

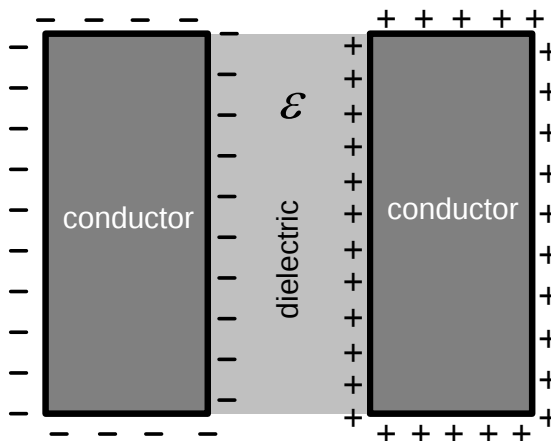
บทที่ 4

การสร้างภาพกลับ

(Image reconstruction)

4.1 หลักการพื้นฐาน

ตัวนำสองตัวใดๆ เมื่อถูกแยกหรือถูกขึ้นด้วยวัสดุที่เป็นฉนวนทางไฟฟ้าดังรูปที่ 4.1 จะมีค่าความจุไฟฟ้าระหว่างตัวนำนั้นๆ เมื่อป้อนค่าศักดาไฟฟ้าระหว่างตัวนำทั้งสองก็จะเกิดประจุบวกขึ้นที่ตัวนำหนึ่ง และจะเกิดประจุลบขึ้นที่ตัวนำอีกตัวหนึ่ง ค่าความจุไฟฟ้าจะถูกนิยามว่าเป็นอัตราส่วนระหว่างค่าสัมบูรณ์ของประจุไฟฟ้าและค่าสัมบูรณ์ของค่าศักดาไฟฟ้าที่ป้อนนั้น [10, 11] แสดงได้ดังสมการที่ (4.1)



รูปที่ 4.1 รูปตัวนำสองตัวเมื่อวางอยู่ระหว่างวัสดุที่เป็นฉนวนทางไฟฟ้า

$$C = \frac{Q}{V} \quad (4.1)$$

เมื่อ C คือ ค่าความจุไฟฟ้ามีหน่วยเป็นฟารัด (Farad ; F),

Q คือ ค่าประจุไฟฟ้าบนแผ่นอิเล็กโทรดในงานวิจัยนี้

V คือ ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างอิเล็กโทรด

ค่าความจุไฟฟ้าจะไม่ขึ้นอยู่กับค่าประจุไฟฟ้าและค่าศักดาไฟฟ้า เนื่องจากเมื่อเพิ่มค่าศักดาไฟฟ้าที่ป้อนให้ จะมีผลทำให้ประจุไฟฟ้าเพิ่มขึ้น ดังนั้นอัตราส่วนของปริมาณทั้งสองจึงมี

ค่าคงที่ แต่ค่าความจุไฟฟ้าจะขึ้นอยู่กับลักษณะทางกายภาพของตัวนำและค่าเพอิมิตติวิตีของวัสดุที่เป็นตัวกลาง โดยค่าเพอิมิตติวิตี (ϵ) แสดงได้ดังสมการที่ (4.2)

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (4.2)$$

เมื่อ ϵ_0 คือ เพอิมิตติวิตีของอวกาศอิสระ (Permittivity of free space) มีค่าเท่ากับ 8.854×10^{-12} F/m

ϵ_r คือ เพอิมิตติวิตีสัมพัทธ์ของวัสดุ (Relative permittivity) หรือค่าคงที่ไดอิเล็กตริกของวัสดุ (Dielectric constant) โดยไม่มีหน่วย

ค่าความจุไฟฟ้าของคู่อิเล็กโทรดสามารถหาได้โดยใช้สมการที่ (4.1) โดยการคำนวณหาค่าประจุไฟฟ้าที่กระจายอยู่บนแผ่นอิเล็กโทรดตัวรับ [10] แต่เนื่องจากโดยทั่วไปจะไม่สามารถทราบค่าการกระจายของประจุไฟฟ้านั้นล่วงหน้าได้ และข้อมูลเบื้องต้นที่มีอยู่คือ ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างคู่อิเล็กโทรดซึ่งจะเท่ากับค่าศักดาไฟฟ้าที่ป้อน และค่าเพอิมิตติวิตีซึ่งจะถูกกำหนดขึ้น ดังนั้นค่าการกระจายของประจุไฟฟ้าสามารถหาได้จากค่าความเข้มสนามไฟฟ้า แสดงได้ดังสมการ

$$Q = \oint_S D \cdot dS = \oint_S \epsilon E \cdot dS \quad (4.3)$$

เมื่อ D คือ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (Electric flux density)

E คือ ความเข้มสนามไฟฟ้า (Electric field intensity)

S คือ พื้นผิวของเกาส์ (Gaussian Surface)

สมการที่ (4.3) คือสูตรคณิตศาสตร์ของเกาส์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าประจุไฟฟ้าบนแผ่นอิเล็กโทรดสามารถหาได้โดยการอินทิเกรตบนพื้นผิวปิดล้อมรอบอิเล็กโทรดที่ซึ่งมีสนามไฟฟ้าผ่านพื้นผิวเล็กๆ (dS) ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าหาได้โดยความสัมพันธ์ดังนี้คือ

$$E = -\nabla \phi \quad (4.4)$$

เมื่อ ∇ คือ ตัวปฏิบัติการเวกเตอร์

ϕ คือ ค่าศักดาไฟฟ้า

สมการที่ (4.4) เรียกว่า เกรเดียนต์ (Gradient) ของฟังก์ชันศักดาไฟฟ้า นั่นคือถ้าสามารถคำนวณหาการกระจายของศักดาไฟฟ้าได้ ก็สามารถคำนวณหาความจุไฟฟ้าได้เช่นกัน ดังนั้นการคำนวณหาความจุไฟฟ้าจึงมีขั้นตอนดังนี้คือ คำนวณค่าการกระจายของศักดาไฟฟ้าภายใน

วัตถุ จากนั้นคำนวณค่าการกระจายของประจุไฟฟ้าบนอิเล็กโทรดตัวรับโดยใช้กฎของเกาส์ และคำนวณค่าความจุไฟฟ้าด้วยสมการที่ (4.1)

