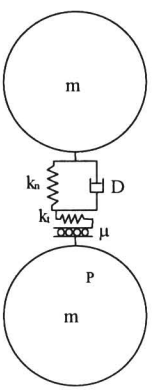
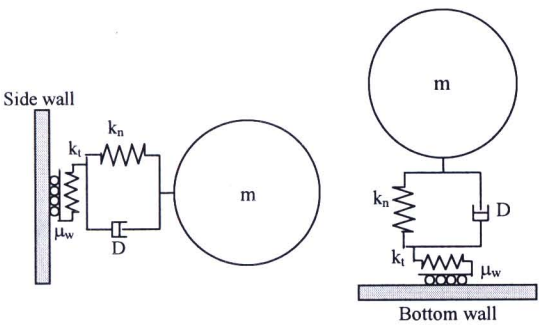
บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 วิธีการจำลองเหตุการณ์แบบวัสดุเม็ดนิ่ม (Soft-Particle Method)

การที่วิธีการจำลองเหตุการณ์แบบวัสดุเม็ดนิ่ม (Granular Materials) [10] ถูกเลือกใช้ในงานวิจัยนี้ เนื่องจากจะทำให้สามารถเก็บข้อมูลต่างๆของแต่ละเม็ดวัสดุ เช่น ความเร็ว ตำแหน่ง แรงกระทำ และอื่นๆ ที่เวลาต่างๆได้ตลอดเวลาการวิเคราะห์ได้ ซึ่งการศึกษาด้วยการทดลองจริงไม่สามารถทำได้เนื่องจากข้อจำกัดต่างๆของเครื่องมือวัดและเซ็นเซอร์ต่างๆ นอกจากนี้การจำลองเหตุการณ์แบบวัสดุเม็ดนิ่มยังเป็นวิธีที่อนุญาตให้เม็ดวัสดุแต่ละเม็ดในระบบสามารถสัมผัสกับเม็ดวัสดุรอบๆตัวมันได้ครั้งละหลายๆเม็ดในเวลาเดียวกัน ยิ่งไปกว่านั้นยังอนุญาตให้ผิวสัมผัสมีเวลาในการสัมผัสกันได้นานกว่าการที่จะคิดว่า การสัมผัสกันแต่ละครั้งของเม็ดวัสดุเป็นแบบกระทบกัน (เวลาการกระทบกันสั้นมากๆ) ซึ่งจะใกล้เคียงกับสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริง หลักการพื้นฐานการคำนวณด้วยวิธีนี้คือใช้วิธี Discrete Element Method [11] โดยทำการจำลองว่าที่ผิวสัมผัสใดๆจะประกอบด้วย Linear spring, k_n ต่อขนานกับ Viscous dashpot, D ในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส ส่วนในแนวขนานกับผิวสัมผัสประกอบไปด้วย Linear spring, k_t อีกตัวหนึ่งต่อกับ Frictional slider, μ_p และเม็ดวัสดุแต่ละเม็ดจะถูกบังคับไม่ให้หมุน ทำให้เม็ดวัสดุแต่ละเม็ดมีความยืดหยุ่นและไถลไปบนเม็ดวัสดุอื่นได้เพื่อ ให้เม็ดวัสดุมีความใกล้เคียงกับสภาพการณ์จริงมากที่สุด แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของผิวสัมผัสของเม็ดวัสดุ 2 เม็ดใดๆจะสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.1 ในขณะที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ระหว่างเม็ดวัสดุที่อยู่ใกล้ๆกับผนังของกล่องสี่เหลี่ยมก็จะนำแบบจำลองในรูปที่ 1 ไปใช้ได้เพียงแต่เปลี่ยนค่า ส.ป.ส. ระหว่างเม็ดวัสดุกับเม็ดวัสดุ μ_p เป็นค่า ส.ป.ส. ระหว่างเม็ดวัสดุกับผนัง μ_w แทน ดังในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.1 แบบจำลองระหว่างผิวสัมผัสของเม็ดวัสดุ 2 เม็ด



