

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 บทนำ

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 1 วัตถุประสงค์หลักในงานวิจัยนี้ คือ การศึกษาพัฒนาแบบจำลอง ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความจุช่องสัญญาณกับแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ สำหรับระบบมัลติเพิลอินพุท-มัลติเพิลเอาต์พุท โดยอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อนำไปสู่การเลือกลักษณะของแบบรูปการแผ่พลังงาน และชนิดของสายอากาศ ที่ทำให้ค่าความจุช่องสัญญาณที่เหมาะสมในแต่ละสภาวะแวดล้อม จึงจำเป็นต้องมีการศึกษาทำความเข้าใจทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกันหลายแขนง ทั้งในเรื่องทฤษฎีที่เกี่ยวกับกระบวนการเชิงสุ่ม ทฤษฎีข่าวสาร รวมทั้งความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสายอากาศและแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ ดังนั้นก่อนที่จะเข้าสู่กระบวนการพัฒนาสร้างแบบจำลอง จึงจำเป็นต้องมีความเข้าใจในทฤษฎีต่าง ๆ ในเบื้องต้นก่อน ดังนั้นในบทนี้จะได้อธิบายถึง ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องต่าง ๆ โดยลำดับต่อไป

2.2 กระบวนการเชิงสุ่ม

ในการวิจัยนี้ เราจะทำการศึกษาปรากฏการณ์ธรรมชาติ ที่เกี่ยวกับช่องสัญญาณในระบบการสื่อสารแบบไร้สาย เพื่อสร้างแบบจำลองของช่องสัญญาณสำหรับระบบมัลติเพิลอินพุท-มัลติเพิลเอาต์พุท โดยที่เราจะใช้แบบจำลองเพื่ออธิบายลักษณะต่าง ๆ ของช่องสัญญาณ โดยอาศัยกระบวนการเชิงสุ่ม และเพื่อเป็นแบบจำลองอ้างอิง หรือใช้สำหรับการวิเคราะห์ ซึ่งสามารถที่จะปรับเปลี่ยนค่าต่าง ๆ เพื่อให้เหมาะสมกับสถานการณ์ต่าง ๆ ในการจำลองแบบในรูปแบบต่าง ๆ

กระบวนการเชิงสุ่ม (stochastic process) มีที่มาจากภาษากรีก สำหรับคำว่า “stochastic” หมายถึง การสุ่ม (random) หรือ โอกาส (chance) สำหรับในการสร้างแบบจำลอง ก็เพื่อที่จะทำนายโอกาสของผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นจากสภาวะแวดล้อมที่ได้กำหนดให้ สำหรับในการศึกษากระบวนการเชิงสุ่ม จำเป็นต้องทราบถึงนิยามต่าง ๆ ที่ใช้ในกระบวนการเชิงสุ่ม โดยนิยามที่ควรทราบเกี่ยวกับกระบวนการเชิงสุ่มมีดังต่อไปนี้

2.2.1 ตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (random variable) คือ ปริมาณที่มีค่าเจาะจง โดยบอกได้ว่ามันมีค่าที่อาจเป็นไปได้ค่าใดค่าหนึ่งจากค่าจริง ๆ และสามารถบอกความถี่สัมพัทธ์ (relative frequency) ของการเกิดแต่ละค่าได้ พิจารณาการทดลองแบบสุ่มแทนด้วย s ที่ได้จากปริภูมิตัวอย่าง (sample space) แทนด้วย S ตามเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ภายในปริภูมิตัวอย่าง S และค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นั้น ๆ

สมมติว่าผลการทดลองแต่ละค่าของ s ที่ได้จากปริภูมิตัวอย่าง เรากำหนดฟังก์ชันที่แปรตามเวลา ฟังก์ชันหนึ่งตามที่เรากำลังต้องการให้กับผลการทดลองนั้น ๆ ซึ่งสามารถเขียนในรูปของ

$$X(t, s) \quad (2.1)$$

โดยที่ $-T \leq t \leq T$ และ $2T$ คือ ช่วงเวลาของการสังเกตทั้งหมด หากเรากำหนดให้ s มีค่าตายตัวค่าหนึ่งเท่ากับ s_j เราจะได้รูปสัญลักษณ์ของฟังก์ชันที่มีค่าแปรตามเวลาเป็น $X(t, s_j)$ และเราจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันตัวอย่าง (sample function) ในทางกลับกัน หากเรากำหนดเวลา t มีค่าคงที่ค่าหนึ่งเท่ากับ t_k เราจะได้ตัวแปรสุ่ม $X(t_k, s)$ ที่ประกอบด้วย

$$\{X(t_k, s_1), X(t_k, s_2), \dots, X(t_k, s_n)\} \quad (2.2)$$

โดยทั่วไปเพื่อความสะดวกในการเขียน เรามักจะแทน $X(t, s_j)$ ด้วย $x_j(t)$ ดังนั้นส่วนประกอบของตัวแปรสุ่มข้างต้นสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \quad (2.3)$$

จากที่กล่าวมานี้จะสังเกตเห็นว่าการเขียนฟังก์ชันในลักษณะนี้ $X(t, s)$ เปรียบเสมือนว่าเรามีชุดของตัวแปรสุ่มจำนวนหนึ่ง ที่มีตัวชี้ด้วยตัวแปรตามเวลา และเราเรียกชุดตัวแปรสุ่มเหล่านี้รวม ๆ กันว่าเป็น กระบวนการเชิงสุ่ม นอกจากนี้โดยทั่วไป ในการแสดงถึงกระบวนการเชิงสุ่มนั้นอาจจะตัดส่วนของ s ออกเพื่อความกระชับ คือจะใช้เพียง $X(t)$ ในการแทนกระบวนการเชิงสุ่ม

เพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างตัวแปรสุ่มกับกระบวนการเชิงสุ่มมากขึ้น เราจะสามารถสรุปเปรียบเทียบไว้ได้ดังนี้ ตัวแปรสุ่ม คือ การเชื่อมโยงผลการทดลองแบบสุ่มแต่ละรูปแบบให้อยู่ในรูปของตัวเลขค่าหนึ่ง ส่วนกระบวนการเชิงสุ่ม คือ การเชื่อมโยงผลการทดลองแบบสุ่มแต่ละรูปแบบให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของสัญญาณที่มีค่าแปรตามเวลา

ในการพิจารณากระบวนการเชิงสุ่มที่จะกล่าวต่อไป จะอาศัยความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มที่แต่ละเวลา เป็นกลไกหลักสำหรับวิเคราะห์ และศึกษาถึงคุณลักษณะของกระบวนการเชิงสุ่ม กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_k เป็นตัวแปรสุ่มที่ได้จากการชักตัวอย่าง (sampling) กระบวนการเชิงสุ่ม $X(t, s)$ ณ เวลา t_1, t_2, \dots, t_k นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 X_1 &= X(t_1, s) \\
 X_2 &= X(t_2, s) \\
 &\vdots \\
 X_k &= X(t_k, s)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

เมื่อเรานิยามตัวแปรสุ่มจำนวน k ตัวจากกระบวนการเชิงสุ่มแล้ว ให้ทำการหาค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วมระหว่างตัวแปรทั้ง k ตัว (k^{th} -order joint cumulative distribution function)

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k] \tag{2.5}$$

หรือแสดงในรูปของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมระหว่างตัวแปร k ตัว (k^{th} -order joint probability density function) ได้เป็น

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{2.6}$$

ที่จะได้กล่าวถึงต่อไป จะเป็นการอธิบายถึงคุณลักษณะของกระบวนการเชิงสุ่ม และค่าทางสถิติที่สำคัญต่างๆ

2.2.2 ค่าเฉลี่ย

ค่าเฉลี่ย (mean) ของกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ นิยามให้มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยทางสถิติหรือค่าคาดหวัง (expectation) ของตัวแปรสุ่มที่เกิดจากการสังเกตที่เวลา t ต่าง ๆ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 m_x(t) &= E\{X(t)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_{x(t)}(x)dx
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

โดยที่ $f_{x(t)}(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของ $X(t)$ สังเกตว่าโดยทั่วไป ค่าเฉลี่ย $m_x(t)$ จะมีค่าขึ้นกับเวลา และเป็นเครื่องบอกให้ทราบว่าค่าเฉลี่ยของกระบวนการเชิงสุ่มมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างไร

2.3.3 ค่าอัตโนมัติสัมพันธ์

ค่าอัตโนมัติสัมพันธ์ (autocorrelation) ของกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ แทนด้วย $R_x(t_1, t_2)$ นิยามให้มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยทางสถิติของผลคูณระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัว $X(t_1)$ และ $X(t_2)$ ที่ได้จากการสังเกตกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ ที่เวลา t_1 และ t_2 ตามลำดับ นั่นคือ

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{x(t_1), x(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

โดยที่ $f_{x(t_1), x(t_2)}(x_1, x_2)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นอันดับสอง (the second order probability density function) ของกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$

2.2.4 ค่าอโคโควเวเรียนซ์

ค่าอโคโควเวเรียนซ์ (autocovariance) ของกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ แทนด้วย $C_x(t_1, t_2)$ นิยามให้มีค่าดังนี้

$$C_x(t_1, t_2) = E\{(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))\} \quad (2.9)$$

อาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ (2.7) และ (2.8) จะได้ว่า

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2) \quad (2.10)$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาค่าความแปรปรวน (variance) ของ $X(t)$ ได้จาก $C_x(t_1, t_2)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X(t)] &= E\{(X(t_1) - m_x(t_1))^2\} \\ &= C_x(t, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.5 สหสัมพันธ์ไขว้

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการพิจารณาวิธีการหาค่าสหสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างกระบวนการเชิงสุ่มตัวเดียวกัน ยังไม่ได้กล่าวถึงการหาสหสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการเชิงสุ่มสอง

ตัวเลข การนิยามค่าสหสัมพันธ์ไขว้ (cross-correlation) ระหว่างกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ และ $Y(t)$ เป็นดังนี้

$$R_{xy}(t, u) = E \{X(t)Y(u)\} \quad (2.12)$$

$$R_{yx}(t, u) = E \{Y(t)X(u)\} \quad (2.13)$$

โดยที่ t และ u เป็นจุดเวลาที่สังเกตกระบวนการเชิงสุ่ม โดยทั่วไปในการแสดงคุณสมบัติของ สหสัมพันธ์ไขว้ระหว่างตัวแปรสุ่ม $X(t)$ และ $Y(t)$ เพื่อความสะดวกมักจะเขียนในรูปของเมทริกซ์ ดังนี้

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_x(\tau) & R_{xy}(\tau) \\ R_{yx}(\tau) & R_y(\tau) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

โดยที่ $\tau = t - u$ เราจะเรียกเมทริกซ์นี้ว่า เมทริกซ์สหสัมพันธ์ (correlation matrix) ของ กระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ และ $Y(t)$

2.2.6 คุณสมบัติเออร์годิก

ค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิล (ensemble average) คือการหาค่าเฉลี่ยของกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ ที่เวลา t_k ค่าหนึ่ง ซึ่งเป็นการหาค่าเฉลี่ยที่คิดจากค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของฟังก์ชันตัวอย่าง ทั้งหมดของกระบวนการเชิงสุ่มที่เวลา $t = t_k$ นอกจากค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิลแล้ว เรายังสามารถ นิยามค่าเฉลี่ยอีกรูปแบบหนึ่งที่เรียกว่า ค่าเฉลี่ยทางเวลา (time average) ที่คิดจากค่าที่เกิดขึ้นใน แนวแกนเวลา ประเด็นที่น่าสนใจ คือเนื่องจากค่าทางเวลาเป็นค่าที่สามารถหาได้จริงในทางปฏิบัติ เพราะสามารถวัดได้โดยตรงจากสัญญาณที่พิจารณา ดังนั้น จึงมีคำถามว่า ค่าเฉลี่ยทั้งสองแบบมี ความสัมพันธ์กันอย่างไร

ก่อนอื่นจะต้องอธิบายถึงการหาค่าเฉลี่ยเอนเซมเบิล ค่าเฉลี่ยยกกำลังสอง และอัตสหสัมพันธ์ ที่กระทำโดยการคำนวณค่าในทางเวลาแทน ซึ่งนิยามดังนี้

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (2.15)$$

$$\langle X^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \quad (2.16)$$

$$\langle X(t)X(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t - \tau) dt \quad (2.17)$$

สำหรับกระบวนการเชิงสุ่มใดที่จัดว่ามีคุณสมบัติเออร์กอดิก (ergodicity) เงื่อนไขต่อไปนี้จะจริง

$$E \{X(t)\} = \langle X(t) \rangle \quad (2.18)$$

$$E \{X^2(t)\} = \langle X^2(t) \rangle \quad (2.19)$$

$$E \{X(t)X(t - \tau)\} = \langle X(t)X(t - \tau) \rangle \quad (2.20)$$

นอกจากนี้ค่าเฉลี่ยรูปแบบอื่น ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกระบวนการเชิงสุ่ม $X(t)$ จะต้องเป็นจริงด้วย กระบวนการเชิงสุ่มดังกล่าวจึงจะจัดว่ามีคุณสมบัติเออร์กอดิก

2.3 ทฤษฎีข่าวสาร

ทฤษฎีข่าวสารนั้นมีความเกี่ยวข้องกับระบบการสื่อสารแบบไร้สาย เพื่อให้มีความเข้าใจถึงที่มา ที่เกี่ยวข้องกับค่าความจุช่องสัญญาณ ที่จะได้ทำการศึกษาต่อไป จึงจำเป็นต้องทราบถึงพื้นฐาน ทฤษฎีการสื่อสารไร้สายต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับช่องสัญญาณ อาทิ วิธีการวัดค่าข่าวสาร การหาค่าเฉลี่ย ข่าวสาร และการหาความจุช่องสัญญาณสำหรับระบบการสื่อสารข้อมูล ซึ่งเป็นการศึกษาว่า แท้จริงแล้วเราจะสามารถสื่อสารข้อมูลที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดได้อย่างไร



2.3.1 การนิยามปริมาณข่าวสาร

พิจารณาแหล่งกำเนิดข้อมูลแห่งหนึ่งมีการส่งข้อมูลออกคราวละหนึ่งชุด โดยข้อมูลแต่ละชุดที่ส่งออกมามีรูปแบบได้จำกัดเพียง M ซึ่งอยู่ภายในเซตของปริภูมิตัวอย่าง $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ โดยความน่าจะเป็นในการเลือกส่งข้อมูลของแต่ละชุดมีค่าเป็น

$$P(X = x_k) = p_k \quad (2.21)$$

โดยที่ $k = 1, 2, \dots, M$ และเมื่อนำความน่าจะเป็นในการส่งข้อมูลมารวมกันจะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

$$\sum_{k=1}^M p_k = 1 \quad (2.22)$$

การนิยามปริมาณข่าวสารโดยอาศัยแนวคิดของทฤษฎีความน่าจะเป็นมีความเหมาะสมและสอดคล้องกับสภาพความเป็นจริง และมีผู้ที่นิยามปริมาณข่าวสารตามเลขฐานสองไว้ (Cover and Thomas, 1991) โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$I(x_k) = \log_2 \left(\frac{1}{p_k} \right) \quad (2.23)$$

