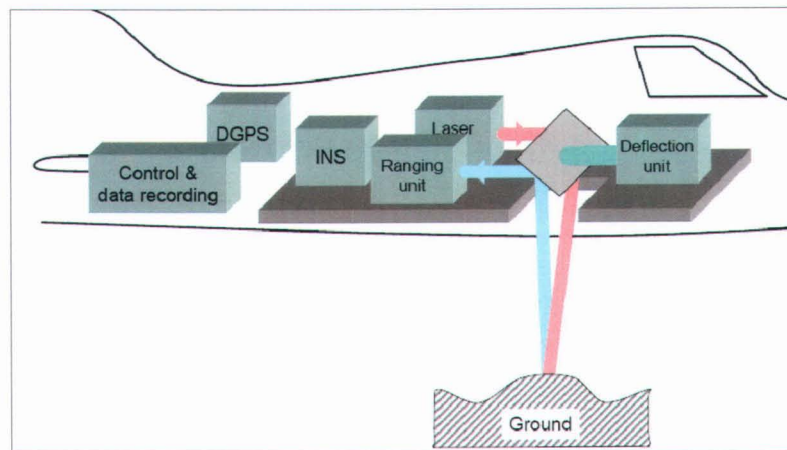


บทที่ 2

แนวคิดและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การปรับแก้ข้อมูล LiDAR ระหว่างแนวกบินโดยอาศัยจุดควบคุมจากภาพถ่ายทางอากาศซึ่งงานวิจัยบนี้จะกล่าวถึงแนวคิด ทฤษฎี รวมทั้งหลักการทำงานและระบบของ LiDAR สาเหตุการเกิดความคลาดเคลื่อนระหว่างแนวกบิน การใช้ภาพถ่ายทางอากาศเพื่อพิจารณาดำเนินข้อมูล LiDAR การหาขอบวัตถุจากภาพถ่ายทางอากาศ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ วิธีปรับแก้ด้วยลิสต์สแควร์ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 หลักการทำงานของ Airborne Laser Scanning



รูปที่ 2.1 แสดงการทำงานของ Airborne Laser Scanning (Brenner, 2006)

2.1.1 องค์ประกอบระบบเลเซอร์สแกนเนอร์

ระบบเลเซอร์สแกนเนอร์มีเครื่องวัดระยะทางอิเล็กทรอนิกส์เป็นองค์ประกอบที่สำคัญ การวัดระยะทางอิเล็กทรอนิกส์มีการใช้ประโยชน์จากการส่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีกำลังในการทะลุทะลวงเป็นลำแสงควบแน่น เช่น แสงเลเซอร์ เครื่องวัดระยะทางจะกำเนิดเลเซอร์และจับเวลาในการเดินทางด้วย “หน่วยวัดเปรียบเทียบเวลา” เมื่อแสงไปตกกระทบพื้นผิวแสงจะสะท้อนกลับ การสะท้อนกลับได้มากหรือน้อยขึ้นอยู่กับชนิดพื้นผิวว่าเป็นของแข็ง เรียบหรือหยาบ แห้งหรือชื้น เมื่อแสงเดินทางกลับมายังเครื่องรับจะมีการเปรียบเทียบเวลาอีกครั้ง (ไพศาล สันติธรรมนนท์, 2553)

เมื่อทราบเวลาคูณด้วยความเร็วแสงจะได้ระยะทางเป็น 2 เท่า ของระยะทางจากเครื่องวัดระยะไปยังพื้นผิว ดังความสัมพันธ์

สามารถหาระยะทางจากสมการ

$$S = \frac{vt}{2} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

เมื่อ S = ระยะทาง (เมตร)
 v = ความเร็ว (เมตรต่อวินาที)
 t = เวลา (วินาที)

จากสมการ (2.1) สามารถหาระยะทางจากความเร็วแสง(c) ขณะบินบันทึกข้อมูลภาพ

$$R = \frac{ct}{2} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

เมื่อ R = ระยะทางจากเครื่องวัดไปยังวัตถุ (เมตร)
 c = ความเร็วของแสงกำหนดให้เป็น 299,792,458 เมตรต่อวินาที
 t = ระยะเวลาที่สัญญาณเดินทาง (วินาที)

ดังนั้น จะกล่าวได้ว่าระยะทางของ LiDAR เกิดจากการเคลื่อนที่แบบคลื่นที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา (Pulse Laser) และคลื่นแบบต่อเนื่อง (Continuous Wave)

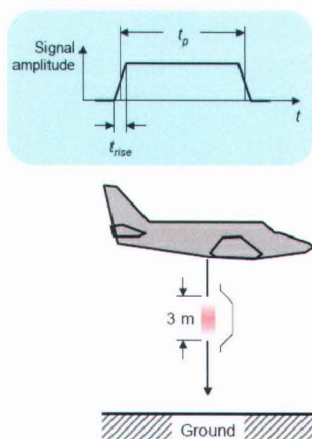
2.1.2 ส่วนประกอบของ Airborne Laser Scanning (ALS)

2.1.2.1 Laser

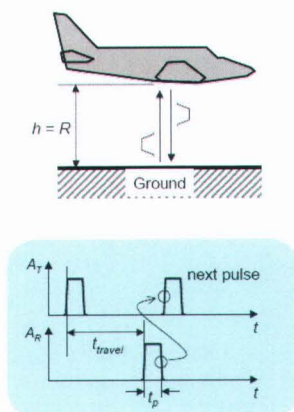
คำว่า Laser ย่อมาจาก Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation หมายถึง แสงเลเซอร์ซึ่งเป็นแสงที่มีสมบัติพิเศษแตกต่างจากแสงทั่วไป แสงเลเซอร์ถูกนำมาใช้ประโยชน์มากมายทั้ง ทางด้านการสื่อสาร การทหาร บันเทิง อุตสาหกรรม และการแพทย์

แสงเลเซอร์ที่ใช้ในระบบ ALS มี 2 แบบคือ Pulsed Laser และ Continuous Wave (CW)

1) Pulsed Laser คุณลักษณะทั่วไปของ Pulsed Laser เป็นการปล่อยแสงเลเซอร์ลงมาเป็นช่วง โดยไม่ต่อเนื่อง

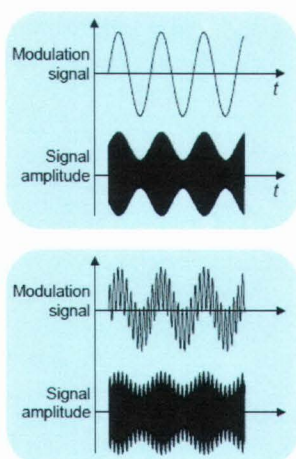


รูปที่ 2.2 แสดงการปล่อยแสงแบบ Pulsed Laser
(Brenner, 2006)

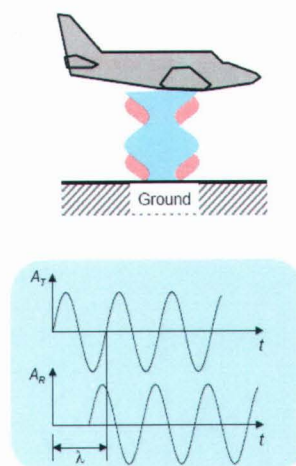


รูปที่ 2.3 แสดงช่วงของ Pulsed Laser
(Brenner, 2006)

2) Continuous Wave (CW) คุณสมบัติทั่วไปของ Continuous Wave เป็นการปล่อยแสงเลเซอร์ลงมาอย่างต่อเนื่อง ซึ่งมีการจำกัดความยาวคลื่นแสงเลเซอร์

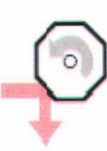
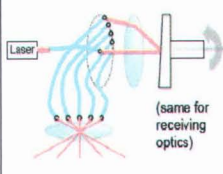
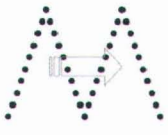
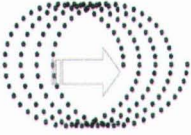
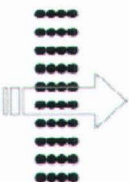


รูปที่ 2.4 แสดงลักษณะคลื่นของ CW
(Brenner, 2006)

