

บทที่ 2

การวิเคราะห์คุณลักษณะสายอากาศวงแหวนวงกลม

2.1 บทนำ

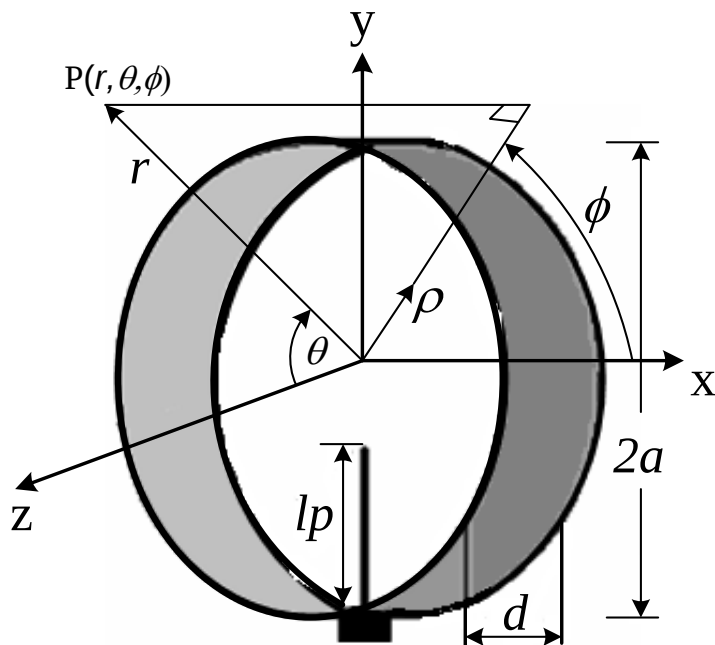
สายอากาศวงแหวนวงกลมล้อมรอบโพรบ เป็นสายอากาศที่มีการแพร่กระจายคลื่นแบบสองทิศทาง โดยการแพร่กระจายคลื่นเป็นปัญหาที่พิจารณาแหล่งกำเนิดสนามซึ่งได้แก่สายอากาศ ทำให้สมการคลื่นเป็นสมการไม่เอกพันธ์ การแก้ปัญหานั้นจึงแบ่งเป็นสองวิธี กล่าวคือ การหาคำตอบของสนามจากวิธีฟังก์ชันศักย์เวกเตอร์ (Vector Potential Functions) และวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติก (Dyadic Green Function)

ฟังก์ชันกรีนไดแอติกเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบที่มีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ กล่าวคือฟังก์ชันกรีนไดแอติกคือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเกิดจากไดโพลจั่ว ซึ่งฟังก์ชันกรีนไดแอติกในปัญหาที่แตกต่างกันจะมีเงื่อนไขขอบเขตที่ต่างกัน การหาผลเฉลยของปัญหา จะรู้จากฟังก์ชันกรีนไดแอติกของปัญหานั้นๆ ซึ่งมีแหล่งกำเนิดเป็นฟังก์ชันอิมพัลส์ อินทิเกรตตลอดปริมาตรของแหล่งกำเนิดของผลคูณระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอติกกับการกระจายความหนาแน่นกระแสที่แหล่งกำเนิดนั้นๆ

การวิเคราะห์สายอากาศวงแหวนวงกลมล้อมรอบด้วยโพรบโดยใช้วิธีฟังก์ชันกรีนไดแอติกนี้เป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ให้ความแม่นยำ จะนำมาใช้เพื่อคำนวณหาแหล่งกำเนิดความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูลที่เกิดจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในโหมครวมตามลำดับ ในบทความนี้ได้แสดงการพิสูจน์หาสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่รวมผลของโพรบในโหมคคลื่นไฟฟ้าตามขวางและโหมคคลื่นแม่เหล็กตามขวาง เพื่อนำไปหาความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าสมมูลและกระแสแม่เหล็กสมมูล และนำไปคำนวณหาสนามไฟฟ้าระยะไกลต่อไป ทำให้เพิ่มความแม่นยำในการหาความหนาแน่นของวงแหวนเพื่อให้ได้ค่าสภาพจะจกทิศทางสูงสุด

2.2 โครงสร้างสายอากาศที่ใช้วงแหวนวงกลมล้อมรอบโพรบ

โครงสร้างของสายอากาศประกอบไปด้วยโพรบไฟฟ้าเชิงเส้นยาว l ยื่นออกมาจากสายนำสัญญาณแกนร่วม (Coaxial Line) วางในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง z เท่ากับศูนย์ โดยโพรบถูกล้อมรอบด้วยวงแหวนที่มีรัศมีและความหนาเป็น a และ d ตามลำดับ การพิจารณาจะให้งวงแหวนเป็นส่วนหนึ่งของท่อนำคลื่นรูปทรงกระบอกกลมที่วางตามแนวแกน z ดังนั้นการพิสูจน์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณช่องเปิดของวงแหวนจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันทรงกระบอก สำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายคลื่นออกจากช่องเปิดของวงแหวนคือในทิศทาง z และ $-z$ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 สายอากาศแบบสองทิศทางโดยใช้โพรบกระตุ้นวงแหวนวงกลม

การพิจารณาจะให้วงแหวนเป็นส่วนหนึ่งของท่อนำคลื่นรูปทรงกระบอกกลม สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายคลื่นออกจากช่องเปิดของวงแหวนจะสอดคล้องกับ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าประกอบด้วยโหมดคลื่นต่าง ๆ มากมายที่อยู่ภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอก ดังนั้นรัศมีของท่อนำคลื่นจะถูกออกแบบเพื่อให้โหมดคลื่นอื่น ๆ ถูกตัดออกไปให้เหลือเพียง โหมดคลื่นหลัก (Dominant Mode : TE_{11}) เพียงโหมดเดียว โดยเฉพาะโหมดคลื่นอื่น ๆ ที่อยู่ติดกับ โหมดคลื่นหลักคือ TE_{21} ดังนั้นการเลือกค่ารัศมีจะต้องให้อยู่ใกล้ความถี่ตัด (Frequency Cut Off) ของท่อนำคลื่นมากที่สุดสามารถแสดงได้ดังนี้

$$0.293\lambda < a < 0.486\lambda \quad (2.1)$$

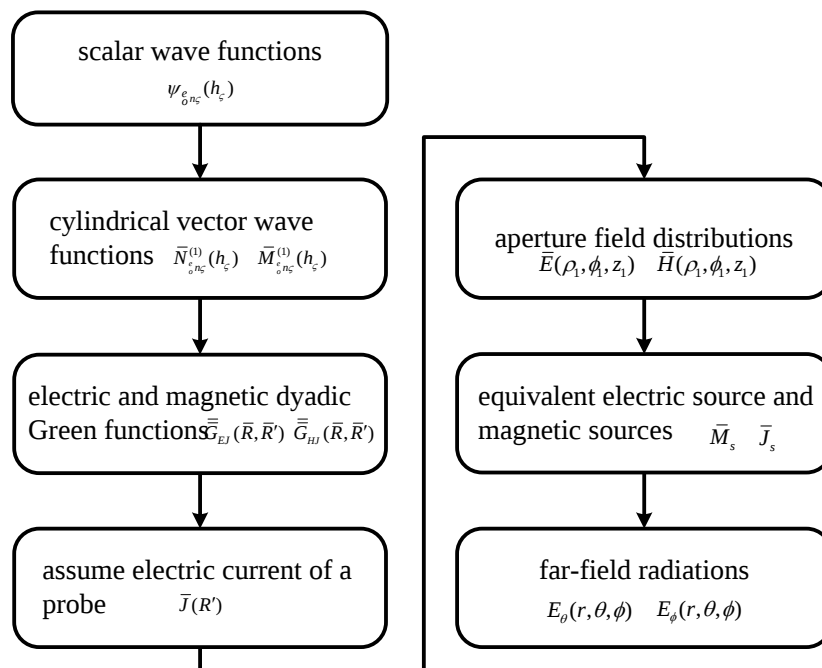
เมื่อ λ คือ ความยาวคลื่นที่ความถี่ปฏิบัติการ (Operating Frequency) โดยใช้ความถี่ 2.45 GHz

