

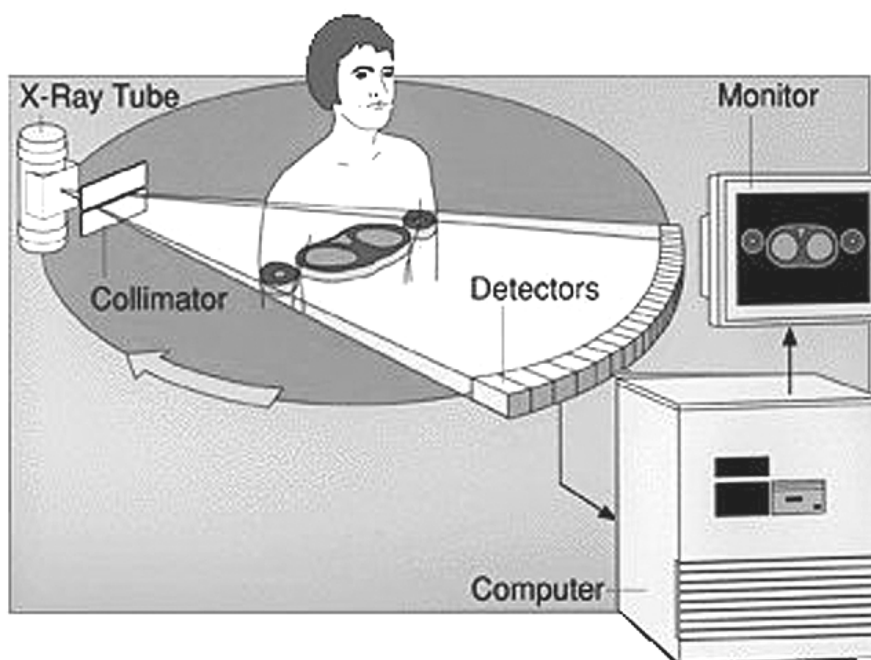
บทที่ 4

ทฤษฎีของการสร้างภาพตัดขวางแบบพัด

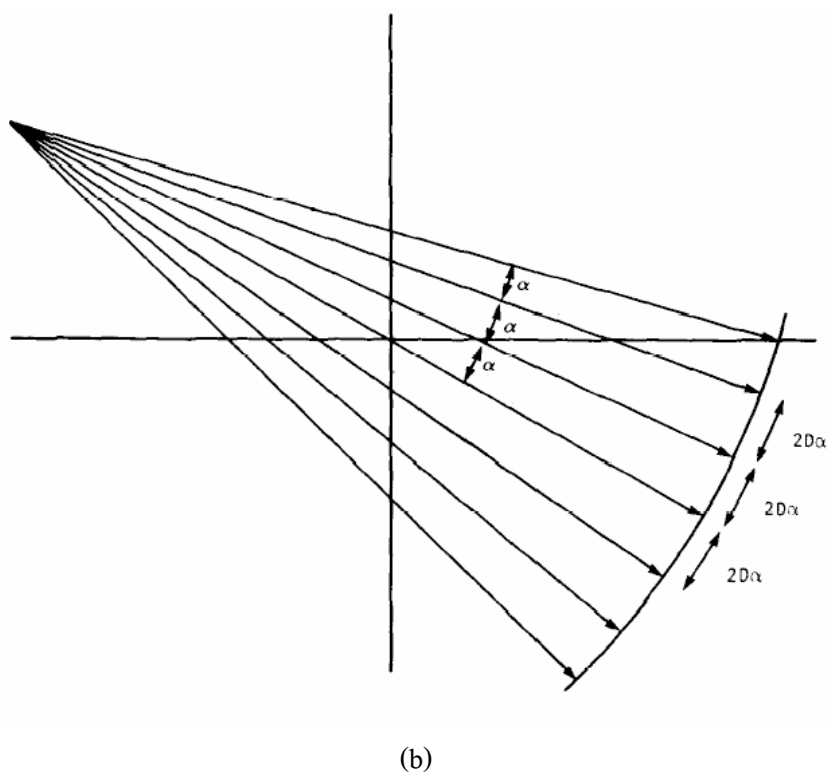
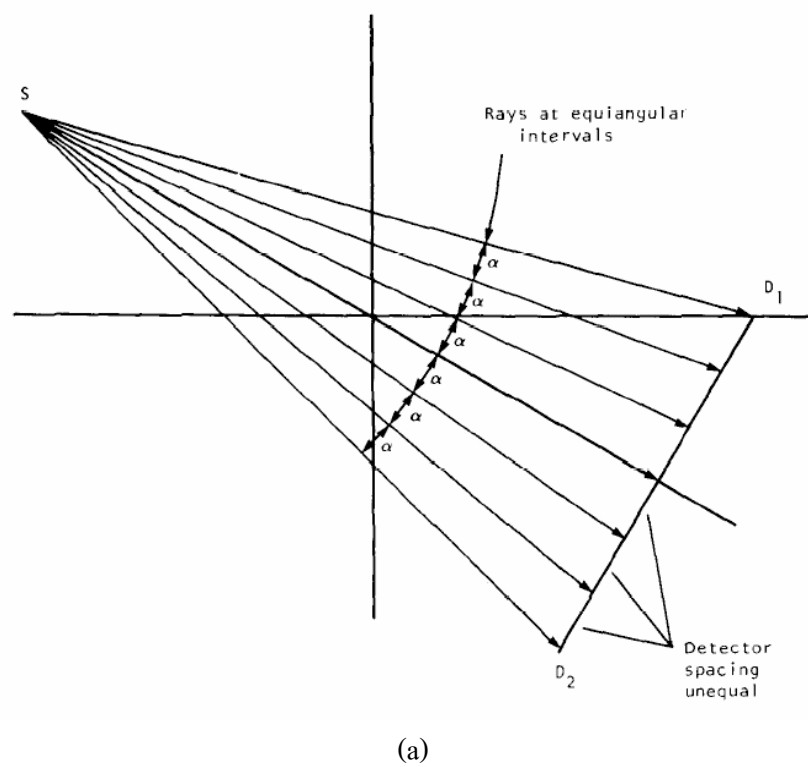
4.1 บทนำ