จากนิยามข้างต้น แสดงให้เห็นว่าปริมาณข่าวสารของเหตุการณ์หนึ่ง ได้นิยามให้เป็นส่วนกลับของค่าความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์นั้น นั่นคือ เหตุการณ์ใดมีโอกาสเกิดขึ้นมากก็จะมีปริมาณข่าวสารที่น้อย และเหตุการณ์ใดมีโอกาสเกิดขึ้นน้อยก็จะมีปริมาณข่าวสารที่มาก ซึ่งผลจากการนิยามตามสมการ (2.23) พบว่าปริมาณข่าวสารมีคุณสมบัติที่น่าสนใจดังนี้

- 1) $I(x_k) = 0$ สำหรับ $p_k = 1$
- 2) $I(x_k) \geq 0$ สำหรับ $0 \leq p_k \leq 1$
- 3) $I(x_k) > I(x_j)$ สำหรับ $p_k < p_j$
- 4) $I(x_k x_i) = I(x_k) + I(x_i)$ ถ้า สำหรับ x_k และ x_j เป็นอิสระต่อกันในเชิงสถิติ

2.3.2 การนิยามปริมาณเอนโทรปี

แม้ว่าการวัดปริมาณข่าวสารของเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ตามนิยามสมการ (2.23) นับว่าเป็นประโยชน์ แต่เวลานำไปประยุกต์ใช้งาน เรามักจะสนใจ และต้องการทราบถึงปริมาณ

ข่าวสารที่ได้จากแหล่งกำเนิดข้อมูลเฉลี่ยโดยรวมมากกว่า แทนที่จะสนใจปริมาณข่าวสารของเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์แยกกัน ปริมาณข่าวสารโดยเฉลี่ยของแหล่งกำเนิดข้อมูลที่กำลังนี้มีชื่อเฉพาะเรียกว่า เอนโทรปี (entropy) และค่านี้สามารถหาได้จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงสถิติของข่าวสารของแต่ละเหตุการณ์ หรือ ค่าคาดหมายของเหตุการณ์ดังนี้

$$\begin{aligned} H(X) &= E\{I(x_k)\} \\ &= \sum_{k=1}^M p_k I(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^M p_k \log_2 \left(\frac{1}{p_k} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

โดยที่ $E\{\cdot\}$ แทนค่าเฉลี่ยเชิงสถิติ หรือค่าคาดหมาย

จากนิยามเอนโทรปีตามสมการ (2.24) พบว่าเอนโทรปีมีคุณสมบัติที่น่าสนใจประการหนึ่งคือ

$$0 \leq H(X) \leq \log_2 M \quad (2.25)$$

เมื่อ M คือจำนวนรูปแบบของสัญลักษณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแหล่งกำเนิดข้อมูล จากสมการ (2.25) จะเห็นว่า ความสัมพันธ์นี้แสดงถึงขอบเขตของเอนโทรปีทั้งค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

สำหรับขอบเขตค่าต่ำสุดของเอนโทรปี จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ การพิสูจน์คุณสมบัตินี้ทำได้โดยง่าย เพราะจากนิยามตามสมการ (2.24) แต่ละค่าของ $p_k \log_2(1/p_k)$ ที่นำมารวมกันมีค่ามากกว่า 0 เสมอ ดังนั้น $H(X) \geq 0$ ด้วย ทั้งนี้เอนโทรปีจะมีค่าเป็น 0 ก็เฉพาะกรณีที่มีสัญลักษณ์หนึ่งในเซตมีความน่าจะเป็นในการเกิดเป็น 1 ส่วนสัญลักษณ์ที่เหลือมีค่าความน่าจะเป็นในการเกิดเป็น 0 ทั้งหมด กล่าวคือ มี p_k ค่าหนึ่งเป็น 1 และ p_k ที่เหลือมีค่าเป็น 0

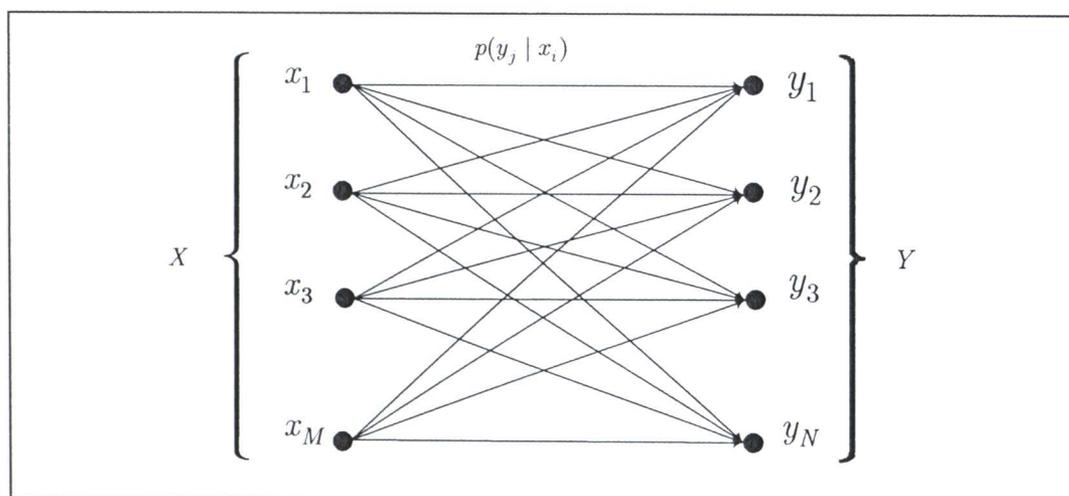
ส่วนขอบเขตบนบ่งบอกว่าเอนโทรปีจะมีค่าสูงสุดไม่เกิน $\log_2 M$ ถ้าพิจารณาโดยละเอียดจะพบว่า เอนโทรปีสูงสุดที่เป็นไปได้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อสัญลักษณ์ทั้ง M รูปแบบมีความน่าจะเป็นในการเกิดเท่ากับ $1/M$ เท่ากันหมดนั่นเอง

2.3.3 แบบจำลองช่องสัญญาณ

การอธิบายที่ผ่านมาเป็นการอธิบายเกี่ยวกับแหล่งกำเนิดข่าวสารทั้งสิ้น ในส่วนต่อไปจะเป็นการพิจารณาส่วนที่สำคัญของระบบอีกส่วนหนึ่ง คือ ช่องสัญญาณ ซึ่งเป็นสื่อกลางใน

การนำส่งข่าวสารจากแหล่งกำเนิดที่ภาคส่งไปยังจุดหมายปลายทางที่ภาครับ ช่องสัญญาณพื้นฐานที่นำมาพิจารณาต่อไปนี้จะมีความจำ (memoryless) หมายความว่า สัญญาณที่ขาออกของช่องสัญญาณ ณ เวลาหนึ่ง จะขึ้นอยู่กับสัญญาณที่ด้านเข้า ณ เวลาดังกล่าวเท่านั้น ไม่ขึ้นกับสัญญาณที่ได้ป้อนเข้ามาก่อนหน้านี้เลย นอกจากนี้สัญญาณที่ด้านเข้าและด้านออกก็จะมีรูปแบบของสัญลักษณ์ที่จำกัดด้วยเช่นกัน

พิจารณาแหล่งกำเนิดสัญญาณหนึ่ง ซึ่งให้กำเนิดสัญลักษณ์จำนวนจำกัดที่แตกต่างกันทั้งหมด M รูปแบบ $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ เมื่อป้อนสัญญาณดังกล่าวเข้าสู่ช่องสัญญาณที่ไม่มีความจำ พบว่า จะได้สัญญาณด้านออกที่แตกต่างกันทั้งหมด N รูปแบบ $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ และเมื่อนำองค์ประกอบดังกล่าวมาวาดเป็นโครงสร้างแบบจำลองได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แบบจำลองช่องสัญญาณแบบไม่มีความจำ

จากรูปสังเกตว่าส่วนของช่องสัญญาณที่มีการเขียนค่าความน่าจะเป็น $p(y_j | x_i)$ ประกอบอยู่ในแบบจำลอง ซึ่งจะหมายถึงค่าความน่าจะเป็นที่สัญญาณด้านออกจะเป็น y_j เมื่อทราบที่ป้อนสัญญาณ x_i เข้าสู่ช่องสัญญาณแล้ว หรือเท่ากับ $P(Y = y_j | X = x_i)$ นั่นคือ ถ้าเราทราบความน่าจะเป็น $p(y_j | x_i)$ ครบทุกแบบ ก็จะสามารถบรรยายคุณลักษณะของช่องสัญญาณที่ไม่มีความจำได้อย่างสมบูรณ์ ซึ่งสามารถแสดงคุณลักษณะของช่องสัญญาณในรูปเมทริกซ์ขนาด $M \times N$ ได้ดังนี้

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p(y_1 | x_1) & p(y_2 | x_1) & \cdots & p(y_N | x_1) \\ p(y_1 | x_2) & p(y_2 | x_2) & \cdots & p(y_N | x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p(y_1 | x_M) & p(y_2 | x_M) & \cdots & p(y_N | x_M) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

โดยเรียกเมทริกซ์ \mathbf{P} ว่าเมทริกซ์ช่องสัญญาณ (channel matrix) ซึ่งทั่วไปแล้วมักทราบหรือมีการกำหนดความน่าจะเป็นของสัญญาณ X แต่ละสัญลักษณ์ที่ป้อนเข้าสู่ช่องสัญญาณ นั่นคือเราทราบค่า $p(x_i) = P(X = x_i)$ สำหรับสัญลักษณ์ x_i ทั้งหมดที่อยู่ในเซต $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ เมื่อการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นที่รับทราบแล้ว สิ่งต่อไปที่เราสนใจคือ การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y ซึ่งเป็นสัญญาณที่ด้านออกของช่องสัญญาณ ในการคำนวณการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y สามารถทำได้โดยอาศัยหลักการของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมาร์จินอล (marginal distribution probability) ดังนี้

$$\begin{aligned} p(y_j) &= P(Y = y_j) \\ &= \sum_{i=1}^M P(Y = y_j | X = x_i)P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^M p(y_j | x_i)p(x_i) \end{aligned} \quad (2.27)$$

นอกจากนี้ยังสามารถคำนวณหาค่าการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม (joint probability distribution) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y ได้จากความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} p(x_i, y_j) &= P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= P(Y = y_j | X = x_i)P(X = x_i) \\ &= p(y_j | x_i)p(x_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3.4 ข่าวสารร่วม

จากการอธิบายถึงแบบจำลองของช่องสัญญาณในส่วนที่ผ่านมาแล้วนั้น สัญญาณ X คือสัญญาณที่ป้อนเข้าสู่ช่องสัญญาณ และ Y คือสัญญาณที่ขาออกของช่องสัญญาณซึ่งสัญญาณ Y ก็คือ สัญญาณ X ที่ได้เปลี่ยนแปลงไป เนื่องจากการรบกวนจากตัวช่องสัญญาณ

โดยในส่วนของสัญญาณ X นั้น เราสามารถคำนวณหาความไม่แน่นอนโดยอาศัยนิยามเอนโทรปี (ประสิทธิ์ ประพัฒน์มงคลการ, 2540) ได้ดังนี้

$$H(X) = \sum_{i=1}^M p(x_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \quad (2.29)$$

เพื่อความสะดวกในการอธิบายในลำดับถัดไปเราจะดัดแปลงสภาพของสมการ $H(X)$ ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{i=1}^M p(x_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \sum_{j=1}^N p(y_j | x_i) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p(y_j | x_i) p(x_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p(y_j, x_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i, y_j) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

เมื่อเราทราบความไม่แน่นอนของสัญญาณ X จากค่าเอนโทรปี $H(X)$ แล้ว หากลองพิจารณาต่อว่าจะเกิดอะไรขึ้นกับความไม่แน่นอนของ X เมื่อภาครับได้รับสัญญาณ $Y = y_j$ เป็นที่เรียบร้อยแล้ว กล่าวคือภาครับได้รับข่าวสารเพิ่มเติม และจะต้องไม่ลืมว่าข่าวสารของสัญญาณ Y ก็คือข่าวสารของสัญญาณ X ที่ถูกรบกวนโดยช่องสัญญาณ ดังนั้นภาครับจะพิจารณาความไม่แน่นอนของสัญญาณ X ว่ามีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เมื่อเทียบกับก่อนที่จะได้รับสัญญาณ Y โดยเราจะเริ่มจากการหาค่าเอนโทรปีของตัวแปรสุ่ม X หลังจากที่ได้รับทราบค่าของตัวแปรสุ่ม $Y = y_j$ เรียบร้อยแล้ว ซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$H(X | Y = y_j) = \sum_{i=1}^M p(x_i | y_j) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i | y_j)} \right) \quad (2.31)$$

ค่าจากการคำนวณนี้ ให้ผลได้หลายรูปแบบ และเปลี่ยนแปลงไปตามค่า y_j ดังนั้นค่า $H(X | Y = y_j)$ สามารถมองเป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น $H(X | Y = y_1)$, $H(X | Y = y_2)$,

$H(X | Y = y_N)$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $p(y_1), p(y_1), \dots, p(y_N)$ ตามลำดับ ดังนั้นถ้าเราหาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มนี้ตามค่าของ Y จะได้

$$\begin{aligned} H(X | Y) &= \sum_{j=1}^N H(X | Y = y_j) p(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i | y_j) p(y_j) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i | y_j)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i, y_j) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i | y_j)} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

พจน์ $H(X | Y)$ คือ ค่าที่แสดงถึงความไม่แน่นอนของสัญญาณ X ที่พิจารณาหลังจากได้รับค่าของสัญญาณ Y ที่ขาออกของช่องสัญญาณแล้ว ส่วน $H(X)$ คือ ค่าที่แสดงถึงความไม่แน่นอนของสัญญาณ X ตามคุณลักษณะของแหล่งกำเนิด โดยหลักการแล้ว ค่า $H(X | Y)$ น่าจะมีขนาดเล็กกว่า $H(X)$ เนื่องจากได้รับข่าวสารที่มากกว่า ดังนั้น ความไม่แน่นอนของ X หลังจากได้รับข่าวสารเพิ่มเติมจากช่องสัญญาณย่อมจะลดลง ข่าวสารที่ได้รับเพิ่มเติมนี้เรียกว่า ข่าวสารร่วม (mutual information) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$I(X; Y) = H(X) - H(X | Y) \quad (2.33)$$

จากสมการ (2.30) และ (2.32) จะได้ว่า

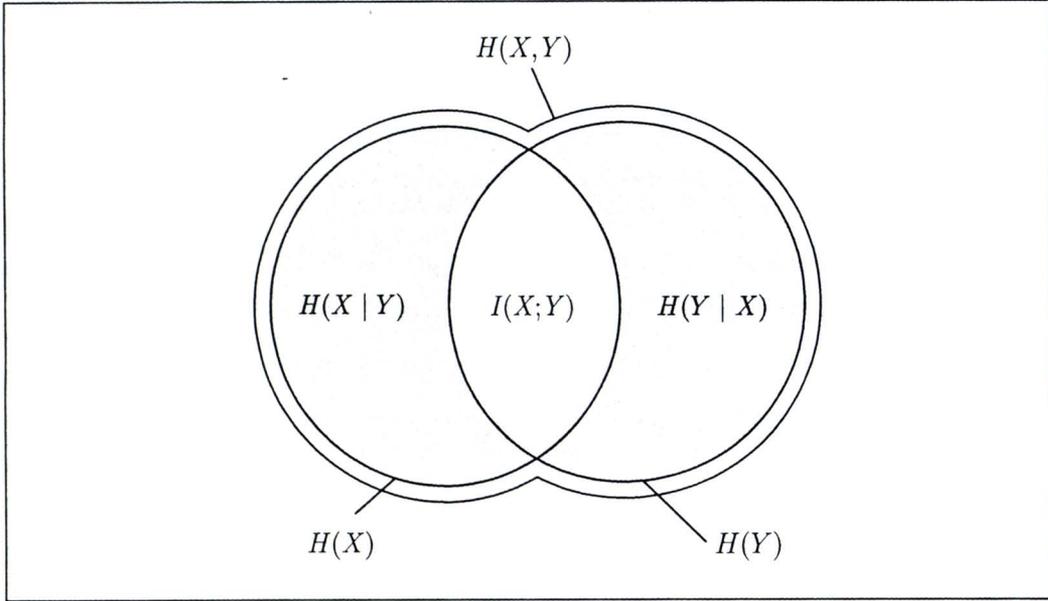
$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i, y_j) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i)} \right) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i, y_j) \log_2 \left(\frac{1}{p(x_i | y_j)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i, y_j) \log_2 \left(\frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

