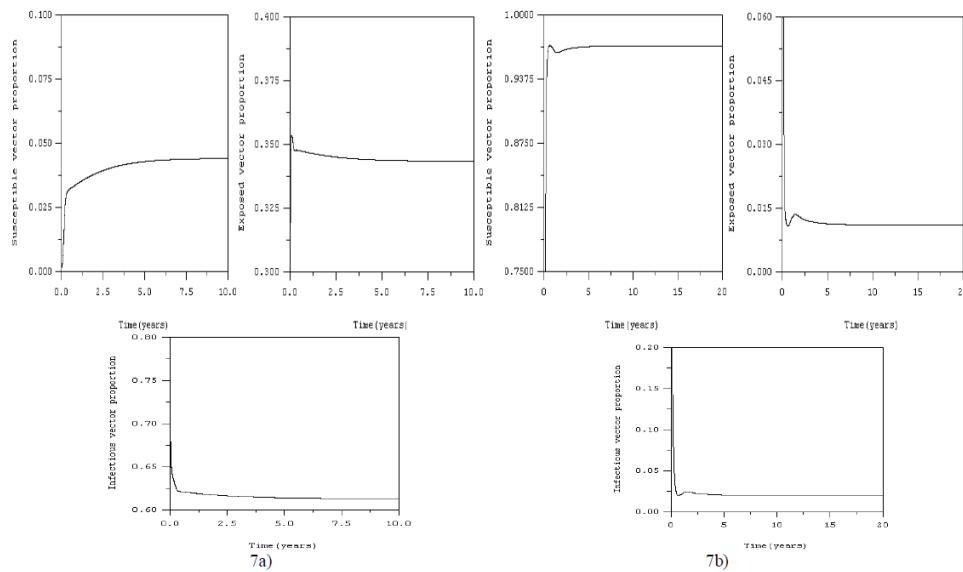


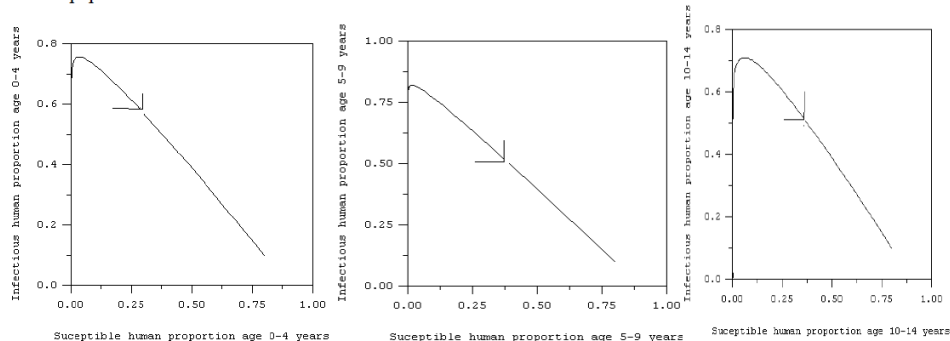
Fig.7 Time series solution for the different basic reproductive number.

7a) The value of parameters are $\mu_h = 1/(365 \times 70)$, $\varepsilon = 0.8$, $M = 100,000,000$, $\mu_v = 1/25$, $\langle \beta_h \rangle = 0.00000001$, $\langle \beta_v \rangle = 0.000001$, $S_1 = 1/30$, $S_2 = 1/(365 \times 2)$, $S_3 = 1/(365 \times 3)$, $\theta = 1/(365 \times 5)$, $\beta = 1/30$, $N_t = 6000000$; $\lambda_v = 1/14$, $B_0 = 360000$.