การสร้างภาพตัดขวางจากเอ็กซเรย์ เนื่องจากเอ็กซเรย์เป็นแหล่งกำเนิดที่เป็นจุดปล่อยลำแสง ออกมารูปทรงคล้ายพัดและในด้านตรงข้ามจะมีตัวตรวจจับที่ใช้ในการเก็บข้อมูล ดังแสดงในรูปที่ 4.1 แหล่งกำเนิดและตัวตรวจจับจะทำการหมุนไปในมุมที่กำหนดเพื่อทำการเก็บข้อมูลจากตัวอย่างที่อยู่ระหว่างกลาง เมื่อเก็บข้อมูลได้ครบตามต้องการแล้วจะนำข้อมูลที่ได้นำเข้าสู่กระบวนการการสร้างภาพตัดขวางต่อไป

การโปรเจกชันแบบพัดสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด [10] คือแบบที่โปรเจกชันถูกสุ่มด้วยมุมที่เท่ากัน (Equiangle) หรือระยะที่เท่ากัน (Equispaced) ความแตกต่างแสดงในรูปที่ 4.2 ใน รูปที่ 4.2(a) เราได้แสดงเส้นของรังสีที่มุมที่เท่ากัน ถ้าตัวตรวจจับถูกวางในเส้นตรง D_1D_2 ช่องว่างระหว่างตัวตรวจจับจะไม่เท่ากัน อย่างไรก็ตามถ้าตัวตรวจจับถูกวางบนเส้นโค้งของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ S ช่องว่างระหว่างตัวตรวจจับจะเท่ากันดังรูปที่ 4.2(b) ชนิดที่สองของการโปรเจกชันแบบพัดถูกสร้างขึ้นในลักษณะที่ช่องว่างระหว่างตัวตรวจจับที่วางในเส้นตรงมีระยะห่างเท่ากันดังรูปที่ 4.3 อัลกอริทึมสำหรับการสร้างภาพของโปรเจกชันแบบพัดทั้งสองชนิดจะต่างกันและจะได้นำเสนอในหัวข้อต่อไป



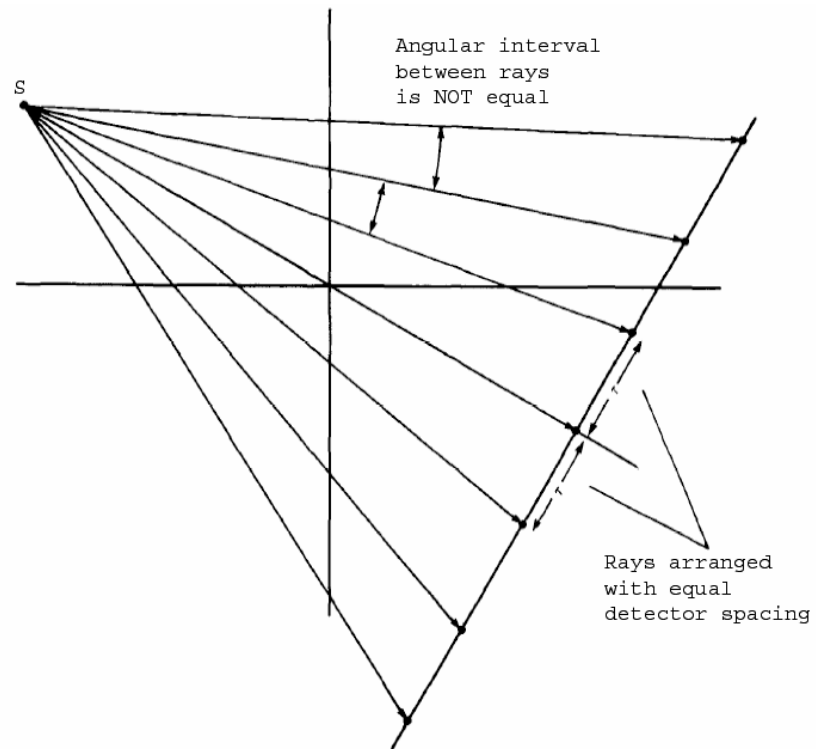
รูปที่ 4.1 แสดงการสร้างภาพตัดขวางแบบลำแสงพัดจากเอ็กซเรย์



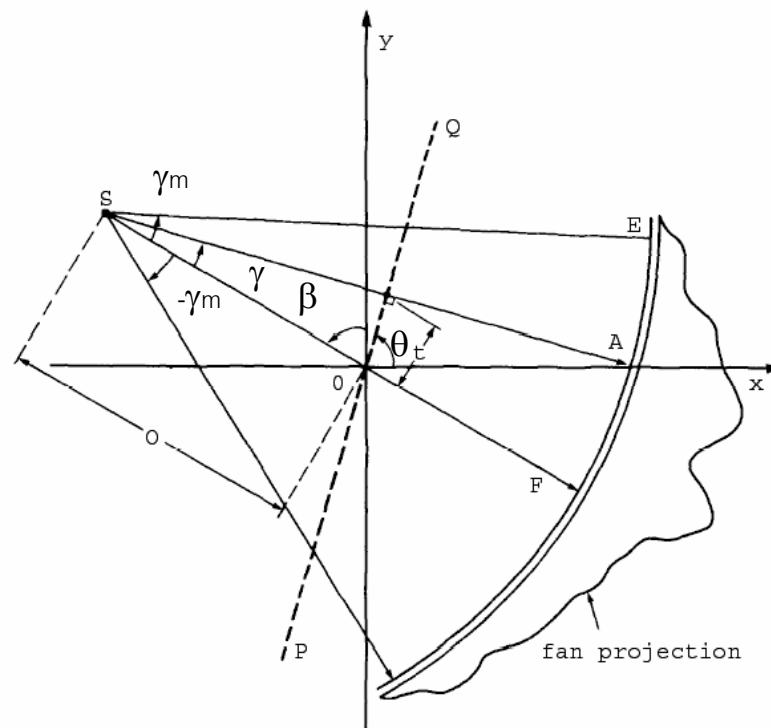
รูปที่ 4.2 แสดงโปรเจกชันถูกสุมด้วยมุมที่เท่ากัน