จากคำจำกัดความของคำว่าข่าวสารร่วมหรือ $I(X; Y)$ ตามสมการ (2.33) พบว่าข่าวสารร่วมมีคุณสมบัติที่น่าสนใจดังนี้

- 1) $I(X; Y) = I(Y; X)$
- 2) $I(X; Y) \geq 0$ เสมอ
- 3) $I(X; Y) = H(Y) - H(Y | X) = H(X) - H(X | Y)$

$$4) I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

เราสามารถอธิบายคุณสมบัติของข่าวสารร่วมโดยอาศัยแผนภาพเวนน (venn diagram) ได้ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แผนภาพเวนนแสดงค่าต่าง ๆ ของข่าวสารในระบบการสื่อสาร

2.3.5 ความจุช่องสัญญาณ

พิจารณาช่องสัญญาณที่มีการป้อนสัญญาณด้านเข้า X ด้วยสัญญาณที่มีจำนวนรูปแบบของสัญลักษณ์จำกัด และ สัญญาณขาออก Y ของช่องสัญญาณ ก็มีจำนวนรูปแบบของสัญลักษณ์จำนวนจำกัดด้วย โดยที่ช่องสัญญาณมีความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสภาพของสัญญาณเป็น $p(y_j | x_i)$ เราจะนิยามความจุช่องสัญญาณ C ให้มีค่าเท่ากับปริมาณข่าวสารเฉลี่ยสูงสุดที่สามารถส่งผ่านช่องสัญญาณได้ ซึ่งก็เทียบได้กับการหาค่าสูงสุดของข่าวสารร่วมนั่นเอง ซึ่งเมื่อพิจารณาค่าของ $I(X;Y)$ สามารถแสดงได้เป็น

$$I(X;Y) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M p(x_i, y_j) \log_2 \left(\frac{p(y_j | x_i)}{p(y_j)} \right) \quad (2.35)$$

เนื่องจากเราสามารถแสดงค่าของ $p(x_i, y_j)$ ในรูปของ

$$p(x_i, y_j) = p(y_j | x_i)p(x_i) \quad (2.36)$$

และแสดงค่าของ $p(y_j)$ ในรูปของ

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^M p(y_j | x_i)p(x_i) \quad (2.37)$$

ดังนั้นเมื่อเราแทนค่าของ $p(x_i, y_j)$ และ $p(y_j)$ ลงในสมการ (2.35) จะได้ว่าค่า $I(X; Y)$ นั้นจะขึ้นอยู่กับค่า $p(x_i)$ และค่า $p(y_j | x_i)$ เท่านั้น เนื่องจาก $p(y_j | x_i)$ เป็นค่าที่ขึ้นกับคุณสมบัติของช่องสัญญาณซึ่งไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ จึงหมายความว่า ค่าของ $I(X; Y)$ จะขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของสัญญาณที่ป้อนเข้ามาเป็นสำคัญ ด้วยเหตุนี้เราจึงสามารถเขียนความจุช่องสัญญาณได้ดังนี้ (ถึญฉกร วุฒิสัทธิกุลกิจ, 2546).

$$C = \max_{p(x_i)} I(X; Y) \quad (2.38)$$

จากที่กล่าวมาเราได้ข้อสังเกตที่น่าสนใจอยู่ประการหนึ่งว่าความจุของช่องสัญญาณนอกจากจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของช่องสัญญาณเองแล้ว ยังขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของสัญญาณที่ป้อนเข้าไปในช่องสัญญาณด้วย

2.3.6 เอนโทรปีสำหรับแหล่งกำเนิดข่าวสารแบบต่อเนื่อง

การอธิบายที่ผ่านมา เราอธิบายเฉพาะแหล่งกำเนิดสัญญาณที่มีรูปแบบสัญลักษณ์จำกัด ดังนั้นเราจึงแสดงแหล่งกำเนิดสัญญาณแบบนี้ในรูปของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable) สำหรับเนื้อหาต่อจากนี้ จะขยายไปสู่แหล่งกำเนิดที่มีสัญลักษณ์แบบไม่จำกัด ดังนั้น เราจึงแสดงแหล่งกำเนิดสัญญาณที่จะพิจารณาต่อไปนี้ในรูปของ ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (continuous random variable)

กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นเท่ากับ $f_x(X)$ ถ้าเรานิยามค่าเอนโทรปีของแหล่งกำเนิด หรือตัวแปรสุ่มนี้ โดยอาศัยรูปแบบที่คล้ายคลึงกับการนิยามของเอนโทรปีสำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ก็จะได้เป็นรูปแบบสมการดังต่อไปนี้

$$h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) dx \quad (2.39)$$

และเราจะเรียกนิยามเอนโทรปีนี้ว่า เอนโทรปีส่วนต่าง (differential entropy) สำหรับเหตุผลที่เรียกเช่นนี้ จะได้อธิบายในภายหลัง หากพิจารณาในเชิงคณิตศาสตร์ แท้จริงแล้ว เราจะพบว่าการนิยามตามสมการ (2.39) ไม่เหมือนหรือสอดคล้องกับการให้นิยามสำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ประเด็นนี้สามารถอธิบายให้เห็นได้อย่างชัดเจนดังนี้

ก่อนอื่นเราจะพิจารณาตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ในรูปของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง โดยอาศัยทฤษฎีลิมิตมาช่วย นั่นคือ สมมติให้ $x_k = k\Delta x$ โดยที่ $k = 0, 1, 2, \dots$ และ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 ตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าอยู่ในช่วง $[x_k, x_k + \Delta x]$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ $f_x(x)\Delta x$ ดังนั้นเอนโทรปีของตัวแปรสุ่มที่เขียนในรูปแบบไม่ต่อเนื่องจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} H(X) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_x(x_k)\Delta x \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x_k)\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[f_x(x_k) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x_k)} \right) - f_x(x_k) \log_2 (\Delta x) \right] \Delta x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x_k) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x_k)} \right) dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2 (\Delta x) \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x_k) dx \\ &= h(X) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2 (\Delta x) \end{aligned} \quad (2.40)$$

จากสมการความสัมพันธ์ที่ได้ สังเกตว่าพจน์แรกของสมการทางขวามือ $h(X)$ ก็คือค่าของเอนโทรปีส่วนต่างที่ได้นิยามไว้ในสมการ (2.39) นั่นเอง ซึ่งสามารถบอกได้ชัดเจนว่า นิยามเอนโทรปีส่วนต่างนั้น มีค่าไม่เท่ากับที่ได้นิยามตามแบบของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง นั่นคือ ถ้าเรานิยามเอนโทรปีให้กับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง โดยอาศัยนิยามของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และใช้ทฤษฎีลิมิตเข้าช่วย จะได้พจน์ที่สองของสมการทางด้านขวามือเพิ่มขึ้นมา ซึ่งถ้าลองพิจารณาคู่ค่าของพจน์นี้ พบว่าจะมีค่าเป็นอนันต์ เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ แสดงให้เห็นได้ว่าเอนโทรปี $H(X)$ ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องนั้น มีค่าเป็นอนันต์เสมอ และเราเรียกเอนโทรปี $H(X)$ ว่าเป็นเอนโทรปีสัมบูรณ์ (absolute entropy) การที่เอนโทรปีสัมบูรณ์ $H(X)$ เป็นอนันต์นั้น มิได้ขัดแย้งกับความเป็นจริงแต่อย่างใด เพราะแหล่งกำเนิดแบบนี้มีรูปแบบสัญลักษณ์ที่แตกต่างกันได้เป็นจำนวนอนันต์ ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใช้ค่าเอนโทรปีสัมบูรณ์ $H(X)$ ในการเปรียบเทียบเอนโทรปีระหว่างตัวแปรสุ่ม 2 ตัวที่ต่างกัน ได้ ด้วยเหตุนี้ เราจึงกล่าวว่า การนิยามเอนโทรปีแบบของเอนโทรปีสัมบูรณ์ $H(X)$ นั้น ไม่มีประโยชน์ในการใช้งานเท่าใดนัก แต่สังเกตว่า ถ้าเราสนใจเฉพาะความแตกต่างของเอนโทรปีระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัว นั่นคือ ให้นำเอนโทรปีสัมบูรณ์มาหักลบกัน จะพบว่า พจน์ที่มีค่าเป็นอนันต์จะหักล้างกันไป ผลลัพธ์ที่ได้ก็เทียบเท่าการนำเอนโทรปีส่วนต่าง

$h(X)$ ของตัวแปรสุ่มทั้งสองมาหักลบกันนั่นเอง ด้วยเหตุนี้ การนิยามเอนโทรปีของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ในรูปเอนโทรปีส่วนต่าง $h(X)$ แทนเอนโทรปีสัมบูรณ์ $H(X)$ จึงมีความเหมาะสมและเป็นประโยชน์กว่า ทั้งนี้ให้พิจารณาพจน์ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2(\Delta x)$ เป็นเพียงค่าอ้างอิงที่มีขนาดเท่ากันสำหรับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องทุกตัว

2.3.7 แหล่งกำเนิดข่าวสารที่มีเอนโทรปีสูงสุด

ในการพิสูจน์เพื่อหาตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ที่ให้ค่าเอนโทรปีส่วนต่างสูงสุด เมื่อกำหนดค่าความแปรปรวน (variance) มาให้นั้น สามารถทำได้โดยกำหนดปัญหาดังกล่าวในรูปต่อไปนี้

$$\max \left(h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) dx \right) \quad (2.41)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (2.42)$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_x(x) dx = \sigma^2 \quad (2.43)$$

เมื่อ μ และ σ^2 คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ตามลำดับ

รูปปัญหาที่แสดงข้างต้นสามารถหาผลเฉลยได้โดยอาศัยกรรมวิธี ตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange multiplier) ซึ่งตามกรรมวิธีดังกล่าวนี้ ระบุว่า เอนโทรปีส่วนต่าง $h(X)$ จะให้ค่าสูงสุด เมื่อผลการอินทิเกรตของส่วนประกอบต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) + \lambda_1 f_x(x) + \lambda_2 (x - \mu)^2 f_x(x) dx \quad (2.44)$$

เมื่อ λ_1 และ λ_2 คือ ตัวคูณลากรางจ์ เงื่อนไขดังกล่าวนี้ มีความหมายในอีกนัยหนึ่งว่า เอนโทรปี ส่วนต่าง $h(X)$ จะให้ค่าสูงสุดเมื่อหาอนุพันธ์ของเทอมที่อยู่ในเครื่องหมายอินทิเกรต ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$f_x(x) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) + \lambda_1 f_x(x) + \lambda_2 (x - \mu)^2 f_x(x) \quad (2.45)$$

เทียบกับ $f_x(x)$ แล้วมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ

$$\log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) - \log_2 e + \lambda_1 + \lambda_2 (x - \mu)^2 = 0 \quad (2.46)$$

เมื่อจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$f_x(x) = \exp \left(-1 + \frac{\lambda_1}{\log_2 e} + \frac{\lambda_2}{\log_2 e} (x - \mu)^2 \right) \quad (2.47)$$

เมื่อแทนค่า $f_x(x)$ ลงในสมการ (2.42) และ (2.43) จะสามารถแก้หาค่า λ_1 และ λ_2 ได้เท่ากับ

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{e}{2\pi\sigma^2} \right) \quad (2.48)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\log_2 e}{2\sigma^2} \quad (2.49)$$

เมื่อแทนค่าทั้งสองลงในสมการ (2.47) จะได้ตัวแปรสุ่มที่ให้ค่าเอนโทรปีส่วนต่างสูงสุดเป็นดังนี้

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2.50)$$

ซึ่งก็คือ ตัวแปรสุ่มแบบเกาส์เซียน (Gaussian random variable) นั่นเอง

เราสามารถหาค่าเอนโทรปีของตัวแปรสุ่มแบบเกาส์เซียนได้โดยการใส่เครื่องหมายลอการิทึมทั้งสองข้างสมการจะได้ว่า

$$\log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) = \log_2 \sqrt{2\pi\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \log_2 e \quad (2.51)$$

จากนิยามเอนโทรปีส่วนต่างในสมการ (2.39) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} h(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x)} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \left(\log_2 \sqrt{2\pi\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \log_2 e \right) dx \\ &= \log_2 \sqrt{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \log_2 e \right) dx \\ &= \log_2 \sqrt{2\pi\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2} \log_2 e \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_x(x) dx \\ &= \log_2 \sqrt{2\pi\sigma} + \frac{1}{2} \log_2 e \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.3.8 ข่าวสารร่วมสำหรับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

สำหรับกรณีตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง การนิยามค่าข่าวสารร่วม ระหว่างตัวแปรสุ่ม X และ Y สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกันกับที่นิยามไว้ในสมการ (2.34) ดังนี้

$$I(X;Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) \log_2 \left(\frac{f_x(x|y)}{f_x(x)} \right) dx dy \quad (2.53)$$

โดยที่ $f_{x,y}(x,y)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม (joint probability density function) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y ส่วน $f_x(x|y)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability density function) ของตัวแปรสุ่ม X เมื่อทราบค่าของตัวแปรสุ่ม $Y = y$

คุณสมบัติหลักของค่าสารสนเทศร่วม $I(X;Y)$ สำหรับกรณีตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องสามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องได้ดังนี้

- 1) $I(X;Y) = I(Y;X)$
- 2) $I(X;Y) \geq 0$ เสมอ
- 3) $I(X;Y) = h(X) - h(X|Y)$
- 4) $I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X)$

โดยที่ $h(X)$ คือ ค่าเอนโทรปีส่วนต่างของ X และ $h(Y)$ ค่าเอนโทรปีส่วนต่างของ Y สำหรับ $h(X|Y)$ คือค่าเอนโทรปีส่วนต่างแบบมีเงื่อนไข (conditional differential entropy) ของตัวแปรสุ่ม X เมื่อทราบค่าของตัวแปรสุ่ม Y ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$h(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) \log_2 \left(\frac{1}{f_x(x|y)} \right) dx dy \quad (2.54)$$

และ $h(Y|X)$ คือค่าเอนโทรปีส่วนต่างแบบมีเงื่อนไข ของตัวแปรสุ่ม Y เมื่อทราบค่าของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$h(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) \log_2 \left(\frac{1}{f_y(y|x)} \right) dx dy \quad (2.55)$$