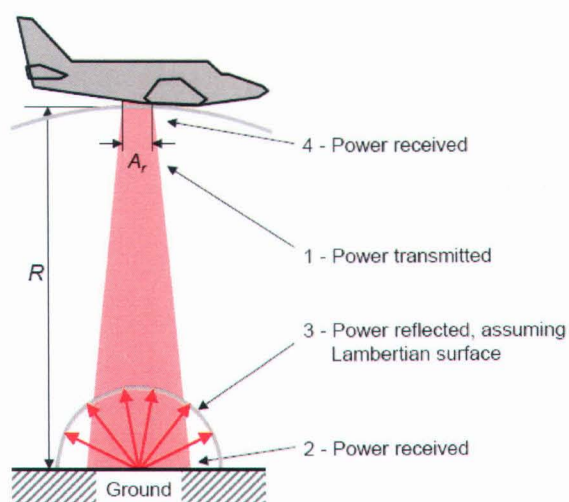


รูปที่ 2.5 แสดงการปล่อยช่วงคลื่นของ CW
(Brenner, 2006)

2.1.2.2 Deflection Unit รูปแบบและผลลัพธ์การ Scanning มี 4 รูปแบบดังต่อไปนี้
 ตารางที่ 2.1 รูปแบบและผลลัพธ์การ Scanning (Brenner, 2006)

กลไกและรูปแบบการ Scanning				
รูปแบบและ ลักษณะการ Scanning	Oscillating mirror	Rotating polygon	Nutating mirror (Palmer scan)	Fiber switch
				
ผลลัพธ์ของ การ Scanning	Z-shaped, sinusoidal	Parallel lines	Elliptical	Parallel lines
				

2.1.2.2.1 สมการสมดุลพลังงาน (Power balance)



รูปที่ 2.6 แสดงการเกิดกำลังส่ง – รับของเลเซอร์ (Brenner, 2006)

จากรูปที่ 2.6 สามารถอธิบายสมการสมดุลพลังงานได้ดังนี้

1) กำลังส่ง (Power transmitted) คือกำลังที่ส่งออกจากเลเซอร์ ซึ่งให้แทนด้วย P_T

2) กำลังรับ (Power received) ติดตั้งภาคพื้นดินคือ กำลังที่รับจากจุดควบคุมภาคพื้นดิน (Ground Control Point) จะได้

$$M \cdot P_T \dots \dots \dots (2.3)$$

3) กำลังสะท้อน (Power reflected) คือกำลังที่สะท้อนเมื่อแสงตกกระทบไปยังวัตถุ ภาคพื้นดินจะได้

$$\frac{\Psi}{2\pi} \cdot \rho \cdot M \cdot P_T \dots \dots \dots (2.4)$$

4) กำลังรับ (Power received) จากเครื่องรับติดตั้งบนอากาศยาน คือ กำลังรับเมื่อแสงสะท้อนจากภาคพื้นดินกลับไปยังตัวเครื่องรับบนอากาศยานจะได้

$$P_r = \frac{A_r}{2\pi R^2} \cdot M \cdot \rho \cdot M \cdot P_T = \frac{\rho M^2 A_r}{2\pi R^2} \cdot P_T \dots \dots \dots (2.5)$$

เมื่อ P_T = กำลังที่ส่งออกจากเลเซอร์ (วัตต์)

P_r = กำลังรับจากเครื่องตรวจวัดที่ติดตั้งบนอากาศยาน (วัตต์)

M = ค่าการเปล่งรังสีของช่วงคลื่นทั้งหมดจากพื้นผิวของวัตถุ (วัตต์ต่อตารางเมตร)

$$M = \sigma T^4$$

σ = ค่าคงที่ของสเตฟานและโบลซ์แมน 5.6697×10^8 วัตต์ต่อตารางเมตรเคลวิน⁴

T = อุณหภูมิ (เคลวิน)

ρ = พลังงานสะท้อน / พลังงานตกกระทบ

2π = มุมที่รองรับที่ศูนย์กลางโดยส่วนโค้งซึ่งยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม

Ψ = พลั๊กซ์ของพลังงาน หมายถึงอัตราการส่งผ่านพลังงานจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง (จูล)

A = พื้นที่ที่แสงเลเซอร์ตกกระทบวัตถุ (ตารางเมตร)

R = ระยะทางจากเครื่องตรวจวัดถึงเป้าหมาย (เมตร)

2.1.2.2.2 ความสามารถในการสะท้อนกลับของวัสดุ

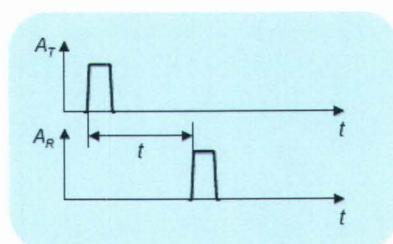
เมื่อเลเซอร์กระทบวัสดุที่มีคุณสมบัติทางกายภาพที่ต่างกัน การสะท้อนกลับได้ของเลเซอร์จะแตกต่างกันไป โดยจะให้ในรูปของสัดส่วนความแรงสัญญาณที่สะท้อนกลับเทียบกับวัตถุที่สะท้อนได้เป็น 100 % และให้ความสามารถสะท้อนกลับ (reflectivity) สำหรับวัสดุต่างๆปรากฏในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.2 ค่าแสดงการสะท้อนของวัสดุ (Brenner, 2006)

MATERIAL	REFLECTIVITY @ $\lambda = 900 \text{ nm}$
Dimension lumber(pine, clean, dry)	94 %
Snow	80-90 %
White masonry	85 %
Limestone, clay	Up to 75 %
Deciduous trees	typ. 60 %
Coniferous trees	typ. 30 %
Carbonate sand (dry)	57 %
Carbonate sand (wet)	41 %
Beach sands, bare areas in desert	typ. 50 %
Rough wood pallet (clean)	25 %
Concrete, smooth	24 %
Asphalt with pebbles	17 %
Lava	8 %
Black rubber tire wall	2%

2.1.2.3 Ranging Unit ระยะที่ใช้ในการวัดในระบบ ALS มี 2 แบบคือ Pulsed Laser และ Continuous Wave

1) Pulsed Laser เครื่องส่ง Pulsed Laser ที่มีกำลังสูง 2,000 วัตต์ มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า Continuous Wave ถึง 85 เท่า ค่าความคลาดเคลื่อนของ Pulsed อยู่ที่ 2-5 เซนติเมตร.



รูปที่ 2.7 แสดงลักษณะช่วงคลื่นของ Pulsed Laser (Brenner, 2006)



การวัดระยะ (Range)

$$R = \frac{c}{2} \cdot t \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

ความละเอียดของการวัด (Range resolution)

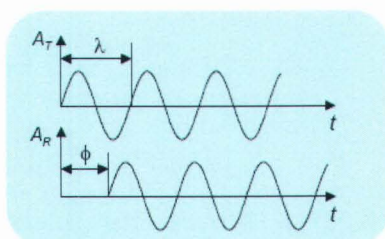
$$\Delta R = \frac{c}{2} \cdot \Delta t \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

ความคลาดเคลื่อนของการวัด (Range accuracy)

$$\sigma_R \propto \frac{c}{2} t_{\text{rise}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S/N}} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

- เมื่อ R = ระยะทางจากเครื่องวัดไปยังวัตถุ (เมตร)
 t = ระยะเวลาที่สัญญาณเดินทาง (วินาที)
 c = ความเร็วของแสงกำหนดให้เป็น 299,792,458 เมตรต่อวินาที
 ΔR = ความละเอียดของการวัด
 Δt = ความต่างของระยะเวลา
 σ_R = ค่าความคลาดเคลื่อนของการวัด
 t_{rise} = ช่วงเวลาที่เปลี่ยนแปลงสัญญาณ (วินาที)
 S/N = อัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน

2) Continuous Wave (CW) เครื่องส่ง CW ที่มีกำลังสูงมากกว่า 2 วัตต์ และความถี่มากกว่า 10 MHz มีความคลาดเคลื่อนมากกว่า Pulsed Laser การวัดในระดับความถูกต้องระดับเซนติเมตร Continuous Wave ไม่สามารถทำได้



รูปที่ 2.8 แสดงลักษณะคลื่นต่อเนื่องของ CW (Brenner, 2006)