การหาค่าการกระจายของศักดาไฟฟ้าอธิบายได้ดังนี้ จากสมการที่ (4.1)-(4.4) จะเห็นว่าเกี่ยวข้องกับปัญหาทางสนามไฟฟ้า ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการของปัวซอง (Poisson's equation) โดยมีความหนาแน่นประจุในตัวกลางเท่ากับศูนย์หรือเรียกว่าสมการของลาปลาซ (Laplace's equation) [10,11] ซึ่งสมการคือ

$$\nabla \cdot [\epsilon_0 \epsilon_r(x, y) \nabla \phi(x, y)] = 0 \quad (4.5)$$

เมื่อ $\epsilon_r(x, y)$ คือ ค่าเพอmittivิตีสัมพัทธ์ของวัสดุในแบบ 2 มิติ

$\phi(x, y)$ คือ ค่าการกระจายของศักดาไฟฟ้าแบบ 2 มิติ

สมการที่ (4.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองแบบเอลลิปติก (Elliptic) ซึ่งใช้ในการหาค่าการกระจายของศักดาไฟฟ้า

เนื่องจากในงานวิจัยนี้จะใช้ อัลกอริทึมที่มีอยู่เดิม [1,2] และอัลกอริทึมนี้ได้ใช้วิธีการคำนวณเชิงเลข (Numerical method) เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ ซึ่งใช้อยู่ด้วยกัน 2 วิธีคือ วิธีผลต่างจำกัด และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยวิธีผลต่างจำกัดนั้นจะถูกใช้กับเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยมเนื่องจากรูปร่างของตัวครอบและอิเล็กโทรดเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่สมมาตร และใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับเซ็นเซอร์แบบทรงกระบอก เนื่องจากรูปร่างของตัวครอบและอิเล็กโทรดมีความซับซ้อนมากกว่าในการคำนวณนั้นจะถูกคำนวณในแบบ 2 มิติ และค่าความจุไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณนี้ คือค่าความจุไฟฟ้าที่เกิดจากการกำหนดเงื่อนไขของ พิกเซลใดๆ บนพื้นที่หน้าตัดของอุปกรณ์เซ็นเซอร์ โดยค่าความจุไฟฟ้าที่ได้จะถูกนำไปสร้างเซ็นซitivิตีของระบบ ECT

4.2 วิธีการหาค่าเซนซitivิตี (Sensitivity) ของระบบ ECT

เซนซitivิตี S ของระบบ ECT จากวิธีลิเนียร์แบ็กโพรเจกชัน จะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความจุไฟฟ้าของพิกเซลต่างๆที่มีต่ออิเล็กโทรดแต่ละคู่ (Relative capacitance change) แสดงได้ดังสมการที่ (4.6)

$$S_{ij}(p) = \left[\frac{C_{ij}^{oil,p} - C_{ij}^{empty}}{C_{ij}^{oil} - C_{ij}^{empty}} \right] \left[\frac{1}{\epsilon_{oil} - \epsilon_{empty}} \right] \left[\frac{A_{max}}{A_p} \right] \quad (4.6)$$

เมื่อ $S_{ij}(p)$ คือ เซนซitivิตีของพิกเซล p ที่เป็นของคู่อิเล็กโทรด $i - j$

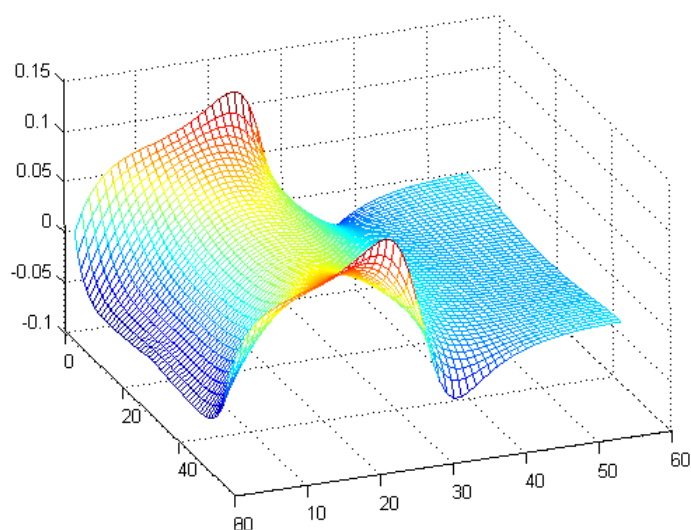
$C_{ij}^{oil,p}$ คือ ค่าความจุไฟฟ้า เมื่อกำหนดให้พิกเซล p มีค่าพอมิตติวิตีของน้ำมัน และพิกเซลอื่นๆที่เหลือมีค่าพอมิตติวิตีของอากาศ

ε_{oil} และ ε_{empty} คือ ค่าพอมิตติวิตีสัมพัทธ์ของน้ำมันและอากาศ ตามลำดับ

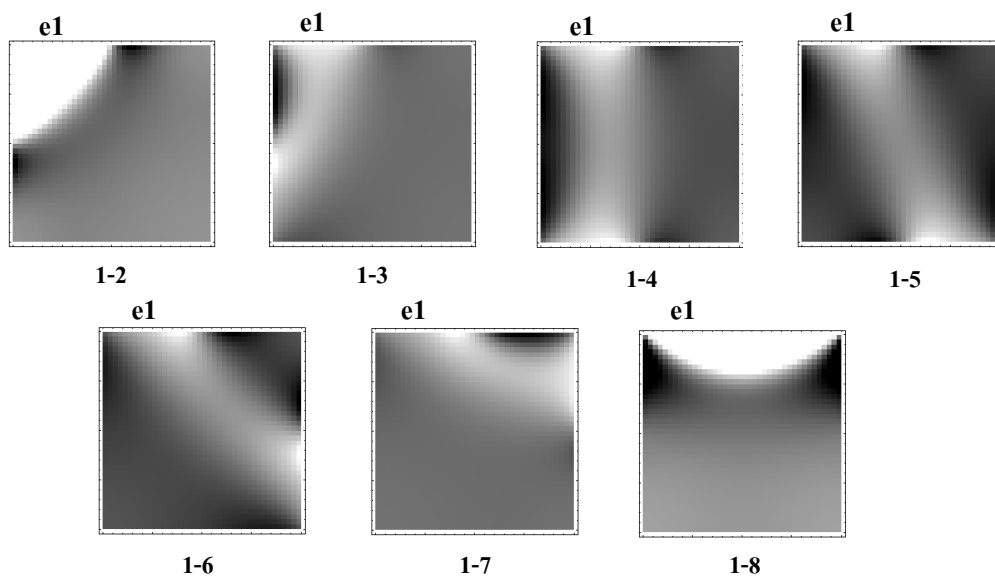
A_{max} และ A_p คือพื้นที่ทั้งหมดของภาพหน้าตัด และพื้นที่ของพิกเซล ตามลำดับ