ในการวิเคราะห์จะเลือกใช้รัศมีของวงแหวนที่รัศมีเท่ากับ 0.35λ ทั้งนี้เนื่องจากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้นและวัสดุที่ใช้สามารถหาซื้อได้ง่าย นอกจากนี้ขนาดความหนาของวงแหวนจะต้องเลือกให้เหมาะสมด้วย เพราะที่บริเวณใกล้กับโพรบจะมีโหมดคลื่นอยู่มากมาย เมื่อระยะทางที่คลื่นเดินทางออกจากโพรบมีค่ามากขึ้น โหมดคลื่นอื่น ๆ ที่ไม่ใช่โหมดหลักจะเป็นรูปแบบของคลื่น เรียกว่า คลื่นจางหาย (Evanescent Wave) จะมีขนาดลดลงอย่างรวดเร็ว ด้วยเหตุนี้จะต้องเลือกความ หนาของวงแหวนให้ เหมาะสมโดยการพิจารณาโหมดคลื่นต่าง ๆ

2.3 การวิเคราะห์การแพร่กระจายคลื่นโดยอาศัยฟังก์ชันกรีนไดแอติก

ฟังก์ชันของกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าสามารถจำแนกตามเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับฟังก์ชันได้สองชนิด คือ ฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้าชนิดที่หนึ่ง $\overline{G}_{e1}$ ซึ่งจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดิริคเลต์ (Dirichlet Boundary Condition) พบว่าองค์ประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอติกชนิดที่หนึ่งในแนวสัมผัสกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ และฟังก์ชันไดแอติกแบบไฟฟ้าชนิดที่สอง $\overline{G}_{e2}$ จะต้องรองรับเงื่อนไขขอบเขตของนอยมานน์ (Neumann Boundary Condition) พบว่าองค์ประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอติกชนิดนี้ในแนวตั้งฉากกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์ ในส่วนของฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบแม่เหล็กใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคเลต์และเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์สามารถแบ่งฟังก์ชันเป็นสองชนิดเช่นเดียวกับฟังก์ชันกรีนไดแอติกแบบไฟฟ้า

การพิสูจน์หาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าระยะไกลนั้นจะเริ่มจาก สมการทั่วไปของสนามที่แพร่กระจายออกจากตัวสายอากาศ ซึ่งเป็นการหาคำตอบของสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับพิกัดทรงกระบอก หลังจากนั้นคำตอบที่ได้จากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์หรือฟังก์ชันจะจงในรูปแบบสเกลาร์ที่เหมาะสมมากที่สุด จะนำมาใช้เพื่อหาฟังก์ชันกรีน ชนิดไดแอติกทั้งแบบไฟฟ้าและแม่เหล็กที่เกิดจากความหนาแน่นของกระแส เพื่อนำไปหาสมการของการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบริเวณช่องเปิดของวงแหวน และทำการแปลงสนามดังกล่าวให้อยู่ในรูปความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กสมมูลและความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าสมมูลเพื่อนำไปหาสนามไฟฟ้าระยะไกล แสดงลำดับการคำนวณได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ไดอะแกรมการหาคำตอบของสนามจากแหล่งกำเนิด

2.3.1 การหาคำตอบจากสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับระบบพิกัดทรงกระบอก

เมื่อพิจารณาสมการเวกเตอร์ของคลื่นสำหรับสถานะที่เป็นอิสระจากแหล่งจ่าย (Source-free) และตัวกลางที่ไม่เกิดการสูญเสีย (Lossless Media) ของสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอก สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\text{จาก } \bar{E}(\rho_1, \phi_1, z_1) = E_\rho(\rho_1, \phi_1, z_1)\hat{\rho} + E_\phi(\rho_1, \phi_1, z_1)\hat{\phi} + E_z(\rho_1, \phi_1, z_1)\hat{z} \quad (2.2)$$

เมื่อ ρ_1, ϕ_1, z_1 คือ ค่าในระบบพิกัดทรงกระบอก

และรูปแบบที่ง่ายที่สุดสำหรับการหาสมการคลื่นแบบเวกเตอร์สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 \bar{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

เมื่อแทนสมการ (2.2) ลงในสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$\nabla^2 (E_\rho\hat{\rho} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}) = -k^2 (E_\rho\hat{\rho} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{z}) \quad (2.5)$$

จากสมการ (2.5) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\nabla^2 \bar{E} = -k^2 \bar{E} \quad (2.6)$$

จากคุณสมบัติลาปลาเซียนของเวกเตอร์ (Laplacian of Vector) สามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{E} &= \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla \times \nabla \times \bar{E} \\ \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla \times \nabla \times \bar{E} &= -k^2 \bar{E} \end{aligned} \quad (2.7)$$

เมื่อแทนสนามไฟฟ้าที่อยู่ในสมการ (2.2) ลงในสมการ (2.7) จะได้คำตอบที่อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\nabla^2 E_\rho + \left(-\frac{E_\rho}{\rho_1^2} - \frac{2}{\rho_1^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi_1} \right) = -k^2 E_\rho \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 E_\phi + \left(-\frac{E_\phi}{\rho_1^2} - \frac{2}{\rho_1^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi_1} \right) = -k^2 E_\phi \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 E_z = -k^2 E_z \quad (2.10)$$

เมื่อ $\nabla^2 \psi(\rho, \phi, z)$ คือ ลาปลาเซียนของสเกลาร์ (Laplacian of Scalar) ซึ่งมีค่าในระบบพิกัดทรงกระบอกดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

จากสมการ (2.8) และ (2.9) จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้ามากกว่า 1 องค์ประกอบ ซึ่งยากต่อการหาคำตอบ ดังนั้น เราจะใช้สมการ (2.10) ซึ่งมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าเพียงองค์ประกอบเดียวในการหาคำตอบจากสมการคลื่น

จากสมการ (2.11) ดังนั้นสมการ (2.10) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -k^2 F \quad (2.12)$$

เมื่อ $F(\rho, \phi, z)$ คือ ฟังก์ชันของสเกลาร์ (Scalar Function) ที่แสดงถึงศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้า (Electric Vector Potential) และสมมติให้ศักย์เวกเตอร์ไฟฟ้านี้มีคำตอบที่อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$F(\rho, \phi, z) = f(\rho)g(\phi)h(z) \quad (2.13)$$

แทนค่าสมการ (2.13) ลงในสมการ (2.12) จะได้ว่า

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + gh \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + fh \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k^2 fgh \quad (2.14)$$

หารทั้งสองข้างของสมการด้วย fgh และเปลี่ยน $\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}$ จากสมการ (2.14) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + \frac{1}{g} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 g}{d\phi^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = -k^2 \quad (2.15)$$

จะพบว่าในแต่ละพจน์ของสมการ (2.15) จะเป็นฟังก์ชัน ของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นผลรวมของทุกพจน์จะมีค่าเท่ากับ $-k^2$ ก็ต่อเมื่อค่าของแต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz_1^2} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 h}{dz_1^2} = -k_z^2 h \quad (2.16)$$

เมื่อ k_z คือค่าคงที่

นำสมการ (2.16) แทนลงในสมการ (2.15) แล้วคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย ρ_1^2 จะได้ว่า

$$\frac{\rho_1^2}{f} \frac{d^2 f}{d\rho_1^2} + \frac{\rho_1}{f} \frac{df}{d\rho_1} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi_1^2} + (k^2 - k_z^2) \rho_1^2 = 0 \quad (2.17)$$

เนื่องจากพจน์ที่ 3 ของสมการ (2.17) เป็นฟังก์ชันของ ϕ เพียงอย่างเดียว ดังนั้นสมการที่จะกำหนดให้เท่ากับค่าคงที่ใด ๆ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\phi_1^2} = -n^2 \Rightarrow \frac{d^2 g}{d\phi_1^2} = -n^2 g \quad (2.18)$$

และกำหนดให้ $k^2 - k_z^2 = k_p^2 \Rightarrow k^2 = k_p^2 + k_z^2 \quad (2.19)$

นำสมการ (2.18) แทนลงในสมการ (2.17) จะได้ว่า

$$\rho_1^2 \frac{d^2 f}{d\rho_1^2} + \rho_1 \frac{df}{d\rho_1} + ((k_p \rho_1)^2 - m^2) f = 0 \quad (2.20)$$

จากสมการ (2.19) จะถูกเรียกว่าเป็น สมการการจำกัด (Constraint Equation) สำหรับคำตอบที่ได้จากสมการคลื่นในระบบพิกัดทรงกระบอก และสมการ (2.20) จะถูกเรียกว่าเป็น สมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซล (Bessel Differential Equation)

ดังนั้น คำตอบที่ได้จากสมการ (2.12) โดยการสมมติคำตอบดังสมการ (2.13) แสดงได้ดังนี้

$$\rho_1^2 \frac{d^2 f}{d\rho_1^2} + \rho_1 \frac{df}{d\rho_1} + ((k_p \rho_1)^2 - n^2) f = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2 g}{d\phi_1^2} = -n^2 g \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 h}{dz_1^2} = -k_z^2 h \quad (2.23)$$