การวัดระยะ (Range)

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\phi}{2\pi} \cdot \lambda_{\text{short}} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ความละเอียดของการวัด (Range resolution)

$$\Delta R = \frac{\lambda_{\text{short}}}{4\pi} \cdot \Delta\phi = \frac{c}{4\pi \cdot f_{\text{high}}} \cdot \Delta\phi \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

ความคลาดเคลื่อนของการวัด (Range accuracy)

$$\sigma_R \propto \frac{\lambda_{\text{short}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{S/N}} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

เมื่อ R = ระยะทางจากเครื่องวัดไปยังวัตถุ (เมตร)

2π = มุมที่รองรับที่ศูนย์กลางโดยส่วนโค้งซึ่งยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม

λ_{short} = ความยาวช่วงคลื่น

ΔR = ความละเอียดของการวัด

f_{high} = ค่าความถี่คลื่นสูงสุด

σ_R = ความคลาดเคลื่อนของการวัด

S/N = อัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน

2.1.2.4 INS (Inertial Navigation Sensors) คือระบบนำหนด้วยการวัดความเฉื่อย เป็นระบบช่วยการนำหนที่ประกอบด้วยอุปกรณ์ตรวจวัดการเคลื่อนไหว เช่น เครื่องวัดอัตราเร่งเชิงเส้น (Linear Accelerometer) เครื่องวัดอัตราหมุน (Gyroscope) โดยใช้หลักการวัดความเฉื่อยที่เกิดจากการที่พาหนะที่มีมวลสารเปลี่ยนแปลงสถานะทางตำแหน่งและความเร็ว ซึ่งจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดอัตราเร่งที่สามารถตรวจวัดได้ในรูปของแรงเฉื่อย (Inertial Force) ดังนั้น ผลการคำนวณเชิงเลขและการอินทิเกรต (Integration) อัตราเร่ง (Acceleration) จะได้ความเร็ว (Velocity) และการอินทิเกรตความเร็วจะได้การขจัด (Displacement) เครื่องมือดังกล่าวจะติดตั้งอยู่บนแกนทั้ง 3 แกน (แกน X, แกน Y และ แกน Z) ซึ่งเรียกกันในภาษาเทคนิคว่า IMU (Inertial Measurement Unit)

2.1.2.5 GPS (Global Positioning System) ระบบดาวเทียม GPS เป็นระบบที่ใช้ในการหาพิกัดตำแหน่งโดยการรับสัญญาณดาวเทียม GPS โดยใช้การส่งสัญญาณคลื่นวิทยุลงมายังพื้นโลก เมื่อเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม GPS รับสัญญาณจากดาวเทียมได้แล้วจะนำเอาข้อมูลต่างๆ ที่ได้ไปประมวลผลหาตำแหน่งที่ต้องการ ระบบดาวเทียม GPS ประกอบด้วยส่วนประกอบ 3 ส่วนหลักๆ ได้แก่ ส่วนอวกาศ (Space segment) ส่วนควบคุม (Control segment) และส่วนผู้ใช้ (User segment) โดยส่วนควบคุมจะมีสถานีติดตามภาคพื้นดินที่กระจายอยู่บนพื้นโลกเพื่อคอย

ติดตามการเคลื่อนที่ของดาวเทียม ซึ่งทำให้สามารถคำนวณวงโคจรและตำแหน่งของดาวเทียมที่
 ระยะเวลาต่างๆ ได้ จากนั้นส่วนควบคุมก็จะทำนายวงโคจรและตำแหน่งของดาวเทียมทุกดวงใน
 ระบบล่วงหน้าแล้วส่งข้อมูลเหล่านี้ไปยังส่วนอวกาศซึ่งก็คือตัวดาวเทียม ดาวเทียมก็จะทำการส่ง
 ข้อมูลเหล่านี้ออกมาพร้อมกับคลื่นวิทยุมายังโลก ในส่วนของผู้ใช้เมื่อต้องการจะทราบตำแหน่งของ
 จุดใดๆ ก็เพียงนำเครื่องรับสัญญาณดาวเทียมไปตั้งตรงจุดที่ต้องการหาตำแหน่ง แล้วนำข้อมูลที่ได้
 ไปประมวลผลก็จะทราบตำแหน่งที่ต้องการ (ชูเกียรติ วิเชียรเจริญ, 2549)

2.1.2.6 Control & data recording เป็นตัวควบคุมและบันทึกข้อมูลให้ LiDAR
 สามารถบันทึกข้อมูล ได้ตามตำแหน่งที่ต้องการ

2.2. ความคลาดเคลื่อน

2.2.1 ความคลาดเคลื่อนของข้อมูล LiDAR

1. การวัดโดยใช้เลเซอร์ ได้แก่ ระยะทาง และค่ามุมที่วัดได้ ซึ่งขึ้นอยู่กับการใช้งานของอุปกรณ์
 อิเลคทรอนิกส์ภายในส่งผลให้เกิดค่า drift ตามอายุการใช้งาน
2. การวัดตำแหน่งโดยใช้ระบบดาวเทียมนำหน (Global Navigation Satellite Systems, GNSS) ที่ขึ้นอยู่กับประเภทเครื่องรับสัญญาณดาวเทียม เทคนิคและวิธีการทำงานที่ใช้
3. การหาตำแหน่งโดยใช้ระบบการวัดความเฉื่อย (Inertial Navigation System, INS) ที่ขึ้นอยู่กับประเภทของอุปกรณ์ตรวจวัดความเฉื่อย (Inertial Measure Unit, IMU) อัตราความถี่ที่ใช้บันทึกข้อมูล
4. ค่า offset/alignment ระหว่างอุปกรณ์ GNSS, INS และ laser scanner
5. การเคลื่อนไหวของอุปกรณ์ IMU และ scanner ที่ติดตั้งบนแผ่นยึด
6. การปรับเวลา (Time synchronization) เนื่องจากปกติการวัดตำแหน่งโดยใช้ระบบดาวเทียม GNSS จะมีอัตราการบันทึกข้อมูล 1-10 Hz ซึ่งต่ำกว่าระบบ INS ที่มีอัตราการบันทึกข้อมูล สูงถึง 200 Hz
7. การแปลงค่าพิกัดไปสู่ระบบพิกัดท้องถิ่น (local coordinate system)
8. การกำหนดค่าของข้อมูลพื้นฐานทางเรขาคณิต

2.2.2 สาเหตุของความคลาดเคลื่อน

ซึ่งจากสาเหตุของความคลาดเคลื่อนของข้อมูล LiDAR ดังกล่าวสามารถ แบ่งได้เป็น 3 สาเหตุ (Willers et al., 2008) ได้แก่

2.2.2.1 ความผิดพลาดประเภทเส้นเลอ (Mistake or blunders)

ความผิดพลาดจะถือว่าเป็นความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่ ที่เกิดขึ้นในส่วนของผู้วัดมีผลมาจากการขาดความระมัดระวัง หรือเกิดความสับสน โดยทั่วไปความผิดพลาดจะไม่ถูกจัดเป็นความคลาดเคลื่อน และสามารถจัดออกไปได้โดยทำการตรวจสอบเฉพาะแยกออกต่างหาก แล้วจึงแก้ไขโดยการวัดใหม่

2.2.2.2 ความคลาดเคลื่อนแบบมีระบบ (Systematic Error)

ความคลาดเคลื่อนเชิงระบบ เป็นความคลาดเคลื่อนของการวัดซึ่งเป็นไปตามกฎทางกายภาพหรือธรรมชาติ แสดงได้โดยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ถ้าเงื่อนไขที่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนถูกวัดมาค่าแก้ก็สามารถคำนวณได้ และความคลาดเคลื่อนเชิงระบบนี้จะถูกขจัดออกไปได้ เช่น ค่า drift ตามอายุการใช้งานของอุปกรณ์ตรวจวัดโดยใช้เลเซอร์ ค่าคลาดเคลื่อนของ GNSS ที่เกิดจากวงโคจรดาวเทียม การเดินทางของคลื่นผ่านชั้นบรรยากาศ และนาฬิกาของดาวเทียมและเครื่องรับที่สามารถขจัดได้โดยใช้แบบจำลองและเทคนิคการหาค่าต่าง ค่า offset/alignment ระหว่างอุปกรณ์ GNSS, INS และ laser scanner การปรับเวลา(Time synchronization) และการแปลงพิกัดไปสู่ระบบพิกัดท้องถิ่น