จากสมการที่ (4.6) แสดงให้เห็นถึง การตอบสนองของเซ็นเซอร์ที่มีต่อค่าพอมิตติวิตีของ ตัวกลางค่าสูงค่าหนึ่งที่อยู่บนพื้นที่จุดเล็กๆในบริเวณของเซ็นเซอร์ที่มีค่าพอมิตติวิตีของตัวกลางค่า ต่ำกว่าซึ่งเป็นผลให้สามารถแสดงค่าของพอมิตติวิตีค่าสูงบนค่าพอมิตติวิตีที่ต่ำกว่าได้ค่าเซนซิติวิตี สามารถหาได้จากการคำนวณด้วยสมการที่ (4.6) โดยการวัดทางกายภาพนั้นจะทำได้ยาก หรือทำ ไม่ได้เลย เนื่องจากต้องกำหนดค่าพอมิตติวิตีของพิกเซลใดๆ ซึ่งในทางปฏิบัติทำได้ยาก ดังนั้นใน ระบบ ECT จึงเลือกใช้วิธีการคำนวณ แต่ปัญหาที่สำคัญของวิธีการนี้คือ ใช้ประสิทธิภาพของเครื่อง คำนวณและเวลาในการคำนวณสูง

เนื่องจากความสมมาตรของเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยม ทำให้ค่าเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กโทรดที่ สมมาตรกันมีค่าเท่ากัน เช่น ค่าเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กโทรด 1-2, 3-4, 5-6 และ 7-8 จะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นการคำนวณหาค่าเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กโทรด จึงสามารถทำได้โดยการคำนวณเฉพาะคู่อิเล็กโทรด 1-2 ถึง 1-8 เท่านั้น และค่าเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กโทรดอื่นๆอีกจำนวน 21 คู่ จะใช้วิธีการ หมุน (rotation) เปรียบเทียบคู่ที่เท่ากัน โดยคุณสมบัตินี้จะทำให้สามารถลดเวลาในการคำนวณลงได้ อย่างมาก รูปลักษณะการกระจายของเซนซิติวิตี ที่อยู่ภายในส่วนการแสดงผลของภาพของเซ็นเซอร์ แบบสี่เหลี่ยม เฉพาะเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กโทรด 1-4 ในแบบ 3 มิติ แสดงได้ดังรูปที่ 4.2 ส่วนเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กโทรด 1-2 ถึงคู่อิเล็กโทรด 1-8 แสดงได้ดังรูปที่ 4.3

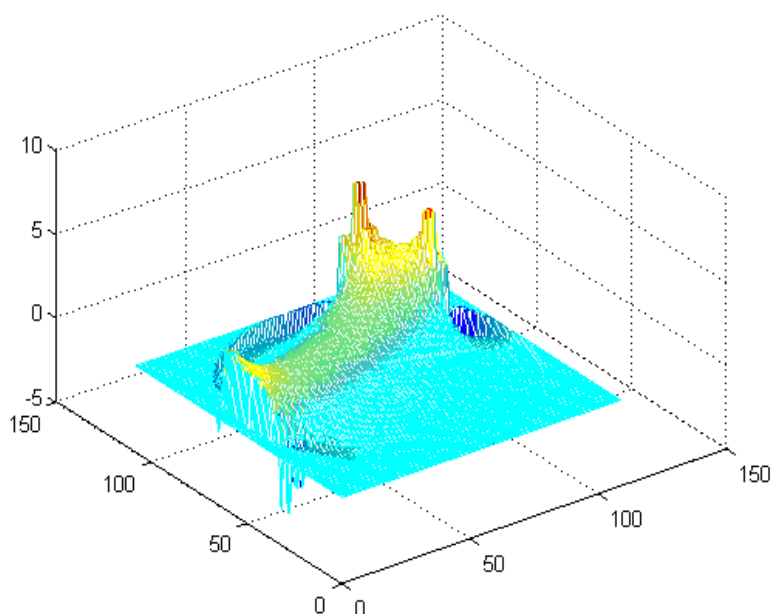


รูปที่ 4.2 ลักษณะการกระจายของค่าเซนซิติวิตีในแบบ 3 มิติของเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยมเฉพาะคู่อิเล็กโทรด 1-4

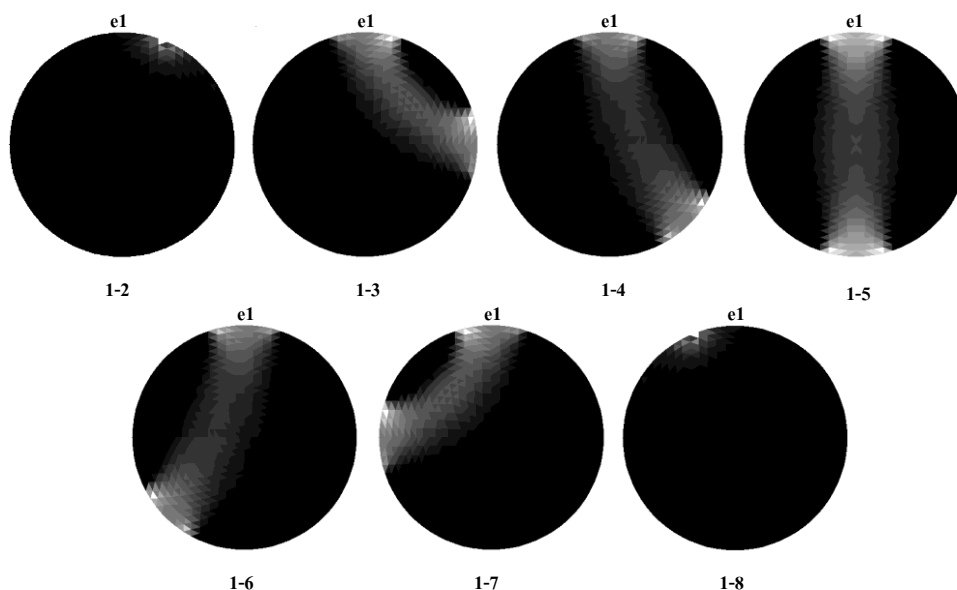


รูปที่ 4.3 รูปลักษณะการกระจายของค่าเซนต์วิตติของเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยมเฉพาะคู่อเล็กโทรด 1-2 ถึงคู่อเล็กโทรด 1-8

ในส่วนของคุณค่าเซนต์วิตติของแต่ละคู่อเล็กโทรดสำหรับเซ็นเซอร์แบบวงกลม จะมีลักษณะเหมือนกับเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยม แสดงได้ดังรูปที่ 4.4 และ 4.5



รูปที่ 4.4 รูปลักษณะการกระจายของค่าเซนต์วิตติของเซ็นเซอร์แบบวงกลมเฉพาะคู่อเล็กโทรด 1-6 ในแบบ 3 มิติ