2.3.9 ทฤษฎีความจุช่องสัญญาณ

พิจารณาสัญญาณ $X(t)$ หนึ่งที่มีแถบความถี่จำกัดเท่ากับ B เฮิรตซ์ ได้ทำการป้อนเข้าสู่ช่องสัญญาณที่ไม่มีความจำ ซึ่งมีสัญญาณรบกวนเกาส์เซียนสีขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise : AWGN) กำหนดให้ X_k คือ ค่าที่ได้จากการซัดตัวอย่างสัญญาณ $X(t)$ ณ เวลา k ตั้งแต่ $1, 2, \dots, n$ ทั้งนี้การซัดตัวอย่างสัญญาณ กระทำอย่างสม่ำเสมอด้วยอัตราเร็วเท่ากับ $2B$ ซึ่งเป็นอัตราในการซัดตัวอย่างที่สูงเพียงพอ สำหรับการที่ภาครับจะสามารถดึงสัญญาณต้นทางกลับคืนมาได้โดยถูกต้อง ตามทฤษฎีการซัดตัวอย่างของไนควิสต์ เมื่อสัญญาณ X_k ถูกป้อนเข้าสู่ช่องสัญญาณจะได้เป็นสัญญาณ Y_k ออกมา ซึ่งคือ ตัวอย่างของสัญญาณที่ด้านออกจากช่องสัญญาณ ณ เวลา k นั้นเอง โดยจากนิยามข้างต้นจะได้ว่า

$$Y_k = X_k + N_k \quad \text{เมื่อ } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

โดยค่าตัวอย่างของสัญญาณรบกวน N_k ที่เวลา k มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนเท่ากับ

$$\sigma^2 = N_0 B \quad (2.57)$$

แหล่งกำเนิดสัญญาณจะส่งออกด้วยกำลังเฉลี่ยที่จำกัดค่าหนึ่งเท่ากับ P ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$E\{X_k^2\} = P \quad \text{เมื่อ } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.58)$$

ความจุของช่องสัญญาณมีนิยามดังนี้

$$C = \max_{p(x_i)} \{I(X_k; Y_k) : E\{X_k^2\} = P\} \quad (2.59)$$

โดยที่ $I(X_k; Y_k)$ คือ ค่าเฉลี่ยของข่าวสารร่วม ระหว่างตัวอย่างของสัญญาณที่แหล่งกำเนิด X_k และสัญญาณที่ด้านออกของช่องสัญญาณเป็น Y_k โดยที่การหาค่าความจุสูงสุดนั้น ให้กระทำเทียบกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปร X_k

ในการหาค่าสูงสุดนั้นเราจะอาศัยค่าของ $I(X_k; Y_k)$ ในรูปของความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$I(X_k; Y_k) = h(Y_k) - h(Y_k | X_k) \quad (2.60)$$

สำหรับ $h(Y_k | X_k)$ มีความหมายว่า เมื่อได้กำหนดค่าของ X_k มาแล้ว จะพบว่าค่าเอนโทรปีของ Y_k จะมีค่าเท่ากับเอนโทรปีของ N_k นั่นเอง ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยพิจารณาความสัมพันธ์ $Y_k = X_k + N_k$ จะเห็นว่าเมื่อเราทราบ X_k แล้ว Y_k จะขึ้นตรงกับตัวแปรสุ่ม N_k เท่านั้น

ด้วยเหตุนี้เราจึงสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$h(Y_k | X_k) = h(N_k) \quad (2.61)$$



เมื่อแทนค่า $h(Y_k | X_k)$ ลงในสมการ (2.60) จะได้ว่า

$$h(X_k; Y_k) = h(Y_k) - h(N_k) \quad (2.62)$$

เนื่องจากสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในช่องสัญญาณ ไม่ได้มีความสัมพันธ์อันใดกับสัญญาณที่ส่งจากแหล่งกำเนิดข่าวสาร ดังนั้น การแจกแจงความน่าจะเป็น $f_x(x)$ ของตัวแปรสุ่ม X_k ก็ย่อมจะเป็นอิสระในเชิงสถิติจากสัญญาณรบกวน N_k ด้วย นั่นคือ $h(N_k)$ ไม่ขึ้นกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_x(x)$ เมื่อเป็นเช่นนี้การหาค่าสูงสุดของ $I(X_k; Y_k)$ จึงขึ้นกับพจน์ $h(Y_k)$ เท่านั้น เนื่องจากเอนโทรปี $h(Y_k)$ จะมีค่าสูงสุดได้ก็ต่อเมื่อ Y_k เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียนเท่านั้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสัญญาณที่ด้านออกของช่องสัญญาณจะมีคุณลักษณะเป็นสัญญาณรบกวนด้วย เมื่อพิจารณาสัญญาณรบกวนที่เกิดจากช่องสัญญาณซึ่งได้สมมติไว้ในตอนต้นแล้วว่า ให้แต่ละตัวอย่าง N_k มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียนด้วย นั่นคือ ความจุช่องสัญญาณจะมีค่าสูงสุดได้เมื่อตัวแปรสุ่ม X_k มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเกาส์เซียน ดังนั้นสมการ (2.59) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$C = I(X_k; Y_k) : X_k \text{ Gaussian } E\{X_k^2\} = P \quad (2.63)$$

ดังนั้นเมื่อเราทราบเงื่อนไขที่ทำให้ค่าความจุช่องสัญญาณมีค่าสูงสุดแล้ว การคำนวณความจุสูงสุดของช่องสัญญาณอื่น ๆ จึงสามารถทำได้โดยง่าย ชั้นแรกอาศัยสมการ (2.62)

$$\begin{aligned} C &= I(X_k; Y_k) = h(Y_k) - h(N_k) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e(P + \sigma^2)) - \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e\sigma^2) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

สำหรับหน่วยวัดความจุช่องสัญญาณที่คำนวณได้ จะมีหน่วยเดียวกันกับเอนโทรปี นั่นคือ เป็นหน่วยที่แสดงถึงจำนวนบิตที่ต้องใช้แทนสัญลักษณ์หนึ่งสัญลักษณ์ หากสัญญาณที่ป้อนเข้าสู่ช่องสัญญาณมีความกว้างแถบความถี่เท่ากับ B สัญญาณจะต้องทำการชักตัวอย่างที่อัตราเร็วอย่างน้อย $2B$ ดังนั้นเราสามารถปรับหน่วยความจุช่องสัญญาณให้เป็นหน่วยบิตต่อวินาทีได้ โดยการคูณสมการ (2.64) ด้วย $2B$ ทั้งสองด้านจะได้ว่า

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \quad \text{บิตต่อวินาที} \quad (2.65)$$

เมื่อความกว้างแถบความถี่ที่ใช้มีค่าเท่ากับ B สัญญาณรบกวนเกาส์เซียนจะมีกำลังเท่ากับ $\sigma^2 = N_0 B$ ดังนั้น

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 B} \right) \quad \text{บิตต่อวินาที} \quad (2.66)$$

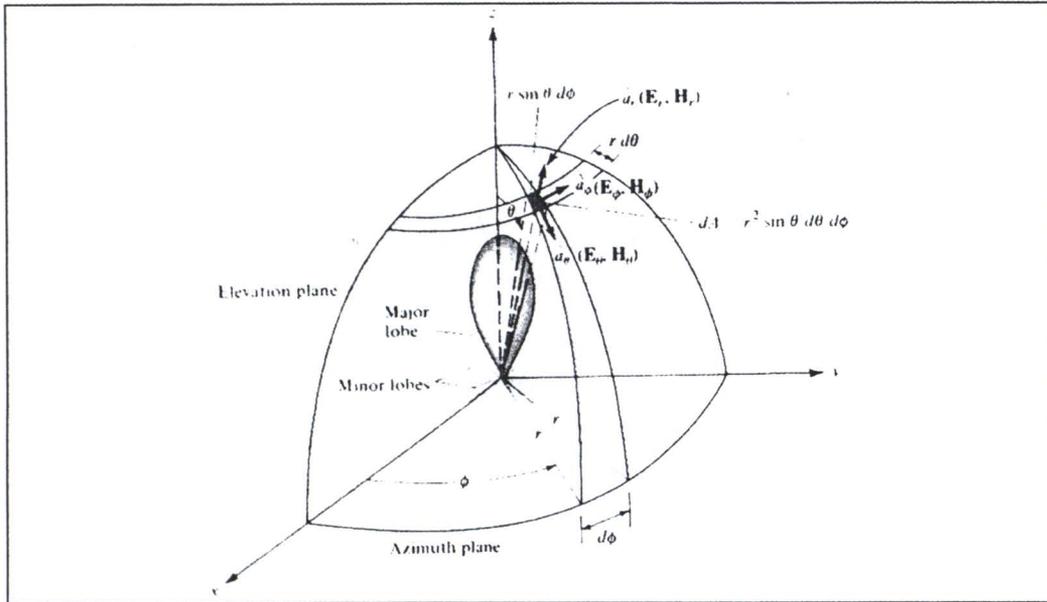
สมการความสัมพันธ์แสดงความจุของช่องสัญญาณที่ได้นี้ มีชื่อเรียกว่า ทฤษฎีบทของแชนนอนและฮาร์ตลีย์ (Shannon-Hartley theorem) ทฤษฎีบทของแชนนอนและฮาร์ตลีย์นี้มีประโยชน์อย่างมากต่อระบบสื่อสาร เพราะทฤษฎีบทดังกล่าว ระบุให้เราทราบว่า เราสามารถส่งข่าวสารที่อัตราส่งเท่ากับ R_b ผ่านช่องสัญญาณ โดยมีความน่าจะเป็นของความผิดพลาดที่ต่ำมากได้ ตราบที่ $R_b \leq C$ แต่ทั้งนี้ต้องมีการใช้กรรมวิธีการเข้ารหัสช่องสัญญาณที่ซับซ้อนมากพอ หรือกล่าวในทางกลับกันได้ว่า ถ้าเราส่งข่าวสารผ่านช่องสัญญาณ โดยที่ $R_b > C$ แล้ว เป็นไปไม่ได้ที่จะมีวิธีที่จะเข้ารหัสช่องสัญญาณใด ที่สามารถช่วยให้ส่งผ่านข่าวสารที่มีความผิดพลาดระดับต่ำมาก สังเกตว่าทฤษฎีบทของแชนนอนและฮาร์ตลีย์ กล่าวถึงเฉพาะขอบเขต หรือ ข้อจำกัดของอัตราการส่งข่าวสารเท่านั้น ไม่ได้กล่าวถึงค่าที่แน่นอน หรือขอบเขตความผิดพลาดของการส่งข่าวสารเลย

2.4 ทฤษฎีสายอากาศเบื้องต้น

ในการที่จะจำลองแบบแบบรูปการแผ่กำลังงานของสายอากาศ เราจำเป็นต้องทราบเกี่ยวกับศัพท์ต่างๆที่ใช้ในทฤษฎีสายอากาศ ตลอดจนความหมายของศัพท์เหล่านั้นไว้ก่อน ดังนั้นในส่วนนี้จะเริ่มแนะนำศัพท์ต่างๆ ที่เป็นพื้นฐานสำหรับการประยุกต์ใช้ในการศึกษาวิจัยต่อไป

2.4.1 แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ

แบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ (Radiation Pattern) คือ รูปภาพที่ใช้เพื่อแสดงคุณสมบัติการแผ่พลังงานของคลื่น ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัดสเปซ (Space Coordinates Function) ของค่าความแรงของสนาม (Field Strength) เฟส (Phase) หรือ โพลาริเซชัน (Polarization) ซึ่งมีคุณสมบัติเหล่านี้ใช้เพื่อแสดงการแจกแจงรูปของพลังงานเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งสามมิติที่สังเกตที่มีรัศมีคงที่



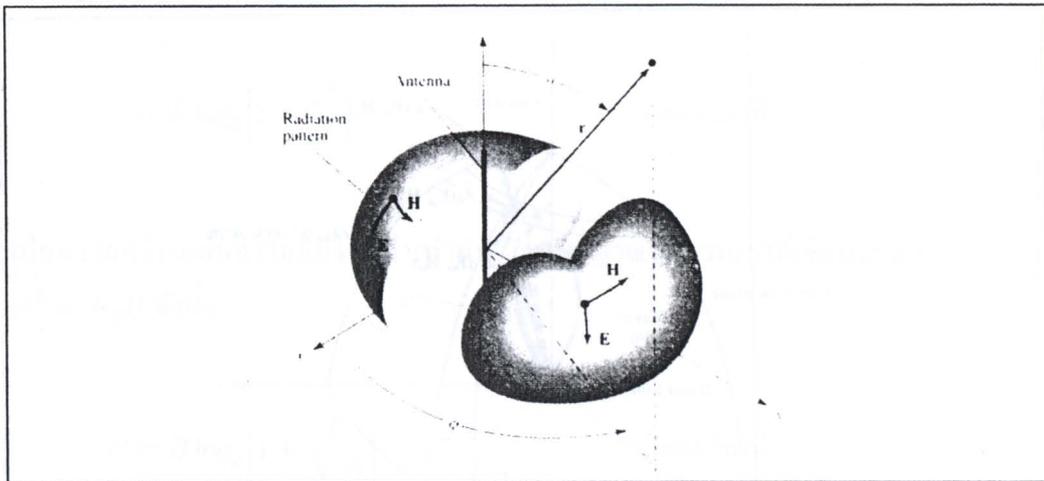
รูปที่ 2.3 ระบบพิกัดที่ใช้แสดงคุณสมบัติของการแผ่พลังงานของคลื่น

สำหรับการใช้เส้นเพื่อแสดงกำลังงานที่สายอากาศรับได้ตามแนวรัศมีที่มีค่าคงที่ มีชื่อเรียกว่า แบบรูปกำลังงาน (Power Pattern) ของสายอากาศ และ กราฟที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในทิศทางต่างๆ ที่มีรัศมีคงที่ มีชื่อเรียกว่า แบบรูปสนาม (Field Pattern) ของสายอากาศนั้น

2.4.2 แบบรูปสายอากาศ

ตัวแผ่พลังงานแบบไอโซทรอปิก (Isotropic Radiator) คือ สายอากาศที่ถูกสมมุติขึ้น โดยมีคุณสมบัติของการแผ่พลังงานของคลื่นเท่ากันในทุกทิศทาง ยกตัวอย่างเช่น แหล่งกำเนิดแบบจุด (Point Source) เป็นสายอากาศแบบหนึ่ง ที่ไม่สามารถสร้างจริงได้ แต่มักใช้เพื่อเป็นตัวแทนเปรียบเทียบกับสายอากาศจริงเกี่ยวกับการแสดงคุณสมบัติ แสดงทิศทางของสายอากาศ

สายอากาศแบบมีทิศทาง (Directional Antenna) เป็นสายอากาศซึ่งมีคุณสมบัติของการส่ง หรือรับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้ดีในเฉพาะทิศทางที่กำหนดเท่านั้น ตัวอย่างของสายอากาศที่มีคุณสมบัติดังกล่าวคือ สายอากาศแบบรอบทิศทางในระนาบเดียว (Omni-directional Antenna) คุณสมบัติของสายอากาศแบบนี้ มีดังแสดงในรูปที่ 2.4

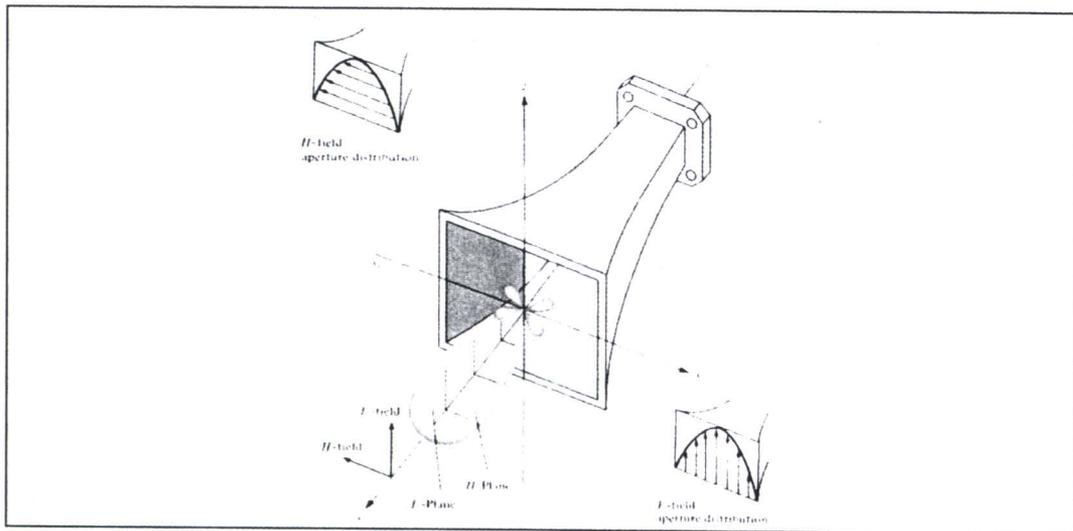


รูปที่ 2.4 แบบรูปของสายอากาศแบบรอบทิศทางในระนาบเดียว

จากรูปจะเห็นได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศแบบนี้ ไม่มีทิศทางในระนาบแนวราบ (Azimuth Plane) $[f(\phi), \theta = \pi/2]$ แต่เป็นแบบชี้ทิศทางในระนาบแนวตั้ง (Elevation Plane) $[\theta = 0, \phi = \text{ค่าคงที่}]$ แบบรูปสายอากาศแบบรอบทิศทางในระนาบเดียวนี้ เป็นกรณีพิเศษของแบบรูปสายอากาศแบบมีทิศทาง

2.4.3 แบบรูปการแผ่กระจายคลื่นหลัก

เราจะอธิบายคุณสมบัติของสายอากาศในเทอมของแบบรูปการแผ่กระจายคลื่นหลัก (Principal Pattern) ของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก สำหรับสายอากาศโพลาไรเซชันแบบเชิงเส้น (Linearly Polarization) แบบรูปการแผ่กระจายคลื่นในระนาบ E จะเป็นระนาบที่บรรจุเวกเตอร์สนามไฟฟ้า และ ทิศทางของการแผ่พลังงานของคลื่นที่แรงที่สุด ส่วนแบบรูปการแผ่กระจายคลื่นในระนาบ H จะเป็นระนาบที่บรรจุเวกเตอร์สนามแม่เหล็ก และ ทิศทางของการแผ่พลังงานของคลื่นที่แรงที่สุด ตัวอย่างการแสดงผลแบบรูปการแผ่กระจายคลื่นหลัก มีดังแสดงในรูปที่ 2.5 โดยมีระนาบ XZ (ระนาบแนวราบ ; $\theta = \pi/2$) เป็นระนาบ E หลัก



รูปที่ 2.5 แบบรูปการแผ่กระจายคลื่นหลัก ระนาบ E และ H ของสายอากาศปากแตร

2.4.4 พูของการแผ่พลังงาน

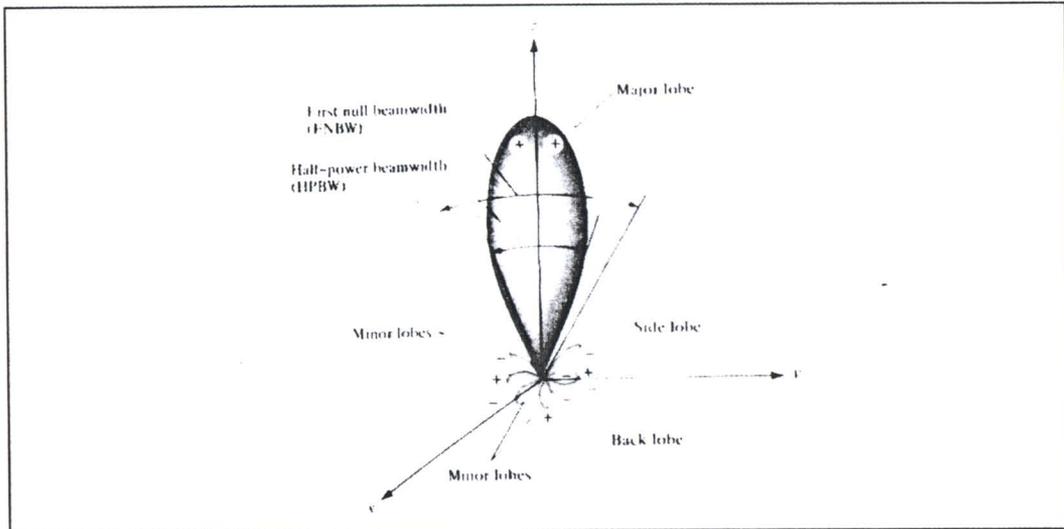
พูของการแผ่พลังงาน (Radiation Lobe) เป็นส่วนหนึ่งของการแผ่พลังงานของคลื่นที่เกิดขึ้นเป็นบริเวณ โดยการปิดล้อมของส่วนที่มีความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่นต่ำ รูปที่ 2.6ก แสดงแบบรูปการแผ่พลังงานแบบเชิงขั้ว (Polar Pattern) แบบสามมิติ ซึ่งแบ่งเป็นพูต่างๆดังนี้

พูหลัก (Major Lobe หรือ Main Lobe) เป็นพูของการแผ่พลังงานของคลื่นซึ่งอยู่ในทิศทางที่มีการแผ่พลังงานของคลื่นแรงที่สุด ตามรูปที่ 2.6ก มีพูหลักอยู่ในทิศทาง $\theta = 0$ สำหรับสายอากาศบางชนิด อาจมีพูหลักมากกว่า 1 พู เช่น สายอากาศแยกลำคลื่น (Beam Antenna)

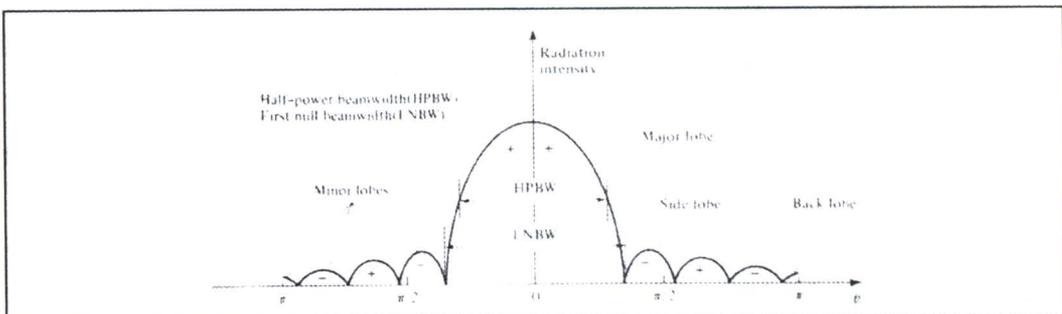
พูคลื่นเล็ก (Minor Lobe) ได้แก่พูอื่นๆนอกเหนือไปจากพูหลัก

พูข้าง (Side Lobe) เป็นพูคลื่นเล็กที่อยู่ติดกับพูหลัก และอยู่ในทิศทางบนครึ่งวงกลมซีกเดียวกับพูหลัก

พูหลัง (Back Lobe) เป็นพูคลื่นเล็กที่อยู่ในครึ่งวงกลมตรงข้ามกับพูหลัก ปกติแล้วพูคลื่นเล็กจะเกิดจากการแผ่พลังงานของคลื่นในทิศทางที่ไม่ต้องการ ดังนั้นสำหรับสายอากาศที่ดีจะต้องกำจัดพูเหล่านี้ให้น้อยที่สุด ระดับของพูคลื่นเล็ก มักแสดงเป็นอัตราส่วนของความหนาแน่นของพลังงานในพูที่กำลังคิดต่อความหนาแน่นของพลังงานในพูหลัก ซึ่งเรียกว่า อัตราส่วนของพูข้าง (Side Lobe Ratio) หรือ ระดับของพูข้าง (Side Lobe Level ; SLL) ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปนั้น มักจะต้องการให้ระดับของพูข้างน้อยกว่า -20 dB



ก) พูต่างๆ และความกว้างลำของแบบรูปการแผ่กระจายคลื่นของสายอากาศ



ข) แบบรูปการแผ่กระจายคลื่นในแบบเชิงเส้น
รูปที่ 2.6 แบบรูปการแผ่กระจายคลื่นของสายอากาศ

2.4.5 บริเวณต่างๆของสนามจากสายอากาศ

โดยทั่วไปมักจะแบ่งบริเวณที่ล้อมรอบสายอากาศออกเป็น 3 ส่วน คือ บริเวณสนามใกล้ชนิดรีแอกทีฟ (Reactive Near-field Region) บริเวณแผ่พลังงานสนามใกล้ (Radiating Near-field Region) และ บริเวณแผ่พลังงานสนามไกล (Far Field Region) ดังแสดงในรูปที่ 2.7

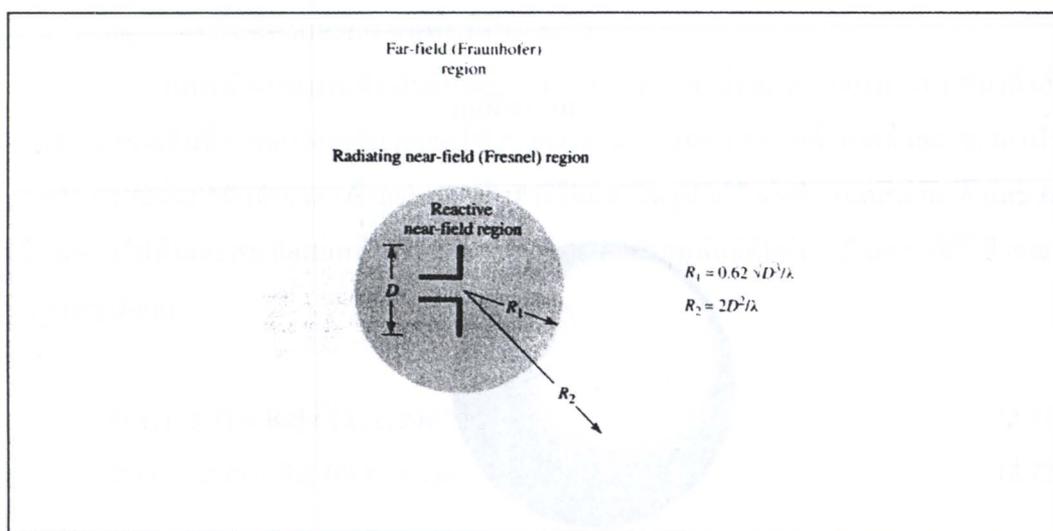
บริเวณสนามใกล้ชนิดรีแอกทีฟ เป็นบริเวณสนามที่ล้อมรอบใกล้สายอากาศมากที่สุด และมีสนามเป็นชนิดรีแอกทีฟเป็นส่วนใหญ่ บริเวณนี้จะมีระยะทาง $R < 0.62\sqrt{D^3/\lambda}$ จากผิวของสายอากาศ เมื่อ λ เป็นความยาวคลื่น และ D เป็นมิติที่ยาวที่สุดของสายอากาศ

บริเวณแผ่พลังงานสนามใกล้ เป็นบริเวณสนามของสายอากาศที่อยู่ระหว่างบริเวณสนามใกล้ชนิดรีแอกทีฟ กับบริเวณแผ่พลังงานสนามไกล โดยมีสนามที่กระจายอยู่เป็นส่วนใหญ่

และ การกระจายของสนามตามมุมต่าง ๆ นั้น แปรผันตามระยะทางจากสายอากาศ เมื่อสายอากาศมีขนาดเล็กเมื่อเทียบกับความยาวคลื่น สนามในบริเวณนี้อาจไม่เกิดขึ้น ในบริเวณนี้จะมีระยะทาง $0.62\sqrt{D^3/\lambda} < R < 2D^2/\lambda$

บริเวณแผ่พลังงานสนามไกล เป็นบริเวณสนามของสายอากาศซึ่งการแผ่พลังงานของสนามของสายอากาศตามมุมต่าง ๆ ไม่ขึ้นกับระยะทางของสายอากาศ ถ้าสายอากาศมีมิติใหญ่สุดเท่ากับ D บริเวณแผ่พลังงานสนามไกล จะเกิดขึ้นที่ระยะทาง $R > 2D^2/\lambda$ จากสายอากาศ

ในบริเวณนี้ สนามจะมีลักษณะเป็น สนามตามขวาง (Transverse Field) และการแผ่พลังงานของสนามตามมุมต่าง ๆ ไม่ขึ้นกับระยะทาง โดยขอบในของบริเวณดังกล่าวมีค่า $R = 2D^2/\lambda$ และ ขอบนอกเป็นอนันต์



รูปที่ 2.7 การแบ่งบริเวณของสนามจากสายอากาศ

2.4.6 เรเดียนและสเตอเรเดียน

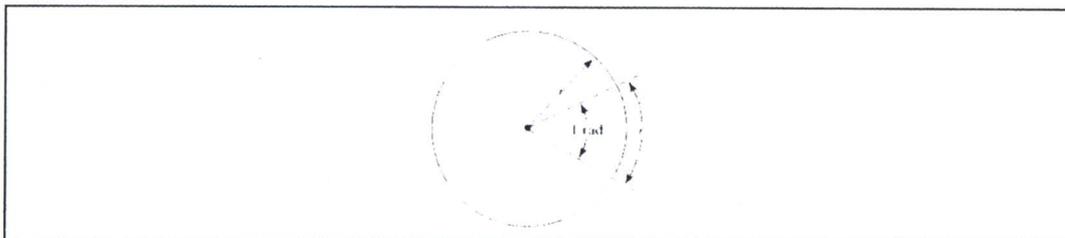
การวัดมุมบนระนาบจะมีหน่วยเป็นเรเดียน หนึ่งเรเดียนเป็นมุมบนระนาบ ซึ่งยอดของมันอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี r และถูกปิดด้วยส่วนของเส้นรอบวง ซึ่งยาว r ดังแสดงในรูปที่ 2.8ก เนื่องจากเส้นรอบวงที่มีรัศมี r มีความยาว $C = 2\pi r$ ดังนั้นบนหนึ่งรอบของวงกลม จะมี 2π เรเดียน ($2\pi r/r$)

การวัดมุมตัน (Solid Angle) มีหน่วยเป็นสเตอเรเดียน (sr) หนึ่งสเตอเรเดียนเป็นมุมตันที่มียอดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี r ดังแสดงในรูปที่ 2.8ข เนื่องจากพื้นที่ผิวของทรงกลมรัศมี r มีค่าเท่ากับ $4\pi r^2$ ดังนั้นตลอดทรงกลมจะมี 4π สเตอเรเดียน ($4\pi r^2/r^2$) ตามรูปที่ 2.8ข พื้นที่ขนาดจั่ว dA บนผิวของทรงกลมรัศมี r จะคำนวณได้เป็น

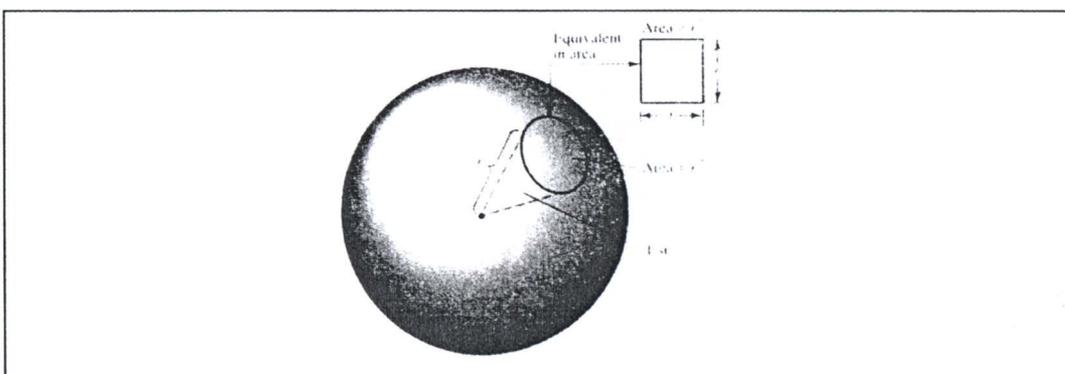
$$dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{m}^2) \quad (2.67)$$

ดังนั้นองค์ประกอบของมุมตัน $d\Omega$ ของทรงกลมเขียนได้เป็น

$$d\Omega = dA/r^2 = \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (\text{sr}) \quad (2.68)$$



ก) เรเดียน



ข) สเตอเรเดียน

รูปที่ 2.8 แสดงคำจำกัดความของเรเดียน และ สเตอเรเดียน

2.4.7 ความกว้างลำครึ่งกำลัง

ความกว้างลำครึ่งกำลัง (Half – Power Beamwidth: HPBW) เป็นมุมที่วัดระหว่างจุดที่มีความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่นในพหุหลัก มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด 2 จุด ดังแสดงในรูปที่ 2.6 เพื่อความสะดวกต่อไปจะใช้คำย่อ HPBW แทน

2.4.8 ความหนาแน่นของการแผ่กำลังงานของคลื่น

เนื่องจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใช้ในการส่งข่าวสารผ่านตัวกลาง ถูกกำหนดให้มีความสัมพันธ์กับพลังงานและกำลังงานไฟฟ้า โดยความสัมพันธ์ดังกล่าวได้แก่ พอยดิงเวกเตอร์ชั่วขณะเวลา (Instantaneous Vector) ซึ่งมีสมการแสดงความสัมพันธ์ดังนี้ คือ

$$\mathcal{W} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} \quad (2.69)$$

- เมื่อ \mathcal{W} = พoyดิงเวกเตอร์ชั่วขณะเวลานั้น (W/m^2)
 \mathcal{E} = ความเข้มสนามไฟฟ้าชั่วขณะเวลานั้น (V/m)
 \mathcal{H} = ความเข้มสนามแม่เหล็กชั่วขณะเวลานั้น (A/m)

เนื่องจากพoyดิงเวกเตอร์ มีความหมายแสดงถึงความหนาแน่นของกำลังงาน ดังนั้น กำลังงานทั้งหมดที่พุ่งตัดผ่านพื้นผิวปิดจะสามารถหาได้ โดยอินทิเกรทส่วนของพoyดิงเวกเตอร์ ที่ตั้งฉากกับผิวทั้งหมด

$$\mathcal{P} = \oiint_s \mathcal{W} \cdot ds = \oiint_s \mathcal{W} \cdot \hat{n} da \quad (2.70)$$

- เมื่อ \mathcal{P} = กำลังงานทั้งหมดซึ่งขณะเวลานั้น (W)
 da = พื้นที่ส่วนย่อยๆ บนพื้นที่ปิด (m^2)

ในกรณีของสนามที่แปรผันกับเวลา มักจะหาค่าเฉลี่ยของความหนาแน่นของกำลังงานได้โดยการอินทิเกรทค่าพoyดิงเวกเตอร์ชั่วขณะเวลานั้น ตลอด 1 คาบ แล้วหารด้วยคาบเวลานั้น สำหรับสนามที่แปรผันกับเวลา ซึ่งกระจายเป็นฮาร์โมนิก ในรูป $e^{j\omega t}$ เมื่อกำหนดสนาม \bar{E} และ \bar{H} เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเชิงซ้อนแล้ว จะหาความสัมพันธ์กับค่า \mathcal{E} และ \mathcal{H} ชั่วขณะเวลาใดๆได้จาก

$$\mathcal{E}(x, y, z; t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad (2.71)$$

$$\mathcal{H}(x, y, z; t) = \text{Re}[\bar{H}(x, y, z)e^{j\omega t}] \quad (2.72)$$

จาก (2.71), (2.72) และ โดยอาศัย $\text{Re}[\bar{E}(x, y, z)e^{j\omega t}] = 1/2 [\bar{E}e^{j\omega t} + \bar{E}^*e^{-j\omega t}]$ สมการ (2.69) จะสามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\mathcal{W} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times \bar{H}^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times \bar{H}e^{j2\omega t}] \quad (2.73)$$

เทอมแรกของ (2.73) ไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา และ เทอมที่สองมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นสองเท่าของความถี่ที่กำหนดให้ ดังนั้นค่าเฉลี่ยของพoyดิงเวกเตอร์จึงสามารถที่จะหาได้เป็น

$$W_{av}(x, y, z) = [\mathcal{W}(x, y, z; t)]_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{E} \times \bar{H}^*] \quad (2.74)$$

ตัวประกอบ $1/2$ ใน (2.73) และ (2.74) เกิดขึ้น เพราะสนาม \bar{E} และ \bar{H} เป็นค่าสูงสุด ไม่ใช่ค่า RMS จาก (2.74) กำลังงานเฉลี่ยที่แผ่จากสายอากาศ จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} = P_{\text{av}} &= \oiint_s \mathbf{W}_{\text{rad}} \cdot d\mathbf{s} = \oiint_s \mathbf{W}_{\text{rad}} \cdot \hat{n} da \\ &= \frac{1}{2} \oiint_s \text{Re}(\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.75)$$

2.4.9 ความเข้มของการแผ่พลังงาน

คำจำกัดความของคำว่าความเข้มของการแผ่พลังงาน (Radiation Intensity) ในทิศทางที่กำหนดให้ คือ กำลังงานที่แผ่ออกจากสายอากาศต่อหน่วยมุมตัน ความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่นเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในการแสดงคุณสมบัติของสายอากาศ เกี่ยวกับบริเวณแผ่พลังงานสนามไกล ความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่น สามารถหาได้จากผลคูณของความหนาแน่นของการแผ่พลังงานของคลื่น และผลจากการกำลังสองของระยะทาง ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$U = r^2 W_{\text{rad}} \quad (2.76)$$

เมื่อ U = ความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่น (W / หน่วยมุมตัน)

W_{rad} = ความหนาแน่นของการแผ่พลังงานของคลื่น (W/m²)

ความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่น ถ้าจะเขียนแสดงความสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าของสายอากาศในบริเวณแผ่พลังงานสนามไกลได้ คือ

$$\begin{aligned} U(\theta, \phi) &= \frac{r^2}{2\eta} |\bar{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi)|^2 \\ &= \frac{r^2}{2\eta} \left[|E_\theta(r, \theta, \phi)|^2 + |E_\phi(r, \theta, \phi)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\eta} \left[|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2 \right] \end{aligned} \quad (2.77)$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{E}}(r, \theta, \phi)$ = ความเข้มของสนามไฟฟ้าของสายอากาศในระยะไกล

E_θ, E_ϕ = ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าของสายอากาศในระยะไกล

η = อินทรินซิกอิมพีแดนซ์ (intrinsic impedance) ของตัวกลาง

ดังนั้นแบบรูปของกำลังงานก็ใช้เพื่อแสดง ถึงความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่น ได้เช่นกัน กำลังงานทั้งหมดนี้หาได้โดย อินทิเกรตความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่น ตาม สมการ (2.77) ตลอดมุมตันทั้งหมด ซึ่งจะได้

$$P_{rad} = \oint_{\Omega} U d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.78)$$

ในกรณีของแหล่งกำเนิดแบบจุด U จะไม่ขึ้นอยู่กับการมุม θ และ ϕ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \oint_{\Omega} U_0 d\Omega \\ &= U_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\theta d\phi \\ &= 4\pi U_0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

เมื่อหาความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่นของแหล่งกำเนิดแบบจุด

$$U = \frac{P_{rad}}{4\pi} \quad (2.80)$$

2.4.10 สภาพเจาะจงทิศทาง

เพื่อที่จะเข้าใจถึงคำว่าสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) เราจำเป็นต้องรู้จัก ไคเรกทีฟเกน (Directive Gain) ก่อน ไคเรกทีฟเกนในทิศทางที่กำหนด คืออัตราส่วนของความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่นในทิศทางนั้นต่อความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่นของสายอากาศ ซึ่งใช้สำหรับอ้างอิง ซึ่งปกติสายอากาศสำหรับใช้อ้างอิงนี้ จะใช้แหล่งกำเนิดแบบจุด ชนิดไอโซทรอปิก(Isotropic Point Source)

สภาพเจาะจงทิศทาง คือค่าของไคเรกทีฟเกน ในทิศทางที่มีค่ามากที่สุด หรือกล่าวง่ายๆ ว่าสภาพเจาะจงทิศทางของต้นกำเนิด (สายอากาศ) ที่ไม่เป็นแบบไอโซทรอปิก คือ อัตราส่วนของความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่นที่มากที่สุด ต่อความเข้มข้นของการแพร่กระจายของแหล่งกำเนิดแบบจุดชนิดไอโซทรอปิก เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$D_g = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (2.81)$$

$$D_{max} = D_0 = \frac{U|_{max}}{U_0} = \frac{U_{max}}{U_0} = \frac{4\pi U_{max}}{P_{rad}} \quad (2.82)$$

D_g = ไดรเรคทีฟเกน (ไม่มีหน่วย)

D_0 = สภาพเจาะจงทิศทาง (ไม่มีหน่วย)

U = ความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่น (W/หน่วยมุมตัน)

U_{\max} = ค่าสูงสุดของความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่น (W/หน่วยมุมตัน)

U_0 = ความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่นของแหล่งกำเนิดแบบจุดชนิดไอโซทรอปิก (W/หน่วยมุมตัน)

P_{rad} = กำลังงานที่แพร่กระจายทั้งหมด (W)

จาก (2.81) และ (2.82) เราจะทราบว่า ไดรเรคทีฟเกนและสภาพเจาะจงทิศทางของแหล่งกำเนิดแบบจุดชนิดไอโซทรอปิกมีค่าเป็นหนึ่ง ทั้งนี้เพราะ U , U_{\max} และ U_0 ต่างมีค่าเท่ากัน

สภาพเจาะจงทิศทางของแหล่งกำเนิดแบบจุดชนิดไอโซทรอปิก ค่าเท่ากับหนึ่ง เพราะว่ามันแผ่กำลังงานออกไปในทุกทิศทางด้วยค่าที่เท่ากัน แต่สำหรับต้นกำเนิด (สายอากาศ) แบบอื่นๆ นั้นย่อมมีสภาพเจาะจงทิศทางมากกว่าหนึ่งเสมอ

ข้อสรุปอีกอย่างหนึ่งในที่นี้ก็คือ ค่าของไดรเรคทีฟเกนจะมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์และน้อยกว่าหรือเท่ากับสภาพเจาะจงทิศทาง ($0 \leq D_g \leq D_0$)

โดยทั่วไปสมการของไดรเรคทีฟเกนและสภาพเจาะจงทิศทาง อาจจะเป็นฟังก์ชันของมุม θ และ ϕ ด้วย (ที่แล้มาแสดงเฉพาะฟังก์ชันของมุม θ เท่านั้น)

ต่อไปลองสมมุติให้ความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่นอยู่ในลักษณะดังต่อไปนี้คือ

$$U = B_0 F(\theta, \phi) \approx \frac{1}{2\eta} \left[|E_\theta(\theta, \phi)|^2 + |E_\phi(\theta, \phi)|^2 \right] \quad (2.83)$$

เมื่อ B_0 เป็นค่าคงที่ E_θ และ E_ϕ เป็นส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าที่ระยะไกล ค่าสูงสุดของสมการที่ (2.83) หาได้คือ

$$U_{\max} = B_0 F(\theta, \phi) \Big|_{\max} = B_0 F(\theta, \phi)_{\max} \quad (2.84)$$

กำลังที่แผ่ทั้งหมดได้จาก

$$\begin{aligned}
 P_{rad} &= \oiint_{\Omega} U d\Omega \\
 &= B_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

ดังนั้นจะได้สูตรทั่วไปของโคเรกทีฟเกนและสภาพเจาะจงทิศทางเป็นดังนี้ คือ

$$D_g(\theta, \phi) = \frac{4\pi F(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi} \tag{2.86}$$

$$D_0(\theta, \phi) = \frac{4\pi F(\theta, \phi)|_{\max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi} \tag{2.87}$$

หรือเขียน (2.87) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 D_0(\theta, \phi) &= \frac{4\pi}{\left(\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi}{F(\theta, \phi)|_{\max}} \right)} \\
 &= \frac{4\pi}{\Omega_A}
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

เมื่อ Ω_A เป็นมุมตันของลำคลื่น (Beam) ซึ่งหาได้จาก

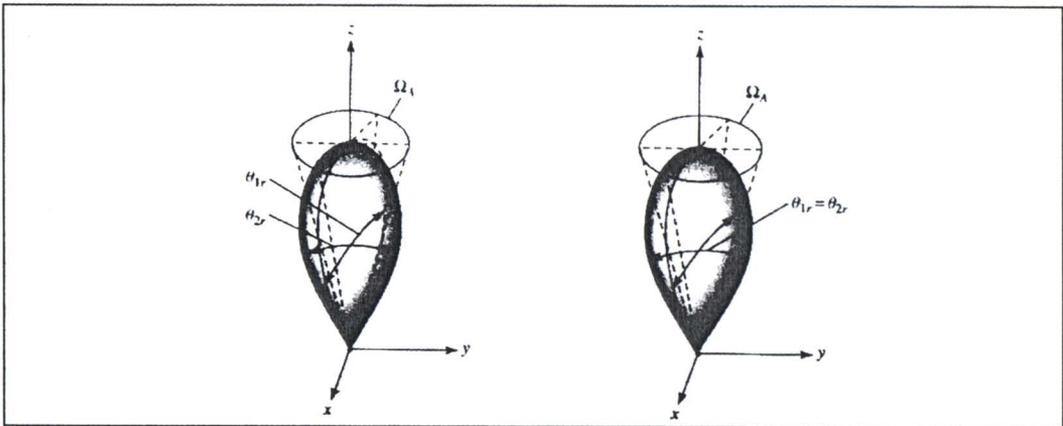
$$\begin{aligned}
 \Omega_A &= \frac{1}{F(\theta, \phi)|_{\max}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_n(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

$$F_n(\theta, \phi) = \frac{F(\theta, \phi)}{F(\theta, \phi)|_{\max}} \tag{2.90}$$

$F(\theta, \phi)|_{\max}$ นำมาหารในสมการ (2.90) เพื่อทำให้เป็นบรรทัดฐาน (Normalize) ความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่น $F(\theta, \phi)$ ให้มีค่าสูงสุดเป็นหนึ่ง

มุมตันของลำคลื่น Ω_A มีค่าจำกัดความว่า คือ มุมตันซึ่งกำลังงานทั้งหมดของสายอากาศจะไหลผ่านเมื่อความเข้มของการแผ่พลังงานของคลื่นมีค่าคงที่ (และมีค่าเท่ากับค่าสูงสุดของ U) ที่ทุกมุมภายใน Ω_A

สายอากาศซึ่งมีพู่หลักแคบๆ เพียงพู่เดียว และมีพู่คลื่นเล็กที่มีขนาดเล็กจนสามารถตัดทิ้งได้ มุมตันของลำคลื่นจะมีค่าประมาณเท่ากับผลคูณของ HPBW ในสองระนาบ ซึ่งตั้งฉาก ดังแสดงในรูปที่ 2.9ก สำหรับแบบรูปของสายอากาศที่หมุนแล้วสมมาตรกันโดยรอบ HPBW ในระนาบใดๆ จะเท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 2.9ข



ก) แบบรูปการแผ่พลังงานแบบไม่สมมาตร ข) แบบรูปการแผ่พลังงานแบบสมมาตร
รูปที่ 2.9 มุมตันของลำคลื่นซึ่งแบบรูปของการแผ่พลังงานของคลื่นที่ไม่สมมาตรและสมมาตร

โดยอาศัยการประมาณนี้ สมการที่ (2.88) จะเขียนได้ใหม่เป็นดังต่อไปนี้

$$D_0 = \frac{4\pi}{\Omega_A} = \frac{4\pi}{\Theta_{1r}\Theta_{2r}} \quad (2.91)$$

มุมตันของลำคลื่น Ω_A ประมาณได้จาก

$$\Omega_A = \Theta_{1r}\Theta_{2r} \quad (2.92)$$

เมื่อรู้ความกว้างลำเป็นองศา สมการที่ (2.91) จะดัดแปลงให้เหมาะสมที่จะแทนค่าความกว้างลำนั้น โดยตรงได้เป็น

$$D_0 = \frac{4\pi \left(\frac{180}{\pi}\right)^2}{\Theta_{1r} \Theta_{2r}} = \frac{41253}{\Theta_{1r} \Theta_{2r}} \quad (2.93)$$

สำหรับแถวลำดับระนาบ (Planar Array) จะประมาณสมการ (2.23) ได้เป็นดังนี้ คือ

$$D_0 = \frac{32400}{\Omega_A^2} = \frac{41253}{\Theta_{1d} \Theta_{2d}} \quad (2.94)$$

สมการที่ (2.93) และ (2.94) จะใช้ได้ผลดี เมื่อแบบรูปการแผ่พลังงานมีเพียงพหุหลักๆ เดียว และพหุคลื่นเล็กจะต้องมีขนาดเล็กมากๆ เท่านั้น สำหรับแบบรูปการแผ่พลังงานซึ่งมีสองพหุหลักที่เหมือนกันค่าของสภาพเจาะจงทิศทางที่หาจากสมการที่ (2.91) หรือ (2.92) โดยที่ตัวพหุคลื่นเล็กที่มีระดับสูง การหาสภาพเจาะจงทิศทางโดยใช้สมการที่ (2.91) หรือ (2.92) ซึ่งตัดพหุคลื่นเล็กทิ้ง จะมีค่าสูงเกินความจริง

โดยปกติเรามักจะแสดงไคเรกทีฟเนสและสภาพเจาะจงทิศทางเป็นเดซิเบล (dB)

$$D_g(dB) = 10 \log_{10} [D_g] \quad (2.95)$$

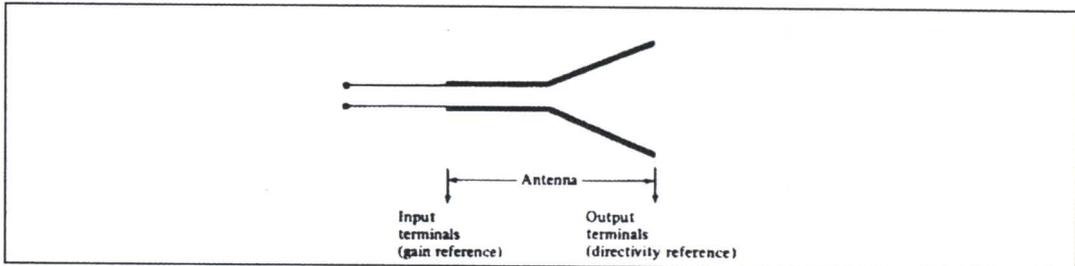
$$D_0(dB) = 10 \log_{10} [D_0] \quad (2.96)$$

2.4.11 อัตราขยายของสายอากาศ

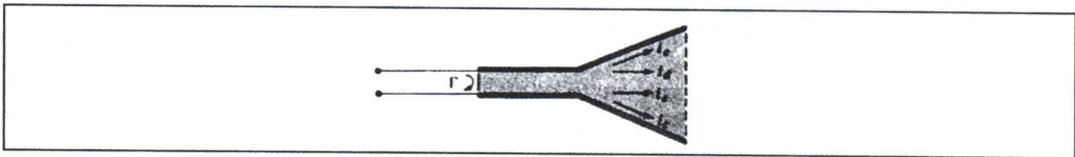
สิ่งที่แสดงคุณสมบัติของสายอากาศอีกอย่างหนึ่งก็คือ อัตราขยาย (Gain) ของสายอากาศ อัตราขยายเป็นความสัมพันธ์ที่ได้มาจากสภาพเจาะจงทิศทาง โดยรวมประสิทธิภาพของสายอากาศเข้ามาด้วย ในขณะที่สภาพเจาะจงทิศทาง อธิบายคุณสมบัติ ในการชี้ทิศทางของสายอากาศเท่านั้น

อัตราขยายกำลังงาน (Power Gain) ของสายอากาศ ในทิศทางที่กำหนดให้ นั้น มีค่าเท่ากับ 4π คูณกับอัตราส่วนของความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่น ในทิศทางนั้น ต่อกำลังงานสุทธิที่สายอากาศ ที่รับจากหัวต่อของเครื่องส่ง เมื่อไม่ได้กำหนดทิศทางไว้โดยเฉพาะ โดยทั่วไปแล้ว เราจะคิดอัตราขยายกำลังงานในทิศทางที่มีการแผ่พลังงานของคลื่นแรงที่สุด ดังนั้น อัตราขยายจะเท่ากับ 4π คูณความเข้มข้นของการแผ่พลังงานของคลื่น หากด้วยกำลังงานทั้งหมด ที่ป้อนให้สายอากาศ เขียนได้เป็น

$$G_g = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (2.97)$$



ก) ขั้วอ้างอิงของสายอากาศ



ข) การสูญเสียจากการสะท้อนตัวนำ และไดอิเล็กตริก
รูปที่ 2.10 ขั้วอ้างอิง และการสูญเสียของสายอากาศ

โดยทั่วไปแล้วเรามักจะพูดถึงอัตราขยายสัมพัทธ์ ซึ่งเป็นอัตราส่วนของอัตราขยายกำลังงานในทิศทางที่กำหนดให้ต่อกำลังงานของสายอากาศที่ใช้เปรียบเทียบในทิศทางนั้น เมื่อกำลังงานที่ป้อนเข้าสายอากาศทั้งสองนั้น ต้องเท่ากัน สายอากาศที่ใช้เปรียบเทียบ อาจเป็น สายอากาศไดโพล สายอากาศปากแตร หรือสายอากาศอื่นๆ ซึ่งคำนวณอัตราขยายได้ง่าย หรือรู้ค่าอยู่แล้ว แต่อย่างไรก็ตามโดยส่วนใหญ่สายอากาศที่ใช้เปรียบเทียบจะเป็นแหล่งกำเนิดแบบจุดชนิดไอโซทรอปิกที่ไม่มีการสูญเสีย ดังนั้น

$$G_g = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in} \text{ (Lossless Isotropic Source)}} \quad (2.98)$$

จากรูปที่ 2.10ก เราสามารถเขียนได้ว่า กำลังงานที่แพร่กระจายทั้งหมด (P_{rad}) สัมพันธ์กับกำลังงานที่ป้อนให้สายอากาศ (P_{in}) ด้วย

$$P_{rad} = e_{cd} P_{in} \quad (2.99)$$

เมื่อ e_{cd} เป็นประสิทธิภาพรวมของสายอากาศ (ไม่มีหน่วย) ใช้สมการ (2.99) จะทำให้สมการ (2.98) มีความสัมพันธ์ง่ายเข้าเป็น

$$G_g(\theta, \phi) = e_{cd} \left[\frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \right] \quad (2.100)$$

(2.34)

ซึ่งสัมพันธ์กับไดเรกทิฟเทนในสมการ (2.20)

$$G_g(\theta, \phi) = e_{cd} D_g(\theta, \phi) \quad (2.101)$$

ในทำนองเดียวกัน ค่าสูงสุดของอัตราขยายจะสัมพันธ์กับสภาพเจาะจงทิศทาง โดย

$$\begin{aligned} G_0 &= G_g(\theta, \phi) \Big|_{\max} \\ &= e_{cd} D_g(\theta, \phi) \Big|_{\max} \\ &= e_{cd} D_0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

ดังนั้นค่าประมาณของอัตราขยายจะมีค่าเป็น

$$G_0 \approx \frac{30000}{\Theta_{1d} \Theta_{2d}} \quad (2.103)$$

ในทางปฏิบัติเมื่อกล่าวถึงอัตราขยายมักจะหมายถึง อัตราขยายกำลังงานที่มีค่าสูงสุด ดังแสดงในสมการ (2.102)

$$G_0(dB) = 10 \log_{10} [e_{cd} D_0] \quad (2.104)$$

2.4.12 ประสิทธิภาพของสายอากาศ

ประสิทธิภาพของสายอากาศ e , จะใช้เมื่อเรากำลังพิจารณาถึงการสูญเสียต่างๆ ที่ขั้วและภายในโครงสร้างของสายอากาศด้วย การสูญเสียต่างๆ เมื่ออ้างอิงตามรูป 2.10x อาจเนื่องมาจาก

1. การสะท้อนกลับเนื่องจากการไม่แมตช์ (Mismatch) กันระหว่างสายส่ง (Transmission Line) กับสายอากาศ

2. การสูญเสียทั้งในตัวนำและฉนวน (I^2R)
โดยทั่วไปแล้วประสิทธิภาพทั้งหมด คำนวณได้จาก

$$e_t = e_r e_c e_d \quad (2.105)$$

เมื่อ e_t = ประสิทธิภาพทั้งหมด (ไม่มีหน่วย)

e_r = ประสิทธิภาพเกี่ยวกับการสะท้อนกลับ $= (1 - |\Gamma|^2)$ (ไม่มีหน่วย)

e_c = ประสิทธิภาพของตัวนำ (ไม่มีหน่วย)

e_d = ประสิทธิภาพของฉนวน (ไม่มีหน่วย)

Γ = สัมประสิทธิ์การสะท้อนของแรงดันที่ขั้วสายอากาศ $\Gamma = (Z_{in} - Z_0) / (Z_{in} + Z_0)$

เมื่อ Z_{in} = อิมพีแดนซ์ด้านเข้า ของสายอากาศ, Z_0 = อิมพีแดนซ์คุณลักษณะ (Characteristic Impedance) ของสายส่ง

ปกติ e_c และ e_d คำนวณหาได้ลำบาก ส่วนมากมักหาได้จากการทดลองแต่ถึงกระนั้นก็แยก e_c จาก e_d ไม่ออก ดังนั้นเพื่อความสะดวกมักเขียน (2.39) ใหม่เป็น

$$e_t = e_r e_{cd} = e_{cd} (1 - |\Gamma|^2) \quad (2.106)$$

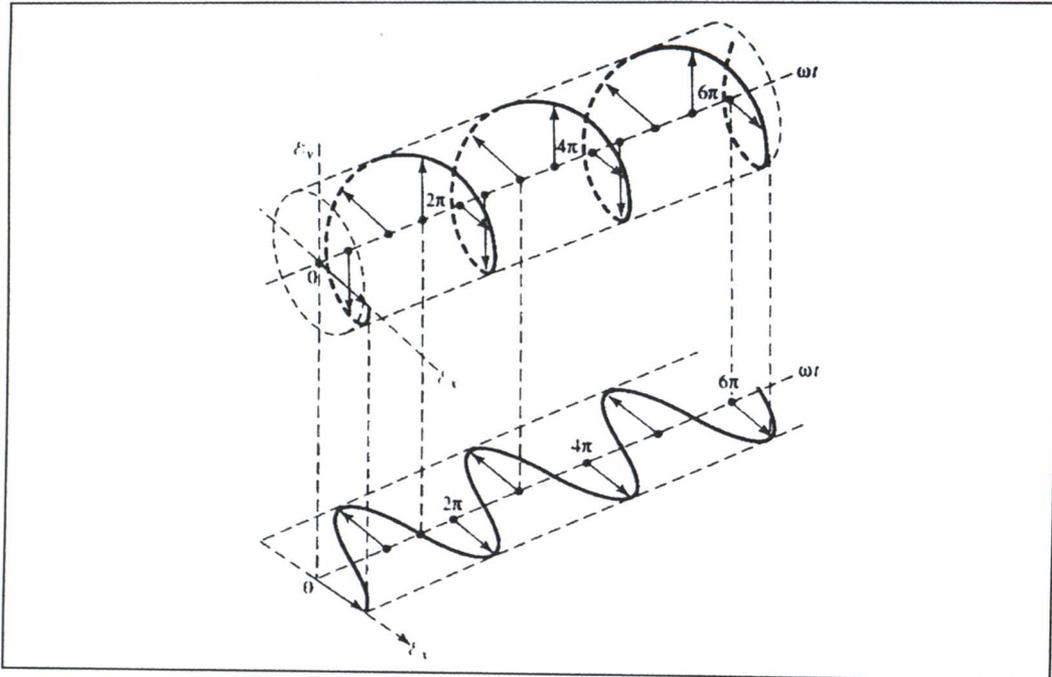
เมื่อ $e_{cd} = e_c e_d$ = ประสิทธิภาพในการแผ่พลังงานของคลื่นของสายอากาศ

2.4.13 ประสิทธิภาพของลำคลื่น

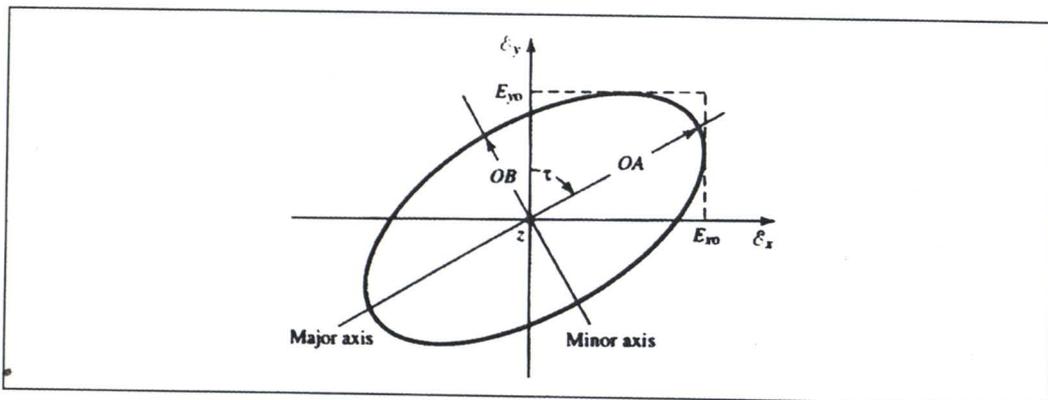
พารามิเตอร์อีกตัวหนึ่ง ที่ใช้ในการตัดสินว่า สายอากาศมีคุณภาพของการส่งหรือรับคลื่น ดีเพียงใดนั้น ได้แก่ ประสิทธิภาพของลำคลื่น (Beam Efficiency: BE) สำหรับสายอากาศซึ่งมีพู่หลักอยู่ในทิศทางแกน z ($\theta = 0$) ประสิทธิภาพของลำคลื่นจะกำหนดได้ดังนี้ คือ กำลังที่ส่ง (หรือรับ) ภายในกรวยซึ่งทำมุม θ_1 หารด้วย กำลังงานที่ส่ง (หรือรับ) ทั้งหมดด้วยสายอากาศนั้น เมื่อ θ_1 เป็นมุมที่มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของมุมกรวย ที่เราต้องการจะหาเปอร์เซ็นต์ของกำลังงานทั้งหมดในนั้น ดังนั้นจะเขียนประสิทธิภาพของลำคลื่น ได้ดังนี้

$$BE = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} U(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin^2 \theta d\theta d\phi} \quad (2.107)$$

เมื่อให้ θ_1 เป็นมุมที่เกิดมีศูนย์ (Null) คือ จุดตำแหน่งที่กำลังมีค่าเป็นศูนย์เป็นคู่แรก ดังนั้นประสิทธิภาพของลำคลื่น จะเป็นปริมาณที่แสดงถึงอัตราส่วนของจำนวนกำลังงานในพหุคูณต่อกำลังงานที่มีทั้งหมด



ก) การหมุนของคลื่น



ข) วงรีโพลาริเซชัน

รูป 2.11 ลักษณะของโพลาริเซชัน

2.4.14 โพลาริเซชัน

ก่อนจะกล่าวถึงความหมายของโพลาริเซชัน (Polarization) ของสายอากาศจะกล่าวถึงความหมายของโพลาริเซชันของคลื่นเสียก่อน โพลาริเซชันของคลื่นนั้น เป็นรูปแสดงคุณสมบัติของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แผ่กระจายออกไป โดยอธิบายทิศทางและขนาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่เวลาต่างๆ ณ ตำแหน่งที่ทำการสังเกตซึ่งคงที่ และการสังเกตนี้จะทำโดยมองตามหลังคลื่นที่เดินทางไป รูปที่ 2.11 ประกอบ

สำหรับโพลาริเซชันของสายอากาศในทิศทางหนึ่งทิศทางใด จะเป็นโพลาริเซชันของคลื่นที่แผ่กระจายออกจากสายอากาศนั้น (เมื่อเป็นสายอากาศส่ง) หรือเป็นโพลาริเซชันของคลื่นที่มาตกกระทบสายอากาศนั้น จากทิศทางที่กำหนดให้ ซึ่งเมื่อสายอากาศรับคลื่นแล้ว จะมีกำลังงานที่ขั้วของสายอากาศมากที่สุด ถ้าไม่ได้กำหนดทิศทางมาให้จะหมายถึงทิศทางที่สายอากาศมีอัตราขยายมากที่สุด ดังนั้นโพลาริเซชันของสายอากาศในทิศทางที่ต่างกัน จะแตกต่างกัน

การแบ่งชนิดของโพลาริเซชันอาจแบ่งเป็น โพลาริเซชันแบบเส้นตรง (Linearly Polarization) โพลาริเซชันแบบวงกลม (Circularly Polarization) และโพลาริเซชันแบบวงรี (Elliptically Polarization) ขึ้นอยู่กับลักษณะการหมุนของยอดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้า ถ้าเวกเตอร์ที่แสดงสนามไฟฟ้าที่แปรผันกับเวลา ณ จุดใดๆ ในที่ว่างซึ่งเป็นเส้นตรงเสมอ จะเรียกว่าเป็นโพลาริเซชันแบบเส้นตรง แต่ถ้าสนามไฟฟ้ามีการหมุนรูปวงรี จะเรียกสนามแบบนั้นว่า เป็นโพลาริเซชันแบบวงรี ทั้งโพลาริเซชันแบบเส้นตรง และ โพลาริเซชันแบบวงกลม ต่างก็เป็นกรณีพิเศษของโพลาริเซชันแบบวงรี

ถ้าสนามไฟฟ้าหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา (คือ เมื่อมองตามหลังคลื่นแล้ว จะเห็นมีการหมุนตามเข็มนาฬิกา) จะเรียกว่าเป็นโพลาริเซชันเวียนขวา ในขณะที่หากสนามไฟฟ้าหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะเป็นโพลาริเซชันเวียนซ้าย

โพลาริเซชันแบบเส้นตรง, โพลาริเซชันแบบวงกลม, โพลาริเซชันแบบวงรี จะเขียนสนามชั่วขณะเวลานั้นของคลื่นระนาบ ที่เดินทางในทิศทาง $-z$ ได้ว่า

$$\mathcal{E}(z;t) = \bar{a}_x \mathcal{E}_x(z;t) + \bar{a}_y \mathcal{E}_y(z;t) \quad (2.108)$$

จากสมการ (2.108) ส่วนประกอบของสนามชั่วเวลาขณะนั้น สัมพันธ์กับค่าเชิงซ้อนของสนามนั้น ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z;t) &= \text{Re}[E_{x0}^- e^{j(\omega t + kz)}] = \text{Re}[E_{x0} e^{j(\omega t + kz + \phi_x)}] \\ &= E_{x0} \cos(\omega t + kz + \phi_x) \end{aligned} \quad (2.109)$$



$$\begin{aligned}\mathcal{E}_y(z;t) &= \text{Re}[E_y^- e^{j(\omega t + kz)}] = \text{Re}[E_{y0} e^{j(\omega t + kz + \phi_y)}] \\ &= E_{y0} \cos(\omega t + kz + \phi_y)\end{aligned}\quad (2.110)$$

เมื่อ E_{x0} และ E_{y0} เป็นขนาดของสนามค่าสูงสุด ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

ก. โพลาริเซชันแบบเส้นตรง

คลื่นซึ่งเป็นโพลาริเซชันแบบเส้นตรง ความต่างเฟสระหว่างส่วนประกอบทั้งสองของสนามจะมีค่าดังนี้

$$\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.111)$$

ข. โพลาริเซชันแบบวงกลม

จะเกิดโพลาริเซชันแบบวงกลมได้ก็ต่อเมื่อขนาดของส่วนประกอบของสนามทั้งสองมีค่าเท่ากัน และความต่างเฟสระหว่างส่วนประกอบทั้งสอง เป็นจำนวนเท่าที่เป็นเลขคี่ของ $\pi/2$ นั่นคือ

$$|\mathcal{E}_x| = |\mathcal{E}_y| \Rightarrow E_{x0} = E_{y0} \quad (2.112)$$

$$\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \begin{cases} +\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi, & n = 0, 1, 2, \dots \text{ for CW} \\ -\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi, & n = 0, 1, 2, \dots \text{ for CCW} \end{cases} \quad (2.113)$$

ถ้าคลื่นเดินทางในทิศทางตรงกันข้าม (คือทิศทาง +z) เฟสในสมการที่ (2.112) และ (2.113) ที่ทำให้เกิด CW (Clockwise) และ CCW (Counter Clockwise) จะต้องสลับกัน

ค. โพลาริเซชันแบบวงรี

โพลาริเซชันแบบวงรีจะเกิดขึ้นเมื่อความต่างเฟสเป็นจำนวนคี่ของ $\pi/2$ แต่ขนาดของสนามไฟฟ้าไม่เท่ากัน หรือความต่างเฟสไม่เป็นจำนวนคี่ของ $\pi/2$ นั่นคือ

$$|\mathcal{E}_x| \neq |\mathcal{E}_y| \Rightarrow E_{x0} \neq E_{y0} \quad (2.114)$$

$$\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \begin{cases} +\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi, & n = 0, 1, 2, \dots \text{ for CW} \\ -\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\pi, & n = 0, 1, 2, \dots \text{ for CCW} \end{cases} \quad (2.115)$$

$$\Delta\phi = \phi_y - \phi_x \neq \pm \frac{n}{2} \pi = \begin{cases} > 0 \text{ for CW} \\ < 0 \text{ for CCW} \end{cases} \quad (2.116)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

ในกรณีของโพลาริเซชันแบบวงรี รูปแสดงการกวาดของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ จะเป็นวงรีเอียง ดังแสดงในรูป 2.11 ข อัตราส่วนของแกนหลักต่อแกนย่อยจะเรียกว่าเป็นอัตราส่วนของแกน (Axial Ratio: AR) ซึ่งมีค่าเท่ากับแกนหลักหารด้วยแกนย่อย ดังนี้

$$AR = \frac{OA}{OB}, 1 \leq AR \leq \infty \quad (2.117)$$

โดยที่

$$OA = \left[\frac{1}{2} \left\{ E_{x0}^2 + E_{y0}^2 + [E_{x0}^4 + E_{y0}^4 + 2E_{x0}^2 E_{y0}^2 \cos(2\Delta\phi)]^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (2.118)$$

$$OB = \left[\frac{1}{2} \left\{ E_{x0}^2 + E_{y0}^2 - [E_{x0}^4 + E_{y0}^4 + 2E_{x0}^2 E_{y0}^2 \cos(2\Delta\phi)]^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (2.119)$$

การเอียงของวงรีเทียบแกน y สามารถแสดงด้วยมุมเอียง ดังนี้คือ

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[\frac{2E_{x0}E_{y0}}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2} \cos(\Delta\phi) \right] \quad (2.120)$$

เมื่อวงรีวางตามแนวแกนหลัก $[\tau = n\pi/2, n = 0, 1, 2, \dots]$ แกนหลัก (ย่อย) เท่ากับ $E_{x0}(E_{y0})$ หรือ $E_{y0}(E_{x0})$ และอัตราส่วนของแกนมีค่าเท่ากับ E_{x0}/E_{y0} หรือ E_{y0}/E_{x0}

แพกเตอร์การสูญเสียจากโพลาริเซชัน

โดยทั่วไปแล้ว โพลาริเซชันของสายอากาศอาจไม่เหมือนกับโพลาริเซชันของคลื่นที่เดินทางมายังสายอากาศ ซึ่งเรียกว่าเกิดโพลาริเซชันแบบไม่แมตช์ (Polarization Mismatch) ทำให้สายอากาศไม่สามารถดึงเอากำลังงานออกจากคลื่นได้สูงสุด เนื่องจากเกิดการสูญเสียจากโพลาริเซชัน (Polarization Loss) สมมุติว่าสนามไฟฟ้าของคลื่นที่เดินทางเข้ามายังสายอากาศเขียนได้ดังนี้

$$\vec{E}_i = \hat{\rho}_w E_i \quad (2.121)$$

เมื่อ $\hat{\rho}_w$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของคลื่นและโพลาไรเซชันของสนามไฟฟ้าของสายอากาศรับ มีค่าดังนี้

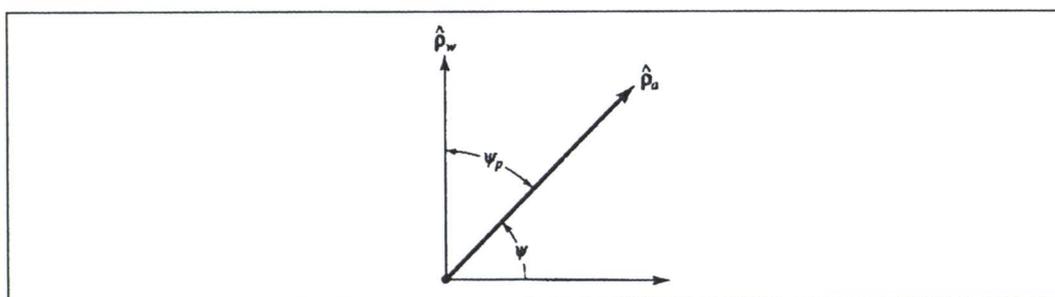
$$\bar{E}_a = \hat{\rho}_a E_a \quad (2.122)$$

เมื่อ $\hat{\rho}_a$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของสายอากาศ

จะกำหนดให้แฟกเตอร์การสูญเสียจากโพลาไรเซชัน (Polarization Loss Factor: PLF) มีค่า ดังนี้

$$PLF = |\hat{\rho}_w \cdot \hat{\rho}_a|^2 = |\cos \Psi_p|^2 \quad (2.123)$$

เมื่อ Ψ_p เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้งสอง ดังแสดงในรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสำหรับโพลาไรเซชันของคลื่นและของสายอากาศ

ถ้าเกิดโพลาไรเซชันแมทซ์ ค่า PLF จะเป็นหนึ่ง และสายอากาศจะรับกำลังงานมากที่สุด

2.5 สรุป

สำหรับบทนี้จะเป็นการอธิบายทฤษฎีพื้นฐานต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยแบบจำลองช่องสัญญาณ ซึ่งประกอบด้วย ทฤษฎีกระบวนการเชิงสุ่ม ทฤษฎีข่าวสาร และทฤษฎีพื้นฐานสายอากาศ โดยจะเป็นพื้นฐาน ในการอธิบายถึงที่มาของการพิจารณาตัวแปรสุ่ม และคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ใช้ในการอธิบายลักษณะของตัวแปรสุ่ม รวมทั้งกระบวนการเชิงสุ่มที่ได้ นำไปใช้ในทฤษฎีข่าวสาร ในการอธิบายคุณสมบัติของช่องสัญญาณ การหาค่าคุณสมบัติของช่องสัญญาณแบบไม่มีความจำ รวมทั้งในการนำไปใช้ ในการอธิบายผลที่ได้จากการหาค่าความจุช่องสัญญาณแบบไม่มี

ความจำ และช่องสัญญาณแบบเกาส์เซียน จากนั้นได้อธิบายถึงที่มาของทฤษฎีความจุช่องสัญญาณของแชนนอนและฮาร์ตลีย์ ซึ่งจะได้นำไปพัฒนาต่อไปเพื่อหาค่าความจุช่องสัญญาณระบบสื่อสารข้อมูลแบบอื่น ๆ ต่อไป และส่วนของทฤษฎีสายอากาศ ได้ทำการอธิบายถึงการพิจารณาค่าต่างๆที่เกี่ยวข้องกับสายอากาศในเชิงกายภาพที่จำเป็นต่อทราบ อาทิ อัตราขยายของสายอากาศ ความหนาแน่นของการแผ่กำลังงานของคลื่น สภาพเจาะจงทิศทาง เป็นต้น เพื่อให้เข้าใจถึงที่มาของค่าต่างๆ ที่นำมาใช้ในการพิจารณาแบบรูปการแผ่พลังงานของสายอากาศ เพื่อจะถูกนำมาพัฒนาประยุกต์ใช้ในการสร้างแบบจำลองต่อไป