7b) The value of parameters are $\mu_h = 1/(365 \times 70)$, $\varepsilon = 0.8$, $M = 100,000,000$, $\mu_v = 1/25$, $\langle \beta_h \rangle = 0.000000001$, $\langle \beta_v \rangle = 0.000001$, $S_1 = 1/30$, $S_2 = 1/(365 \times 2)$, $S_3 = 1/(365 \times 3)$, $\theta = 1/(365 \times 5)$, $\beta = 1/30$, $N_t = 6000000$; $\lambda_v = 1/14$, $B_0 = 3600$.

From the above results, if the basic reproductive number is higher, this means that one case can produce the greater number of secondary cases, and then the period of oscillation is shorter.

Furthermore, we simulate eqs.(17)-(31) by using the real life parameters to see the behavior solutions of human population.



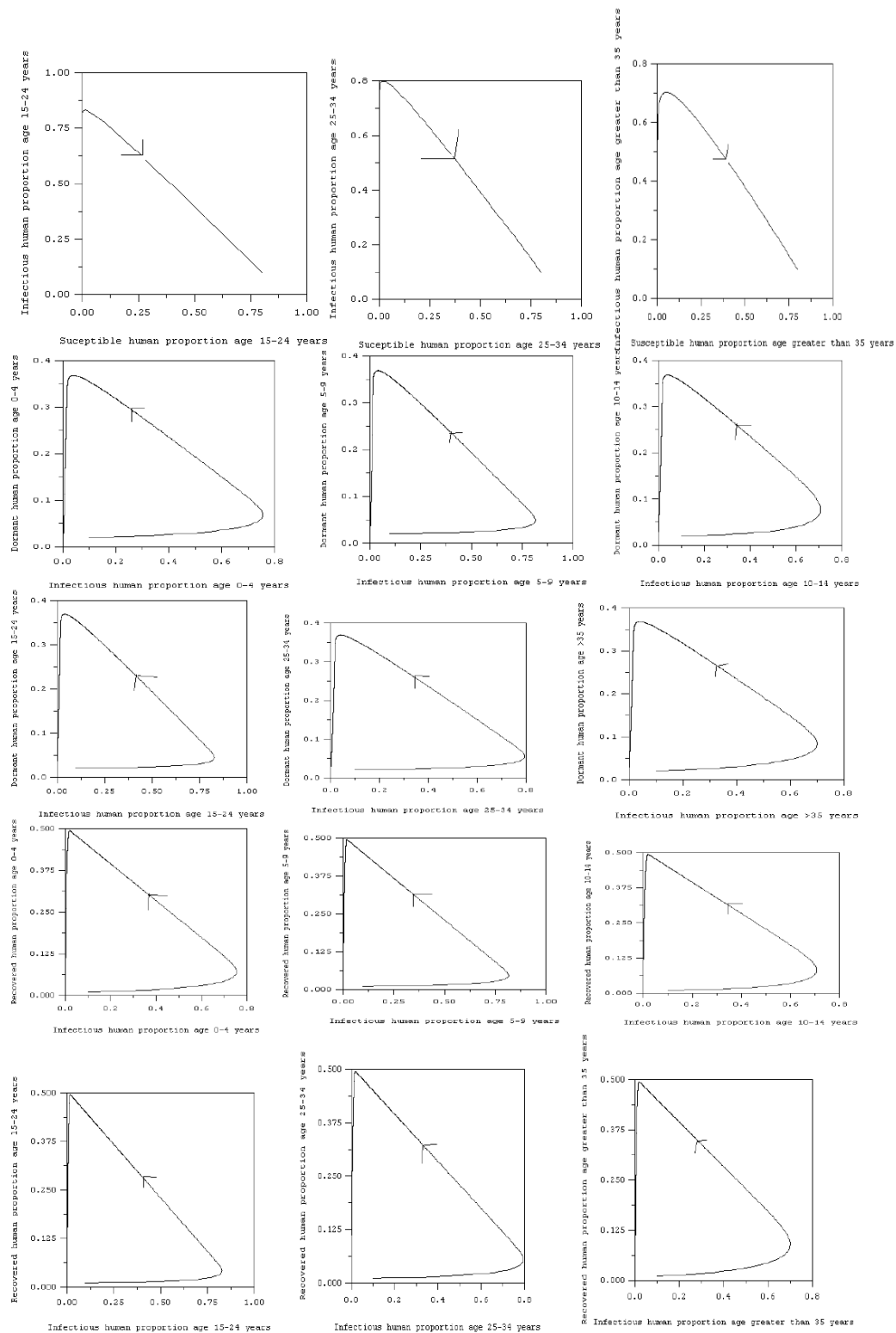


Fig.8 Numerical solutions for eqs.(17)-(31).The parameters are corresponding to the real life observations. The solutions converge to the steady state solution.

From comparing the results in fig.5 and fig.8, we can see that the periods of fluctuations in the number of individuals in each class are much shorter in the absence of any age group and season. This model should be better for describing the situation of Malaria in Thailand because age group of human and seasons affect to the number of Malaria patients. The results of this study should be the alternative way for controlling this disease.

Acknowledgment

This work is supported by Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. Preeyaporn Mumtong and Tareerat Tanutpanit are the research assistants of this study.

REFERENCES

- [1] CDC.Malaria : Anopheles Mosquitoes, available from <http://www.cdc.gov/malaria/about/biology/mosquitoes/index.html>
- [2] Malaria vector species, available from http://www.anobase.org/species/malaria_species.html
- [3] World Health Organization (WHO) and WHO Global Malaria Programme, available from http://www.who.int/malaria/about_us/en/index.html
- [4] Mandal et.al. 2011. *Malaria Journal*, 10:202, available from <http://www.malariajournal.com/content/10/1/202>