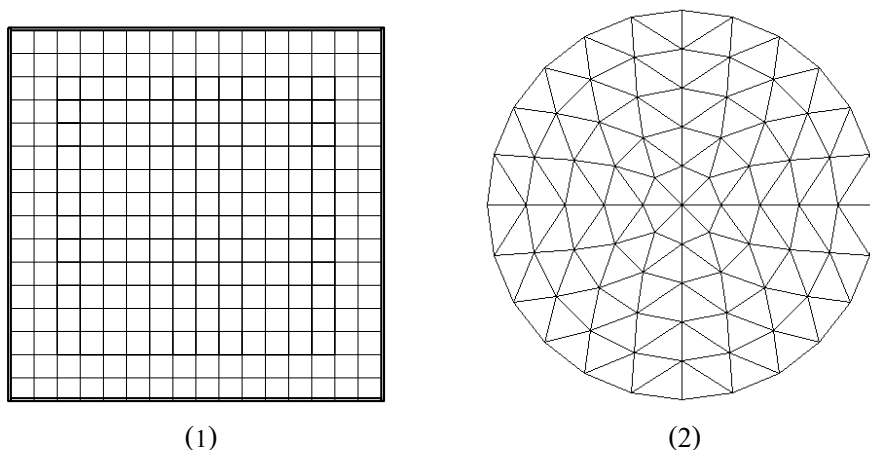
รูปที่ 4.5 รูปลักษณะการกระจายของค่าเซนต์วิตติของเซนต์เซอร์แบบวงกลมเฉพาะคู่เล็กโทรด 1-2 ถึงคู่เล็กโทรด 1-8

จากรูปที่ 4.2 และ 4.4 จะเห็นว่า ค่าของเซนต์วิตติของแต่ละคู่เล็กโทรดจะมีทั้งค่าบวกและค่าลบ โดยจะสังเกตเห็นว่า พิกเซลที่อยู่ห่างจากแนวของการกระจายประจุไฟฟ้าของคู่เล็กโทรด จะมีค่าระดับเทาที่ต่ำกว่า พิกเซลที่อยู่ในแนวของการกระจายประจุไฟฟ้าของคู่เล็กโทรดนั้นๆ ดังนั้นจากการของวิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชัน ซึ่งจะทำให้การบวกค่าความจุไฟฟ้าที่ถูกถ่วงน้ำหนักด้วยค่าเซนต์วิตติของทุกคู่เล็กโทรดเข้าด้วยกัน ค่าระดับเทาของบริเวณที่มีวัตถุจะเด่นชัดขึ้น และที่บริเวณอื่นๆค่าระดับเทาจะมีค่าลดลง

4.3 การสร้างภาพกลับ

4.3.1 การสร้างภาพกลับโดยวิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชัน

การสร้างภาพกลับ พื้นที่หน้าตัดของตัวเซ็นเซอร์จะถูกพิจารณาเป็นพิกเซล (p) โดยลักษณะของพิกเซลจะขึ้นอยู่กับรูปร่างของเซ็นเซอร์ นั่นคือ เซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยม พิกเซลจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการแบ่งเป็นตารางของวิธีผลต่างจำกัด ซึ่งในส่วนของการแสดงผลภาพ จะได้จำนวนพิกเซลทั้งหมดคือ 3025 พิกเซล และเซ็นเซอร์แบบวงกลม พิกเซลจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการแบ่งเป็นอิลิเมนต์สามเหลี่ยมของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ซึ่งในส่วนของการแสดงผลภาพ จะได้จำนวนพิกเซลทั้งหมดคือ 1436 พิกเซล การแบ่งพื้นที่ย่อยบนพื้นที่หน้าตัดของตัวเซ็นเซอร์แสดงได้ดังในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 การแบ่งพื้นที่หน้าตัดของเซ็นเซอร์ออกเป็นฟิสิกเซลล์ย่อยๆ (1) แบ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมสำหรับเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยม และ (2) แบ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมในเซ็นเซอร์แบบวงกลม

หลักการพื้นฐานของวิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชันคือ สมการค่าความจุไฟฟ้าจะถูกแปลง (Transform) ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ (Matrix equation) ซึ่งเมทริกซ์นี้จะสัมพันธ์กับค่าความจุไฟฟ้า (C) ที่มีต่อค่าพหุคูณมิติของฟิสิกเซลล์ (G) การแปลงนี้แสดงได้ดังสมการที่ (4.7)

$$C = S.G \quad (4.7)$$

เมื่อ C คือ เมทริกซ์ของค่าความจุไฟฟ้าขนาด $M \times 1$, M เป็นจำนวนคู่ของการวัด

G คือ เมทริกซ์ของจำนวนฟิสิกเซลล์ขนาด $N \times 1$ ซึ่งแสดงถึงการกระจายตัวของพหุคูณมิติภายในเซ็นเซอร์, N เป็นจำนวนของฟิสิกเซลล์

S คือ เมทริกซ์ของการแปลง โดยในระบบ ECT จะถูกเรียกว่า เซนซิวิตีเมทริกซ์ (Sensitivity matrix) ซึ่งจะมีขนาด $M \times N$ โดยแสดงถึงความสัมพันธ์ของค่าความจุไฟฟ้าของแต่ละคู่อิเล็กโทรดเมื่อค่าพหุคูณมิติของตัวกลางเปลี่ยนตำแหน่งไป

เมื่อได้เมทริกซ์ของค่าความจุไฟฟ้า C เมทริกซ์การกระจายของพหุคูณมิติ G สามารถได้มาโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์ S ดังสมการที่ (4.8)

$$G = S^{-1}.C \quad (4.8)$$

จากสมการที่ (4.8) เมทริกซ์ S^{-1} ไม่สามารถหาค่าได้เนื่องจากไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัส ซึ่งระบบ ECT ขนาดของเมทริกซ์ S คือ $M \ll N$ เช่นในงานวิจัยนี้ $M = 28$ และ $N = 3025$ ดังนั้นในวิธี ลิเนียร์แบ็กโปรเจกชัน จะใช้ค่าของการสลับเปลี่ยนเมทริกซ์ (Transpose matrix) ของ