2.2.2.3 ความคลาดเคลื่อนแบบสุ่ม (Random Error)

ภายหลังจากความผิดพลาดและความคลาดเคลื่อนเชิงระบบถูกขจัดออกไปจากค่าการวัดแล้ว ยังมีความคลาดเคลื่อนขนาดเล็กเหลืออยู่ ที่เรียกว่า ความคลาดเคลื่อนสุ่ม เช่น การเกิดคลื่นสะท้อนและสัญญาณรบกวนของอุปกรณ์รับสัญญาณ GNSS เป็นต้น

2.3 การใช้ภาพถ่ายทางอากาศเพื่อพิจารณาดำแหน่งข้อมูล LiDAR

2.3.1 ภาพถ่ายทางอากาศ (Aerial Photograph)

การใช้ภาพถ่ายทางอากาศ ซึ่งภาพถ่ายทางอากาศที่ใช้เป็นภาพออร์โทสตี ซึ่งติดกล้องบันทึกภาพบนอากาศยานและเก็บข้อมูลพร้อมกันกับข้อมูล LiDAR ดังนั้นจากการบินถ่ายและบันทึกข้อมูล ณ ตำแหน่งเวลาเดียวกัน ทำให้เราวิเคราะห์ได้ว่าข้อมูลมีพิกัดเดียวกัน เมื่อเราต้องการพิจารณาค่าความสูงที่เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งต่างๆ ซึ่งในงานวิจัยนี้เราพิจารณาความสูงที่สามารถตรวจสอบได้ ซึ่งได้แก่ ความสูงของอาคารและถนน ดังนั้นจึงต้องใช้ภาพถ่ายทางอากาศบริเวณพื้นที่ที่มีอาคารและถนนมาทำการซ้อนทับเพื่อให้ทราบตำแหน่งความสูงของ LiDAR บนพื้นที่อาคารและถนน ระหว่างความสูงที่ได้จากการเก็บข้อมูล LiDAR ของแนวนอนที่ 1 และทำการเปรียบเทียบความ

สูงจากการเก็บข้อมูล LiDAR ของแนวกบินที่ 2 ซึ่งเปรียบเทียบและวิเคราะห์ได้ว่า ณ ความสูงของ LiDAR บนพื้นที่ลักษณะและตำแหน่งเดียวกันความสูงในการเก็บข้อมูลของแนวกบินที่ 1 และ แนวกบินที่ 2 ต้องมีความสูงเท่ากัน และเพื่อความถูกต้องของจุดในตำแหน่งของภาพบนพื้นที่ภาพถ่ายทางอากาศจำเป็นต้องมีการหาขอบวัตถุของอาคารและแนวถนนเพื่อความชัดเจนและถูกต้องของจุดที่อยู่ในพื้นที่บริเวณเดียวกัน

2.3.2 การหาขอบวัตถุ (Edge Detection)

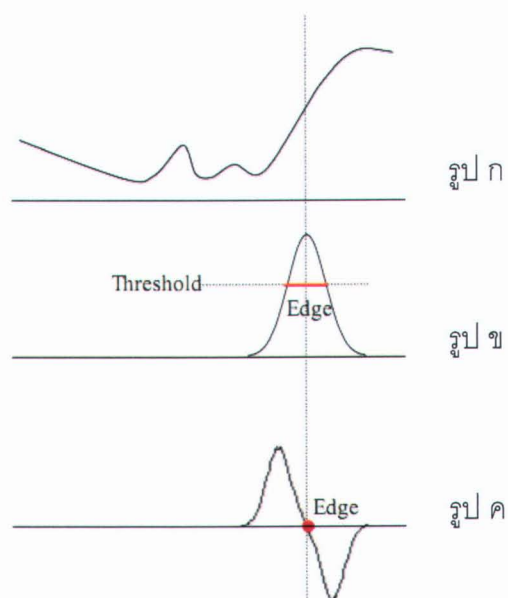
เป็นการหาเส้นรอบวัตถุที่อยู่ในภาพ เมื่อทราบเส้นรอบวัตถุ เราจะสามารถคำนวณพื้นที่ (ขนาด) หรือรู้จักชนิดของวัตถุนั้นได้ อย่างไรก็ตาม การหาขอบวัตถุที่ถูกต้องสมบูรณ์ไม่ใช่เรื่องที่ย่าง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาขอบวัตถุที่มีคุณภาพต่ำ มีความแตกต่างระหว่างพื้นหน้ากับพื้นหลังน้อย หรือมีความสว่างไม่สม่ำเสมอทั่วภาพ

ขอบวัตถุเกิดจากความแตกต่างของความเข้มแสงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง หากค่าความต่างนี้มีค่ามาก ขอบวัตถุก็จะเห็นได้ชัด ถ้าความแตกต่างมีค่าน้อย ขอบวัตถุก็จะไม่ชัดเจน

การหาขอบวัตถุหรือการตรวจสอบว่าเส้นขอบลากผ่านหรือใกล้เคียงกับจุดใด โดยวัดจากการเปลี่ยนแปลงของความเข้มในตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับจุดดังกล่าว ซึ่งวิธีการหาขอบนั้นมีด้วยกันหลายวิธี แต่อย่างไรก็ตามสามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่มหลัก คือ Gradient method และ Laplacian method โดยในแต่ละวิธีมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ (Castleman, 1996)

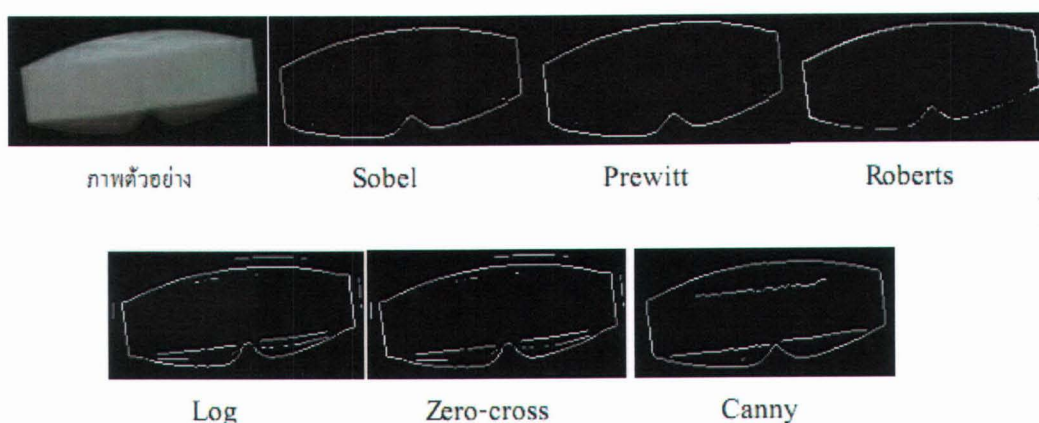
1) Gradient method วิธีนี้จะหาขอบโดยการหาจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดในรูปของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของภาพ โดยจุดที่เป็นขอบจะอยู่ในส่วนที่เหนือค่า Threshold (ภาพที่ 2.9 ในรูป ข) จึงอาจทำให้เส้นขอบที่ได้มีลักษณะหนา ตัวอย่างวิธีการหาขอบของกลุ่มนี้ เช่น Roberts, Prewitt, Sobel และCanny เป็นต้น

2) Laplacian method จะหาขอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2 โดยใช้จุดที่ค่า y เป็น 0 (Zerocrossing) (ภาพที่ 2.9 ในรูป ค) ซึ่งวิธีนี้จะใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า Gradient method ตัวอย่างวิธีการหาขอบของกลุ่มนี้เช่น Laplacian of Gaussian และ Marrs-Hildreth เป็นต้น



ภาพที่ 2.9 กราฟแสดงการหาขอบด้วยวิธี Gradient method รูป ข และ Laplacian method รูป ค โดย รูป ก แสดงถึงความแตกต่างของระดับความเข้มของสี (GIMP, 2010)

