

## บทคัดย่อ

T 166784

ชื่อโครงการวิจัย	Clones ทางเดียวกับเอกลักษณ์
ผู้วิจัย	รองศาสตราจารย์ ดร. จีวีวรรณ รัตนประเสริฐ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร E-mail address : <a href="mailto:ratach@su.ac.th">ratach@su.ac.th</a>
ผู้ร่วมวิจัย	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย E-mail address : <a href="mailto:anipa@mail.utcc.ac.th">anipa@mail.utcc.ac.th</a>
แหล่งทุนอุดหนุน	สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ระยะเวลา	1 ธันวาคม 2544 - 30 พฤศจิกายน 2547
คำหลัก	Order-primal algebra, connected order, minimal variety, monotone function, hyperidentity, essential variables, hypersubstitution

เราเรียก identity  $s \approx t$  ว่า hyperidentity ใน finite algebra  $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$  ถ้าเมื่อใดก็ตามที่สัญลักษณ์ operations ซึ่งเกิดขึ้นใน  $s$  และใน  $t$  ตามลำดับ ถูกแทนด้วย terms ของ variety  $V$  ที่มี arity เหมาะสมกัน แล้วผลที่ได้จะเป็น identity ใน  $V$  ถ้า  $\tau^{(1)}(\bar{A})$  เป็นสัญลักษณ์แทนเซตของ unary term operations ทั้งหมดของ  $\bar{A}$  แล้ว  $\bar{A}$  จะสอดคล้องกับ unary hyperidentity  $\bar{A} |_{\text{hyp}} s \approx t$  ก็ต่อเมื่อ  $s \approx t$  เป็น identity ใน monoid  $(\tau^{(1)}(\bar{A}); \circ, \text{id}_A)$  เราเรียก finite algebra  $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$  ว่า order-primal algebra ถ้ามี partial order  $\leq$  บน  $A$  ที่ทำให้ clone ของ term operations ทั้งหมดของ  $\bar{A}$  คือเซตของ operations ทั้งหมดของ  $A$  ซึ่ง preserve  $\leq$

โครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras สำหรับ connected ordered sets  $(A; \leq)$  และพบว่า order-primal algebras เหล่านี้ไม่มี proper subalgebras ไม่มี non-identical automorphisms และเป็น simple algebra ผู้วิจัยค้นพบสมบัติบางประการของ varieties และของ quasivarieties ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebras เหล่านี้ ยิ่งไปกว่านั้นผู้วิจัยได้ใช้สมบัติของ order-primal algebras ในการสร้าง primality criteria อันใหม่สำหรับ finite algebras และพิสูจน์ว่าเซตของ fundamental operation ของ order-primal algebra ไม่สามารถมีเพียง unary operations หรือมีเพียง 1 operation ที่มี arity อย่างน้อย 2 ได้

ผู้วิจัยได้หา partial order relations ทั้งหมดบนเซตจำกัด  $A$  เพื่อให้ order-primal algebras ที่สมนัยกันสอดคล้อง unary hyperidentities  $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+k(n)}(x)$  ส่งผลให้สามารถพิสูจน์ได้ว่า non-trivial order-primal algebra ซึ่งไม่สอดคล้อง unary hyperidentity  $\psi^{n-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n-2+k(n^2)}(x_1, x_2)$  เป็น primal algebra

เป็นที่ทราบกันแล้วว่า congruence lattice  $\text{Con } \bar{A}$  ของ algebra  $\bar{A}$  กำหนดได้โดย unary polynomial operations ของ  $\bar{A}$  และถ้า  $|A| = n$  โดยที่ทุก ๆ unary polynomial operation  $f$  ของ  $\bar{A}$  ซึ่งมี  $|\text{Im } f| = |A|$  หรือ  $|\text{Im } f| = 1$  แล้ว  $\bar{A}$  จะเป็น permutation algebra ซึ่ง permutation algebra มีบทบาทสำคัญสำหรับการศึกษาใน tame congruence theory และถ้า  $f: A \rightarrow A$  ไม่ใช่ permutation แล้ว  $|A| > |\text{Im } f|$  และจะมีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด  $\lambda(f)$  ซึ่ง  $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$  ผู้วิจัยจึงพิจารณา unary operations  $f$  ทั้งหมดซึ่ง  $\lambda(f) = n-1$  และ  $\lambda(f) = n-2$  และได้หา equivalence relations บน  $A$  ทั้งหมดซึ่ง invariant ภายใต้ unary operations  $f$  เหล่านั้น

Research Title	Monotone Clones and Identities
Researchers	Associate Professor Dr. Chawewan Ratanaprasert Faculty of Sciences, Silpakorn University (E-mail address : rattach@su.ac.th) Assistant Professor Dr. Nittiya Pabhapote University of Thai Chamber (E-mail address : anipa@mail.utcc.ac.th)
Research Grants	The Thailand Research Fund
Period	December 1, 2001 - November 30, 2004
Key Words	Order-primal algebra, connected order, minimal variety, monotone function, hyperidentity, essential variables, hypersubstitution

An identity  $s \approx t$  is called a hyperidentity in a finite algebra  $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$  if whenever the operation symbols occurring in  $s$  and in  $t$ , respectively, are replaced by any terms of variety  $V$  of appropriate arity, the identity which results, holds in  $V$ . Let  $T^{(1)}(\bar{A})$  be the set of all unary term operations of  $\bar{A}$ . Then  $\bar{A}$  satisfies a unary hyperidentity,  $\bar{A} \models_{hyp} s \approx t$  if and only if  $s \approx t$  is an identity in the monoid  $(T^{(1)}(\bar{A}); \circ, id_A)$ . A finite algebra  $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$  is said to be order-primal if its clone of all term operations is the set of all operations defined on  $A$  which preserve a given partial order  $\leq$  on  $A$ .

In the project, we study algebraic properties of order-primal algebras for connected ordered sets  $(A; \leq)$ . Such order-primal algebras have no proper subalgebras, no non-identical automorphisms and are simple. We prove some properties of the varieties and the quasivarieties generated by order-primal algebras for connected orders. Further, we use the properties of order-primal algebras to formulate a new primality criteria for finite algebras and prove that an order-primal algebra cannot have only unary fundamental operations or only one at least binary fundamental operation.

We determine all partial order relations on a finite set  $A$  such that an order-primal algebra with the universe  $A$  satisfies the unary hyperidentities  $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$ . As a consequence we prove that a non-trivial order-primal algebra, which does not satisfy the equation  $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+K(n^2)}(x_1, x_2)$  as a unary hyperidentity, is primal.

It is well-known that the congruence lattice  $Con \bar{A}$  of an algebra  $\bar{A}$  is uniquely determined by the unary polynomial operations of  $\bar{A}$ . If  $|A| = n$  and if for every unary polynomial operation  $f$  of  $\bar{A}$  with  $|Im f| = |A|$  or  $|Im f| = 1$ , then  $\bar{A}$  is called a permutation algebra. Permutation algebras play an important role in tame congruence theory. If  $f : A \rightarrow A$  is not a permutation, then  $|A| > |Im f|$  and there is a least natural number  $\lambda(f)$  with  $Im f^{\lambda(f)} = Im f^{\lambda(f)+1}$ . We consider unary operation with  $\lambda(f) = n-1$  and  $\lambda(f) = n-2$  and ask for equivalence relations on  $A$  which are invariant under such unary operations.