S หรือ S^T ซึ่งมีขนาด $N \times M$ แทน และ ค่าของเมทริกซ์ G หรือค่าของแต่ละพิกเซล ($g_n : n=1...N$) จะเท่ากับการบวก (หรือการแบ็กโปรเจก) ของค่าความจุไฟฟ้า c_m ($m=1...M$) ของทุกคู่โอเล็กโตรดที่ถูกถ่วงน้ำหนัก (Weight) ด้วยค่าเซนซิวิตีของแต่ละพิกเซลในแต่ละคู่โอเล็กโตรดที่สอดคล้องกัน แสดงได้ดังสมการที่ (4.9)

$$g_n = \sum_{m=1}^M c_m s_{nm} \quad (4.9)$$

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธี ลิเนียร์แบ็กโปรเจกชันในการสร้างภาพกลับ และได้แบ่งพื้นที่หน้าตัดของตัวเซ็นเซอร์ออกเป็นพิกเซลย่อยๆ ส่วนที่ถูกแสดงผลเป็นภาพจะอยู่ภายในกรอบด้านในของเซ็นเซอร์ และจะถูกแสดงผลด้วยค่าระดับเทา (Grey level : $G(p)$) เพื่อแสดงถึงค่าประมาณของค่าพอมิตติวิตีของตัวกลาง ค่าระดับเทาของภาพจะถูกคำนวณจากสมการที่ (4.10)

$$G(p) = \frac{\sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 C_{ij}^n S_{ij}(p)}{\sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^8 S_{ij}(p)} \quad (4.10)$$

เมื่อ p คือ ตำแหน่งของพิกเซลใดๆ

เนื่องจากค่าความจุไฟฟ้าของคู่โอเล็กโตรดที่อยู่ติดกันโดยปกติจะมีค่ามากที่สุด และค่าความจุไฟฟ้าของคู่โอเล็กโตรดที่อยู่ห่างกันจะมีค่าต่ำที่สุด ซึ่งช่วงของการเปลี่ยนแปลงนี้จะมีย่านกว้าง ดังนั้นจึงต้องทำการนอร์มอลไลซ์ค่าความจุไฟฟ้าเหล่านี้ให้อยู่ในช่วงระหว่าง 0 (เมื่อเซ็นเซอร์มีค่าพอมิตติวิตีเฉพาะอากาศ) และ 1 (เมื่อเซ็นเซอร์มีค่าพอมิตติวิตีเฉพาะน้ำมัน) ซึ่งแสดงได้ดังสมการที่ (4.11)

$$C_{ij}^n = \frac{C_{ij}^m - C_{ij}^{empty}}{C_{ij}^{oil} - C_{ij}^{empty}} ; i=1..7, j=i+1..8 \quad (4.11)$$

เมื่อ i คือ อันดับของโอเล็กโตรดตัวส่ง และ j คือ อันดับของโอเล็กโตรดตัวรับ

C_{ij}^n คือค่านอร์มอลไลซ์ของค่าความจุไฟฟ้า (Normalized capacitance) ของคู่โอเล็กโตรด $i-j$

C_{ij}^m คือ ค่าความจุไฟฟ้าของคู่โอเล็กโตรด $i-j$ ที่วัดได้จากระบบเมื่อมีวัตถุที่ต้องการตรวจสอบอยู่ในเซ็นเซอร์

C_{ij}^{empty} คือ ค่าความจุไฟฟ้าของคู่อิเล็กโตรด $i-j$ ที่วัดได้จากระบบเมื่อภายใน เซ็นเซอร์ถูกบรรจุด้วยอากาศ

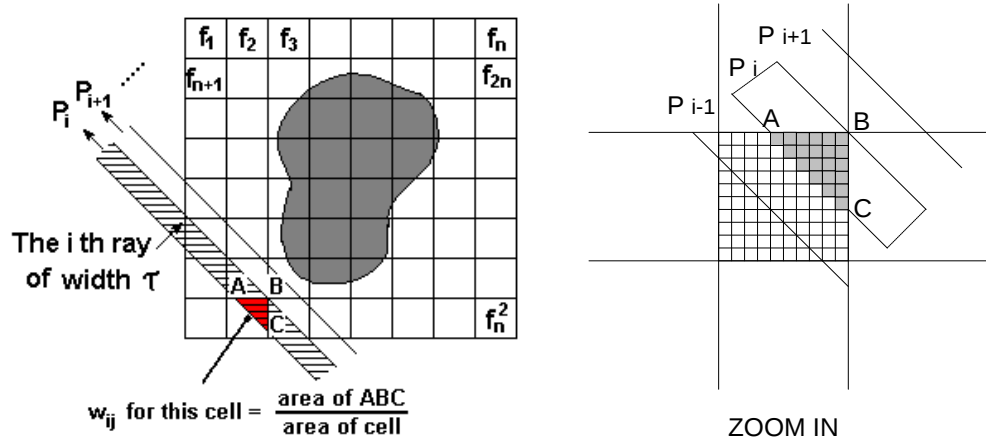
C_{ij}^{oil} คือ ค่าความจุไฟฟ้าของคู่อิเล็กโตรด $i-j$ ที่วัดได้จากระบบเมื่อภายใน เซ็นเซอร์ถูกบรรจุด้วยน้ำมัน

4.3.2 การสร้างภาพกลับโดยใช้วิธี Algebraic Reconstruction Technique (ART)

จากหลักการพื้นฐานการสร้างภาพตัดขวางของ CT โดยใช้อัลกอริทึมเชิงพีชคณิตนั้น จะ สมมุติให้วัตถุที่ต้องการสร้างกลับ (ภาพตัดขวางใน 2 มิติ หรือ ปริมาตรใน 3 มิติ) เป็นเมตริกซ์ของ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และจากนั้นทำการแก้สมการทางพีชคณิตเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจากค่า โปรเจกชันที่วัดได้ ในที่นี้จะพิจารณาการสร้างกลับของวัตถุเฉพาะใน 2 มิติ แสดงดังรูปที่ 4.6 โดยที่ จะสมมุติให้ภาพประกอบด้วยเซตของเซลล์ (cell) $f(x,y)$ โดยที่ในแต่ละเซลล์ ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นค่าคงที่ กำหนดให้ f_j เป็นค่าคงที่ที่เซลล์ที่ j^{th} และให้ N เป็นจำนวนทั้งหมดของเซลล์ ให้ p_i แทนค่าโปรเจกชันของรังสีเส้นที่ i^{th} ที่วัดได้ ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่าง f_j และ p_i คือ

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i, \quad i=1,2,\dots,M \quad (4.12)$$

เมื่อ M คือ จำนวนรังสีทั้งหมด w_{ij} คือ ค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting factor) ที่แทน ผลของเซลล์ที่ j^{th} ที่มีต่อรังสีเส้นที่ i^{th} โดยแฟกเตอร์ w_{ij} มีค่าเท่ากับสัดส่วนของพื้นที่ของเซลล์ที่ j^{th} ที่ตัดกับรังสี i^{th} ซึ่งจากรูปที่ 4.7 จะเห็นว่าทุกเซลล์จะถูกแบ่งเป็น 100 เซลล์ย่อย โดยจะมีเพียง 21 เซลล์ย่อยเท่านั้นที่อยู่บนเส้นทางเดินแสง ดังนั้นเซลล์นี้จะมีค่าแฟกเตอร์น้ำหนักเท่ากับ $21/100 = 0.21$