- [5] Phillipe RS. 1983. *Malaria*. London : Edward Arnold.
- [6] Lertprapai S. Factors which effect the transmission of malaria and its control in the rainy season: a case study in Tak province [M.S. Thesis in Applied Mathematics]. Bangkok: Faculty of Graduate Studies, Mahidol University ; 1998.
- [7] Annual Epidemiological Surveillance Report, Division of Epidemiology, Ministry of Public Health, Royal Thai Government.
- [8] Anderson R.M., and May R.M.1991. *Infectious Disease of Humans.,Dynamics and Control*.Oxford U. Press, Oxford.
- [9] Pongsumpun P. and Tang I.M. 2007. "Mathematical model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria," *International Journal of mathematical models and methods in applied sciences*, 3, pp.117-121.
- [10] Pongsumpun P. 2012. "Age Structural Model of Plasmodium Falciparum Malaria Transmission", *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, Accepted.
- [11] Robert M. 1973. *Stability and complexity in model ecosystem*, Princeton university press.
- [12] Kongnuy R. and Pongsumpun P. 2010. "Mathematical modeling for dengue transmission with the effect of season", *International Journal of Biological and Medical Sciences*, 5(2): 74-78.
- [13] Esteva L. and Vargas C. 1998. "Analysis of a dengue disease transmission model", *Mathematical Biosciences*, 150: 131-151.
- [14] Kammanee A, Kanyamee N and Tang IM. 2001. Basic reproduction number for transmission of Plasmodium vivax malaria. *Southeast Asian J Trop Med Public Health* ,32: 702-706.

ภาคผนวก ก
ข้อมูลประวัติผู้วิจัย

ข้อมูลประวัติผู้วิจัย

ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-สกุล ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พนัสนิ พงศ์สัมพันธ์

เพศ ☐ ชาย ☒ หญิง

สถานภาพ ☒ โสด ☐ สมรส

ตำแหน่งปัจจุบัน

ประวัติการศึกษา

ชื่อย่อปริญญา	สาขา	สถาบันที่จบ	ปีที่จบ
ปร.ด.	คณิตศาสตร์ (หลักสูตรนานาชาติ)	มหาวิทยาลัยมหิดล	๒๕๔๓
วท.บ. (เกียรตินิยมอันดับ 2)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยมหิดล	๒๕๔๑