โดยที่ $k_p^2 + k_z^2 = k^2$

และคำตอบที่ได้จากสมการ (2.21)-(2.23) สามารถแสดงได้ดังนี้ ตามลำดับ

$$f_1(\rho_1) = A_1 J_n(k_p \rho_1) + B_1 Y_n(k_p \rho_1) \quad (2.24)$$

$$f_2(\rho_1) = C_1 H_n^{(1)}(k_p \rho_1) + D_1 H_n^{(2)}(k_p \rho_1) \quad (2.25)$$

$$g_1(\phi) = A_2 e^{-jn\phi} + B_2 e^{jn\phi} \quad (2.26)$$

$$g_2(\phi) = C_2 \cos(n\phi) + D_2 \sin(n\phi) \quad (2.27)$$

$$h_1(z_1) = A_3 e^{-jk_z z_1} + B_3 e^{jk_z z_1} \quad (2.28)$$

$$h_2(z_1) = C_3 \cos(k_z z_1) + D_3 \sin(k_z z_1) \quad (2.29)$$

โดยที่

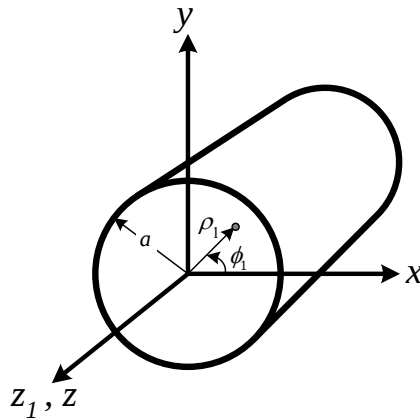
$J_n(k_\rho \rho_1)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1

$Y_n(k_\rho \rho_1)$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2

$H_n^{(1)}(k_\rho \rho_1)$ คือ ฟังก์ชันแสงเกล (Hankel function) ชนิดที่ 1

$H_n^{(2)}(k_\rho \rho_1)$ คือ ฟังก์ชันแสงเกล (Hankel function) ชนิดที่ 2

โดยทั่วไปแล้ว สำหรับท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอก (Cylindrical Waveguide) นั้นคำตอบที่ได้จากสมการเวกเตอร์ของคลื่นที่เหมาะสมมากที่สุดสำหรับท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอก ที่แสดงในรูปที่ 2.3 นั้นสามารถแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.3 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกที่ระนาบ $z_1 = 0$

$$\begin{aligned} F(\rho_1, \phi_1, z_1) &= f(\rho_1)g(\phi_1)h(z_1) \\ &= [A_1 J_n(k_\rho \rho_1) + B_1 Y_n(k_\rho \rho_1)] [C_2 \cos(n\phi_1) + D_2 \sin(n\phi_1)] [A_3 e^{-jk_z z_1} + B_3 e^{jk_z z_1}] \end{aligned} \quad (2.30)$$

จากสมการ (2.30) เมื่อพิจารณา $\rho_1 = 0$ พบว่า $Y_n = \infty$ ซึ่งจะไม่เป็นจริงตามเงื่อนไขที่สนามที่แพร่กระจายคลื่นจะต้องมีค่าจำกัดดังนั้นจะให้ $B_1 = 0$ และเพื่อจะลดความยุ่งยากจะพิจารณาเฉพาะคลื่นที่เดินทางในทิศ $+z$ ดังนั้นจะให้ $B_3 = 0$ และให้ $C_2 = D_2$ ดังนั้นสมการใหม่จะเขียนได้ดังนี้

$$F(\rho_1, \phi_1, z_1) = A J_n(k_\rho \rho_1) [\cos(n\phi_1) + \sin(n\phi_1)] e^{-jk_z z_1} \quad (2.31)$$

2.3.2 ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในพิกัดทรงกระบอก

ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ (Vector Wave Function) คือฟังก์ชันเจาะจง (Eigen Function) หรือ ฟังก์ชันคุณลักษณะ (Characteristic Function) ที่เป็นผลเฉลยของสมการคลื่นเวกเตอร์เอกพันธ์ (Homogeneous Vector Wave Equation)

$$\nabla \times \nabla \times \bar{F} - \kappa^2 \bar{F} = 0 \quad (2.32)$$

สมการ (2.32) เป็นสมการคลื่นเวกเตอร์เอกพันธ์ โดยที่ κ เป็นค่าใดๆ เราจะได้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ในระบบคาร์ทีเซียน ดังต่อไปนี้

$$\bar{F} = \nabla \times (\psi_1 \hat{c}) \quad (2.33)$$

โดยที่ ψ_1 คือ ฟังก์ชันเจาะจงซึ่งสอดคล้องกับสมการคลื่นสเกลาร์

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0 \quad (2.34)$$

และ $\hat{c}$ เป็นค่าคงที่เวกเตอร์ (Constant Vector) ได้แก่ $\hat{x}, \hat{y}$ หรือ $\hat{z}$ เพื่อความสะดวกเราจะเรียก $\hat{c}$ ว่าเวกเตอร์นำร่อง (Piloting Vector) และ ψ ว่าเป็นฟังก์ชันกำเนิด (Generating Function) หาก ψ_1 เป็นผลเฉลยสำหรับสมการ (2.34) จะได้ (2.33) เป็นผลเฉลยสำหรับสมการ (2.32) ด้วยเช่นกัน ซึ่งเราจะให้ $\bar{M}$ เป็นฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ นั่นคือ

$$\bar{M}_1 = \nabla \times (\psi_1 \hat{c}) \quad (2.35)$$

ส่วนฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์อีกชุดหนึ่งซึ่งแทนด้วย $\bar{N}$ จะได้ว่า

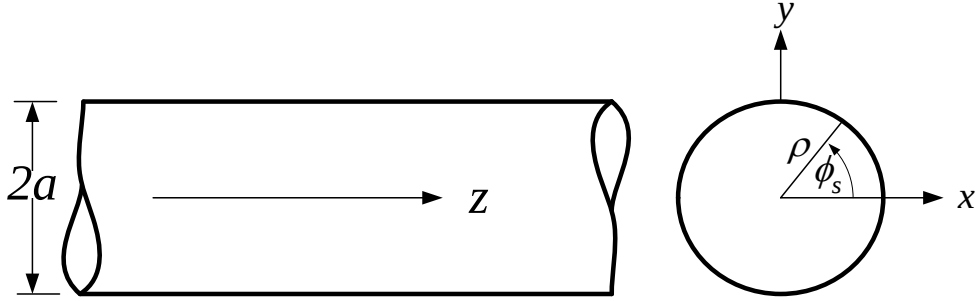
$$\bar{N}_2 = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times (\psi_2 \hat{c}) \quad (2.36)$$

โดยที่ ψ_2 คือฟังก์ชันเจาะจงที่สอดคล้องกับสมการ (2.34) และ $\bar{N}_2$ คือผลเฉลยสำหรับสมการ (2.32) ในกรณีที่ใช้ ฟังก์ชันกำเนิด ψ เหมือนกันทั้ง $\bar{M}$ และ $\bar{N}$ เราจะได้ความสัมพันธ์ที่สมมาตรกันระหว่างฟังก์ชันสองชนิดนี้

$$\bar{N} = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{M} \quad (2.37)$$

$$\bar{M} = \frac{1}{\kappa} \nabla \times \bar{N} \quad (2.38)$$

ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะเป็นท่อนำคลื่นทรงกระบอก (Cylindrical Waveguide) มีความยาวในแนวแกน (ทิศ z) มีโครงสร้างเป็นท่อนำคลื่นทรงกระบอกปลายเปิดทั้งสองข้าง แสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ท่อนำคลื่นทรงกระบอก

การพิสูจน์ฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอคติกของโครงสร้างที่เป็นท่อนำคลื่นทรงกระบอก จะเริ่มพิจารณาจากฟังก์ชันเจาะจงในรูปสเกลาร์ ψ (Scalar Eigenfunction) โดยใช้วิธีการแยกตัวแปร (Method of Separation of Variable) โดยพิจารณาจากสมการ (2.30) ดังนี้จะได้

$$\psi_{\phi_{n\zeta}}(h_\zeta) = J_n(\varsigma\rho_1) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\phi_1) \Big\} e^{-jh_\zeta z_1} \quad (2.39)$$

โดยที่ ς เป็นตัวแทนของ ζ หรือ ξ ที่สัมพันธ์กับโหมดคลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE) หรือโหมดคลื่นแม่เหล็กตามขวาง (TM) ตามลำดับ และค่าเจาะจง (Eigenvalues) $\zeta = q_{nm}/a$ และ $\xi = p_{nm}/a$