รูปที่ 4.7 รูปแบบการฉายแสง และการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนักของอัลกอริทึมเชิง พีชคณิต

สำหรับ M และ N ที่มีค่ามาก มีวิธีการทำซ้ำที่ใช้ในการแก้สมการที่(4.12) คือ วิธีของโปรเจกชัน (Method of Projection) ซึ่งเสนอโดยคาร์แมร์ซ อธิบายได้โดย
จากสมการที่ (4.12) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบที่ขยายออกได้ดังนี้

$$\begin{aligned} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + \cdots + w_{1N}f_N &= p_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + \cdots + w_{2N}f_N &= p_2 \\ &\vdots \\ w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + \cdots + w_{MN}f_N &= p_M \end{aligned} \quad (4.13)$$

ภาพที่ถูกแทนด้วย $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ จะถูกพิจารณาว่าเป็นจุดในสเปซ (Space) N มิติ ในสเปซ ดังกล่าว แต่ละสมการจะแทน Hyperplane เมื่อระบบสมการสามารถหาผลเฉลยที่เป็นหนึ่งเดียว (Unique Solution) ได้ จุดตัดของ Hyperplane ทั้งหมดจะเป็นจุดๆเดียวและเป็นค่าผลเฉลยของสมการ

วิธีของคาร์แมร์ซคือ ต้องทำการเดาค่าเริ่มต้น โดยกำหนดให้ค่าเริ่มต้นเป็น $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ และสามารถเขียนแทนแบบเวกเตอร์ได้เป็น $\vec{f}^{(0)}$ ในสเปซ N มิติ และในกรณีส่วนใหญ่เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ค่าเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ค่าเริ่มต้นนี้จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ซึ่งก็คือสมการแรกใน (4.13) จะได้เป็น $\vec{f}^{(1)}$ จากนั้น $\vec{f}^{(1)}$ จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ที่แทนด้วยสมการที่สองใน (4.13) และจะได้เป็น $\vec{f}^{(2)}$ จากนั้นทำต่อไปเรื่อยๆ โดยที่ $\vec{f}^{(i-1)}$ จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ที่แทนด้วยสมการที่ i^{th} ใน (4.13) จะได้เป็น $\vec{f}^{(i)}$ ซึ่งกระบวนการนี้เราสามารถเขียนแทนในรูปของสมการคณิตศาสตร์ได้คือ

$$\vec{f}^{(i)} = \vec{f}^{(i-1)} - \frac{(\vec{f}^{(i-1)} \cdot \vec{w}_i - p_i)}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (4.14)$$

เมื่อ $\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$ และ $\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i$ เป็นผลคูณเวกเตอร์ (Dot product) ของ $\vec{w}_i$

ในการประยุกต์ใช้สำหรับงานที่จำเป็นต้องมีจำนวนของโปรเจกชันจำนวนมาก และภาพที่ต้องการสร้างกลับมีขนาดใหญ่ จะทำให้เกิดความยุ่งยากในการใช้สมการที่ (4.14) เนื่องมาจากปัญหาเรื่องของการคำนวณ เนื้อที่หน่วยความจำ และการเรียกใช้อย่างรวดเร็วของสัมประสิทธิ์น้ำหนัก w_{ij} โดยพิจารณากรณีของการสร้างภาพขนาด 100×100 พิกเซลด้วยข้อมูล 150 โปรเจกชัน และแต่ละโปรเจกชันมีจำนวนรังสีเท่ากับ 150 รังสี ดังนั้นจำนวนของสัมประสิทธิ์น้ำหนัก w_{ij} ทั้งหมดที่ต้องใช้จะอยู่ในระดับของ 10^8 ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นจำนวนที่มหาศาล

เพื่อที่จะแก้ปัญหาค่าความยุ่งยากนั้น วิธีการพีชคณิตอื่นๆ ได้ถูกนำเสนอ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นการประมาณของสมการที่ (4.14) เพื่อที่จะวิเคราะห์การประมาณที่สามารถคำนวณได้ง่าย สมการที่ (4.14) จะถูกจัดใหม่ในสมการที่ (4.15)

$$f_j^{(i)} = f_j^{(i-1)} + \frac{p_i - q_i}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij} \quad (4.15)$$

$$q_i = \bar{f}^{(i-1)} \cdot \vec{w}_i = \sum_{n=1}^N f_n^{(i-1)} w_{in} \quad (4.16)$$

สมการเหล่านี้กล่าวว่า เมื่อโปรเจกต์ผลเฉลยที่ $(i-1)^{th}$ ไปบน Hyperplane ที่ i^{th} แล้ว ค่าระดับเทาของเซลล์ที่ j^{th} จะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของ $\Delta f_j^{(i)}$ ดังสมการที่ (4.17)

$$\Delta f_j^{(i)} = f_j^{(i)} - f_j^{(i-1)} = \frac{p_i - q_i}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij} \quad (4.17)$$

โดยที่ p_i คือ ผลบวกที่วัดได้ตามแนวรังสีที่ i^{th} , q_i คือ ผลบวกที่คำนวณได้ตามแนวรังสีเดียวกันที่ใช้ผลเฉลยที่ $(i-1)^{th}$ ของภาพ ค่าแก้ไข Δf_j (Correction) สำหรับเซลล์ที่ j^{th} สามารถได้จากการคำนวณผลต่างระหว่างผลบวกที่วัดได้และผลบวกที่คำนวณได้ ค่าความแตกต่างจะถูกนอร์มอลไลซ์ด้วย $\sum_{n=1}^N w_{in}^2$ และถูกกำหนดให้กับเซลล์ทุกเซลล์ตามแนวรังสี i^{th} ค่าที่กำหนดให้แต่ละเซลล์จะถูกถ่วงน้ำหนักด้วยค่า w_{ij} ที่สอดคล้องกัน

วิธี ART นี้ ได้ถูกนำเสนอสำหรับงานด้านการเอ็กซ์เรย์คอมพิวเตอร์ และได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กับการสร้างภาพตัดขวางของระบบ ECT เพื่อลดจำนวนการทำซ้ำลง ในวิธีนี้ค่าแก้ไขจะถูกใช้ปรับปรุงกับทุกๆ เซลล์ที่รังสีที่ i^{th} ผ่านก่อนที่จะแก้ไขในรังสีถัดไป (ray-by-ray updating) โดยสมการของ ART แสดงได้โดยสมการที่ (4.18)

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \alpha \frac{p_i - \sum_{n=1}^N w_{in} f_n^{(k)}}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij} \quad (4.18)$$