(a) ระยะห่างระหว่างตัวตรวจจับมีค่าไม่เท่ากัน

(b) ระยะห่างระหว่างตัวตรวจจับมีค่าเท่ากัน



รูปที่ 4.3 แสดงโปรเจกชันถูกสุมด้วยระยะที่เท่ากัน เนื่องจากระยะห่างระหว่างตัวตรวจจับมีค่าเท่ากัน ดังนั้นแอมพลิจูดจึงมีค่าไม่เท่ากัน [10]



รูปที่ 4.4 แสดงโปรเจกชันแบบพัดที่ถูกสุมด้วยมุมที่เท่ากันโดยมุม γ แสดงตำแหน่งของแต่ละเส้นรังสีภายในพัด [10]

4.2 รังสีแบบมุมเท่า (Equiangular Rays)

ให้ $R_\beta(\gamma)$ แทนโปรเจกชันแบบพัดดังแสดงในรูปที่ 4.4 ในที่นี้ β คือมุมที่แหล่งกำเนิด S ทำกับแกนอ้างอิง และมุม γ แสดงตำแหน่งของรังสีภายในพัด พิจารณารังสี SA ถ้าข้อมูลโปรเจกชันถูกสร้างตามแนวเส้นของรังสีขนานแล้ว รังสี SA จะเป็นของการโปรเจกชันแบบรังสีขนาน $P_\theta(t)$ โดยที่

$$\theta = \beta + \gamma \text{ และ } t = D \sin \gamma \quad (4.1)$$

โดยที่ D คือระยะระหว่างแหล่งกำเนิด S กับจุดกำเนิด ความสัมพันธ์ใน (4.1) ได้จากการสังเกตว่าทุกรังสีในโปรเจกชันแบบขนานที่มุม θ จะตั้งฉากกับเส้น PQ และตามแนวเส้นดังกล่าวระยะ OB จะเท่ากับค่าของ t เราสร้างจากข้อมูลโปรเจกชันแบบขนาน $P_\theta(t)$ เราสามารถสร้าง $f(x, y)$ โดย

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \quad (4.2)$$

โดยที่ t_m คือค่าของ t ซึ่ง $P_\theta(t) = 0$ เมื่อ $|t| > tm$ ในทุกโปรเจกชัน สมการต้องการข้อมูลโปรเจกชันแค่ 180° อย่างไรก็ตามถ้าเราต้องการใช้โปรเจกชันรอบมุม 360° เราอาจเขียนสมการได้ใหม่เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta \quad (4.3)$$

อัลกอริทึมในการสร้างภาพจะง่ายขึ้นถ้าเราใช้พิกัดโพลาร์แทน (x, y) (จุด C ในรูปที่ 4.5) ด้วย (r, φ) นั่นคือ

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (4.4)$$

ดังนั้น จาก (4.3) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} P_\theta(t) h(r \cos(\theta - \varphi) - t) dt d\theta \quad (4.5)$$

ใช้ความสัมพันธ์จาก (4.1) การอินทิเกรตคู่สามารถเขียนให้อยู่ในเทอม γ และ β ได้ดังนี้

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} \int_{-\sin^{-1}(t_m/D)}^{\sin^{-1}(t_m/D)} P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.6)$$

โดยเราได้ใช้ $dt d\theta = D \cos \gamma d\gamma d\beta$ ลิ้มิตของ β จาก $-\gamma$ ถึง $2\pi - \gamma$ ครอบคลุมช่วงทั้งหมดของ 360° เนื่องจากฟังก์ชัน β เป็นฟังก์ชันคาบด้วยคาบเท่ากับ 2π ลิ้มิตอาจแทนด้วย 0 และ 2π ค่าของ γ สำหรับรังสีนอกสุด SE ในรูปที่ 4.4 เท่ากับ $\sin^{-1}(t_m/D)$ ดังนั้นลิ้มิตบนและล่างของอินทิเกรชันของ γ อาจเขียนได้เป็น γ_m และ γ_{-m} ตามลำดับ เทอม $P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma)$ สอดคล้องกับเรย์อินทิเกรตตลอดเส้น SA ในข้อมูลโปรเจกชันแบบขนาน $P_\theta(t)$ ซึ่งเทียบเท่ากับข้อมูลโปรเจกชันแบบพัด $R_\beta(\gamma)$ ดังนั้น (4.6) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma} \int_{-\sin^{-1}t_m/D}^{\sin^{-1}t_m/D} R_\beta(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.7)$$

เพื่อที่จะหาสูตรการสร้างภาพใน (4.7) ให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถคำนวณบนคอมพิวเตอร์ได้ง่าย พิจารณาค่าของฟังก์ชัน h ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma = r \cos(\beta - \varphi) \cos \gamma - [r \sin(\beta - \varphi) + D] \sin \gamma \quad (4.8)$$

ให้ L คือระยะจากแหล่งกำเนิด S ถึงจุด (x, y) (หรือ (r, φ) ในพิกัดโพลาาร์) เช่น C ในรูปที่ 4.5 เห็นได้ชัดว่า L เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปร r, φ และ β ให้ γ' คือมุมที่รังสีผ่านจุดนี้ เราสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L \cos \gamma' &= D + r \sin(\beta - \varphi) \\ L \sin \gamma' &= r \cos(\beta - \varphi) \end{aligned} \quad (4.9)$$

