

บทที่ 3

วิธีผลต่างสืบเนื่องจำกัดในโดเมนเวลา

3.1 บทนำ

วิธีผลต่างสืบเนื่องจำกัดในโดเมนเวลา (Finite Difference Time Domain, FDTD) นำเสนอโดย เค เอส ยี (K. S. Yee) ในปี ค.ศ. 1966 [18-19] ซึ่งเป็นสมการผลต่างสืบเนื่องในระบบสมการเคิร์ลของแมกซ์เวลล์ที่แปรผันตามเวลา และถือได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่สะดวกในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับการยอมรับและมีการใช้กันอย่างแพร่หลายมาจนถึงปัจจุบัน เค เอส ยี ได้นำเสนอระเบียบวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Algorithm) แบบผลต่างสืบเนื่องสำหรับการแก้ปัญหสมการแมกซ์เวลล์ขึ้นมาใหม่ด้วยการวิเคราะห์ในโดเมนเวลา (Time Domain) ควบคู่ไปกับโดเมนสเปซ (Space Domain) ซึ่งกำหนดการกระทำของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าจำนวนหกสนามให้อยู่บนเซลล์สี่เหลี่ยมลูกบาศก์หนึ่งหน่วย และใช้สมการเคิร์ลของแมกซ์เวลล์เข้ากับสมการคลื่น แทนที่จะทำการแก้สมการเพื่อหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กอย่างใดอย่างหนึ่ง เปรียบเสมือนการแปลงสนามรวมของสมการอินทิกรัล โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของเวกเตอร์สนามทั้ง $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ด้วยการบังคับให้อยู่ในพื้นที่ผิวของโครงสร้างของตัวกลางนั้น ๆ จากการที่ใช้ข้อมูลของทั้ง $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ในการคำนวณด้วยกัน จะทำให้ได้ผลเฉลยที่มีความถูกต้องแน่นอนมากกว่าการใช้สนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว สำหรับในบริเวณที่มีสนามได้เพียงสนามเดียว เช่น สนามสัมผัส $\vec{H}$ ณ ตำแหน่งที่เป็นขอบหรือมุม หรือรอบ ๆ แกนเส้นลวด ก็สามารถที่จะทำการจำลองสนาม $\vec{E}$ ที่อยู่ใกล้ ๆ หรือขอบของเส้นลวดได้ถ้าในบริเวณนั้นมีทั้งสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าเกิดขึ้น และสำหรับการปรับปรุงลักษณะการกระทำสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโดเมนสเปซและโดเมนเวลานี้จะใช้แบบแผนลีฟรอก (Leap-Frog) ซึ่งจะใช้วิธีปรับปรุงสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กสลับกันในโดเมนเวลา

โดยในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของสมการแมกซ์เวลล์และยัลลอกริทม เสถียรภาพเชิงตัวเลข การวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศด้วยวิธี FDTD เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืน การแปลงสนามการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศสำหรับวิธี FDTD ซึ่งนำเสนอได้ตามลำดับ ดังนี้

3.2 สมการแมกซ์เวลล์และยัลลอกริทม

สมการแมกซ์เวลล์ประกอบด้วยสมการที่อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์และรูปแบบอินทิกรัล สำหรับโครงสร้างของยัลลอกริทมจะเริ่มจากสมการแมกซ์เวลล์ที่อยู่ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์สอง [4] นั่นคือ

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \rho^* \vec{H} \quad (3.1ก)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (3.1ข)$$

โดยที่

$\vec{E}$ คือ เวกเตอร์สนามไฟฟ้า (Electric Field Vector: V/m)

$\vec{H}$ คือ เวกเตอร์สนามแม่เหล็ก (Magnetic Field Vector: A/m)

ε คือ สภาพยอมทางสนามไฟฟ้า (Electric Permittivity: F/m)

μ คือ สภาพซาบซึมได้ทางสนามแม่เหล็ก (Magnetic Permeability: H/m)

σ คือ สภาพนำทางไฟฟ้า (Electric Conductivity: S/m)

ρ^* คือ สภาพต้านทานแม่เหล็กสมบูรณ์ (Magnetic Resistivity: Ω/m)

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho^* H_x \right) \quad (3.2 ก)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho^* H_y \right) \quad (3.2 ข)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho^* H_z \right) \quad (3.2 ค)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (3.2 ง)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (3.2 จ)$$