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ Mathematical model, Differential equations, Computer simulation และ Numerical Analysis

ทุนการศึกษาและทุนวิจัยที่เคยได้รับ

1. The Royal Golden Jubilee Ph.D. program (RGJ), Thailand Research Fund (TRF), Thailand, 2001-2004.
2. โครงการวิจัย “Spatial approach and mathematical modeling of emerging infectious disease Transmission” แหล่งผู้ให้ทุนคือ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษาและประเทศฝรั่งเศส ปี 2548-2551
3. โครงการวิจัย “Transmission model for Plasmodium Vivax Malaria” แหล่งผู้ให้ทุน คือ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ปี 2550-2551
4. โครงการวิจัย “Mathematical model for the transmission by age structure and serotypes of Dengue disease” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2552 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

5. โครงการวิจัย “Franco-Thai Network for Mathematical and Epidemiological Modeling of Infectious Diseases in Thailand” แหล่งผู้ให้ทุนคือ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และประเทศฝรั่งเศส ปี 2552-2553
6. โครงการวิจัย “Transmission model for Chikungunya Fever in Thailand” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2553 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
7. โครงการวิจัย “Transmission model for Influenza Pandemic Due to a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus” กองทุนวิจัยลาดกระบัง สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปี 2554-2556
8. โครงการวิจัย “Mathematical model of Malaria transmission by age group of patients and season in Thailand ” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2555 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

1. P.Pongsumpun, Age structured model for symptomatic and asymptomatic infections of dengue disease, *International Journal of Modeling and Simulation* 2009, 29;pp.199-205.
2. P.Pongsumpun, D.Garcia Lopez, C.Favier, L.Torres, J.Llosa, and M.A.Dubois Dynamics of dengue epidemics in urban contexts, *Tropical Medicine and International Health* 2008, 13(9); pp.1180-1187.
3. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Transmission Model for *Plasmodium Vivax* Malaria: Conditions for Bifurcation , *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3); pp.161-168.
4. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical model for the transmission of *P.falciparum* and *P. vivax* along the Thai-Myanmar border, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3); pp.200-207.
5. R.Kongnuy, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Analysis of a Mathematical Model for Dengue Disease in Pregnant Cases, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3), 2008; pp.192-199.

6. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Effect of the Seasonal Variation in the Extrinsic

Incubation Period on the Long Term Behaviour of the Dengue Hemorrhagic Fever

Epidemic, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3); pp.208-214.

7. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Limit Cycle and Chaotic Behaviors for the Transmission

Model of *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2008, 4(2), 2008; pp.563-570.

8. P.Pongsumpun and I.M.Tang, The Transmission Model of *P.falciparum* and *P.Vivax* Malaria between Thai and Burmese, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2009, 3; pp.19-26.
9. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Transmission network dynamics of *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2009, 3(3); pp.275-282.
10. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical model of *Plasmodium Vivax* and *Plasmodium Falciparum* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2009, 3(3); pp.283-290.
11. P.Pongsumpun, Influence of Symptomatic and Asymptomatic Infections for the Age Structural Model of Dengue Transmission, *International Journal of Mathematical Modelling, Simulation and Applications* 2009, 2(1); pp.64-76.
12. R.Kongnuy, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical Model for Dengue Disease with Maternal Antibodies, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2010, 5(1); pp.5-14.
13. P.Pongsumpun, Mathematical model for the transmission of two *Plasmodium* Malaria, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2010, 5(2); pp.69-73.

-
14. R.Kongnuy, P.Pongsumpun, Mathematical modeling for dengue transmission with the effect of season, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2010, 5(2); pp.74-78.