บันทึกว่าตำแหน่งของจุด (r, φ) และมุมของโปรเจกชัน β จะมีตัวกำหนด L และ γ'

$$L(r, \varphi, \beta) = \sqrt{[D + r \sin(\beta - \varphi)]^2 + [r \cos(\beta - \varphi)]^2} \quad (4.10)$$

และ

$$\gamma' = \tan^{-1} \frac{r \cos(\beta - \varphi)}{D + r \sin(\beta - \varphi)} \quad (4.11)$$

โดยใช้ (4.9) ใน (4.8) เราได้สามารถเขียนค่าของฟังก์ชัน h ได้ใหม่

$$r \cos(\beta + \gamma - \varphi) - D \sin \gamma = L \sin(\gamma' - \gamma) \quad (4.12)$$

แทนค่าลงใน (4.7) เราได้

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(L \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.13)$$

ตอนนี้เราจะเขียนฟังก์ชัน $h(L \sin(\gamma' - \gamma))$ ในเทอมของ $h(t)$ บันทึกว่า $h(t)$ คือการแปลงย้อนกลับของ $|w|$ ในฟริเควินซีโดเมน

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{j2\pi wt} dw \quad (4.14)$$

ดังนั้น

$$h(L \sin \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{j2\pi wL \sin \gamma} dw \quad (4.15)$$

ใช้การแปลง

$$w' = \frac{wL \sin \gamma}{\gamma} \quad (4.16)$$

เราสามารถเขียน

$$h(L \sin \gamma) = \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |w'| e^{j2\pi w' L \sin \gamma} dw' = \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \quad (4.17)$$

ดังนั้นสมการ (4.13) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (4.18)$$

โดยที่

$$g(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \quad (4.19)$$

เพื่อวัตถุประสงค์ของการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ เราจะเรียก (4.18) ว่าเป็นอัลกอริทึมฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันถ่วงน้ำหนัก (Weighted Filtered-Back projection) เพื่อที่จะแสดงให้เห็น เราจะเขียน (4.18) ใหม่ดังนี้

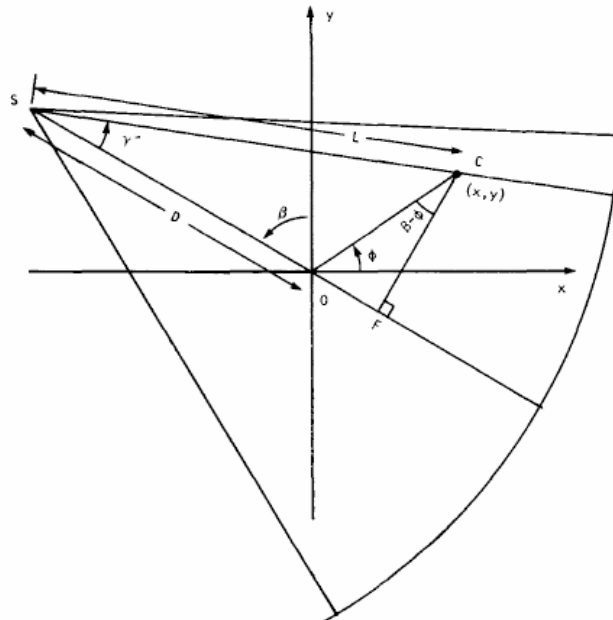
$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} Q_\beta(\gamma') d\beta \quad (4.20)$$

โดยที่

$$Q_\beta(\gamma) = R'_\beta(\gamma) * g(\gamma) \quad (4.21)$$

และโดยที่

$$R'_\beta(\gamma) = R_\beta(\gamma) \cdot D \cdot \cos \gamma \quad (4.22)$$



รูปที่ 4.5 แสดงให้เห็นถึง L ซึ่งเป็นระยะจาก S ถึงจุด (x, y) และ γ คือค่ามุมระหว่างเส้นตามระยะกับเส้นรังสีกลาง

ในการใช้อัลกอริทึมสร้างภาพเราแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 สมมติว่าแต่ละโปรเจกชัน $R_\beta(\gamma)$ ถูกสุ่มด้วยช่วงของการสุ่ม α ดังนั้นข้อมูลที่เราารู้คือ $R_{\beta_i}(n\alpha)$ โดยที่ n เป็นค่าจำนวนเต็ม β_i เป็นค่ามุมของแต่ละโปรเจกชัน ในขั้นแรกเราต้องหา $R_{\beta_i}(n\alpha)$ สำหรับแต่ละ $R'_{\beta_i}(n\alpha)$ โดย

$$R'_{\beta_i}(n\alpha) = R_{\beta_i}(n\alpha) \cdot D \cdot \cos n\alpha \quad (4.23)$$

บันทึกว่า $n=0$ สอดคล้องกับรังสีที่ผ่านจุดศูนย์กลางของโปรเจกชัน

ขั้นที่ 2 คอนโวลต์ (Convolve) ข้อมูลโปรเจกชันที่ได้ $R'_{\beta_i}(n\alpha)$ จะถูกนำมาปรับปรุงด้วย $g(n\alpha)$ เพื่อให้ได้โปรเจกชันที่ถูกฟิลเตอร์

$$Q_{\beta_i}(n\alpha) = R'_{\beta_i}(n\alpha) * g(n\alpha) \quad (4.24)$$

ในการทำดิสครีตคอนโวลชันโดยใช้โปรแกรม *FFT* ฟังก์ชัน $R'_{\beta_i}(n\alpha)$ ต้องถูกเติมศูนย์ด้วยจำนวนศูนย์ที่เพียงพอเพื่อหลีกเลี่ยงสัญญาณรบกวน ลำดับ $g(n\alpha)$ ถูกกำหนดโดยแฮมเปิลของ (4.19)

$$g(n\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{n\alpha}{\sin n\alpha} \right)^2 h(n\alpha) \quad (4.25)$$