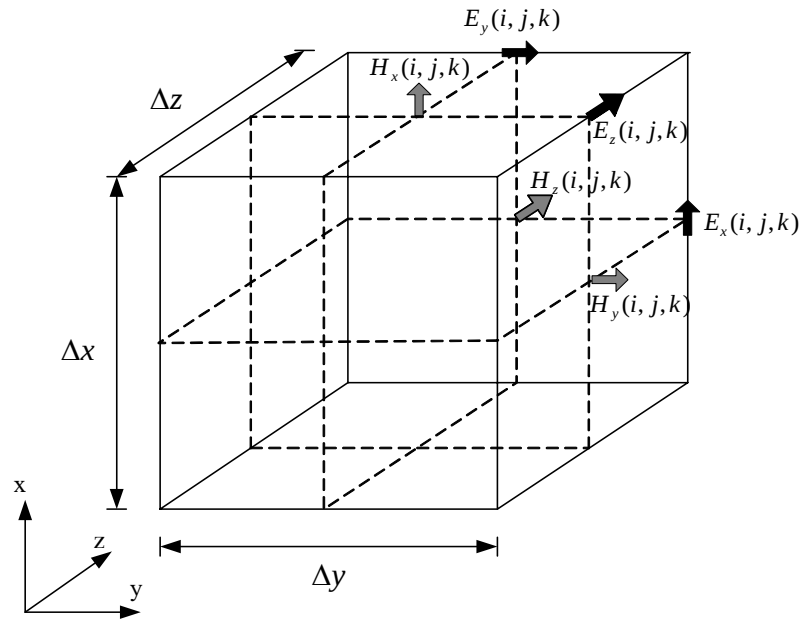
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (3.2 ฉ)$$

จากสมการที่ (3.1 ก) และ (3.1 ข) จะเขียนตัวประกอบเวกเตอร์ของตัวดำเนินการเคิร์ล (Curl Operation) ได้เป็นสมการสเกลาร์ 6 สมการที่สมมูลกับสมการเคิร์ลของแมกซ์เวลล์ในระบบพิกัดมุมฉากสามมิติ (x, y, z) ได้ดังสมการที่ (3.2 ก) ถึง (3.2 จ) ซึ่งสมการเหล่านี้จะเป็นพื้นฐานของแนวคิดเชิงตัวเลขของวิธี FDTD ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าของวัตถุในสามมิติทั่ว ๆ ไป

3.3 แนวคิดของยัลลอกริทึมซึ่งเป็นแนวความคิดพื้นฐานของวิธี FDTD

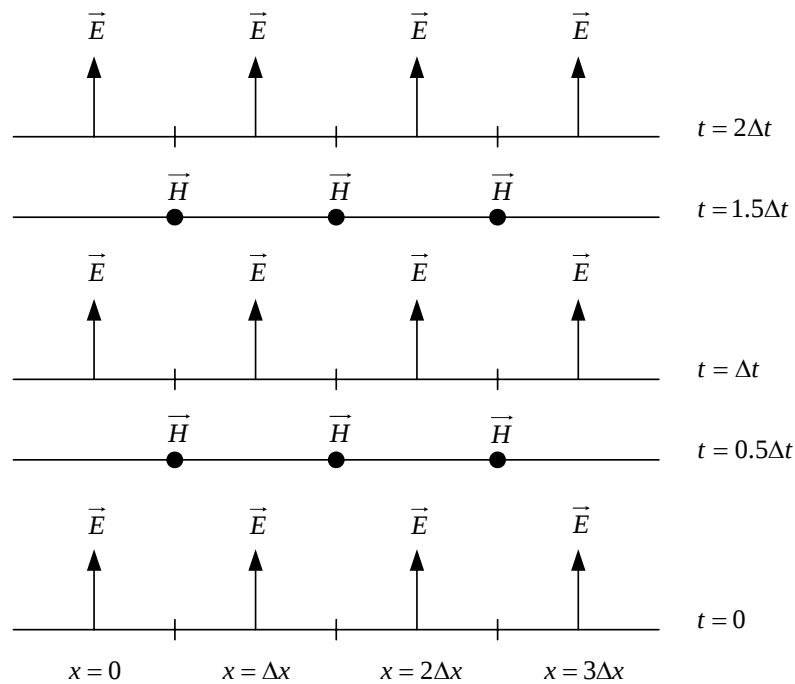
การแก้ปัญหาทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กพร้อมกันในโดเมนเวลาและโดเมนสเปซ โดยใช้สมการเคิร์ลของแมกซ์เวลล์ แทนการแก้ปัญหาสถาปัตยกรรมไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กเพียงอย่างเดียวด้วยสมการคลื่น ซึ่งการวิเคราะห์ทั้งสองสนามพร้อมกันนี้เปรียบเสมือนการแปลงสนามรวมของสมการอินทิกรัลในวิธีโมเมนต์ โดยเงื่อนไขขอบเขตของทั้ง $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ถูกกำหนดให้อยู่บนขอบเขตของตัวกลางนั้น มีข้อดี คือ การใช้ข้อมูลของทั้ง $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ด้วยกันจะได้ผลลัพธ์ที่แน่นอนกว่าการใช้สนามชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงอย่างเดียว (เช่น จะมีความเที่ยงตรงสำหรับโครงสร้างที่มีขนาดใหญ่) โดยในการวิเคราะห์สามารถจำลองคุณสมบัติทางสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของวัสดุที่ใช้ได้ และสำหรับบริเวณที่สนามมีลักษณะเฉพาะหรือสามารถมีได้เพียงสนามเดียว เช่น $\vec{H}$ ที่สัมผัสบริเวณขอบ มุม หรือรอบ ๆ แกนเส้นลวดบาง และ $\vec{E}$ ในแนวรัศมีที่อยู่บริเวณจุด ขอบ และเส้นลวดบางนั้น สามารถสร้างแบบจำลองขึ้นมาได้ ถ้าในบริเวณนั้นเกิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กขึ้น