ขั้นตอนของการคำนวณสำหรับการทำซ้ำที่ k^{th}

1. กำหนดค่าเริ่มต้นของ $f_j^0 = 0$
2. หาค่าโปรเจกชันของ f_j^k สำหรับรังสีที่ i^{th}
3. หาค่าผิดพลาดของโปรเจกชันของ f_j^k
4. ทำการปรับปรุงค่าของผลเฉลยในแต่ละเซลล์ที่ j^{th}
5. ทำซ้ำตั้งแต่ข้อที่ 2-4 จนครบทุกๆรังสี เป็นการเสร็จการคำนวณการทำซ้ำที่ k^{th}

ในการประยุกต์ใช้กับระบบ ECT ทำได้โดย ในสมการที่ (4.18) แทนค่า p_i ด้วยค่าความจุไฟฟ้าของแต่ละคู่อิเล็กโตรด กล่าวคือ ค่าความจุไฟฟ้าของแต่ละคู่อิเล็กโตรดของระบบ ECT จะเปรียบเสมือนกับค่าการลดทอนของรังสีของระบบ X-ray ที่วัดได้ และแทนค่า w_{ij} ด้วยค่าเซนซิทิวิตี $S_{ij}(p)$ ตัวแปร i และ j ของ X-ray จะหมายถึง รังสีที่ i^{th} ของเซลล์ที่ j^{th} แต่ในระบบ ECT นั้นจะหมายถึง ค่าเซนซิทิวิตีของคู่อิเล็กโตรด $i-j$ จากนั้นจะได้สมการใหม่ที่ใช้ในระบบ ECT ดังสมการที่ (4.19)

$$G_{k+1}(p) = G_k(p) + \alpha \frac{C_{ij} - \sum_{n=1}^N S_{ij}(n)G_k(n)}{\sum_{n=1}^N S_{ij}^2(n)} S_{ij}(p) ; p = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.19)$$

ขั้นตอนของการคำนวณสำหรับการทำซ้ำที่ k ในสมการที่ (4.19) คือ

1. กำหนดค่าเริ่มต้นของ $G_0(p)$ โดยใช้ค่าเริ่มต้นที่ได้จากวิธี วิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชันในสมการที่ (4.10)
2. กำหนดคู่อิเล็กโตรดคู่แรกคือ $i-j=1-2$ แล้วจึงคำนวณให้ครบทุกพิกเซล $p=1, 2, 3, \dots, N$ จากนั้นจึงเปลี่ยน $i-j=1-3$ และคำนวณทุกพิกเซล $p=1, 2, 3, \dots, N$ ซ้ำอีก ทำซ้ำลักษณะนี้จนครบทุกพิกเซลของคู่อิเล็กโตรด $i-j$ ซึ่งระบบ ECT ในงานวิจัยนี้ อิเล็กโตรดคู่สุดท้ายคือ $i-j=7-8$ โดยจะได้ทั้งหมด 28 ครั้ง เป็นการสิ้นสุดขั้นตอนของการคำนวณสำหรับการทำซ้ำที่ k

4.4 การปรับปรุงภาพ

4.4.1 วิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชันตามหลักของ Projected Landweber Iteration

การทำซ้ำ (Iterative) เป็นเทคนิคที่ถูกนำมาใช้เพื่อปรับปรุงคุณภาพของภาพที่ถูกสร้างกลับให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นจากอัลกอริทึม [1, 2] จะเริ่มต้นจากการหาค่าระดับเทา (G_0) โดยจะใช้วิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชัน เพื่อเป็นค่าเริ่มต้นของกระบวนการ การทำซ้ำ จากนั้นจึงจะนำ G_0 ไปผ่านกระบวนการทำซ้ำในสมการที่ (4.22) โดยสามารถอธิบายเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

หาค่า G_0 โดยจะใช้วิธีลิเนียร์แบ็กโพรเจกชัน เพื่อเป็นค่าเริ่มต้นของกระบวนการ การทำซ้ำ จากนั้นใช้วิธี LFP เพื่อหาค่า D_k เมื่อ D_k คือค่าประมาณของค่าความจุไฟฟ้า (The estimated capacitance vector) ที่ได้จากวิธีลิเนียร์ฟอร์เวิร์ดโพรเจกชัน (Linear Forward Projection : LFP) แสดงได้ดังสมการที่ (4.20) ค่านี้จะแสดงถึงค่าความจุไฟฟ้าของแต่ละคู่อิเล็กโทรดที่ถูกสร้างกลับมาจากค่าระดับเทา (G_k)

$$D_{k,ij} = \frac{\sum_p G_k(p) S_{ij}(p)}{\sum_p S_{ij}(p)} \quad (4.20)$$

จากนั้นหาค่าผลต่างระหว่าง D_k และ C ซึ่งจะได้เป็น $C - SG_k$ ที่แสดงถึงค่าผิดพลาดระหว่างค่าความจุไฟฟ้าที่คำนวณได้และค่าความจุไฟฟ้าที่ได้จากการประมาณมาจาก G_k ค่าผิดพลาดนี้จะถูกใช้เพื่อสร้างภาพของค่าผิดพลาด (An error image) โดยใช้วิธีลิเนียร์แบ็กโพรเจกชัน ภาพของค่าผิดพลาดจะถูกบวกเข้ากับค่า G_k เพื่อชดเชยหรือเป็นการปรับค่าให้เข้าสู่ค่าที่ถูกต้อง และขั้นตอนสุดท้ายของแต่ละรอบการทำซ้ำคือ การจำกัดค่า G_k ซึ่งถูกเรียกว่า Projected Landweber Method แสดงได้โดยสมการที่ (4.21)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{if } x > 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

เมื่อ x คือ ค่าระดับเทาที่ได้จากกระบวนการ การทำซ้ำครั้งล่าสุด จากขั้นตอนทั้งหมด สามารถเขียนได้เป็นสมการที่ (4.22)

$$\begin{cases} G_0 = \text{reconstruction based on LBP} \\ G_{k+1} = [G_k + \alpha S^T (C - SG_k)] \end{cases} \quad (4.22)$$

เมื่อ C คือ ค่าอนุกรมอิลซ์ของค่าความจุไฟฟ้า เป็นเมทริกซ์ขนาด $[M \times 1]$

S คือ ค่าเซนซิติวิตีของระบบ เป็นเมทริกซ์ขนาด $[M \times N]$

k คือ การทำซ้ำครั้งที่ k

G คือ การแสดงผลค่าระดับเทา เป็นเมทริกซ์ขนาด $[N \times 1]$

ค่า α จะมีผลต่อความเร็วของการลู่เข้าของผลเฉลยหรือค่าระดับเทาเข้าใกล้ค่าที่ถูกต้อง โดยถ้า $\alpha < 1$ จะทำให้ความเร็วของการลู่เข้าช้าลง แต่จะช่วยทำให้ผลเฉลยที่กำลังเกิดการลู่ออกให้