โดยใช้ค่าของ $h(n\alpha)$ จาก

$$h(n\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha^2}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ even} \\ -\frac{1}{n^2\pi^2\tau^2}, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (4.26)$$

เราได้การตอบสนองอิมพัลส์ดิสครีต

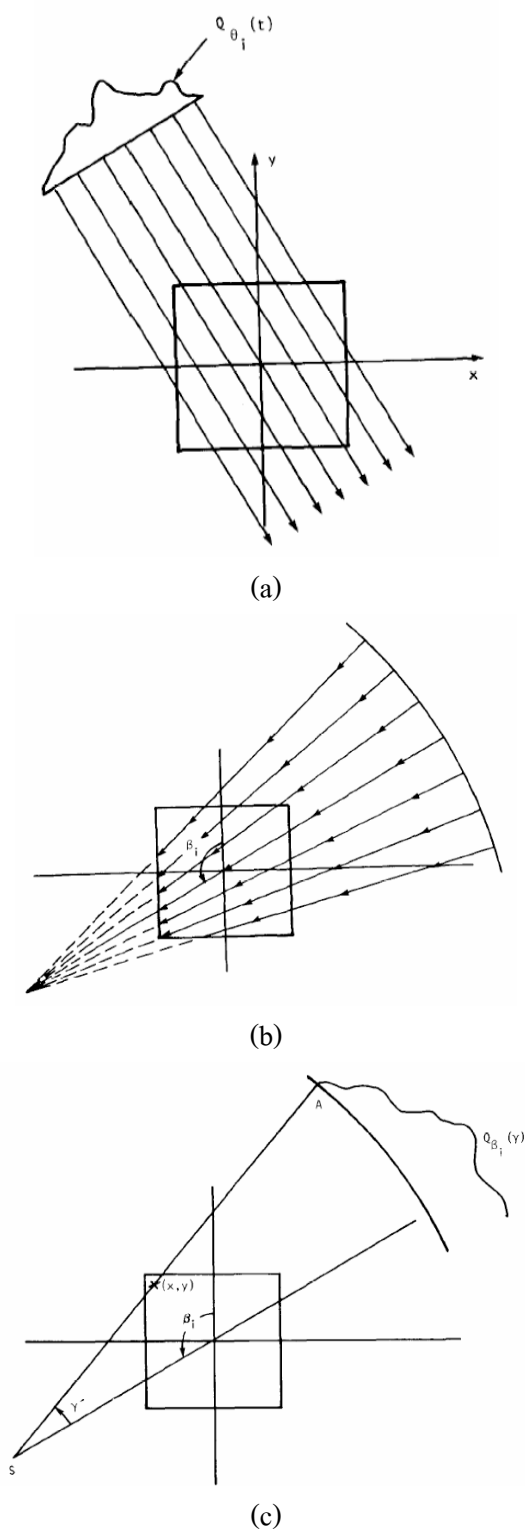
$$g(n\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{8\alpha^2}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ even} \\ \left(\frac{\alpha}{\pi\alpha \sin nx} \right)^2, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (4.27)$$

แม้ว่าตามทฤษฎีแล้วอาจจะไม่การใช้ฟิลเตอร์เพิ่มเติมนอกเหนือไปจาก (4.24) แต่ในทางปฏิบัติเพื่อให้ได้ภาพที่มีคุณภาพดีขึ้น เราอาจต้องเพิ่มฟิลเตอร์ทำให้เรียบ (Smoothing) ดังนี้

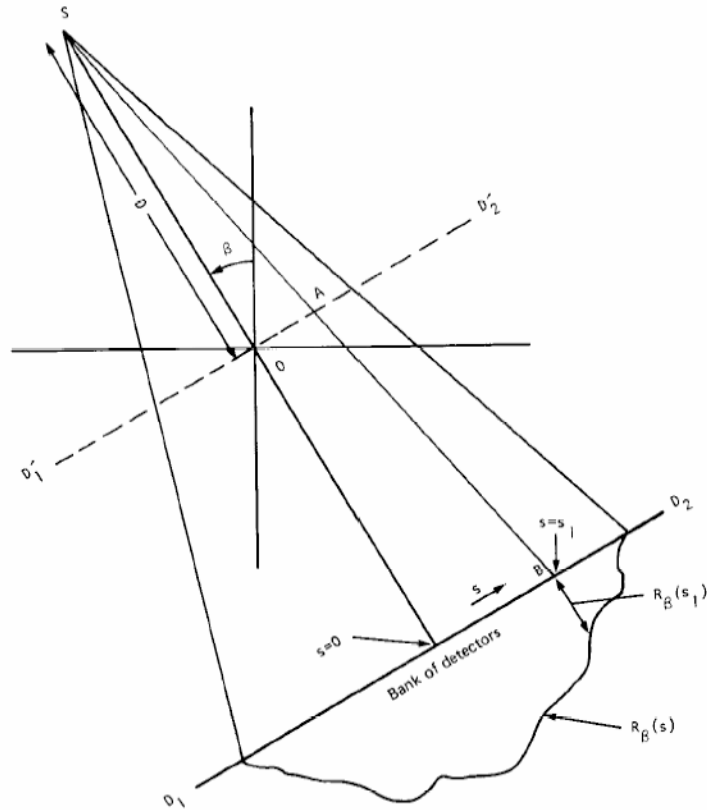
$$Q_{\beta_i}(n\alpha) = R'_{\beta_i}(n\alpha) * g(n\alpha) * k(n\alpha) \quad (4.28)$$