15. P.Pongsumpun, I-Ming Tang, Impact of Cross Border Migration on Disease Epidemics: Case of the *P. falciparum* and *P. vivax* malaria Epidemic along the Thai-

- Myanmar border, *Journal of Biological system* 2010, 18(1); pp.55-73.
16. P.Pongsumpun, I-Ming Tang, Mathematical Model of the Symptomatic and Asymptomatic infections of Swine flu, *International Journal of mathematical Models and method in Applied Sciences* 2011, 2(5); pp.247-254.
 17. R.Kongnuy, E.Naowanich and P.Pongsumpun, Analysis of a dengue disease transmission model with clinical diagnosis in Thailand, *International Journal of mathematical Models and method in Applied Sciences* 2011, 5; pp.594-601.
 18. P. Pongsumpun and P.Mumtong, Mathematical model for the incubation of the *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal on Applied Biomedical Engineering* 2011, 4(1); pp.42-48.
 19. P.Pongsumpun, Seasonal Transmission Model of Dengue Virus Infection in Thailand, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2011, 1(10); pp.1372-1379.
 20. P. Pongsumpun and R. Kongnuy, Lyapunov Function of Dengue Model in Infant with Maternal Antibody, *Far East Journal of Applied Mathematics* 2011, 57(2); pp73-102.
 21. P.Pongsumpun, Age Structural Model of *Plasmodium Falciparum* Malaria Transmission, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(7); pp 6358-6366.
 22. P.Pongsumpun, Seasonal Transmission Model of Malaria by Age Group of Population, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(7); pp.6657-6669.
-

การเสนอผลงานในงานประชุมวิชาการระดับนานาชาติ

1. P.Pongsumpun, Mathematical model of Dengue disease with the Incubation Period of Virus: Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, Venice, Italy, Volume 34, October 2008, Venice, Italy, pp.328-332.
2. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Plasmodium Vivax Malaria Transmission in a Network of Villages: Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, Venice, Italy, Volume 34, October 2008, Venice, Italy, pp.333-337.
3. R.Kongnuy and P.Pongsumpun, Analysis of Model in Pregnant and non-Pregnant Dengue patients: Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, Venice, Italy, Volume 34, October 2008, Venice, Italy, pp.338-343.

4. R.Kongnuy and P.Pongsumpun, Dengue Transmission Model between Infant and Pregnant Woman with antibody: Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, Venice, Italy, Volume 34, October 2008, Venice, Italy, pp.344-350.
5. R. Kongnuy and P. Pongsumpun, Mathematical Model of Dengue Disease between Infant and Pregnant humans, Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008), pp.395-400.
6. P.Pongsumpun, Dengue model with age structure and two different serotypes, Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008), pp.401-405.
7. P.Pongsumpun and I.M.Tang, The transmission dynamics of Plasmodium vivax malaria at the local level, Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008), pp.406-410.
8. P. Pongsumpun, T. Manmai and R. Kongnuy, Age structural transmission model for Leptospirosis, Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008), pp.411- 416.
9. R. Kongnuy and P. Pongsumpun, Limit cycle and chaotic behaviors on the Dengue model in pregnant patients, Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008), pp.417-422.
10. R.Kongnuy, P.Pongsumpun, Effect of dengue antibody to the transmission model of dengue disease, *The 2nd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2009)*, August 13-14, 2009, Phuket, Thailand, pp.205-211.
11. P.Pongsumpun, Age structural model with four serotypes of dengue disease, *The 2nd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2009)*, August 13-14, 2009, Phuket, Thailand, pp.212-217.
12. P.Pongsumpun and R.Kongnuy, A model of the Transmission of Dengue Disease in Infant Population, Proceeding of the International Workshops on Pure and Applied Mathematics, 22-24 February 2010, Chiangmai, Thailand, pp.52-69.
13. R. Kongnuy and P.Pongsumpun, Local Dynamics for a Dengue Disease with Seasonal in Thailand: *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Paris, France, Issue 68, July 2010, pp.435-440.
14. P.Pongsumpun, Swine flu transmission model in risk and nonrisk human population, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Paris, France, Issue 68, July 2010, pp.704-709.