จากสมการ (2.35) และ (2.36) ฟังก์ชันคลื่นของท่อนำคลื่นทรงกระบอกสามารถแสดงในรูปของฟังก์ชันเจาะจงในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้

$$\bar{M}_{\phi_{n\zeta}}^{(1)}(h_\zeta) = \nabla \times [\psi_{\phi_{n\zeta}}(h_\zeta) \hat{z}] \quad (2.40)$$

$$\bar{N}_{\phi_{n\zeta}}^{(1)}(h_\zeta) = \frac{1}{\kappa_\zeta} \nabla \times \nabla \times [\psi_{\phi_{n\zeta}}(h_\zeta) \hat{z}] \quad (2.41)$$

เมื่อ $\kappa_\zeta = \sqrt{\varsigma^2 + h_\zeta^2}$

แทนค่าสมการ (2.31) ลงในสมการ (2.30) และ (2.41) จะได้สมการฟังก์ชันคลื่นดังต่อไปนี้

$$\bar{M}_{\phi_{n\zeta}}^{(1)}(h_\zeta) = \left[\mp \frac{nJ_n(\varsigma\rho_1)}{\rho_1} \frac{\sin(n\phi_1)}{\cos(n\phi_1)} \hat{\rho} - \frac{\partial J_n(\varsigma\rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{\cos(n\phi_1)}{\sin(n\phi_1)} \hat{\phi} \right] e^{-jh_\zeta z_1} \quad (2.42)$$

$$\bar{N}_{\phi_{n\zeta}}^{(1)}(h_\zeta) = \frac{1}{\kappa_\zeta} \left[-jh_\zeta \frac{\partial J_n(\varsigma\rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{\cos(n\phi_1)}{\sin(n\phi_1)} \hat{\rho} \pm \frac{jh_\zeta nJ_n(\varsigma\rho_1)}{\rho_1} \frac{\sin(n\phi_1)}{\cos(n\phi_1)} \hat{\phi} + \varsigma^2 J_n(\varsigma\rho_1) \frac{\cos(n\phi_1)}{\sin(n\phi_1)} \hat{z} \right] e^{-jh_\zeta z_1} \quad (2.43)$$

2.3.3 ฟังก์ชันกรีนไดแอดิกบริเวณภายในท่อนำคลื่นทรงกระบอก

ก่อนอื่นเราจะหา $\bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}')$ เนื่องจากเป็นฟังก์ชันไดแอดิกโซลินอยด์ (Solenoidal Dyadic Function) นั่นคือ องค์ประกอบของฟังก์ชันกรีนไดแอดิกชนิดนี้ในแนวตั้งฉากกับผิวของปัญหามีค่าเป็นศูนย์

$$\nabla \cdot \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (2.44)$$

จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกรีนไดแอดิกเพื่อหาฟังก์ชันที่เหลือ นั่นคือ $\bar{\bar{G}}_{e1}$, $\bar{\bar{G}}_{e2}$ และ $\bar{\bar{G}}_{m1}$

เราจะประยุกต์ใช้วิธีการ Ohm-Rayleigh [7] เพื่อหาฟังก์ชันกรีนไดแอดิกแบบแม่เหล็กชนิดที่สอง ($\bar{\bar{G}}_{m2}$) สำหรับท่อนำคลื่นเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วมซึ่งจะสอดคล้องกับสมการ

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') - k^2 \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') = \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] \quad (2.45)$$

โดยที่ $\rho = a$; $\phi = \phi_s$; $-c/2 \leq z \leq c/2$ และเงื่อนไขขอบเขตนอยมานน์

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_{m2}(\bar{R}, \bar{R}') = 0 \quad (2.46)$$

ที่ $\rho = a$ และ $\phi = 0, \phi_s$ ซึ่ง $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

จากสมการ (2.45) ก่อนอื่นเราจะต้องหาฟังก์ชันเฉพาะสำหรับแหล่งกำเนิด $\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] โดย$ ใช้ฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์โซลินอยด์ (Solenoidal Vector Wave Function) ที่กล่าวถึงในหัวข้อก่อนหน้านี ฟังก์ชันที่เหมาะสมคือ $\bar{M}_{\phi_{n\zeta}}(h)$ และ $\bar{N}_{\phi_{n\chi}}(h)$ เนื่องจากเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (2.46) ดังนั้นเราจะได้

$$\nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}')] = \int_{-\infty}^{\infty} dh_{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{N}_{\phi_{n\zeta}}^{(1)}(h_{\zeta}) \bar{A}_{\phi_{n\zeta}}(h_{\zeta}) + \bar{M}_{\phi_{n\zeta}}^{(1)}(h_{\zeta}) \bar{B}_{\phi_{n\zeta}}(h_{\zeta})] \quad (2.47)$$

เมื่อ $\bar{A}_{\phi_{n\zeta}}(h_{\zeta})$ และ $\bar{B}_{\phi_{n\zeta}}(h_{\zeta})$ เป็นสัมประสิทธิ์เวกเตอร์ (Vector Coefficient) ซึ่งหาได้โดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรในสมการที่ (3.45) หลังจากที่คุณเชิงสเกลาร์ข้างหน้าด้วย $\bar{N}'_{\phi_{n\zeta}}(-h_{\zeta})$ และ $\bar{M}'_{\phi_{n\zeta}}(-h_{\zeta})$ และใช้ทฤษฎีเกาส์ไดแอดิก (Dyadic Gauss Theorem) ร่วมกับความสัมพันธ์ออร์โธโกนัล (Orthogonal Relation) ระหว่างฟังก์ชันคลื่นเวกเตอร์ ดังนั้น

$$\bar{A}_{\phi_{n\zeta}}(h_{\zeta}) = \frac{(2 - \delta_0) \kappa_{\zeta}}{4\pi^2 \zeta^2 I_{\zeta}} \bar{M}'_{\phi_{n\zeta}}(-h_{\zeta}) \quad (2.48)$$

$$\bar{B}_{\phi_{n\zeta}}(h_{\zeta}) = \frac{(2 - \delta_0) \kappa_{\zeta}}{4\pi^2 \zeta^2 I_{\zeta}} \bar{N}'_{\phi_{n\zeta}}(-h_{\zeta}) \quad (2.49)$$

ดังนั้นเมื่อแทนสัมประสิทธิ์ในสมการ (2.48) และ (2.49) ลงในสมการ (2.47) จะได้

$$\begin{aligned} \bar{G}_{HJ}(\bar{R}, \bar{R}') = \int_{-\infty}^{\infty} dh_{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2-\delta_0}{4\pi^2} \left[\frac{K_{\zeta}}{\zeta^2 I_{\zeta}(\kappa_{\zeta}^2 - k^2)} \bar{N}_{\delta_{n\zeta}}^{(1)}(h_{\zeta}) \bar{M}'_{\delta_{n\zeta}}(h_{\zeta}) \right. \\ \left. + \frac{K_{\xi}}{\xi^2 I_{\xi}(\kappa_{\xi}^2 - k^2)} \bar{M}_{\delta_{n\xi}}^{(1)}(h_{\xi}) \bar{N}'_{\delta_{n\xi}}(h_{\xi}) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

เมื่อ (1) คือจุดสังเกตใด ๆ ของสนามบริเวณภายในทรงกระบอก และ เครื่องหมาย “ไพรม์” แสดงตำแหน่งของแหล่งกำเนิด ซึ่งพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก

การอินทิเกรตในสมการ (2.50) จะใช้วิธีการอินทิเกรตคอนทัวร์ เมื่อตำแหน่งขั้ว(pole) $h_{\zeta} = \pm k_{\zeta} = \pm \sqrt{k^2 - \zeta^2}$ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอติกแบบแม่เหล็กที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าสำหรับโครงสร้างท่อนำคลื่นทรงกระบอก ($\bar{G}_{HJ}(\bar{R}, \bar{R}')$) จะแสดงในรูปของฟังก์ชันคลื่นได้ดังนี้คือ

$$\bar{G}_{HJ}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[c_{\zeta} \bar{N}_{\delta_{n\zeta}}^{(1)}(\pm k_{\zeta}) \bar{M}'_{\delta_{n\zeta}}(\mp k_{\zeta}) + c_{\xi} \bar{M}_{\delta_{n\xi}}^{(1)}(\pm k_{\xi}) \bar{N}'_{\delta_{n\xi}}(\mp k_{\xi}) \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.51)$$