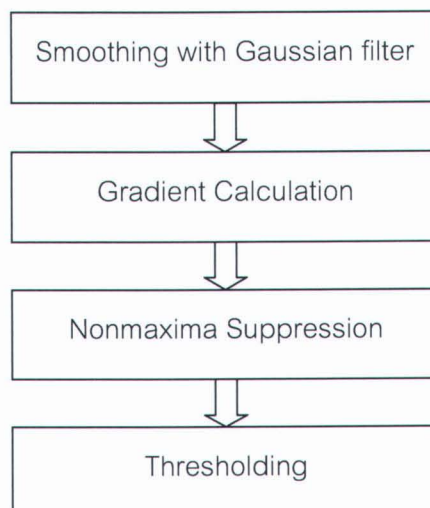
ในตัวอย่างนี้ได้ใช้โปรแกรม Matlab 2008a ช่วยในการหาขอบวัตถุ ซึ่งมีคำสั่งที่ใช้ในการหาขอบทั้งหมด 6 วิธี (Semmlow 2004:368-370) ดังนี้ Roberts, Sobel, Canny, Laplacian of Gaussian, zero cross และ Prewitt โดยในตัวอย่างงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธี Canny ในการหาขอบวัตถุ เนื่องจากวิธีดังกล่าวมีการใช้ Gaussian filter ก่อนการหาขอบจึงสามารถควบคุมระดับความละเอียดของขอบที่ต้องการและสามารถลดสัญญาณรบกวนได้ ทำให้สามารถตัดขั้นตอนการประมวลผลภาพเบื้องต้น (preprocessing) ตัวอย่างภาพที่ผ่านการหาขอบทั้ง 6 วิธีโดยใช้โปรแกรม Matlab 2008a ดังแสดงในภาพที่ 2.10 ซึ่งจากรูปตัวอย่างจะพบว่าการหาขอบวัตถุด้วยวิธี Canny จะให้รายละเอียดขอบวัตถุดีที่สุดและใช้ได้ในกรณีที่สีแต่ละสีมีความแตกต่างกันน้อยเมื่อเทียบกับวิธีอื่นๆ



ภาพที่ 2.10 ตัวอย่างการหาขอบวัตถุโดยใช้ Edge detector แบบต่าง ๆ (Semmlow, 2004)

2.3.3 Canny Edge Detection Algorithm

ขั้นตอนการหาขอบวัตถุโดยวิธีของ Canny ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังภาพที่ 2.11



ภาพที่ 2.11 ขั้นตอนการหาขอบวัตถุโดยวิธีของ Canny (Canny, 1986)

การทำงานของ Canny edge detection นั้นเริ่มต้นจากการปรับภาพให้เรียบ (Smoothing) ด้วยตัวกรองเกาส์เซียน (Gaussian filter) เพื่อกำจัดสัญญาณรบกวน หลังจากนั้นจะคำนวณค่าขนาด (magnitude) และทิศทาง (orientation) ของ gradient โดยใช้การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ถัดมาจึงใช้ nonmaxima suppression กับขนาด (magnitude) ของ gradient เพื่อให้ได้ขอบที่บางลง และในขั้นตอนสุดท้ายจะใช้ double thresholding algorithm เพื่อหาพิกเซลที่เป็นขอบและทำการเชื่อมต่อขอบ (Canny, 1986) โดยในแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.3.3.1 Smoothing

ในขั้นตอนแรกของการหาขอบโดยอัลกอริทึมนี้จะต้องกำจัดสัญญาณรบกวนออกก่อน โดยใช้ Gaussian filter ซึ่งสามารถคำนวณได้จากการใช้กรอบ (mask) ขนาดเล็ก ขนาดของ Gaussian mark นี้หากมีขนาดกว้างจะมีผลทำให้ลดสัญญาณรบกวนได้มาก แต่ถ้ากว้างมากเกินไปจะมีผลทำให้ขอบย่อย ๆ ที่เป็นส่วนรายละเอียดนั้นหายไป สำหรับการคำนวณหาภาพที่ได้จากการใช้ Gaussian filter เป็นดังสมการที่ 2.12

$$S[i, j] = G[i, j, \sigma] * I[i, j] \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

กำหนดให้

$I[i, j]$ เป็นภาพที่ต้องการหาขอบ

$G[i, j, \sigma]$ เป็น Gaussian smoothing filter

σ เป็น spread of the Gaussian (ควบคุมระดับของการ smoothing)

$S[i, j]$ เป็น smoothing image

2.3.3.2 Gradient calculation

ในขั้นแรกนำ Smoothing image $S[i, j]$ มาสร้าง x, y partial derivatives $P[i, j]$ และ $Q[i, j]$ ตามลำดับ ดังสมการที่ 2.13a และ 2.13b

$$P[i, j] = (S[i, j + 1] - S[i, j] + S[i + 1, j + 1] - S[i + 1, j]) / 2 \dots\dots\dots (2.13a)$$

$$Q[i, j] = (S[i, j] - S[i + 1, j] + S[i, j + 1] - S[i + 1, j + 1]) / 2 \dots\dots\dots (2.13b)$$

หลังจากนั้นนำค่า x, y partial derivatives มาคำนวณด้วยสูตรมาตรฐานสำหรับการแปลงรูปแบบจาก rectangular ไปเป็น polar (rectangular-to-polar conversion) เพื่อหาขนาดและทิศทางของ gradient ตามสมการที่ 2.13c และ 2.13d

$$M[i, j] = \sqrt{P[i, j]^2 + Q[i, j]^2} \dots\dots\dots (2.13c)$$

$$\sqrt{[i, j]} = \arctan(Q[i, j], P[i, j]) \dots\dots\dots (2.13d)$$

2.3.3.3 Nonmaxima Suppression

สำหรับการหาขอบโดย Canny method จุดที่ถือเป็นเส้นขอบได้นั้นต้องเป็นจุดที่ให้ค่าสูงสุดเฉพาะที่และเป็นทิศทางเดียวกับ gradient ด้วย ซึ่งด้วยวิธีดังกล่าวนี้ทำให้ได้ขอบที่บางเพียง 1 พิกเซล ภาพที่ได้หลังการทำ Nonmaxima Suppression จะให้ค่าเป็นศูนย์ในทุกจุดยกเว้นที่เป็น local maxima Points ซึ่งยังคงค่าเดิมไว้

2.3.3.4 Thresholding

แม้ว่าภาพจะผ่านการ smoothing ในขั้นตอนแรกแล้วก็ตาม ภาพที่ได้ก็ยังจะมีเส้นขอบที่ไม่ใช่ขอบที่แท้จริงปรากฏอยู่เนื่องมาจากสัญญาณรบกวนหรือลักษณะของวัตถุในภาพเป็นพื้นผิวที่มีลวดลายหรือมีรายละเอียดภายในมาก ดังนั้นเพื่อลดปัญหาดังกล่าวจึงได้มีการกำหนดค่า threshold ขึ้นมา 2 ค่า คือ high threshold (T1) และ low threshold (T2) โดยพิกเซลที่มีค่ามากกว่า T1 จะปรับเป็น 1 (เป็นพิกเซลที่เป็นขอบ) แต่ถ้าน้อยกว่า T2 จะถูกปรับเป็น 0 ส่วนค่าที่อยู่ระหว่างค่า threshold ทั้งสอง การปรับเป็นค่า 0 หรือ 1 นั้นขึ้นอยู่กับพิกเซลที่อยู่รอบข้าง หากพบว่าพิกเซลที่อยู่รอบข้างของพิกเซลที่เป็นขอบ (ค่า > T1) มีค่ามากกว่า T2 แล้ว จะปรับค่าพิกเซลดังกล่าวให้มีค่าเป็น 1 และถือเป็นหนึ่งในขอบวัตถุด้วยเช่นกัน

2.4 แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ในการปรับแก้ความคลาดเคลื่อน

ในการศึกษาวิเคราะห์ระบบหรือการแก้ปัญหาด้วยวิธีเชิงปริมาณ (Quantitative methods) จะเป็นวิธีการที่ใช้ข้อมูลและเครื่องมือคำนวณเป็นสำคัญ ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 วิธีการใหญ่ ๆ คือ วิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical methods) หรือวิธีเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical methods) และวิธีการจำลอง (simulation methods)

ตัวแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical simulation models) จัดเป็นตัวแบบคณิตศาสตร์ประเภทหนึ่ง ต่อไปจะเรียกสั้น ๆ ว่า “ตัวแบบจำลอง” การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงต้องอาศัยความรู้ในเนื้อหาเรื่องนั้นก่อน แล้วจึงใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการช่วยทดสอบแก้ปัญหา แบบจำลองเชิงคณิตแยกเป็น 2 ส่วน คือ

(1) ฟังก์ชันนอลโมเดล (Functional Model) เป็นแบบจำลองที่อธิบายถึงคุณสมบัติที่ทราบได้แน่นอน เช่น แบบจำลองทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมระนาบ ซึ่งบอกลักษณะได้ด้วย มุมสามมุม ด้านสามด้าน หรือพิกัดจุดยอดเป็นต้น และแบบจำลองนี้จะเป็นสิ่งเริ่มต้นของการวางแผนทำการวัด

(2) สโตคาสติกโมเดล (Stochastic Model) เป็นแบบจำลองที่อธิบายถึงคุณสมบัติที่ทราบได้ไม่แน่นอน นั่นคือ เป็นรูปแบบของการศึกษาทางสถิติของการหาค่าการวัด โดยที่ข้อสันนิษฐานบนคุณสมบัติทางสถิติของตัวแปรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องจะนำไปสู่แบบจำลองนี้ สโตคาสติกโมเดลในทฤษฎีของการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์จะใช้คำว่า ความคลาดเคลื่อนของการวัดหรือคุณสมบัติความคลาดเคลื่อนของค่าการวัด

2.4.1 วิธีการคำนวณปรับแก้ค่าคลาดเคลื่อนด้วยวิธีลีสท์สแควร์

การปรับแก้ (Adjustment) จะมีความหมายก็ต่อเมื่อปริมาณของข้อมูลมีมากกว่าจำนวนต่ำสุดที่จำเป็นต้องใช้หาคำตอบ ๆ เดียวสำหรับแต่ละค่าของปัญหานั้น ๆ หรืออีกนัยหนึ่งคือมี redundant data หรือ redundant observation โดยทั่วไปแล้วค่าที่แท้จริงของปริมาณใด ๆ เป็นสิ่งที่ไม่มีใครทราบได้ ในทางปฏิบัติจึงต้องอาศัยการวัด (measurement) หรือการสังเกต (observation) จะโดยตรงหรือโดยทางอ้อมเพื่อใช้คาดคะเนหรือคำนวณหาปริมาณที่ต้องการทราบนั้น ๆ ข้อมูลที่ได้ดังกล่าวย่อมเปลี่ยนแปลงหรือขึ้น ๆ ลง ๆ (fluctuate) ได้ตามทฤษฎีของความน่าจะเป็นและสถิติ ซึ่งเรียกกันว่ามีความคลาดเคลื่อน (errors) ค่าคำตอบที่ได้จากข้อมูลที่มีมากเกินไปตามปกติจะไม่แน่นอน ในนัยที่ว่า ถ้าเอากลุ่มย่อย ๆ ของข้อมูลจำนวนเพียงพอที่จะให้คำตอบได้มาหาคำตอบ แต่ละกลุ่มจะให้คำตอบต่างกัน ตัวอย่างเช่นการหาสมการเส้นตรงโดยมีจุดอยู่หลายจุด แต่ละ 2 จุดใดๆ อาจจะทำให้สมการที่แตกต่างกันออกไปในขณะเดียวกันการวัดใด ๆ ก็ควรที่จะต้องวัดให้มีจำนวนข้อมูลมากกว่าจำนวนต่ำสุดที่จำเป็นเพื่อตรวจสอบความผิดพลาด (mistake หรือ blunder) ที่อาจจะเกิดขึ้น เพื่อที่จะให้ได้คำตอบเดียว จากข้อมูลที่มีอยู่จึงจำเป็นต้องมีมาตรการบางอย่างเพิ่มเข้าไป อาทิเช่น เทคนิคของลีสท์สแควร์ (วิชา จีวาลัย, 2522)

2.4.2 ชนิดวิธีของการปรับแก้ด้วยลิสต์สแควร์

ในการปรับแก้ข้อมูลของงานสำรวจโดยใช้หลักการของลิสต์สแควร์นั้น สามารถกระทำได้หลายวิธีตามลักษณะของแบบจำลองเชิงคณิต แต่วิธีที่นิยมใช้กันอยู่เสมอมิ 2 วิธี คือ

1. วิธีสมการการวัด (Observation Equation Method) เป็นวิธีการปรับแก้ในรูปแบบจำลองเชิงคณิต $L_a = F(X_a)$ โดยที่สมการวัด คือ สมการที่ได้จากการนำเอาข้อมูลการวัดหนึ่งค่ามาเขียนเป็นสมการได้หนึ่งสมการ ซึ่งในสมการนั้นจะประกอบด้วยพารามิเตอร์หรือตัวไม่ทราบค่าอย่างน้อยหนึ่งตัว

2. วิธีสมการเงื่อนไข (Condition Equation Method) เป็นวิธีการปรับแก้ในรูปแบบจำลองเชิงคณิต $F(L_a) = 0$ โดยที่สมการเงื่อนไข คือ สมการที่แสดงกฎเกณฑ์หรือเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ระหว่างข้อมูลการวัดต่างๆ กลุ่มหนึ่ง

ผลลัพธ์ของการปรับแก้ทั้งสองวิธีที่ได้จะเหมือนกัน เพราะหลักการของลิสต์สแควร์จะให้ผลลัพธ์ที่เป็นเอกภาพ (Unique) คือมีคำตอบเดียว และในการเลือกใช้วิธีการให้เหมาะสมนั้นขึ้นอยู่กับองค์ประกอบที่สำคัญ คือ การเขียนสมการของแบบจำลองเชิงคณิตและการแปลงสมการให้เป็นสมการเชิงเส้น (Linear Equation) (วัฒนะ ทวนพรมราช, 2537)

2.4.2.1 การปรับแก้ด้วยลิสต์สแควร์โดยวิธีสมการค่าสังเกต (Least Squares

Adjustment by Method of Observation Equations)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกรณีนี้เขียนได้เป็น

$$L_a = F(X_a) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

เมื่อกำหนดค่าประมาณ X_0 ขึ้นมาได้แล้วหากแทนค่า X_a ด้วย X_0 ใน $F(X_a)$ จะได้ $F(X_0)$ สมมติให้ค่า $F(X_0)$ เป็น L_0 และให้

$$L = L_0 - L_b \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

หากสมการ (2.14) เป็นสมการเชิงเส้น (เป็น linear combination ของ X) ก็ไม่จำเป็นต้องหาค่า X_0 โดยอาจถือเป็นศูนย์ไป กรณีเช่นนี้ L_0 จะมีค่าเท่ากับค่า constant ของสมการ จากสมการ (2.14) เราสามารถเขียนได้เป็น (วิชา จีวาลัย, 2522)

$$L_b + V = F(X_a) \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

$$L_b + V = F(X_0 + X) \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

$$L_b + V = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X=X_0} (X)$$

$$L_b + V = F(X_0) + AX$$

หรือ $L_b + V = L_0 + AX$ (2.18)

$$V = AX + (L_0 - L_b)$$

$$V = AX + L$$
 (2.19)

หลักการของลีสทส์แควร์คือต้องการให้ $V^T PV \rightarrow \text{Minimum}$

โดยจะทำการคำนวณค่า

- $N = A^T PA$
- $U = A^T PL$
- $X = -N^{-1}U$
- $X_a = X_0 + X$
- $L_a = L_0 + AX$
- $V = L_a - L_b$

2.4.2.2 การปรับแก้ด้วยลีสทส์แควร์โดยวิธีสมการเงื่อนไข (Least Squares

Adjustment by Method of Condition Equations)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกรณีนี้เขียนได้เป็น

$$F(L_a) = 0$$
 (2.20)

เมื่อ $L_a = L_b + V$

แทนค่า $L_a = L_b + V$ ในสมการที่ (2.20) สามารถเขียนได้ในรูป

$$F(L_b + V) = 0$$
 (2.21)