โดยที่ $k(n\alpha)$ คือการตอบสนองอิมพัลส์ของฟิลเตอร์ที่ทำให้เรียบ ในโดเมนความถี่ฟังก์ชันการถ่วงน้ำหนักของฟิลเตอร์ที่ทำให้เรียบอาจเป็นฟังก์ชันเช่น Hamming Window

ขั้นตอนที่ 3 ทำการแบ็คโปรเจกชันถ่วงน้ำหนัก (*Weighted Backprojection*) แต่ละโปรเจกชันที่ถูกฟิลเตอร์ในขั้นตอนที่สอง แบ็คโปรเจกชันในกรณีนี้แตกต่างจากกรณีของแบ็คโปรเจกชันแบบขนาน



รูปที่ 4.6 ความแตกต่างระหว่างการทำแบ็คโปรเจกชันแบบขนานและแบ็คโปรเจกชันแบบพัด a, b และ c คือการคำนวณหาค่าแบ็คโปรเจกชันที่จุด (x, y) ซึ่งต้องหาค่า γ' เป็นขั้นตอนแรก



รูปที่ 4.7 ในกรณีที่ระยะห่างของตัวตรวจจับที่วางเป็นแนวเส้นตรงมีค่าเท่ากัน แต่ละโปรเจกชันจะแทนด้วย $R_B(s)$

ความแตกต่างนี้แสดงในรูปที่ 4.6a ในกรณีของลำแสงแบบพัด การทำแบ็คโปรเจกชันทำตามแนวของพัด (รูปที่ 4.6b) ซึ่งทำโดยใช้ (4.20)

$$f(x, y) \cong \Delta\beta \sum_{i=1}^M \frac{1}{L^2(x, y, \beta_i)} Q_{\beta_i}(\gamma') \quad (4.29)$$

โดยที่ γ' คือมุมของลำแสงพัดที่ผ่านจุด (x, y) และ $\Delta\beta = 2\pi/M$ สำหรับ β_i ได้คัดเลือกจากรูปที่ 4.6c ในการที่จะหาผลของ $Q_{\beta_i}(\gamma)$ ต่อจุด (x, y) เราต้องทำการหามุม (γ') ของรังสี SA ที่ผ่านจุดดังกล่าว ถ้าค่าของ γ' ไม่ได้สอดคล้องกับค่าใดๆของ $n\alpha$ ซึ่งเรารู้ค่า $Q_{\beta_i}(n\alpha)$ เราอาจต้องใช้การอินเตอร์โพลชัน ผลของ $Q_{\beta_i}(\gamma')$ ที่จุด (x, y) ในการแบ็คโปรเจกชันต้องถูกหารด้วย L^2 โดยที่ L คือระยะจากแหล่งกำเนิดถึงจุด (x, y)

4.3 ตัวตรวจวัดที่ห่างด้วยระยะที่เท่ากันในแนวเส้นตรง (Equally Spaced Collinear Detectors)

ให้ $R_B(s)$ แทนโปรเจกชันแบบพัดดังแสดงในรูปที่ 4.7 โดยที่ s คือระยะทางตามแนวเส้นตรงสอดคล้องกับตัวตรวจวัด อัลกอริทึมในหัวข้อก่อนเนื่องจากรังสีในแต่ละลำมีระยะห่าง

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-\tan^{-1}(s_m/D)}^{2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)} \int_{-s_m}^{s_m} P_{\beta+\gamma} \left(\frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \cdot h \left[r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (4.31)$$

โดยเราได้อาศัย

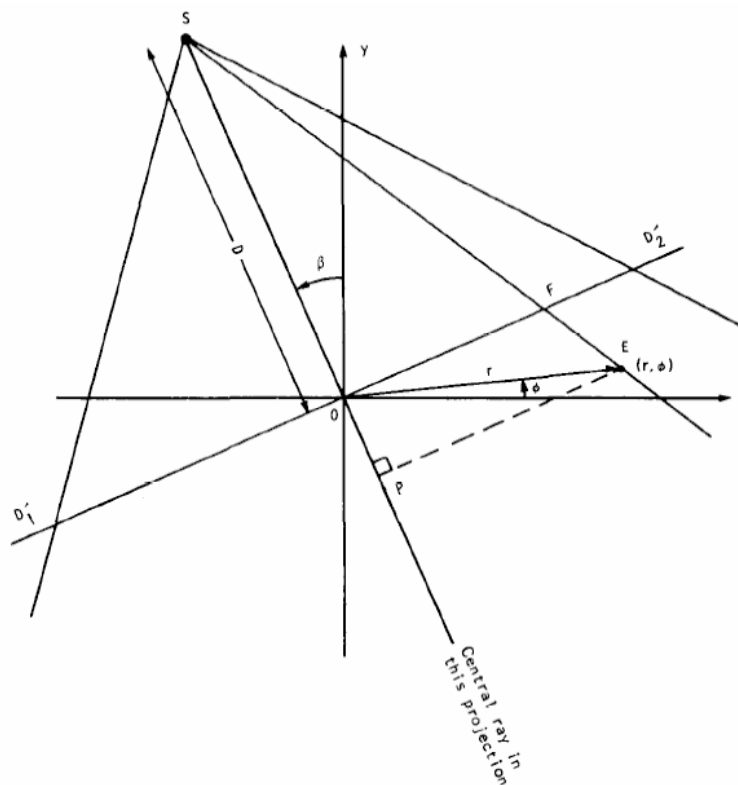
$$dt \, d\theta \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds \, d\beta \quad (4.32)$$