รูปที่ 2.2 แบบจำลองระหว่างผิวสัมผัสของเม็ดวัสดุกับผนังด้านข้างและผนังด้านล่างของกล่อง

กระบวนการของวิธีนี้เริ่มจาก ณ เวลาใดๆ เริ่มแรกจะทำการคำนวณหาค่าแรงกระทำที่เกิดขึ้นบนเม็ดวัสดุแต่ละ เม็ดภายในระบบ ทั้งที่เกิดในแนวตั้งฉากและแนวขนานผิวสัมผัส หลังจากนั้นค่าความเร่งของเม็ดวัสดุแต่ละเม็ดก็จะถูกคำนวณด้วยกฎพื้นฐานข้อที่สองของนิวตัน ในที่สุดค่าความเร็วและตำแหน่งของเม็ดวัสดุแต่ละเม็ดก็จะถูกคิดคำนวณออกมา ต่อจากนั้นการคำนวณค่าต่างๆของเม็ดวัสดุในกล่องที่เวลาถัดไปก็จะถูกคำนวณซ้ำไปเรื่อยๆจนกว่าจะถึงเวลาสุดท้ายที่ตั้งไว้

สมการการที่ใช้ในการคำนวณ เป็นดังนี้

$$a_i = F_i/m_i \tag{1}$$

$$v_{i,t2} = v_{i,t1} + \int_{t1}^{t2} a_i \, dt \tag{2}$$

$$s_{i,t2} = s_{i,t1} + \int_{t1}^{t2}\int_{t1}^{t2} a_i \, dt \, dt \tag{3}$$

โดย

t1 คือ เวลาเริ่มต้นที่เริ่มพิจารณา

t2 คือ เวลาสุดท้ายที่พิจารณา

F_i คือ แรงที่กระทำบนเม็ดวัสดุเม็ดที่ i

m_i คือ มวลของเม็ดวัสดุเม็ดที่ i

a_i คือ ความเร่งของเม็ดวัสดุเม็ดที่ i

$v_{i,t1}$ คือ ความเร็วของเม็ดวัสดุเม็ดที่ i ณ เวลา t1

$v_{i,t2}$ คือ ความเร็วของเม็ดวัสดุเม็ดที่ i ณ เวลา t2

$s_{i,t1}$ คือ ตำแหน่งของเม็ดวัสดุเม็ดที่ i ณ เวลา t1

$s_{i,t2}$ คือ ตำแหน่งของเม็ดวัสดุเม็ดที่ i ณ เวลา t2

i = 1, 2, 3, ...

ระบบที่จะทำการศึกษาจะถูกจำลองเป็นระบบ 2 มิติของเม็ดวัสดุ N เม็ดที่มีรูปร่างเป็นวงกลมมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ย d_o เมตร และมีค่าการกระจายอยู่ระหว่าง 25% ของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ย กล่องที่ใช้ในการบรรจุเม็ดวัสดุจะมีขนาดความกว้าง W เมตร และมีความสูงเป็นอนันต์ กล่องจะถูกสั่นด้วยฟังก์ชั่นซายน์ในแนวดิ่งดังสมการ

$$y(t) = A \sin (2\pi ft) = A \sin (\omega t) \qquad (4)$$

โดย

A คือ ค่า amplitude ของการสั่น (เมตร)

f คือ ค่าความถี่ของการสั่น (รอบต่อวินาที)

t คือ ค่าของเวลา (วินาที)

ระบบที่ใช้ในการศึกษาจะถูกแสดงดังรูปที่ 2.3 ค่าต่างๆในระบบถูกกำหนดอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ N, μ_p, μ_w, ε, $k_n/(\rho g d_0)$, A/d_0, $f/(g/d_0)^{0.5}$, f (time-t_o) และ $\Gamma = A(2\pi f)^2/g$