ลู่กลับเข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริง และถ้า $\alpha > 1$ จะทำให้ความเร็วของการลู่เข้าเร็วขึ้น แต่จะเป็นสาเหตุของการลู่ออกของผลเฉลย นอกจากนี้ลักษณะการกระจายของเพอเมิตติวิตีในลักษณะต่างๆกัน จะมีค่าที่เหมาะสมของ α ที่แตกต่างกัน ซึ่งการเลือกค่า α นั้นจะขึ้นอยู่กับ การทดลอง ในส่วนของงานวิจัยนี้จะใช้ค่า α เท่ากับ 1

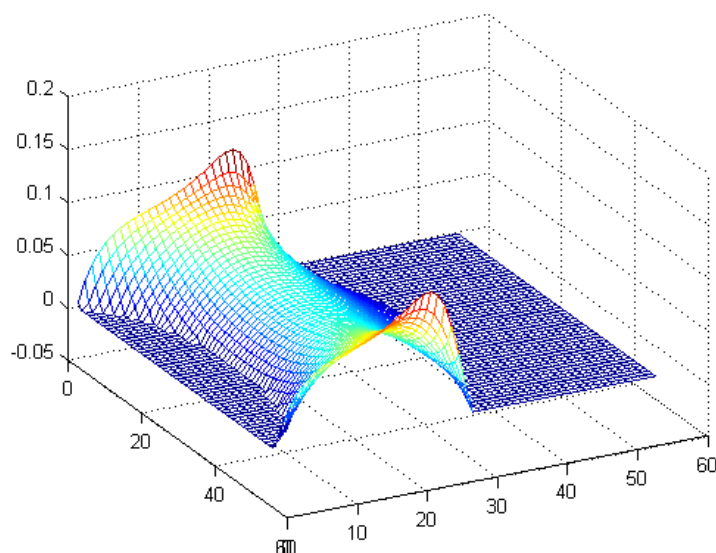
4.4.2 การใช้วิธีเทรซโฮลด์

สำหรับวิธีการปรับปรุง คุณภาพของภาพอีกรูปแบบ ที่ได้นำมาใช้ในงานวิจัยนี้คือ การเทรซโฮลด์ และกระบวนการตัด (Truncation operation) ระบบ ECT เป็นระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเนื่องจากสนามไฟฟ้า ซึ่งทำให้เซนซิติวิตีของระบบที่หาได้จากสมการที่ (4.6) และค่าระดับเทา มีค่ามากกว่า 1 (Overshooting) และต่ำกว่า 0 (Undershooting) และผลเนื่องจากข้อจำกัดของวิธีลิเนียร์แบ็กโปรเจกชัน ซึ่งจะทำให้ค่าระดับเทาที่มีลักษณะไม่คมชัดในส่วนขอบวัตถุ ดังนั้นค่าระดับเทาของพิกเซลก่อนการแสดงผลจริงจะถูกปรับแต่ง โดยกระบวนการตัด และการเทรซโฮลด์ โดย Overshooting ของระดับเทาสามารถแก้ไขได้โดยกระบวนการตัด และ Undershooting ของระดับเทาสามารถแก้ไขได้โดยการเทรซโฮลด์ [1, 2] ซึ่งผลที่ได้คือภาพบริเวณขอบของวัตถุจะถูกตัดทิ้งซึ่งจะรวมถึงรายละเอียดบางส่วนของภาพที่มีค่าระดับเทาต่ำๆ ถูกตัดทิ้งด้วย

การใช้เทคนิค การตัด และการเทรซโฮลด์ กับข้อมูลค่าระดับเทาของพิกเซลที่จะนำไปแสดงผลภาพ เป็นผลให้รายละเอียดของภาพบางส่วนถูกตัด ดังนั้นเพื่อแก้ไขส่วนรายละเอียดของภาพที่ถูกตัดทิ้งไป จึงได้นำเอาเทคนิคการตัด และเทรซโฮลด์ไปใช้กับชุดข้อมูลก่อนหน้านั้น คือเซนซิติวิตีของระบบ เนื่องจากเซนซิติวิตีเป็นชุดข้อมูลที่เกิดจากความสัมพันธ์ของพิกเซลใดๆที่มีผลต่อค่าความจุไฟฟ้าของคู่อิเล็กโตรด และมีผลต่อค่าระดับเทาของพิกเซลที่แสดงผล จากชุดข้อมูลเซนซิติวิตี ในงานวิจัยนี้ข้อมูลส่วนมากจะอยู่ในย่านที่แคบประมาณ 0.0 ถึง 0.9 และจะมีข้อมูลส่วนน้อยบางส่วน มีค่ามากกว่า 0.9 และต่ำกว่า 0.0 ซึ่งข้อมูลที่มีค่ามากกว่า 0.9 จะใช้กระบวนการตัด ส่วนข้อมูลที่มีค่าเป็นลบ จะใช้วิธีการเทรซโฮลด์ ตามเงื่อนไขในสมการที่ (4.23)

$$S_{ij}(p) = \begin{cases} 0.9 & ; S_{ij}(p) \geq 0.9 \\ S_{ij}(p) & ; 0 \leq S_{ij}(p) \leq 0.9 \\ 0.0 & ; S_{ij}(p) \leq 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

เงื่อนไขของค่าเซนซิติวิตี $S_{ij}(p)$ ในสมการที่ (4.23) ได้จากการทดลอง ปรับเปลี่ยนค่าที่เหมาะสม โดย สังเกตจากผลของการสร้างภาพกลับที่มีความชัดเจนมากขึ้น และจากผลของการใช้เทคนิคการตัดและการเทรซโฮลด์ของชุดข้อมูลเซนซิติวิตีตามเงื่อนไขในสมการที่ (4.23) จะทำให้ได้ข้อมูลเซนซิติวิตีชุดใหม่โดยแสดงได้ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 ลักษณะการกระจายของค่าเซนซิติวิตีในแบบ 3 มิติของเซ็นเซอร์แบบสี่เหลี่ยมเฉพาะคู่
อิเล็กทรอนิกส์ 1-4 เมื่อทำเทรซโฮลด์

การกระจายเซนซิติวิตีในรูปที่ 4.8 เป็นการนำเอาชุดข้อมูลเซนซิติวิตีที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2 มาผ่านกระบวนการตัดและการเทรซโฮลด์ จะสังเกตได้ว่ากราฟการกระจายเซนซิติวิตีที่ได้จะถูกตัดส่วนที่มีค่าต่ำกว่า 0 และ สำหรับค่าเซนซิติวิตีของคู่อิเล็กทรอนิกส์ที่อยู่ใกล้กันก็จะมีบางค่าสูงกว่า 0.9 ซึ่งก็就会被ตัดเช่นกัน