หากแทนค่า L_a ในสมการ (2.20) ด้วย L_b จะได้ค่าตัวเลขซึ่งมักไม่เป็นศูนย์เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อน
บรรจบ (misclosure) แทนด้วย W

จะได้ $F(L_b) = W$ (2.22)

หากสมการ(2.20)เป็นสมการเชิงเส้น สมการ(2.21)ก็เป็นสมการเชิงเส้นและสามารถเขียนในรูปของ

$$F(L_b) + BV = 0$$
 (2.23)

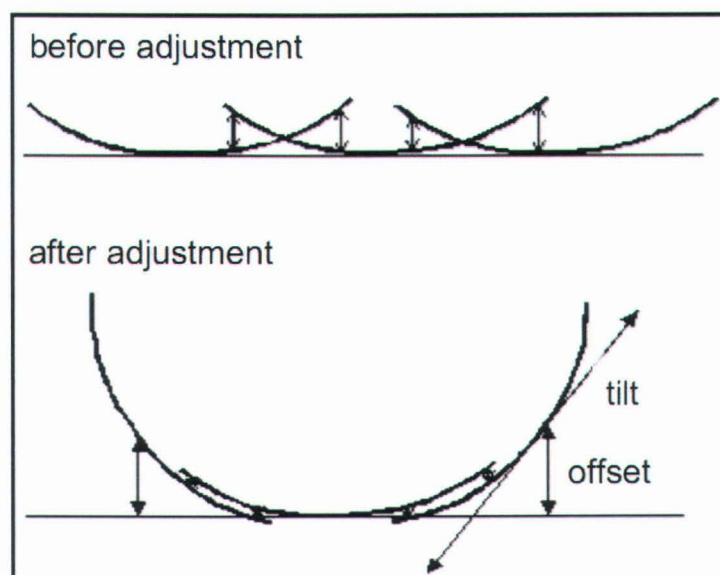
หรือ $BV + W = 0$ (2.24)

ในรูปสมการ(2.24)คือ $BV + W = 0$ ซึ่งเรียกว่าสมการเงื่อนไข

โดยจะทำการคำนวณค่า

- $M = BP^{-1}B^T$
- $K = -M^{-1}W$
- $V = P^{-1}B^T K$
- $L_a = L_b + V$

2.4.3 สมการระนาบและปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์



รูปที่ 2.12 แสดงภาพก่อนและหลังการปรับแนวนิน (Brenner, 2006)

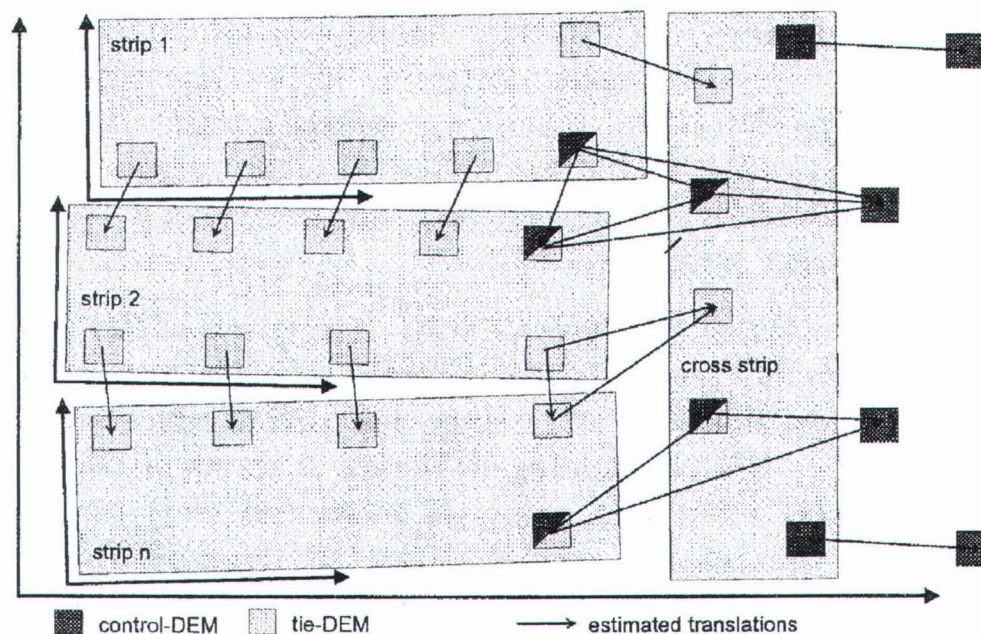
ซึ่งจากสมการที่ใช้ในการปรับแก้เป็นสมการระนาบระหว่างแนวนินดังสมการที่ 2.25 (Brenner, 2006)

$$\Delta H = a_s + b_s(X - X_s^c) + c_s(Y - Y_s^c) - a_t - b_t(X - X_t^c) - c_t(Y - Y_t^c) \dots\dots\dots (2.25)$$

- เมื่อ
- s = แนวนินที่ 1, t = แนวนินที่ 2
 - a_s = ระยะห่างความสูงของจุดศูนย์กลาง แนวนินที่ 1
 - b_s = แนวเอียงตามทิศทางการบินของเครื่องบิน แนวนินที่ 1
 - c_s = แนวเอียงตั้งฉากกับทิศทางการบินของเครื่องบิน แนวนินที่ 1
 - X_s^c, Y_s^c = จุดศูนย์กลางของแนวนินที่ 1
 - a_t = ระยะห่างความสูงของจุดศูนย์กลาง แนวนินที่ 2
 - b_t = แนวเอียงตามทิศทางการบินของเครื่องบิน แนวนินที่ 2
 - c_t = แนวเอียงตั้งฉากกับทิศทางการบินของเครื่องบิน แนวนินที่ 2
 - X_t^c, Y_t^c = จุดศูนย์กลางของแนวนินที่ 2

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Kilian, Haala and Englich (1996) ทำการปรับแก้ข้อมูล LiDAR ระหว่างแนวนบิน โดยใช้วิธีการเหมือนกับการปรับแก้ทาง Photogrammetric คือการใช้ค่าความแตกต่างของพารามิเตอร์ 6 พารามิเตอร์มาช่วยในการหาสมการที่นำมาใช้ในการปรับแก้ พารามิเตอร์ดังกล่าวประกอบด้วย ΔX , ΔY , ΔZ , $\Delta \omega$, $\Delta \phi$, $\Delta \kappa$ และในการเลือกจุดที่จะนำมาใช้เป็นตัวแทนของแนวนบิน จะเลือกจากจุดตัดของถนน และจุดจากมุมของอาคาร เพื่อนำมาใช้ในการโยงยึดข้อมูล ดังแสดงในรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แสดงการปรับแก้ระหว่างแนวนบินโดยใช้วิธีการเดียวกับการปรับแก้ทาง Photogrammetric

Crombaghs, Min and Bruegelmann (2000) ทำการปรับแก้ข้อมูล LiDAR จากการซ้อนทับแนวนบินโดยใช้ค่าการปรับแก้จาก ground control point มาทำการสร้างระนาบอ้างอิง เพื่อใช้ในการปรับแก้ข้อมูล LiDAR ที่มีความคลาดเคลื่อนจากการซ้อนทับแนวนบิน ด้วยวิธีการปรับแก้สี่เหลี่ยมผืนผ้า ข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบในงานวิจัยนี้ จะทำการเลือกจากพื้นที่ที่มีการซ้อนทับแนวนบิน 2 แบบ คือ Along overlap และ Across overlap