เมื่อ

$$c_{\zeta} = \frac{-j(2-\delta_0)}{4\pi^2 \zeta^2 I_{\zeta} k_{\zeta}} \quad (2.52)$$

$$c_{\xi} = \frac{-j(2-\delta_0)}{4\pi^2 \xi^2 I_{\xi} k_{\xi}} \quad (2.53)$$

และ

$$I_{\zeta} = \frac{a^2}{2\zeta^2} \left(\zeta^2 - \frac{n^2}{a^2} \right) J_n^2(\zeta a) \quad (2.54)$$

$$I_{\xi} = \frac{a^2}{2\xi^2} \left[\frac{\partial J_n(\xi \rho_1)}{\partial \rho_1} \right]^2 \bigg|_{\rho_1=a} \quad (2.55)$$

จากสมการทฤษฎีดังกล่าวข้างต้นเราสามารถแตกองค์ประกอบของไดแอติกได้ทั้งหมด 9 องค์ประกอบด้วยกันยกตัวอย่างเช่น $\bar{G}_{HJ}^{pp}(\bar{R}, \bar{R}')$ หมายถึงฟังก์ชันกรีนไดแอติกในทิศทาง ρ ที่สังเกตที่ตำแหน่ง (ρ, ϕ, z) เกิดจากแหล่งกำเนิดที่อยู่ในทิศทางแกน ρ อยู่ที่ตำแหน่ง (ρ', ϕ', z') แสดงได้ดังนี้

$$G_{HJ}^{\rho\rho}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[\frac{c_{\zeta} j n k_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}} \frac{\partial J_n(\zeta \rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{J_n(\zeta \rho')}{\rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{j n k_{\zeta} c_{\xi}}{\kappa_{\xi}} \frac{J_n(\xi \rho_1)}{\rho_1} \frac{\partial J_n(\xi \rho')}{\partial \rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.56)$$

$$G_{HJ}^{\rho\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[\frac{j c_{\zeta} k_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}} \frac{\partial J_n(\zeta \rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{\partial J_n(\zeta \rho')}{\partial \rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} +e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ -e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{j n^2 c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}} \frac{J_n(\xi \rho_1)}{\rho_1} \frac{J_n(\xi \rho')}{\rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} +e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ -e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.57)$$

$$G_{HJ}^{\rho z}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[-\frac{n \xi^2 c_{\xi}}{\kappa_{\xi}} \frac{J_n(\xi \rho_1)}{\rho_1} J_n(\xi \rho') \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.58)$$

$$G_{HJ}^{\phi\rho}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[\frac{j n^2 c_{\zeta} k_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}} \frac{J_n(\zeta \rho_1)}{\rho_1} \frac{J_n(\zeta \rho')}{\rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{j c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}} \frac{\partial J_n(\xi \rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{\partial J_n(\xi \rho')}{\partial \rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.59)$$

$$G_{HJ}^{\phi\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[\frac{j n c_{\zeta} k_{\zeta}}{\kappa_{\zeta}} \frac{J_n(\zeta \rho_1)}{\rho_1} \frac{\partial J_n(\zeta \rho')}{\partial \rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{j n c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}} \frac{\partial J_n(\xi \rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{J_n(\xi \rho')}{\rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.60)$$

$$G_{HJ}^{\phi z}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[-\frac{\xi^2 c_{\xi}}{\kappa_{\xi}} \frac{\partial J_n(\xi \rho_1)}{\partial \rho_1} J_n(\xi \rho') \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.61)$$

$$G_{HJ}^{z\rho}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[\frac{n c_{\zeta} \zeta^2}{\kappa_{\zeta}} J_n(\zeta \rho_1) \frac{n J_n(\zeta \rho')}{\rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.62)$$

$$G_{HJ}^{z\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} k \left[-\frac{c_{\zeta} \zeta^2}{\kappa_{\zeta}} J_n(\zeta \rho_1) \frac{\partial J_n(\zeta \rho')}{\partial \rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.63)$$

สำหรับฟังก์ชันกรีนชนิดไดแอดิกแบบไฟฟ้าที่มีแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าสำหรับโครงสร้างท่อนำคลื่นทรงกระบอกเมื่ออาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{\bar{G}}_{EJ}$ และ $\bar{\bar{G}}_{HJ}$ จะได้ว่า

$$\bar{\bar{G}}_{EJ}(\bar{R}, \bar{R}') = \frac{1}{k^2} \left[-\hat{z} \hat{z} \delta(\bar{R} - \bar{R}') + (\nabla \times \bar{\bar{G}}_{HJ}^+) U(z_1 - z') + (\nabla \times \bar{\bar{G}}_{HJ}^-) U(z' - z_1) \right] \quad (2.64)$$

ดังนั้นจะได้

$$\bar{G}_{EJ}(\bar{R}, \bar{R}') = -\frac{1}{k^2} \hat{z} \hat{z} (\bar{R} - \bar{R}') + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\zeta} \bar{M}_{0n\zeta}(\pm k_{\zeta}) \bar{M}'_{0n\zeta}(\mp k_{\zeta}) + c_{\xi} \bar{N}_{0n\xi}(\pm k_{\xi}) \bar{N}'_{0n\xi}(\mp k_{\xi}) \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.65)$$

จากสมการทฤษฎีดังกล่าวข้างต้นเราสามารถแตกองค์ประกอบของไดแอดิกได้ทั้งหมด 9 องค์ประกอบด้วยกันแสดงได้ดังนี้

$$G_{EJ}^{\rho\rho}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[n^2 c_{\zeta} \frac{J_n(\zeta\rho_1)}{\rho_1} \frac{J_n(\zeta\rho')}{\rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{c_{\xi} k_{\xi}^2}{\kappa_{\xi}^2} \frac{\partial J_n(\xi\rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{\partial J_n(\xi\rho')}{\partial \rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.66)$$

$$G_{EJ}^{\rho\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[nc_{\zeta} \frac{J_n(\zeta\rho_1)}{\rho_1} \frac{\partial J_n(\zeta\rho')}{\partial \rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{nc_{\xi} k_{\xi}^2}{\kappa_{\xi}^2} \frac{\partial J_n(\xi\rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{J_n(\xi\rho')}{\rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.67)$$

$$G_{EJ}^{\rho z}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{j\zeta^2 c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}^2} \frac{\partial J_n(\xi\rho_1)}{\partial \rho_1} J_n(\xi\rho') \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} -e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ +e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.68)$$

$$G_{EJ}^{\phi\rho}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[-nc_{\zeta} \frac{\partial J_n(\zeta\rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{J_n(\zeta\rho')}{\rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. - \frac{nc_{\xi} k_{\xi}^2}{\kappa_{\xi}^2} \frac{J_n(\xi\rho_1)}{\rho_1} \frac{\partial J_n(\xi\rho')}{\partial \rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.69)$$

$$G_{EJ}^{\phi\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\zeta} \frac{\partial J_n(\zeta\rho_1)}{\partial \rho_1} \frac{\partial J_n(\zeta\rho')}{\partial \rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\zeta}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\zeta}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + \frac{n^2 c_{\xi} k_{\xi}^2}{\kappa_{\xi}^2} \frac{J_n(\xi\rho_1)}{\rho_1} \frac{J_n(\xi\rho')}{\rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.70)$$

$$G_{EJ}^{\phi z}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{jn\zeta^2 c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}^2} \frac{J_n(\xi\rho_1)}{\rho_1} J_n(\xi\rho') \sin[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} +e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ -e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.71)$$

$$G_{EJ}^{z\rho}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{j\zeta^2 c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}^2} J_n(\xi\rho_1) \frac{\partial J_n(\xi\rho')}{\partial \rho'} \cos[n(\phi_1 - \phi')] \begin{cases} +e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ -e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.72)$$

$$G_{EJ}^{z\phi}(\bar{R}, \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{jn\xi^2 c_{\xi} k_{\xi}}{\kappa_{\xi}^2} J_n(\xi\rho_1) \frac{J_n(\xi\rho')}{\rho'} \sin[n(\phi_1 - \phi')] \right] \begin{cases} +e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ -e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases}, \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.73)$$

$$G_{EJ}^{zz}(\bar{R}, \bar{R}') = -\frac{1}{k^2} \hat{z}\hat{z}(\bar{R} - \bar{R}') + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\xi^4 c_{\xi}}{\kappa_{\xi}^2} J_n(\xi\rho_1) J_n(\xi\rho') \cos[n(\phi_1 - \phi')] \right] \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases}, \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.74)$$

2.3.4 การกระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณช่องเปิดของวงแหวน

สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กภายในโครงสร้างรูปทรงกระบอกที่ยาวอนันต์ที่เกิดจากแหล่งกำเนิดเป็นความหนาแน่นของกระแส แสดงได้ดังนี้คือ

$$\bar{E}(\rho_1, \phi_1, z_1) = -j\omega\mu_0 \int_{a-l}^a \bar{\bar{G}}_{EJ}(\rho_1, \phi_1, z_1; \rho', \phi', z') \cdot J_{\rho}(\rho', \phi', z') \hat{\rho} d\rho_1 \quad (2.75)$$

$$\bar{H}(\rho_1, \phi_1, z_1) = \int_{a-l}^a \bar{\bar{G}}_{HJ}(\rho_1, \phi_1, z_1; \rho', \phi', z') \cdot J_{\rho}(\rho', \phi', z') \hat{\rho} d\rho_1 \quad (2.76)$$

เมื่อพิจารณาเส้นผ่านศูนย์กลางของโพรบมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับความยาวคลื่น ดังนั้นจะสมมติการกระจายกระแสตามความยาวโพรบในรูปของฟังก์ชันไซน์ได้ดังนี้

$$\bar{J}(R') = J_m \sin[k(\rho' - a + l)] \hat{\rho}; \quad a - l \leq \rho' \leq a, \phi' = \pi/2, z' = 0 \quad (2.77)$$

เมื่อ J_m คือค่าสูงสุดของกระแส

ดังนั้นองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสกับระนาบ z_1 ที่ตำแหน่งใด ๆ จะได้ดังต่อไปนี้

$$E_{\rho}(\rho_1, \phi_1, z_1) = -j\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\xi} n^2 \frac{J_n(\xi\rho_1)}{\rho_1} \cos[n(\phi_1 - \phi')] E_{a,TE} \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + c_{\xi} \frac{k_{\xi}^2}{\kappa_{\xi}^2} \frac{\partial J_n(\xi\rho_1)}{\partial \rho_1} \cos[n(\phi_1 - \phi')] E_{a,TM} \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.78)$$

$$E_{\phi}(\rho_1, \phi_1, z_1) = -j\omega\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_{\xi} n \frac{\partial J_n(\xi\rho_1)}{\partial \rho_1} \sin[n(\phi_1 - \phi')] E_{a,TE} \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + c_{\xi} n \frac{k_{\xi}^2}{\kappa_{\xi}^2} \frac{J_n(\xi\rho_1)}{\rho_1} \sin[n(\phi_1 - \phi')] E_{a,TM} \begin{cases} e^{-jk_{\xi}(z_1 - z')} \\ e^{-jk_{\xi}(z' - z_1)} \end{cases} \right], \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.79)$$

$$H_\rho(\rho_1, \phi_1, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_\zeta \frac{k_\zeta}{K_\zeta} (jnk) \frac{\partial J_n(\zeta \rho_1)}{\partial \rho_1} \sin[n(\phi_1 - \phi')] H_{a,TE} \begin{cases} -e^{-jk_\zeta(z_1-z')} \\ +e^{-jk_\zeta(z'-z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + c_\xi \frac{k_\xi}{K_\xi} (jnk) \frac{J_n(\xi \rho_1)}{\rho_1} \sin[n(\phi_1 - \phi')] H_{a,TM} \begin{cases} -e^{-jk_\xi(z_1-z')} \\ +e^{-jk_\xi(z'-z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.80)$$

$$H_\phi(\rho_1, \phi_1, z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_\zeta \frac{k_\zeta}{K_\zeta} (jn^2 k) \frac{J_n(\zeta \rho_1)}{\rho_1} \cos[n(\phi_1 - \phi')] H_{a,TE} \begin{cases} -e^{-jk_\zeta(z_1-z')} \\ +e^{-jk_\zeta(z'-z_1)} \end{cases} \right. \\ \left. + c_\xi \frac{k_\xi}{K_\xi} (jk) \frac{\partial J_n(\xi \rho_1)}{\partial \rho_1} \cos[n(\phi_1 - \phi')] H_{a,TM} \begin{cases} -e^{-jk_\xi(z_1-z')} \\ +e^{-jk_\xi(z'-z_1)} \end{cases} \right], \quad \begin{matrix} z_1 > z' \\ z_1 < z' \end{matrix} \quad (2.81)$$

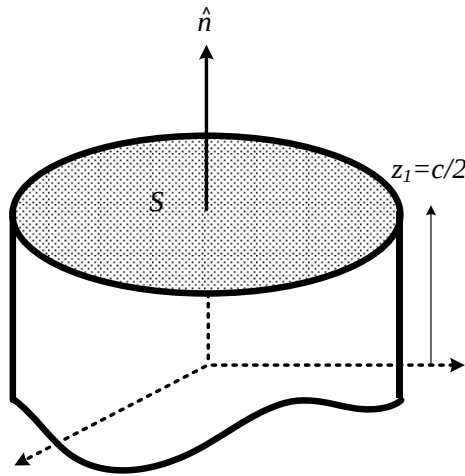
เมื่อ

$$E_{a,TE} = H_{a,TE} = \int_{a-l}^a \frac{J_n(\zeta \rho')}{\rho'} \sin[k(\rho' - a + l)] d\rho' \quad (2.82)$$

$$E_{a,TM} = H_{a,TM} = \int_{a-l}^a \frac{\partial J_n(\xi \rho')}{\partial \rho'} \sin[k(\rho' - a + l)] d\rho' \quad (2.83)$$

2.3.5 สมการสนามไฟฟ้าระยะใกล้

การหาสนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดจะเริ่มจากการพิจารณาค้นที่เดินทาง +z เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.5 โดยที่ h คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบช่องเปิด S (ระนาบ $z_1 = c/2$) และช่องเปิดวางอยู่บนช่องว่างอิสระ ดังนั้นเมื่อทราบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัสผิวของระนาบช่องเปิด S ที่ได้จากหัวข้อที่แล้ว ความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูลก็จะสามารถหาได้ดังสมการ (2.67) และ (2.68)

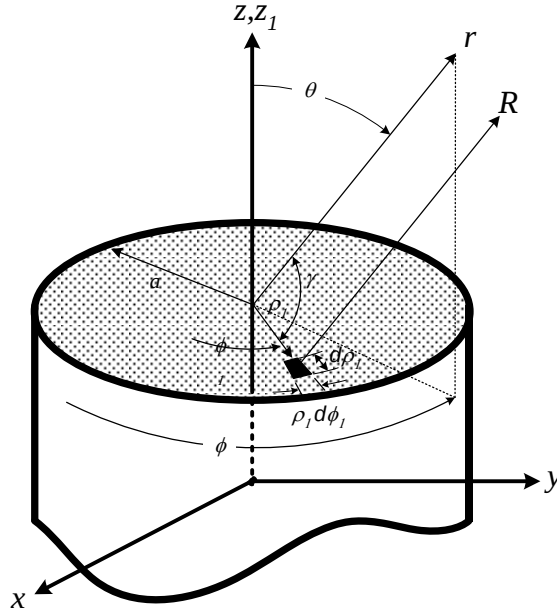


รูปที่ 2.5 การพิจารณาความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็กสมมูลและกระแสไฟฟ้าสมมูล

$$\bar{M}_s(\rho_1, \phi_1, z_1) = \bar{E}(\rho_1, \phi_1, z_1) \Big|_{z_1=c/2} \times \hat{n} = \bar{E}(\rho_1, \phi_1, z_1) \Big|_{z_1=c/2} \times \hat{z} \quad (2.84)$$

$$\bar{J}_s(\rho_1, \phi_1, z_1) = \bar{H}(\rho_1, \phi_1, z_1) \Big|_{z_1=c/2} \times (-\hat{n}) = \bar{H}(\rho_1, \phi_1, z_1) \Big|_{z_1=c/2} (-\hat{z}) \quad (2.85)$$

รูปที่ 2.6 แสดงรูปโครงสร้างเชิงเรขาคณิตของช่องเปิดแบบวงกลมที่วางอยู่บนช่องว่างอิสระ ดังนั้น สนามไฟฟ้าระยะไกลที่หาได้เวกเตอร์ของการแพร่กระจายคลื่น แสดงได้ดังสมการ (2.68) และ (2.69)



รูปที่ 2.6 ช่องเปิดแบบวงกลมที่วางอยู่บนช่องว่างอิสระ

$$E_{\theta,+z}(r, \theta, \phi) \approx -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \{L_\phi(\theta, \phi) + \eta N_\theta(\theta, \phi)\} \quad (2.86)$$

$$E_{\phi,+z}(r, \theta, \phi) \approx -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \{L_\theta(\theta, \phi) - \eta N_\phi(\theta, \phi)\} \quad (2.87)$$