ใน (4.31) S_m แทนค่าที่มากที่สุดของ s ในแต่ละโปรเจกชันและสอดคล้องกับ t_m สำหรับข้อมูลโปรเจกชันแบบขนาน ขอบเขตของ $-\tan^{-1}(s_m/D)$ และ $2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)$ ครอบคลุมช่วงของมุม 360° เนื่องจากทุกฟังก์ชันของ β ใน (4.31) มีลักษณะเป็นฟังก์ชันคาบด้วยระยะเท่ากับ 2π ขอบเขตบนและล่างอาจแทนด้วย 0 และ 2π ตามลำดับ นอกจากนั้นเทอม

$$P_{\beta+\gamma}\left(\frac{sD}{\sqrt{D^2+S^2}}\right) \quad (4.33)$$

สอดคล้องกับเรย์อินทิกรัลตามแนว SA ในข้อมูลโปรเจกชันแบบขนาน $P_\theta(t)$ ซึ่งจะเทียบเท่ากับโปรเจกชันแบบพัด $R_\beta(s)$ ด้วยข้อสรุปเหล่านี้เราสามารถเปลี่ยนแปลง (4.31) ได้เป็น

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-s_m}^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) h \left[r \cos(\beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} - \phi) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (4.34)$$



รูปที่ 4.9 สำหรับจุดในพิกัดโพลาร์ (r, φ) ตัวแปร U เป็นอัตราส่วนระหว่าง SP กับระยะจากแหล่งกำเนิดถึงจุดกำเนิด

ในการที่จะหาสูตรสำหรับอัลกอริทึมฟิลเตอร์เบ็คโปรเจกชัน เราจะพิจารณาค่าของฟังก์ชัน h ค่าของฟังก์ชัน h สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} - \varphi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \\ = r \cos (\beta - \varphi) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} - (D + r \sin (\beta - \varphi)) \frac{s}{\sqrt{D^2 + s^2}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

ในการคำนวณเพื่อที่จะทำให้มีความซับซ้อนน้อยลงจะมีการเพิ่มตัวแปรใหม่สองตัว ตัวแปรแรกเราแทนด้วย U ซึ่งสำหรับแต่ละจุด (x, y) เป็นอัตราส่วนระหว่าง SP (รูปที่ 4.9) กับระยะจากแหล่งกำเนิดถึงจุดกำเนิด บันทึกว่า SP คือโปรเจกชันของแหล่งกำเนิดถึงระยะพิกเซล SE บนรังสีตำแหน่งกลาง (Central Ray) ดังนั้น

$$U(r, \varphi, \beta) = \frac{\overline{SO} + \overline{OP}}{D} = \frac{D + r \sin (\beta - \varphi)}{D} \quad (4.36)$$

อีกพารามิเตอร์หนึ่งคือค่าของ s สำหรับรังสีที่ผ่านพิกเซล (r, φ) ที่เรากำลังพิจารณา ให้ s' แทนค่าของ s เนื่องจาก s ถูกวัดตามเส้นตัวตรวจวัดสมมติ $D_1 D_2$ ซึ่งคือค่าระยะ OF เนื่องจาก

$$\frac{s}{\overline{SO}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{SP}} \quad (4.37)$$

เราได้

$$s' = D \frac{r \cos (\beta - \varphi)}{D + r \sin (\beta - \varphi)} \quad (4.38)$$

เราจะใช้สมการ (4.36) และ (4.38) แทนใน (4.35) ดังนั้น

$$r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} - \varphi \right) - \frac{Ds}{\sqrt{D^2 + s^2}} = \frac{s' UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} - \frac{sUD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (4.39)$$

แทนค่า (4.39) ใน (4.34) จะได้

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{-0}^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) h \left[(s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (4.40)$$

ต่อไปเราจะเขียน h ในสมการข้างบนให้อยู่ในรูปที่ใกล้เคียงกับ (4.26) เนื่องจาก $h(t)$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ย้อนกลับของ $|w|$ ในพรีเควินชีโดเมน

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{j2\pi wt} dw \quad (4.41)$$

ดังนั้น

$$h \left[(s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |w| \exp^{j2\pi w(s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}}} dw \quad (4.42)$$

โดยใช้การแปลง

$$w' = w \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (4.43)$$

เราเขียน (4.42) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} h((s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}}) &= \frac{D^2 + s^2}{U^2 D^2} \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{j2\pi(s' - s)w'} dw' \\ &= \frac{D^2 + s^2}{U^2 D^2} h(s' - s) \end{aligned} \quad (4.44)$$

แทนค่าลงใน (4.40) เราได้

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\beta(s) g(s' - s) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} ds d\beta \quad (4.45)$$

โดยที่

$$g(s) = \frac{1}{2} h(s) \quad (4.46)$$

เพื่อวัตถุประสงค์ของการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ เราจะเรียก (4.45) ว่าเป็นอัลกอริทึมฟิลเตอร์เบ็คโปรเจกชันถ่วงน้ำหนัก (Weighted Filtered-Backprojection) เพื่อที่จะแสดงให้เห็น เราจะเขียน (4.45) ใหม่ดังนี้

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} Q_\beta(s') d\beta \quad (4.47)$$

โดยที่

$$Q_\beta(s) = R'_\beta(s) * g(s) \quad (4.48)$$

และ

$$R'_\beta(s) = R_\beta(s) \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (4.49)$$

ในการใช้อัลกอริทึมสร้างภาพเราแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 สมมติว่าแต่ละโปรเจกชัน $R_\beta(s)$ ถูกสุ่มด้วยช่วงของการสุ่ม a ดังนั้นข้อมูลที่เรารู้คือ $R_{\beta_i}(na)$ โดยที่ n เป็นค่าจำนวนเต็ม โดยที่ $n=0$ คือรังสีตำแหน่งกึ่งกลางที่ผ่านจุดกำเนิด β_i เป็นค่ามุมของแต่ละโปรเจกชัน ในขั้นแรกเราต้องหา $R'_\beta(na)$ สำหรับแต่ละ $R_\beta(na)$ โดย

$$R'_\beta(na) = R_\beta(na) \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2 + n^2 a^2}} \quad (4.50)$$