ส่วนประกอบของสนาม $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ในหนึ่งหน่วยเซลล์ของยัลลอกริทึมนั้นจะถูกจัดวางไว้ระหว่างกลางของกันและกันในสเปซแบบสามมิติ ดังนั้นทุกส่วนประกอบของสนาม $\vec{E}$ ใด ๆ จะถูกล้อมรอบด้วยส่วนประกอบของสนาม $\vec{H}$ และส่วนประกอบของสนาม $\vec{H}$ ใด ๆ จะถูกล้อมรอบด้วยส่วนประกอบของสนาม $\vec{E}$ ใด ๆ เช่นเดียวกัน จึงทำให้ได้รูปแบบจำลองอย่างง่ายในโครงสร้างสเปซ สามมิติที่เป็นไปตามกฎฟาราเดย์และแอมแปร์ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ผลลัพธ์ของสมการผลต่างสืบเนื่องที่ได้มาจากการใช้สมการเคิร์ลนั้น จะเป็นแบบผลต่างสืบเนื่องจำกัดแบบตรงกลาง ในกรณีที่มีความต่อเนื่องของ $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ในแนวสัมผัสระหว่างรอยต่อของตัวกลางต่างชนิดกันจะสามารถกระทำได้อย่างเหมือนจริงตามธรรมชาติโดยที่ไม่ต้องทำการแมตช์เงื่อนไขขอบเขตของสนามที่รอยต่อ ถ้ารอยต่อนั้นทับกับกริดในตำแหน่งของแกนพอดิ จะได้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่นำไปใช้งานได้เลยโดยเพียงแค่ทำการกำหนดสภาพ ขอบทางสนามไฟฟ้าและสภาพขาสัมได้ทางสนามแม่เหล็กของวัสดุไว้ ณ ตำแหน่งที่สมมุติให้เป็นวัสดุนั้น ๆ ถ้าเป็นเมช (Mesh) ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากของยัลลอกริทึมจะมีลักษณะการประมาณพื้นที่ผิวและรูปทรงภายในของโครงสร้างที่น่าสนใจเป็นแบบขั้นบันได โดยกำหนดความละเอียดของสเปซจากขนาดของหน่วยเซลล์แลตทิซหรือหนึ่งหน่วยเซลล์ของยัลลอกริทึม



รูปที่ 3.1 โครงสร้างส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี่ (Yee cell)

ส่วนประกอบของสนาม $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ในเวลาจะอยู่ในเทอมของขั้นเวลาแบบลิฟฟรอก (Leap-Frog) ซึ่งจะเป็นการคำนวณสลับกันระหว่าง $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ กับช่วงห่างเวลาของยี่อัลกอริทึม



รูปที่ 3.2 แผนภูมิแสดงช่วงเวลาลำสำหรับการแพร่กระจายคลื่นในหนึ่งมิติของยี่อัลกอริทึม