จากรูปที่ 2.6 เป็นกรณีทีพิจารณาช่องเปิดวางอยู่บนระนาบ $z_1 = 0$ และเมื่อ $z_1 = c/2$ จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$E_{\theta,+z}(r, \theta, \phi) \approx -\frac{jke^{-jk(r-\frac{c}{2}\cos\theta)}}{4\pi r} \{L_\phi(\theta, \phi) + \eta N_\theta(\theta, \phi)\} \quad (2.88)$$

$$E_{\phi,+z}(r, \theta, \phi) \approx -\frac{jke^{-jk(r-\frac{c}{2}\cos\theta)}}{4\pi r} \{L_\theta(\theta, \phi) - \eta N_\phi(\theta, \phi)\} \quad (2.89)$$

โดยที่องค์ประกอบของฟังก์ชันการแพร่กระจายคลื่นคือ

$$N_\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[J_\rho \cos(\theta) \cos(\phi - \phi_1) + J_\phi \cos(\theta) \sin(\phi - \phi_1) \right] e^{jk\rho_1 \sin\theta \cos(\phi - \phi_1)} \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 \quad (2.90)$$

$$N_\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[-J_\rho \sin(\phi - \phi_1) + J_\phi \cos(\phi - \phi_1) \right] e^{jk\rho_1 \sin\theta \cos(\phi - \phi_1)} \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 \quad (2.91)$$

$$L_\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[M_\rho \cos(\theta) \cos(\phi - \phi_1) + M_\phi \cos(\theta) \sin(\phi - \phi_1) \right] e^{jk\rho_1 \sin\theta \cos(\phi - \phi_1)} \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 \quad (2.92)$$

$$L_\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[-M_\rho \sin(\phi - \phi_1) + M_\phi \cos(\phi - \phi_1) \right] e^{jk\rho_1 \sin\theta \cos(\phi - \phi_1)} \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 \quad (2.93)$$

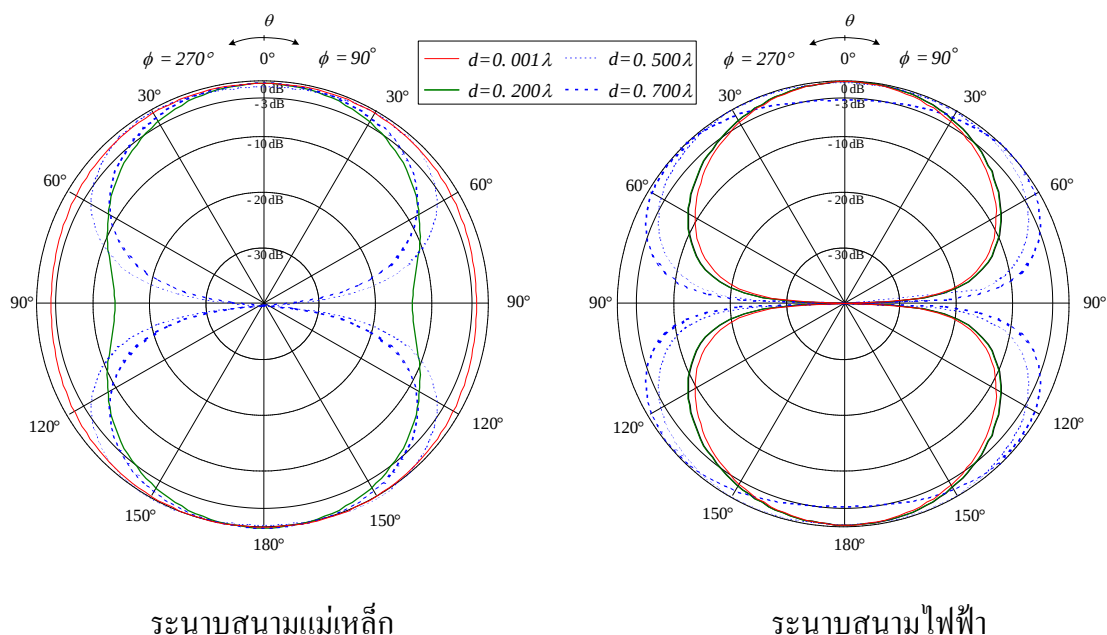
สนามไฟฟ้าที่แพร่กระจายออกจากช่องเปิดจะเริ่มจากการพิจารณาคลื่นที่เดินทาง $-z$ หาได้จากทฤษฎีของการเปลี่ยนแกน (Coordinate Transformations) เนื่องจากโพรบวางอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของความหนาแน่น ($z' = 0$) โดยที่โพรบวางอยู่ในทิศทาง y และช่องเปิดทั้ง 2 อยู่ห่างจากตำแหน่งการวางของโพรบเป็นระยะทางที่เท่ากันคือ $c/2$ ดังนั้นสนามไฟฟ้ารวมที่เกิดจากผลรวมของการแพร่กระจายคลื่นออกจากช่องเปิดในทิศทาง $+z$ กับทิศทาง $-z$ จะได้ดังต่อไปนี้

$$E_\theta(r, \theta, \phi) \approx -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \begin{aligned} &e^{jk\frac{c}{2}\cos(\theta)} [L_\phi(\theta, \phi) + \eta N_\theta(\theta, \phi)] \\ &+ e^{jk\frac{c}{2}\cos(\theta+\pi)} [L_\phi(\theta + \pi, \phi + \pi) + \eta N_\theta(\theta + \pi, \phi + \pi)] \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) \approx -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left\{ \begin{aligned} &e^{-jk\frac{c}{2}\cos(\theta)} [L_{\theta,1}(\theta, \phi) - \eta N_{\phi,2}(\theta, \phi)] \\ &+ e^{jk\frac{c}{2}\cos(\theta+\pi)} [L_{\theta,2}(\theta + \pi, \phi) - \eta N_{\phi,2}(\theta + \pi, \phi)] \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

2.4 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่น คือ รูปกราฟหรือฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แสดงความเข้มของสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของทิศทางหรือมุม โดยรูปกราฟนี้แบ่งเป็น กราฟเชิงเส้นมุมฉาก (Linear Plot) และกราฟวงกลม (Polar Plot) ซึ่งจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง แอมพลิจูด (Amplitude) ของกำลังงาน (Power) หรือ สนาม (Field) กับทิศทาง (Direction) ของการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของมุมในหน่วยองศา (Degree) หรือเรเดียน(Radian)แสดงดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าเมื่อความหนาของวงแหวนมีขนาดต่าง ๆ

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก พบว่าเมื่อความหนาของวงแหวนมีขนาดน้อย ๆ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะมีแนวโน้มใกล้เคียงกับสายอากาศไดโพล กล่าวคือจะมีลักษณะการแพร่กระจายคลื่นออกรอบตัว เมื่อความหนาของวงแหวนเพิ่มขึ้น สนามที่บริเวณด้านข้างจะเริ่มลดลง และความกว้างของลำคลื่นจะแคบลงด้วย แต่เมื่อความหนาของวงแหวนมากกว่า 0.20λ ความกว้างของลำคลื่นจะกลับมามีความกว้างขึ้นอีก ในส่วนของแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามไฟฟ้า พบว่าเมื่อความหนาของวงแหวนเพิ่มขึ้นความกว้างของลำคลื่นจะกว้างขึ้น และลำคลื่นจะเอียงไปจากมุม 0° และมุม 180° ไปเล็กน้อยเนื่องจากผลของโพรบ แต่อย่างไรก็ตามเมื่อความหนาของวงแหวนมีค่ามากกว่า 0.5λ ลักษณะของลำคลื่นที่ได้จะแตกออกเป็นสองลำคลื่น ซึ่งเป็นลักษณะที่ไม่ต้องการ เพราะฉะนั้นในการวิเคราะห์จะพิจารณาขนาดของวงแหวนที่มากที่สุดที่ 0.5λ ก็เพียงพอ

2.5 ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง

ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศ เป็นค่าที่แสดงว่าสายอากาศมีความแรงที่ทิศทางต่าง ๆ มากน้อยเพียงใดเทียบกับตัวแพร่กระจายคลื่นไอโซทรอปิกมีหน่วยเป็น dBi ซึ่งในการพิจารณาจะใช้ค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่มากที่สุด โดยได้จากความสัมพันธ์

$$D_0(\theta, \phi) = 10 \log \left(\frac{4\pi U_{\max}(\theta, \phi)}{P_{\text{rad}}} \right) \quad (2.96)$$

เมื่อ $U(\theta, \phi)$ คือกำลังงานที่แพร่กระจายออกจากสายอากาศต่อหน่วยมุมตัน (ตลอดพื้นผิวทรงกลม) แสดงความสัมพันธ์ของความเข้มการแพร่กระจายคลื่นกับสนามไฟฟ้าของสายอากาศในระยะไกลได้ดังนี้