ขั้นตอนที่ 2 คอนโวลต์ (Convolve) ข้อมูลโปรเจกต์ที่ได้ถูกปรับปรุง R'_{β_i} กับ $g(na)$ เพื่อให้ได้โปรเจกต์ที่ถูกฟิลเตอร์

$$Q_{\beta_i}(na) = R'_{\beta_i}(na) * g(na) \quad (4.51)$$

ในการทำดิสครีตคอนโวลชันโดยใช้โปรแกรม *FFT* ฟังก์ชัน $R'_{\beta_i}(na)$ ต้องถูกเติมศูนย์ด้วยจำนวนศูนย์ที่เพียงพอเพื่อหลีกเลี่ยงสัญญาณรบกวน ลำดับของ $g(na)$ จะถูกกำหนดโดยตัวอย่างของ (4.46)

$$g(na) = \frac{1}{2} h(na) \quad (4.52)$$

โดยใช้ค่าของ $h(na)$ จาก (4.75) เราได้การตอบสนองอิมพัลส์ดิสครีต

$$g(na) = \begin{cases} \frac{1}{8a^2}, & n = 0 \\ 0, & n = \text{even} \\ -\frac{1}{2n^2\pi^2a^2}, & n = \text{odd} \end{cases} \quad (4.53)$$

แม้ว่าตามทฤษฎีแล้วอาจจะไม่มีการใช้ฟิลเตอร์เพิ่มเติม แต่ในทางปฏิบัติเพื่อให้ได้ภาพที่มีคุณภาพดีขึ้นเราอาจต้องเพิ่มฟิลเตอร์ทำให้เรียบดังนี้

$$Q_{\beta_i}(na) = R'_{\beta_i}(na) * g(na) * k(na) \quad (4.54)$$

โดยที่ $k(na)$ คือการตอบสนองอิมพัลส์ของฟิลเตอร์ที่ทำให้เรียบ

ขั้นตอนที่ 3 ทำการแบ็คโปรเจกชันถ่วงน้ำหนัก (Weighted Backprojection) แต่ละโปรเจกต์ที่ถูกฟิลเตอร์ในขั้นตอนที่สอง

$$f(x, y) \cong \Delta B \sum_{i=1}^M \frac{1}{U^2(x, y, \beta_i)} Q_{\beta_i}(s') \quad (4.55)$$

โดยที่ s' คือมุมของลำแสงพาดที่ผ่านจุด (x, y) สำหรับตำแหน่งแหล่งกำเนิดอยู่ที่มุม β_i ถ้าค่าของ s' ไม่ได้สอดคล้องกับค่าใดๆของ na ซึ่งถ้ารู้ค่า $Q_{\beta_i}(na)$ เราอาจต้องใช้การประมาณค่า

4.4 การใช้อัลกอริทึมสำหรับโปรเจกชันแบบขนานกับข้อมูลโปรเจกชันแบบพัด

ในหัวข้อย่อนี้เราจะอธิบายอัลกอริทึมที่จะปรับปรุงข้อมูลโปรเจกชันแบบพัดเพื่อที่จะใช้กับอัลกอริทึมการสร้างภาพสำหรับโปรเจกชันแบบขนานหรือฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน การปรับปรุงข้อมูลนั้นต้องมีข้อบังคับเกี่ยวกับมุมซึ่งข้อมูลโปรเจกชันแบบพัดถูกเก็บรวบรวมและมุมซึ่งข้อมูลโปรเจกชันถูกสุ่มในโปรเจกชันแบบพัดแต่ละอัน

อ้างถึงรูปที่ 4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างโปรเจกชันแบบพัดและโปรเจกชันแบบขนานเป็นไปตาม (4.50) นั่นคือ

$$t = D \sin \gamma \quad \text{และ} \quad \theta = \beta + \gamma \quad (4.56)$$

ถ้า $R_\beta(\gamma)$ แทนข้อมูลโปรเจกชันแบบพัดที่ถูกบันทึกที่มุม β และ $P_\theta(t)$ ข้อมูลโปรเจกชันแบบขนานที่ถูกบันทึกที่มุม θ โดยใช้ (4.56) เราสามารถเขียน

$$R_\beta(\gamma) = P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma) \quad (4.57)$$

ให้ $\Delta\beta$ แทนมุมที่เพิ่มขึ้นระหว่างโปรเจกชันแบบพัดที่ติดกันและให้ $\Delta\gamma$ แทนช่วงของมุมในแต่ละแฉกเปิดของโปรเจกชันแบบพัด เราจะสมมติเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\Delta\beta = \Delta\gamma = \alpha \quad (4.58)$$

เราเห็นได้ชัดว่า β และ γ ใน (4.57) จะเท่ากับ $m\alpha$ และ $n\alpha$ ตามลำดับ สำหรับบางค่าของอินเด็กซ์ m และ n ที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราสามารถเขียน (4.57) ได้ใหม่ดังนี้

$$R_{m\alpha}(n\alpha) = P_{(m+n)\alpha}(D \sin n\alpha) \quad (4.59)$$

สมการนี้คือพื้นฐานของอัลกอริทึมที่สามารถปรับปรุงข้อมูลโปรเจกชันแบบพัดเพื่อที่จะใช้กับอัลกอริทึมการสร้างภาพสำหรับโปรเจกชันแบบขนาน สมการนี้กล่าวว่า รังสีที่ n^{th} ในโปรเจกชันแบบพัดที่ m^{th} เทียบเท่ากับรังสีที่ n^{th} ในโปรเจกชันแบบขนานที่ $(m+n)^{\text{th}}$ ตัวแปร $\sin n\alpha$ ใน (4.59) เป็นเหตุให้โปรเจกชันแบบขนานไม่ได้ถูกสุ่มแบบสม่ำเสมอ(Uniformly Sampled) การแก้ไขสามารถทำได้โดยการใช้การประมาณค่า