Willers, J., et al., (2008) ได้ทำการศึกษาเรื่องอัลกอริทึมเพื่อการปรับแก้ความคลาดเคลื่อนจากการซ้อนทับของข้อมูล LiDAR สำหรับพื้นที่เกษตรกรรม ซึ่งได้สร้างแบบจำลองค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization Model) มาใช้ลด error แต่แบบจำลองค่าที่เหมาะสมที่สุด ที่ปรับแก้ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมผืนผ้า เหมาะสำหรับการปรับแก้ข้อมูลในพื้นที่ขนาดเล็ก โดยทำการแบ่งข้อมูลทีปรับเป็น shape files เป็น k ชุด โดย

$$S_k = \{(i, j) | \text{Sub } X_k \leq x_{ij} < \text{Sup } X_k \text{ and}$$

$$\text{Sub } Y_k \leq y_{ij} < \text{Sup } Y_k\}$$

เมื่อ S_k คือ เซตของจำนวนจุดในกลุ่ม k

Sub คือ ค่าที่มีขนาดเล็กกว่า x_{ij}

Sup คือ ค่าที่มีขนาดใหญ่กว่า x_{ij}

ขั้นตอนมาการจัดค่าข้อมูลที่มีการยกตัว ก่อนปรับมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation) เกินกว่าค่าที่กำหนด (t)

$$K' = \left\{ k \left| \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^L \sigma_{ik}^2}}{L} \leq t \right. \right\} \quad \dots\dots\dots (2.26a)$$

where

$$\sigma_{ik}^2 = \frac{\sum_{i,j \in S_i} (e_{ij} - E_{ik})^2}{n_{ik} - 1} \quad \dots\dots\dots (2.26b)$$

and

$$E_{ik} = \frac{\sum_{i,j \in S_i} e_{ij}}{n_{ik}} \quad \dots\dots\dots (2.26c)$$

เมื่อ K' คือ เป็นจำนวนกลุ่ม โดยที่ให้ K' มีค่าน้อยลงเป็น k โดยที่ $k \leq t$

L คือ จำนวน Strip

t คือ ค่าคงที่

σ_{ik}^2 คือ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

e_{ij} คือ ค่า error จริงของจุดที่ j บน Strip i

n_{ik} คือ จำนวนจุดใน Strip i ในกลุ่ม k

E_{ik} คือ ค่าเฉลี่ยของ error ทั้งหมดในกลุ่ม k

ให้ B_k เป็นค่าเฉลี่ยของการยกตัวของกลุ่ม k ก่อนการปรับค่าและ A_k เป็นค่าเฉลี่ยของการยกตัวของกลุ่มเดียวกันหลังปรับค่า ($k \in K'$) หาได้โดย

$$B_k = \frac{\sum_{(i,j) \in S_i} e_{ij}}{n_k} \text{ and } A_k = \frac{\sum_{(i,j) \in S_i} (e_{ij} + a_i)}{n_k} = B_k + \sum_{i=1}^{L-1} \frac{n_{ik}}{n_k} a_i \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

ให้ V_k เป็นเป็นผลรวมของกำลังสองของเศษเหลือในกลุ่ม $(k \in K')$ หลังจากปรับแต่งข้อมูลแล้ว

$$V_k = \sum_{(i,j) \in S_i} (e_{ij} + a_i - A_k)^2 \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

เมื่อ B_k คือ ค่า error เฉลี่ยก่อนที่จะปรับแก้

A_k คือ ค่า error เฉลี่ยหลังการปรับแก้

V_k คือ ค่าผลรวมกำลังสองของเศษคงเหลือ

เพื่อลดค่า error ให้เหลือน้อยที่สุด ทำการ minimize ผลรวมของกำลังสอง โดยหาค่าของตัวแปรตัดสินใจ a_i , $i=1, 2, \dots, L-1$ ที่เป็นคำตอบของปัญหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยไม่มีสมการข้อจำกัด (Unconstrained Optimization)

$$\min_{a_i} \sum_k V_k = \sum_k \sum_{(i,j) \in S_i} (e_{ij} + a_i - A_k)^2 \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

เนื่องจากสมการเป้าหมายใน (2.29) เป็นฟังก์ชัน convex ดังนั้นจะมีค่าต่ำสุดแน่นอนเป็นคำตอบเดียว โดยการซ้ำ (Iterations) จะได้ค่าของแต่ละแถบ และเมื่อทำการปรับค่าแล้ว ค่าของตัวแปรตัดสินใจจะทำหน้าที่เป็นค่าคงที่สำหรับแถบถัดไป การหาค่าน้อยที่สุดใน (2.29) จะสมมูลกัน

$$\begin{aligned} \min_{a_i} \sum_k \sum_{(i,j) \in S_i} & \left[2(e_{ij} - B_k) \left(a_i - \sum_{l=1}^{L-1} \frac{n_{lk}}{n_k} a_l \right) + \left(a_i - \sum_{l=1}^{L-1} \frac{n_{lk}}{n_k} a_l \right)^2 \right] \\ \text{which is equal to} & \\ = \sum_{l=1}^{L-1} 2 \left\{ \sum_k \sum_{(i,j) \in S_i} (e_{ij} - B_k) - \sum_k \sum_{(i,j) \in S_i} (e_{ij} - B_k) \frac{n_{lk}}{n_k} \right\} a_l & \\ + \sum_{l=1}^{L-1} \left(n_l - \sum_k \frac{n_{lk}^2}{n_k} \right) a_l^2 - \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{s=1, s \neq l}^{L-1} 2a_l a_s \left(\sum_k \frac{n_{lk} n_{sk}}{n_k} \right) & \dots\dots\dots (2.30) \end{aligned}$$

หารด้วยสมการที่ (2.27) แล้วหาอนุพันธ์อันดับที่ 1

$$\frac{\partial \sum_k V_k}{2\partial a_1} = \sum_k \left\{ \sum_{(i,j) \in S_k} (e_{ij} - B_k) - \sum_{(i,j) \in S_k} (e_{ij} - B_k) \frac{n_{lk}}{n_k} \right\} + \left(n_1 - \sum_k \frac{n_{lk}^2}{n_k} \right) a_1 - \sum_{s=1, s \neq 1}^{L-1} a_s \left(\sum_k \frac{n_{lk} n_{sk}}{n_k} \right) \dots\dots\dots (2.31)$$

$$l = 1, \dots, L-1$$

สมการ (2.30) เป็น convex ดังนั้นสามารถหาค่าผลเฉลยโดยให้สมการ (2.31) เท่ากับ 0

Csanyi (2006) ความแม่นยำในการวางตำแหน่ง LiDAR ของการเชื่อมโยงเส้นทางเป้าหมายเฉพาะภาคพื้น การวางตำแหน่งการเชื่อมโยงเส้นทางเพื่อสนับสนุนการวางแผนเชิงวิศวกรรมเพื่อให้เกิดความแม่นยำของข้อมูล LiDAR ซึ่งระบบ LiDAR นั้นสามารถให้อัตราความต่อเนื่องได้ถึง 100 KHz, และมีระดับความแม่นยำ อยู่ในระดับ 2-3 เซนติเมตร อย่างไรก็ตามข้อดีความซับซ้อนของระบบ LiDAR และความสัมพันธ์เชิงพื้นที่ สามารถระบุความผิดพลาดที่สามารถลดทอนคุณภาพความแม่นยำของข้อมูล LiDAR ได้ ความผิดพลาดนี้มักเกิดจากความผิดพลาดทางการควบคุมเส้นทางและไม่สามารถกำจัดไปได้โดยปราศจากการควบคุมข้อมูลเข้าสู่ LiDAR ดังนั้นเพื่อการออกแบบ LiDAR ที่น่าพอใจที่สุด จึงอยู่ภายใต้การออกแบบความแม่นยำในการวางตำแหน่ง LiDAR ผลการศึกษานี้ได้จากการทดสอบโดยใช้ระบบ LiDAR Optech ALTM 30/70 ของ Ohio Department of Transportation

จากงานวิจัยที่ผ่านมาได้มีการปรับแก้ค่าความคลาดเคลื่อนการการซ้อนทับของ LiDAR ด้วยวิธีการต่าง ๆ บ้างแต่ไม่ได้ใช้ภาพถ่ายทางอากาศในการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนร่วมกับวิธีทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้วิธีปรับแก้ด้วยลิสต์สแควร์ร่วมกับภาพถ่ายทางอากาศบริเวณซ้อนทับของแนวกบิน ของข้อมูล LiDAR มาร่วมในการปรับแก้เนื่องจากจะใช้ภาพถ่ายทางอากาศเป็นตัวกำหนดแนวกบินว่าอยู่ในพื้นที่ซ้อนทับเดียวกันและจุด (Point) ที่ทำการปรับแนวกบินเป็นจุดใกล้เคียงกัน ผู้วิจัยจึงเห็นว่าถ้าใช้ภาพถ่ายทางอากาศร่วมกับวิธีปรับแก้ด้วยลิสต์สแควร์ อาจจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงและดียิ่งขึ้น