โดย

N คือ จำนวนของเม็ดวัสดุในกล่อง (เม็ด)

μ_p คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างเม็ดวัสดุด้วยกัน

μ_w คือ ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างเม็ดวัสดุกับผนังกล่อง

ε คือ ค่า Restitution coefficient

k_n คือ ค่านิจของสปริงในทิศทางตั้งฉากกับผิวสัมผัส (นิวตัน/เมตร)

ρ คือ ค่าความหนาแน่นของเม็ดวัสดุ (กิโลกรัม/ตารางเมตร)

g คือ ค่าแรงโน้มถ่วง = 9.81 เมตร/วินาที^{2}

d_o คือ ค่าเฉลี่ยของเส้นผ่านศูนย์กลางของเม็ดวัสดุในระบบ (เมตร)

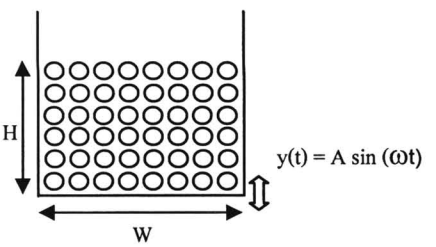
A คือ ค่าแอมปิจูดของการสั่น (เมตร)

f คือ ค่าความถี่ของการสั่น (รอบ/วินาที)

time คือ เวลาขณะใด (วินาที)

t_o คือ เวลาอ้างอิง (วินาที)

Γ คือ อัตราส่วนของค่าความเร่งของการสั่นของระบบต่อค่าแรงโน้มถ่วง

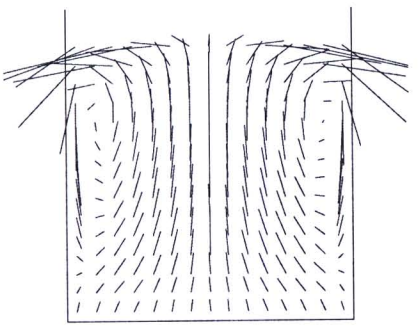


รูปที่ 2.3 แสดงแบบจำลองของเม็ดวัสดุเม็ดที่ถูกบรรจุในกล่องที่กำลังสั่นอยู่ในแนวดิ่ง

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากงานวิจัยจากผู้วิจัยหลายๆท่านทั้งการทดลองและวิธีจำลองเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบเม็ดวัสดุที่สั่นขึ้นลงอยู่ในแนวดิ่งมีอยู่ด้วยกันหลายๆงาน ดังในเอกสาร [1] - [5] ศึกษาถึงกลไกและการเกิดปรากฏการณ์การกองตัวกันในระบบเม็ดวัสดุที่บรรจุอยู่ในภาชนะบรรจุที่กำลังสั่นอยู่ในแนวดิ่ง พบว่าการเกิดการกองตัวกันจะเกิดที่ผิวอิสระด้านบนของระบบเม็ดวัสดุเสมอดังแสดงในรูปที่ 2.4 และในเอกสาร [6] – [9] ศึกษาการเกิดปรากฏการณ์การการหมุนวนในระบบเม็ดวัสดุที่บรรจุอยู่ในภาชนะบรรจุที่กำลังสั่นอยู่ในแนวดิ่ง พบว่าจะเกิดการเคลื่อนที่แบบหมุนวนของกลุ่มเม็ดวัสดุขึ้น 2 วงเสมอดังแสดงในรูปที่ 2.5 และในบางงานวิจัยยังสังเกตเห็นปรากฏการณ์การกองตัวกันเกิดขึ้นด้วย แต่ก็ยังไม่มีเหตุผลใดมาสนับสนุนถึงความสัมพันธ์ของปรากฏการณ์ทั้ง 2 นี้เลย

รูปที่ 2.4 การเกิดการกองตัวกันที่ผิวอิสระด้านบนของระบบ



รูปที่ 2.5 ตัวอย่างการหมุนวนในระบบ