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2 \cdot \eta} \cdot \left[|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2 \right] \quad (2.97)$$

โดย E_θ, E_ϕ คือ ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในระยะไกล

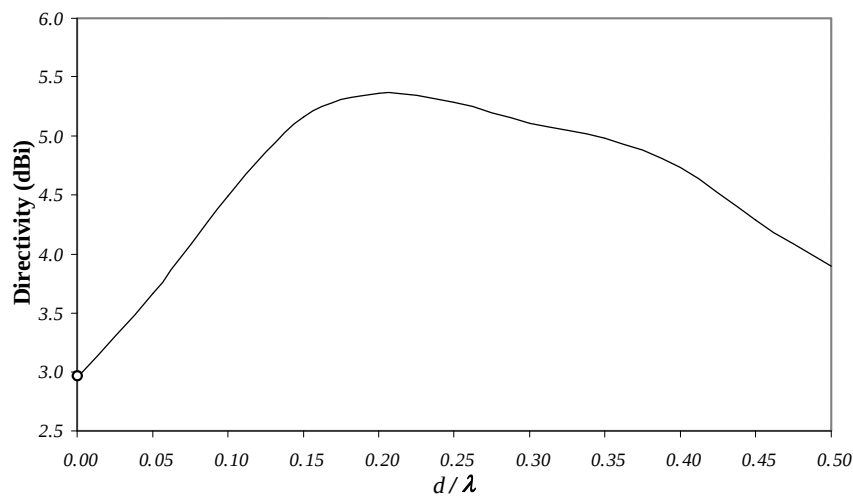
η คือ อิมพีแดนซ์อินทรีนสิก (Intrinsic Impedance) ของตัวกลาง มีค่าประมาณ $120\pi \Omega$

และ $U_{\max}$ คือ ค่าสูงสุดของความเข้มการแพร่กระจายคลื่น

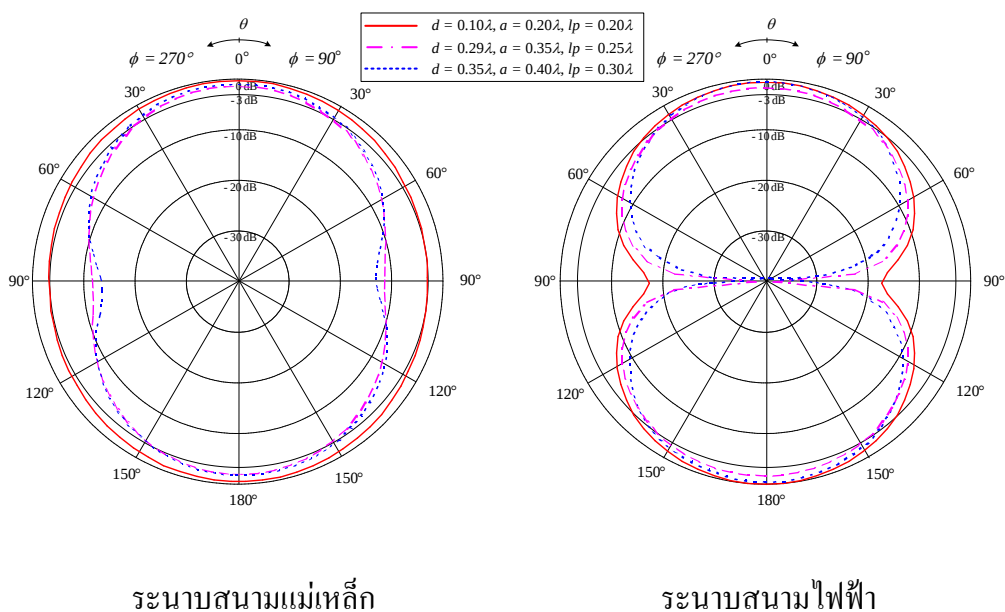
P_{rad} คือ กำลังงานที่แพร่กระจายคลื่นทั้งหมดที่หาได้จาก

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.98)$$

ที่ความหนาของวงแหวนมีขนาดน้อย ๆ ค่าสภาพเจาะจงทิศทางจะมีค่าน้อย และจะมีค่าสูงสุดเมื่อวงแหวนมีความหนาประมาณ 0.2λ และจะลดลงอีกเมื่อความหนาของวงแหวนเพิ่มขึ้น ซึ่งเปรียบเทียบได้จากความกว้างของลำคลื่นครึ่งกำลังในรูปที่ 2.8 คือ ถ้าลำคลื่นมีความกว้างมาก ๆ ค่าสภาพเจาะจงทิศทางก็จะมีค่าน้อย และเมื่อลำคลื่นมีความกว้างน้อย ๆ ค่าสภาพเจาะจงทิศทางก็จะมีค่าที่สูง ดังนั้นบริเวณที่ให้ค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูงที่สุดคือบริเวณที่วงแหวนมีความหนาเท่ากับ 0.2λ



รูปที่ 2.8 ค่าสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศเมื่อความหนาของวงแหวนมีขนาดต่าง ๆ



รูปที่ 2.9 แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าเมื่อความหนาและขนาดของวงแหวนและความยาวโพรบมีขนาดต่าง ๆ

แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้าเมื่อพิจารณาทั้งความหนา ขนาด และความยาวของโพรบพบว่าเมื่อความหนา ขนาด และความยาวของโพรบมีขนาดน้อย ๆ แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นจะมีลักษณะใกล้เคียงกับสายอากาศไดโพล กล่าวคือจะมีลักษณะการแพร่กระจายคลื่นออกรอบตัว แต่เมื่อความหนา ขนาด และความยาวของโพรบของวงแหวนเพิ่มขึ้น สนามที่บริเวณด้านข้างจะเริ่มลดลง และความกว้างของลำคลื่นจะแคบลงด้วย และเมื่อเพิ่มความหนาของวงแหวนเท่ากับ 0.35λ เพิ่มขนาดของวงแหวนวงกลมเท่ากับ 0.40λ เพิ่มความยาวของโพรบเท่ากับ 0.30λ พบว่าแบบรูปการแพร่กระจายคลื่นในระนาบสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ซึ่งอาจเป็นเพราะว่าขนาดของวงแหวนมีค่าน้อยกว่า 0.486λ และ การวิเคราะห์หาค่าขนาดของวงแหวน ควรมีค่าอยู่ระหว่าง $0.293\lambda < a < 0.486\lambda$ เพื่อให้โหมดคลื่นอื่น ๆ ถูกตัดออกไปให้เหลือเพียงโหมดคลื่นหลัก (Dominant Mode : TE_{11}) เพียงโหมดเดียว โดยโหมดคลื่นอื่น ๆ ที่อยู่ติดกับโหมดคลื่นหลักคือ TE_{21} อย่างไรก็ตามถึงแม้แบบรูปการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศจะไม่เปลี่ยนแปลงมากนัก แต่ก็จะมีลักษณะที่แตกออกเป็นสองลำคลื่นซึ่งเป็นลักษณะที่ไม่ต้องการ เพราะฉะนั้นในการวิเคราะห์จะพิจารณาความหนาของวงแหวนที่มากที่สุดที่ 0.29λ ขนาดของวงแหวนที่มากที่สุดที่ 0.35λ และความยาวของโพรบที่มากที่สุดที่ 0.25λ ก็เพียงพอ

2.6 สรุป

ในบทนี้ได้อธิบายเกี่ยวกับหลักการและทฤษฎีที่สำคัญสำหรับสายอากาศโพรบกระตุ้นวงแหวนวงกลม โดยได้วิเคราะห์โครงสร้างสายอากาศ และพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงคุณลักษณะของสายอากาศ เช่น รัศมีและความหนาของวงแหวนวงกลมเพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสมที่จะทำให้สายอากาศมีประสิทธิภาพมากที่สุด มีการแพร่กระจายคลื่นเป็นแบบสองทิศทางที่มีค่าสภาพเจาะจงทิศทางสูง อีกทั้งได้นำวิธีฟังก์ชันกรีนไดแอดิกมาวิเคราะห์ร่วมด้วยเพื่อให้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น โดยได้ขนาดของความหนาของวงแหวนวงกลมเท่ากับ 0.29λ หรือ 3.5 ซม. รัศมีของสายอากาศเท่ากับ 0.35λ หรือ 4.28 ซม. และความยาวโพรบเท่ากับ 0.25λ หรือ 3.06 ซม. จากนั้นก็นำสายอากาศวงแหวนวงกลมที่ได้ออกแบบนี้ไปวิเคราะห์ร่วมกับตัวสะท้อนคลื่นซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป