

## บทที่ 2

### ทฤษฎีในงานวิจัย

**ระบบลอเรน** ค้นพบโดยบังเอิญโดย ศาสตราจารย์ Edward N. Lorenz [1] นักอุตุนิยมวิทยา แห่งสถาบันเทคโนโลยีแห่งรัฐแมสซาชูเซต ในปี พ.ศ. 2506 โดยเวลานั้น Lorenz ได้พยายามสร้างแบบจำลองทางอุตุนิยมวิทยาด้วยสมการอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นขนาดลำดับ 3 ตัว  $x, y, z$  ของความสัมพันธ์ระหว่าง อุณหภูมิ ความกดอากาศ ความเร็วลมโดยในสมการมีตัวแปรแบบไม่เป็นเชิงเส้น (quadratic nonlinear) อยู่ 2 เทอม และให้ประมวลผลบนคอมพิวเตอร์ โดยเริ่มประมวลผลด้วยทศนิยม 6 หลัก แต่เนื่องจากขณะนั้นคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพต่ำ Lorenz จึงได้ลดหลักทศนิยมของค่าเริ่มต้นของการคำนวณด้วยเลขทศนิยมจาก 6 หลักเหลือ 3 หลักโดยคิดว่าเลขทศนิยมที่ตัดทิ้งจะไม่มีนัยสำคัญแต่ผลของการคำนวณ แต่เมื่อเวลาผ่านไปช่วงเวลาหนึ่ง พบว่าผลของการคำนวณด้วยค่าเริ่มต้นด้วยทศนิยม 3 หลัก ได้เปลี่ยนแปลงจากการคำนวณครั้งก่อนไปอย่างมากมายหรือเพียงกำหนดค่าเริ่มต้นต่างกันเล็กน้อยผลของสมการอนุพันธ์ ที่ Lorenz จำลองขึ้นนี้จะให้ผลแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง กล่าวได้ว่าระบบที่จำลองขึ้นนี้ไวต่อค่าเริ่มต้นและเมื่อทำการพล็อตความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร  $x$  ต่อ  $y$  และ  $x$  ต่อ  $z$  จะมีลักษณะรูปร่างที่แปลกประหลาดมีลักษณะเป็นแอตแทรกเตอร์ (attractor) โดย ลักษณะของ  $x$  ต่อ  $z$  มีลักษณะคล้ายปีกผีเสื้อ ภายหลังมีผู้เรียกว่า แอตแทรกเตอร์แบบ Lorenz และ Lorenz เรียกปรากฏการณ์ที่ค้นพบโดยบังเอิญนี้ว่าผลกระทบของผีเสื้อ (Butterfly effect) โดยความหมายในระบบอุตุนิยมวิทยาเป็นระบบที่อ่อนไหวมากเพียงผีเสื้อขยับปีกที่ Hong Kong ก็อาจเกิดปรากฏการณ์ Tornado หรือสภาวะสับสนอลหม่านที่ California ได้

สำหรับหัวใจระบบลอเรนที่สำคัญคือเคออสติกแอตแทรกเตอร์โดยหลังจากที่ Lorenz ได้ค้นพบแอตแทรกเตอร์แรกแล้ว ต่อมา Rossler [2] ได้ค้นพบแอตแทรกเตอร์ จากการจำลองปรากฏการณ์ทางเคมี โดยมีเทอมตัวแปรไม่เป็นเชิงเส้นเพียงเทอมเดียว และในขณะต่อมา Rossler [3] ได้นำเสนอเคออสติกแอตแทรกเตอร์ ขนาด 4 มิติ หรือ ไฮเปอร์เคออสติก โดยการเพิ่มลำดับของสมการจากลำดับ 3 เป็น ลำดับ 4

คุณลักษณะของเคออสติกแอตแทรกเตอร์ [4]

1. มีความไวต่อค่าเริ่มต้น
2. มีลักษณะคล้ายสัญญาณรบกวนในโดเมนของเวลา
3. สเปกตรัมกำลังของสัญญาณมีลักษณะย่านกว้าง

สำหรับการสร้างเคออสติกแอตแทรกเตอร์ในวงการวิศวกรรมไฟฟ้านั้น Chua [5] ได้นำเสนอการสร้างวงจรเพื่อกำเนิด สัญญาณเคออสโดยวงจรประกอบด้วย ความต้านทาน 1 ตัว ตัวเก็บประจุ 2 ตัว ความเหนี่ยวนำ 1 ตัวและอุปกรณ์สร้างความต้านทานลบไม่เป็นเชิงเส้น 1 ชุด โดยวงจรนี้สามารถกำเนิดสัญญาณเคออสได้ทั้งแบบ 1 สกอร์ และ 2 สกอร์ โดยปรับที่ตัวต้านทาน และเราเรียก

วงจรที่ Chua ประดิษฐ์ขึ้นว่า วงจรของ Chua (Chua's Circuit) พร้อมขณะเดียวกัน Matsumoto [6] ผู้ที่ทำการร่วมวิจัยกับ Chua ได้นำเสนอวงจรกำเนิดสัญญาณเคออสแบบ 4 มิติ หรือ ไฮเปอร์เคออสขึ้นจริง โดยสร้างขึ้นจากวงจรที่มีลักษณะคล้ายวงจรของ Chua โดยเพิ่มลำดับของสมการอนุพันธ์ โดยเพิ่มค่าตัวเหนี่ยวนำ

การประยุกต์ใช้งานของ เคออสติกแอทแทรกเตอร์ นั้น หลังจาก Pecora [7] ได้แสดงให้เห็นว่าระบบเคออสของ Lorenz และ Rossler สามารถซิงโครไนซ์ (Synchronization) เข้าด้วยกัน โดยมีภาคส่งเรียกว่า ตัวขับ (drive) และภาครับเรียกว่าตัวตอบสนอง (Response) แล้ว ต่อมา Cuomo [8] ได้นำเอาหลักการดังกล่าวไปใช้ในการประยุกต์การสื่อสารแบบปลอดภัยโดยนำสัญญาณเสียง ทำการบวกรหัส (masking) กับตัวขับซึ่งเป็นระบบ Lorenz และเมื่อสัญญาณนี้ส่งผ่านไปในช่วงสัญญาณผู้ดักฟังสัญญาณไม่สามารถฟังได้ ยกเว้นจะมีตัวถอดรหัสหรือภาครับที่สามารถตอบสนองกับสัญญาณเคออสเพื่อจะถอดรหัสออกมาได้ โดยต่อมา Yang [9] ซึ่งเป็นผู้ร่วมวิจัยกับ Chua ได้เสนอการเข้ารหัสลับของสัญญาณ โดยนอกจากจะใช้การซิงโครไนซ์ ของวงจรของ Chua แล้วยังเพิ่มตัวเข้ารหัสลับที่วงจรของ Chua เพื่อเพิ่มความแข็งแกร่งของระบบ อีกหนึ่งชุด และในขณะเดียวกัน Itoh [10] ได้นำประโยชน์จากคุณสมบัติที่สัญญาณเคออสมีย่านความถี่กว้างไปประยุกต์ใช้กับการสื่อสารแบบกระจายสเปกตรัม และด้วยคุณสมบัติที่คล้ายสัญญาณรบกวน Yalcin [11] ได้ทำการสร้าง การกำเนิดบิตสุ่มจริงจากแอทแทรกเตอร์โดยการนำการเคลื่อนที่ของวงโคจรของแอทแทรกเตอร์ผ่านจุดสมดุลมากำเนิดบิตสุ่ม

หลังจากการค้นพบวงจรของ Chua ซึ่งมีผู้นำไปประยุกต์ใช้งานดังกล่าวมาแล้ว ได้มีผู้สร้างแอทแทรกเตอร์แบบใหม่ๆ โดยอาศัยพื้นฐานจากสมการของ Lorenz โดย Chen [12] ได้ค้นพบแอทแทรกเตอร์แบบใหม่จากการควบคุมระบบ Lorenz ให้ไม่มีเสถียรภาพ หรือการต่อต้านการควบคุม (anti-control) โดย Chen เรียกว่าวิธีการนี้ว่า Chaotification ซึ่งแอทแทรกเตอร์ของ Chen มีทอมตัวแปรแบบไม่เป็นเชิงเส้น 2 ทอมเช่นเดียวกับ Lorenz แต่สัมประสิทธิ์ ของสมการต่างจาก Lorenz และในเวลาต่อมา Lu [13] ซึ่งเป็นผู้ร่วมวิจัยกับ Chen ได้เสนอแอทแทรกเตอร์ ที่ปรับพารามิเตอร์ได้ เพื่อแสดงลักษณะเหมือนกับ Lorenz และ Chen โดยขณะเวลาเดียวกันได้มีผู้เสนอ [14] การสร้างวงจรสร้างแอทแทรกเตอร์ ปีกผีเสื้อแบบ Lorenz โดยใช้เทคนิคการคูณแบบสวิตช์แทนการคูณแบบเชิงเส้น สำหรับการสร้างแอทแทรกเตอร์แบบง่ายนั้น Spratt [15] ได้เสนอรูปแบบสมการอนุพันธ์ ลำดับ 3 รวมกับตัวแปรแบบไม่เป็นเชิงเส้นแบบง่ายๆ ที่สามารถสร้างได้โดยวงจรอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งสมการของ Spratt ให้กำเนิดรูปแบบแอทแทรกเตอร์ที่มีรูปแบบไม่ซับซ้อนมาก

สำหรับการสร้าง แอทแทรกเตอร์ที่มีความซับซ้อนเพื่อประยุกต์ใช้ในการเข้ารหัสลับหรือสื่อสารแบบปลอดภัยนั้น Suyken [16] ได้นำเสนอการสร้าง แอทแทรกเตอร์ แบบหลายสเกล จากวงจรของ Chua โดยเพิ่มท่อนของความต้านทานลบ เพื่อเพิ่มจุดสมดุลในระบบ และ Tang [17] ได้

เสนอการสร้างวงจรหลายสก็อร์จากวงจรของ Chua เช่นเดียวกัน โดยการสร้างวงจรต้านทานลบ เป็นค่าฟังก์ชัน  $\sin(x)$  สำหรับการสร้างวงจรเพื่อกำเนิดแอตแทรกเตอร์แบบ 4 มิติ นั้น Li [18] ได้นำเสนอการสร้างไฮเปอร์เคออสติกแอตแทรกเตอร์โดยเพิ่มขนาดลำดับและป้อนกลับสมการของ Lorenz โดย Chen [19] และ Lu [20] ได้ใช้เทคนิคแบบเดียวกันเพื่อสร้างไฮเปอร์เคออสติกแอตแทรกเตอร์จากแอตแทรกเตอร์ของ Lu และแอตแทรกเตอร์ของ Chua แบบหลายสก็อร์ตามลำดับ

เคออสแอตแทรกเตอร์ (Chaotic attractor) หรือ แอตแทรกเตอร์แบบประหลาด (strange attractor) เป็นเส้นทางโคจร (trajectory) ที่มีขอบเขตอยู่ใน space ขนาด 3 มิติ โดยมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ [4]

1. ถ้าให้  $A$  เป็นขนาดขอบเขตใน 3 มิติแล้ว ทุกๆ เส้นทางโคจรใน  $A$  จะอยู่ใน  $A$  ตลอดไป และถ้าค่าเริ่มต้นนอกขอบเขตของ  $A$  แล้วในเวลาต่อมาเส้นทางโคจรจะต้องอยู่ใน  $A$  เราเรียกคุณสมบัติแบบนี้ว่าคุณสมบัติดึงดูด (attractor) หรือเรียกว่าแอตแทรกเตอร์ถ้า  $A \subset R^n$  และ  $U$  เป็นค่าใกล้เคียง นอกบริเวณ  $A$  แล้ว  $x$  จะเป็นเส้นทางโคจรของแอตแทรกเตอร์

$$\begin{aligned} \forall x \in U : \varphi(x, t) \in A \quad \text{for } t \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(x, t) = A \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. เคออสติกแอตแทรกเตอร์ มีความไวขึ้นอยู่กับสภาวะเริ่มต้น (Sensitive dependence on the initial conditions) ถ้าให้  $x$  เป็นเส้นทางโคจรของแอตแทรกเตอร์และ  $s$  เป็นเซตที่แสดงว่าไวต่อค่าเริ่มต้นแล้ว

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \quad \forall x(0) \in s, \quad \varepsilon > 0, \quad \exists y \in s : \\ |x(0) - y(0)| < \varepsilon, \quad |x(t) - y(t)| > \delta \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. เคออสติกแอตแทรกเตอร์ไม่สามารถแยกเป็นเซตย่อยได้ (Indecomposability) แม้แต่ให้ attractor ห่างกันเล็กน้อยดังนั้น attractor มีรายคาบยาวมากๆ

สำหรับคุณสมบัติที่สำคัญที่แสดงว่าแอตแทรกเตอร์เป็นเคออส คือคุณสมบัติที่ไวต่อค่าเริ่มต้น ซึ่งเมื่อเปลี่ยนแปลงค่าเริ่มต้นให้ต่างกันเพียงเล็กน้อย เส้นทางโคจรก็จะให้ลักษณะที่ต่างกัน โดยสิ้นเชิงนั้น เราสามารถวัดค่าความไวนี้ได้โดย Lyapunov exponents ซึ่งแสดงเส้นทางโคจรของ  $x$  เมื่อ เวลา  $t$  ไปได้คือ

$$|x(t)| = |x(0)|e^{\lambda t} \quad (2.3)$$

โดย  $\lambda$  เป็นค่า Lyapunov เนื่องจากเคออสติกแอทแทรกเตอร์เกิดขึ้นในมิติขนาด 3 มิติ ดังนั้นเงื่อนงำที่แสดงความไวต่อค่าเริ่มต้น ของสมการที่ (2.2) ค่า Lyapunov ของทิศทางของการเคลื่อนที่ใน 3 มิติ  $(x,y,z)$  จะต้องมี ค่าเป็น บวก 1 ค่าเพื่อแสดงทิศทางแยกจากกัน(stretch) ของเส้นโคจรของแอทแทรกเตอร์ และเพื่อให้แอทแทรกเตอร์อยู่ในขอบเขตจะต้องมีค่า Lyapunov เป็นลบหนึ่งค่าเพื่อแสดงการพับเข้า(fold) และมีค่า Lyapunov เป็น 0 อยู่หนึ่งค่าเพื่อแสดงทิศทางของการไหลของแอทแทรกเตอร์ หรือกล่าวได้ว่า ค่า ถ้าแอทแทรกเตอร์เกิดขึ้นใน 3 มิติและเป็นเคออสแล้ว ถ้า  $\lambda_1$  เป็น Lyapunov ที่มากที่สุด และ  $\lambda_3$  เป็นค่า Lyapunov ที่น้อยที่สุดแล้วค่า Lyapunov ของระบบจะแสดงค่า  $\lambda_1 > \lambda_2 = 0 > \lambda_3$  ซึ่งมีค่า  $(+,0,-)$  โดยในระบบที่มีขอบเขตค่า  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$  และในระบบ 4 มิติ ค่า Lyapunov ของระบบจะแสดงค่า  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = 0 > \lambda_4$  หรือมีค่า Lyapunov ที่เป็นบวกสองค่า  $(+,+,0,-)$

### 5.1 แอทแทรกเตอร์แบบ Lorenz

เป็นเคออสแอทแทรกเตอร์แรกที่ถูกค้นพบโดย E.N. Lorenz [1] จากการสร้างแบบจำลองพยากรณ์อุตุนิยมวิทยาของการแปรผันของสภาวะอากาศ โดยแบบจำลองแสดงได้โดยสมการอนุพันธ์ลำดับ 3 คือ

$$x' = -ax + ay \quad (2.4.1)$$

$$y' = rx - y - yz \quad (2.4.2)$$

$$z' = -bz + xy \quad (2.4.3)$$

จากสมการเป็นการแสดงการไหลของอากาศจากการนำความร้อน โดยอากาศร้อนจะไหลขึ้นที่สูงและอากาศเย็นจะตกสู่ระดับล่างเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก โดยการเคลื่อนที่ในลักษณะวงแหวนตัวแปร  $x$  ขึ้นอยู่กับการนำความร้อน และตัวแปร  $y$  และ  $z$  จะเป็นการวัดการกระจายของความร้อนรอบๆ วงแหวนในงานวิจัย Lorenz ได้ให้  $a=10$ ,  $b = 8/3$  และค่า  $r$  กำหนดให้เป็นพารามิเตอร์ควบคุมโดยปรับให้มีขนาดต่างๆ

จากสมการ (4) หาจุดสมดุลของระบบโดย  $x'=y'=z'=0$  จะได้  $y = x, z = r - 1$  และ  $x^2 = y^2 = b(r - 1)$  ดังนั้นระบบจะมีจุดสมดุลอยู่ 3 จุดคือที่  $P^0 = (0,0,0)$  และ  $P^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$  โดยจุดสมดุลที่  $P^+$  และ  $P^-$  จะเกิดขึ้นเมื่อค่า  $r > 1$  จากสมการที่ (4) เพื่อหาคุณสมบัติของระบบ ทำการหาค่า Jacobian matrix ซึ่งแสดงได้

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

โดยค่า Jacobian matrix ของสมการที่ (2.4) มีค่า

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

สมการคุณสมบัตินี้ของระบบหาได้จาก  $|J - \lambda I|$  โดยที่จุดสมมูล  $P^0$  มีสมการคุณสมบัตินี้คือ

$$\lambda^3 + (a+b+1)\lambda^2 + (a-ar+ab+b)\lambda + ab(1-r) \quad (2.7)$$

และที่จุดสมมูล  $P^\pm$  มีสมการคุณสมบัตินี้คือ

$$\lambda^3 + (a+b+1)\lambda^2 + b(a+r)\lambda + 2ab(r-1) \quad (2.8)$$

ค่า eigen ซึ่งเป็นค่าแสดงพฤติกรรมของระบบหาได้จากให้  $|J - \lambda I| = 0$  ดังนั้นที่จุดสมมูล  $P^0$  ในกรณี  $r < 1$  ค่า eigen ทั้งหมด 3 ค่าจะเป็นค่าจริงและเป็นลบหรืออยู่ด้านซ้ายของระนาบ S (S Plane) และถ้าหาก  $r > 1$  แล้วระบบจะมีค่า eigen 1 ค่าเป็นค่าจริงบวกอยู่ด้านขวาของระนาบ S โดยถ้าหากให้ index  $n$  แสดงจำนวนค่ารากอยู่ด้านขวาของระนาบ S แล้ว เมื่อ  $r > 1$  ระบบจะมีค่า index = 1 และที่จุดนี้เส้นทางโคจรจะมีทั้งเคลื่อนที่เข้าและออก ( Saddle point index 1) สำหรับที่จุดสมมูล  $P^\pm$  จะเกิดขึ้นเมื่อ  $r > 1$  ดังนั้น ถ้าให้  $a_1 = (a+b+1)$ ,  $a_2 = (a+r)b$ ,  $a_3 = 2ab(r-1)$  แล้วจากเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ระบบจะมีเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไขเมื่อ  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  หรือ  $a_1 a_2 - a_3 > 0$  ซึ่งเขียนได้

$$(a+b+1)(a+r)b - 2ab(r-1) > 0 \quad (2.9)$$

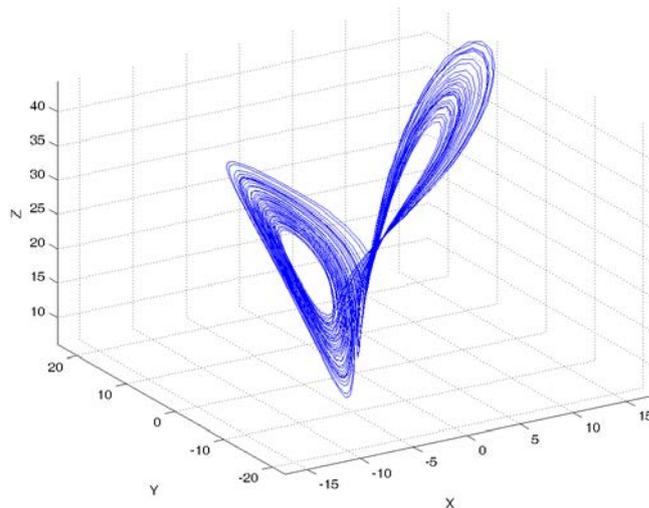
ดังนั้นที่จุดสมมูล  $P^\pm$  ระบบจะมีเสถียรภาพถ้า

$$r < \frac{a(a+b+3)}{a-b-1} \quad (2.10)$$

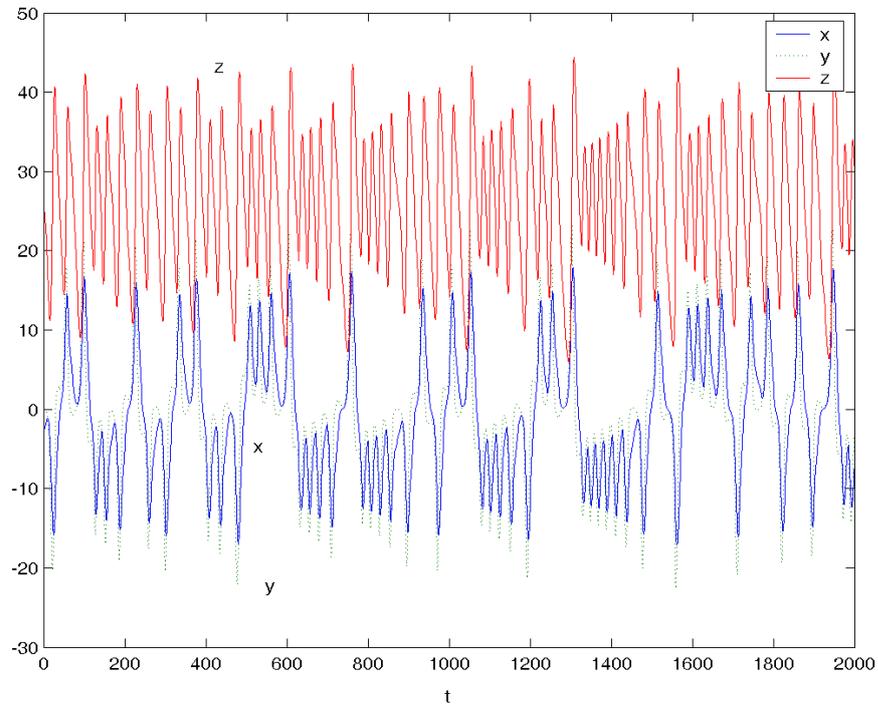
และในทางตรงกันข้ามถ้าให้  $a = 10$ ,  $b = 8/3$  และถ้าให้  $r > \frac{470}{19}$  ซึ่งทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพที่จุดสมดุล  $P^\pm$  จะมีค่ารากเป็นบวก 1 ค่าอยู่ทางด้านซ้ายของระนาบ S และมีรากเป็น  $\sigma \pm j\omega$  1 คู่อยู่ด้านขวามือของระนาบ S ซึ่งที่จุดสมดุล  $P^\pm$  นี้ เส้นโคจรจะแสดงการไหลเข้าและหมุนออกหรือเรียกว่า eigen มีลักษณะเป็น Spiral saddle index 2 ดังนั้นจากจุดสมดุลถ้าที่  $P^\circ$  แทนการไหลเข้าและไหลออกและที่จุด  $P^\pm$  แทนการไหลเข้าและหมุนออกแล้ว หลังจากค่าเริ่มต้นเส้นทางโคจรไม่สามารถออกจากแอทแทรกเตอร์ได้ ดังนั้นเมื่อแอทแทรกเตอร์ไหลออกจากจุดสมดุล  $P^\circ$  แล้วจะไหลเข้าสู่สมดุล  $P^+$  หรือ  $P^-$  และที่สองจุดนี้จะแทนจุดหมุนออกซึ่งอาจจะหมุนรอบจุดสมดุลนี้หรือไหลกลับเข้าสู่จุดสมดุล  $P^\circ$  ซึ่งพฤติกรรมนี้จะเกิดการไหลวนในลักษณะหลากหลายหรือแสดงสภาวะเคออส (Chaotic attractor) และเพื่อแสดงว่าระบบ Lorenz เป็นระบบที่มีขอบเขตค่า divergence ของการไหลของแอทแทรกเตอร์ต้องอยู่ในเงื่อนไข

$$\nabla F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} < 0 \quad (2.11)$$

และสำหรับค่า Lyapunov ของระบบหาได้จาก [28] ซึ่งระบบ Lorenz มีค่า  $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -14.57$



รูปที่ 2.1 แอทแทรกเตอร์แบบ Lorenz



รูปที่ 2.2 แอทแทรกเตอร์แบบ Lorenz ในแกนเวลา

## 5.2 แอทแทรกเตอร์ของ Chen

เป็นเคออสติกแอทแทรกเตอร์ค้นพบโดย Chen [12] โดยเกิดจากการควบคุมระบบ Lorenz ให้ไปในทิศทางที่ขาดเสถียรภาพยิ่งขึ้นหรือ ทำให้ระบบที่เป็นเคออสอยู่แล้วให้เป็นเคออสมากขึ้น ซึ่งโดยกระทำด้วยการให้ค่าควบคุมเข้าที่  $y'$  ของระบบ Lorenz หรือแสดงได้

$$x' = -ax + ay \quad (2.12.1)$$

$$y' = cx - y - xz + u \quad (2.12.2)$$

$$z' = -bz + xy \quad (2.12.3)$$

โดยค่าควบคุมมีค่า  $u = k_1x + k_2y + k_3z$

จากสมการ (2.12) เราสามารถหาจุดสมดุลของระบบโดยให้  $x' = y' = z' = 0$  แล้วจะได้จุดสมดุลจุดแรกคือที่  $P^0 = (0,0,0)$  และเมื่อให้  $x = y$  จะได้  $z = \frac{1}{b}x^2$  ดังนั้นระบบจะมีจุดสมดุลอีก 2 จุดที่  $P^\pm$  คือ  $x = y = \frac{1}{2}k_3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^3 + 4(b+k_1+k_2-11)}$ ,  $z = \frac{1}{b}x^2$  จากสมการ(2.12) หากำ Jacobian matrix ของระบบได้คือ

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c+k_1-z & k_2-1 & k_3-x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

โดยที่จุดสมดุล  $(0,0,0)$  ค่า  $k_3$  ไม่มีผลต่อการเกิดค่า eigen เลือกให้  $k_3 = 0$  ดังนั้นค่าสมการคุณสมบัติที่จุดสมดุล  $P^\pm$  มีค่า

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (2.14)$$

โดย  $a_1 = (a+b-k_2+1)$ ,  $a_2 = (ab-ac+a+b+az+x^2-k_1a-k_2a-k_2b)$  และ  $a_3 = (ab-abc+ax^2+axy+abz-k_1ab-k_2ab)$  จากเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ ระบบ Chen เลือกให้  $k_1 = a$   $k_2 = 1+c$  ดังนั้นได้ค่าตัวควบคุมใหม่คือ  $u = -ax + (1+c)y$  ทำให้สมการของระบบ Chen แสดงได้

$$x' = -ax + ay \quad (2.15.1)$$

$$y' = (c-a)x - ay - xz \quad (2.15.2)$$

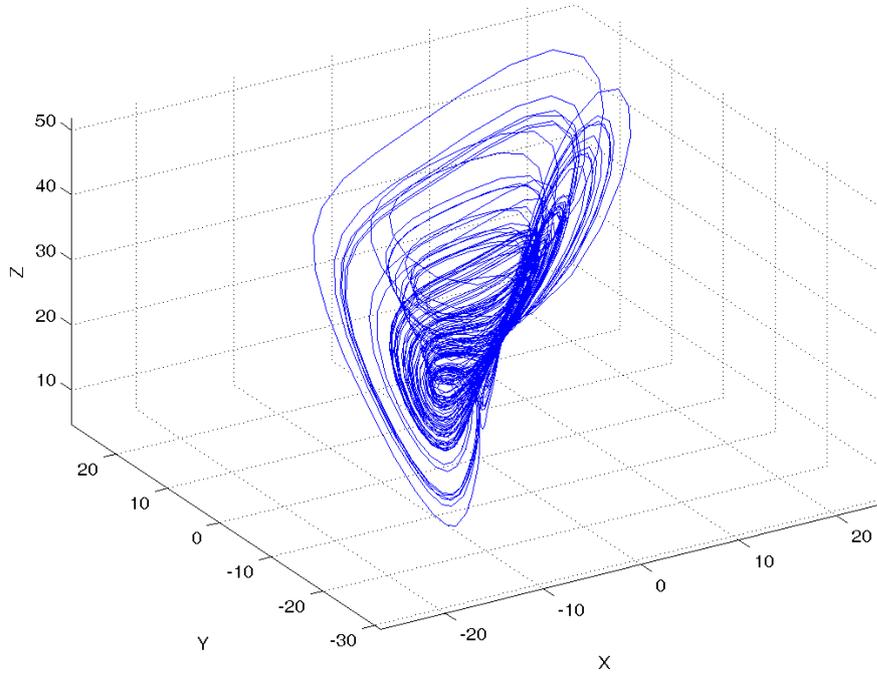
$$z' = -bz + xy \quad (2.15.3)$$

จากสมการเพื่อให้ระบบเป็นระบบ dissipative

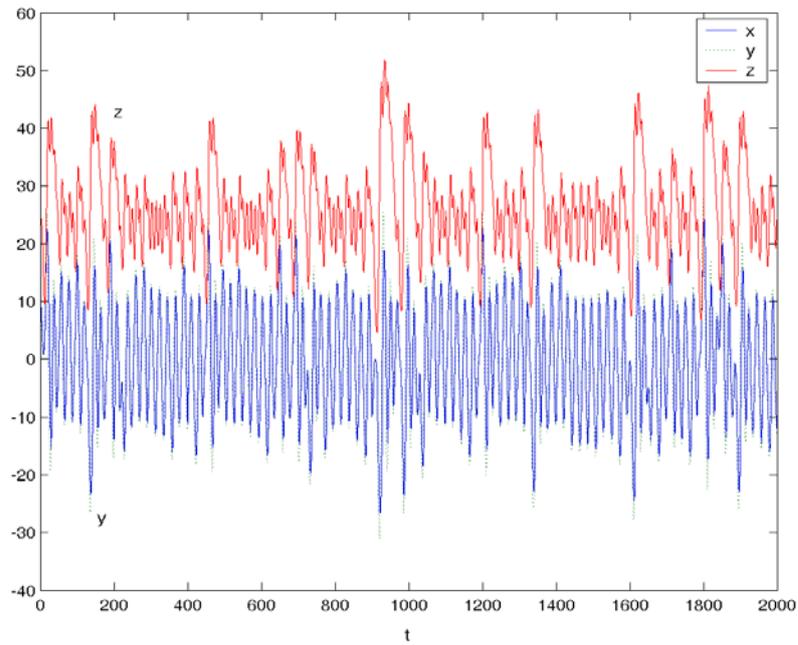
$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = -a + c - b < 0 \quad (2.16)$$

ระบบ Chen เลือกให้  $a = 35, b = 8/3, c = 28$  ซึ่งเป็นที่อยู่สมดุล  $P^0$  จะมีค่า eigen เป็น saddle index 1 และที่จุดสมดุล  $P^\pm$  มีค่า eigen เป็น spiral saddle index 2 และระบบมีค่า  $\lambda_1 = 2.18, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -11.85$

ระบบ Chen เลือกให้  $a = 35, b = 8/3, c = 28$  ซึ่งเป็นที่อยู่สมดุล  $P^o$  จะมีค่า eigen เป็น saddle index 1 และที่อยู่สมดุล  $P^\pm$  มีค่า eigen เป็น spiral saddle index 2 และระบบมีค่า  $\lambda_1 = 2.18, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -11.85$



รูปที่ 2.1 แอทแทรกเตอร์แบบ Chen



รูปที่ 2.2 แอทแทรกเตอร์แบบ Chen ในแกนเวลา