15. P.Pongsumpun, Dynamical transmission model of Chikungunya in Thailand:
Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, Paris, France, Issue 68, July 2010, pp.710-714.
16. T.Changpuek and P.Pongsumpun, The Age structural Transmission Model of Swine Flu,
Proceeding of the 3rd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2010), 27-28 August 2010, Kyoto, Japan, pp.1-6.
17. P.Pongsumpun, The Mathematical Model of Dengue disease classified by the characteristics of the patients, *Proceeding of the 3rd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2010)*, 27-28 August 2010, Kyoto, Japan, pp.7-12.
18. P.Pongsumpun, The Basic Reproductive number for the Transmission of four serotypes of Dengue model, *Proceeding of the ISATED International Conference Modelling Identification and Control (MIC 2011)*, 14-16 February 2011, Innsbruck, Austria, pp.20-27.
19. Choawaniti Teampae, Puntani Pongsumpun, The Relapsed Transmission Model of Plasmodium Vivax, *Proceedings of the 37th Congress on Science and Technology of Thailand*, October 10-12, 2011, A_A0031, pp.1-6.
20. Sireepatch Sangsawang, Puntani Pongsumpun, Transmission Model of Chikungunya in Thailand, *Proceedings of the 37th Congress on Science and Technology of Thailand*, October 10-12, 2011, A_A0037, pp.1-6.
21. Puntani Pongsumpun, Mathematical model of Influenze A(H1N1) virus transmission, *Proceedings of International Conference in Mathematics and Applications (UEL,VNU-HCMC 2011)*, Hochi Minh city, December 20-22, 2011, pp.184-194.
22. Puntani Pongsumpun and Preeyaporn Mumtong, Malaria transmission model of juvenile and adult humans, *Proceeding of The 4th Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON-2011)*, Chiangmai, Thailand, January 29-31, 2012, pp.11-16.
23. Puntani Pongsumpun, Malaria transmission model of juvenile and adult humans, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Copenhagen, Denmark, Issue 66, June 2012; pp.234-239.
24. Puntani Pongsumpun, The Reinfectious Model of H1N1 Virus Transmission, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Copenhagen, Denmark, Issue 66, June 2012; pp.240-246.
25. Sireepatch Sangsawang, Tareerat Tanutpanit, Wannissa Mumtong and Puntani Pongsumpun, Local Stability Analysis of Mathematical Model for Hemorrhagic Conjunctivitis Disease,

Proceedings of the Third KMITL-TKU Joint International Symposium on Mathematics and Applied Mathematics (MAM 2012), 28-29 July 2012, Pattaya, Thailand, pp.111-119.

การเสนอผลงานในที่ประชุมระดับชาติ

1. ปรียาภรณ์ มุมทอง และพนัสนิ พงศ์สัมพันธ์, การวิเคราะห์การแพร่เชื้อพลาสมาโมเดียมไวแวกซ์ โดยใช้ตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์, *The 15th Annual meeting in Mathematics: 10-12 March 2010 Proceedings (AMM2010)*, pp.267-276.
2. Puntani Pongsumpun and Rujira Kongnuy, Mathematical model between mother and infant with antibodies, *Proceeding of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, 10-11 March 2011, Khon Kaen University, khon kaen, Thailand, pp.171-182.
3. สิริพัชร แสงสว่าง และพนัสนิ พงศ์สัมพันธ์, แบบจำลองตามโครงสร้างอายุสำหรับการระบาดของโรค ซิกุนกุนยา, *Proceeding of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, 10-11 March 2011, Khon Kaen University, khon kaen, Thailand, pp.327-340.
4. เขาวนิตี เทียมแพร, พนัสนิ พงศ์สัมพันธ์ และ ปรียาภรณ์ มุมทอง, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์, *Proceeding of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, 10-11 March 2011, Khon Kaen University, khon kaen, Thailand, pp.363-372.