โดยหลักการจะทำการคำนวณ $\vec{E}$ ทุกตำแหน่งในแบบจำลองสเปซแบบสามมิติแล้วเก็บค่าทั้งหมดไว้ในหน่วยความจำ ในช่วงเวลาต่อมา $\vec{H}$ ก็ถูกคำนวณทุกตำแหน่งในแบบจำลองสเปซและเก็บไว้ในหน่วยความจำ โดยการคำนวณนั้นจะเอาข้อมูลของ $\vec{E}$ ที่เก็บไว้ในหน่วยความจำในช่วงเวลาที่แล้วมาใช้ในการคำนวณ และในช่วงเวลาต่อมา $\vec{E}$ ก็จะคำนวณมาจาก $\vec{H}$ คำนวณมาจากครั้งที่ผ่านมามีเหมือนกัน ซึ่งในการคำนวณนี้จะทำการวนรอบไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะถึงขั้นเวลาที่กำหนดเอาไว้ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 กระบวนการทำขั้นเวลาแบบลิฟฟรอกนี้เป็นกระบวนการที่แน่นอน ดังนั้นจึงสามารถหลีกเลี่ยงการแก้สมการสองสมการพร้อมกันและการหาเมตริกซ์ผกผันได้อย่างสมบูรณ์แบบ

3.4 สมการผลต่างสี่บ้เื่อง

ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้วิธี FDTD อย่างแรกที่จะต้องคำนึงก็คือหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี่ซึ่งอยู่ในโดเมนสเปซ และอีกอันหนึ่งก็คือการคิดคำนวณในเชิงเวลา ดังนั้นในการกำหนดสัญลักษณ์ของยี่อัลกอริทึมนี้จะกำหนดเป็นฟังก์ชันของโดเมนสเปซและโดเมนเวลาในระบบพิกัดสามมิติเอาไว้ดังนี้

$$F^n(i, j, k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (3.3)$$

โดยที่ Δx , Δy , Δz คือ ขนาดของช่วงความยาวในหนึ่งหน่วยเซลล์ และ Δt คือ ขนาดของช่วงเวลาที่เพิ่มขึ้นในแต่ละขั้นในโดเมนเวลา โดยที่จะมีค่า i , j และ k เป็นเลขจำนวนเต็มที่จะบอกตำแหน่งในพิกัดมุมฉากในโดเมนสเปซ และ n เป็นเลขจำนวนเต็มที่จะบอกช่วงเวลาในโดเมนเวลา

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นลักษณะโครงสร้างสามมิติที่แสดงถึงโครงสร้างทั้งหมดที่นำมาใช้ในการจำลองเหตุการณ์ในการคำนวณของ FDTD ซึ่งจะเป็นการนำหนึ่งหน่วยเซลล์มาต่อกันจนถึงขอบเขตที่ต้องการที่ใช้ในการจำลอง โดยโครงสร้างแบบนี้จะเรียกว่า กริดเซลล์ของ FDTD และจากกริดเซลล์ของ FDTD จะเห็นได้ว่าขอบเขตสูงสุดนั้นจะประกอบไปด้วย $\max_x$, $\max_y$, $\max_z$

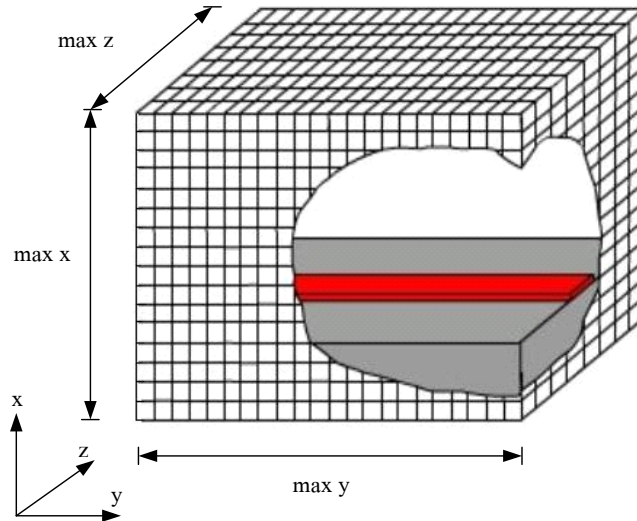
ยี่ได้นำเสนอการใช้รูปแบบของสมการผลต่างสี่บ้เื่องแบบตรงกลาง (Central Difference Scheme) โดยใช้กับฟังก์ชัน F ทั้งในโดเมนสเปซของระบบพิกัดฉาก และในโดเมนเวลา คือ

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i+1/2, j, k) - F^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \quad (3.4 ก)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial y} = \frac{F^n(i, j+1/2, k) - F^n(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \quad (3.4 ข)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial z} = \frac{F^n(i, j, k+1/2) - F^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \quad (3.4 ค)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (3.4 ง)$$



รูปที่ 3.3 โครงสร้างสามมิติสำหรับกริดเซลล์ของ FDTD (FDTD grid)

ทำการแทนสมการเคิร์ลของแมกซ์เวลล์ในระบบพิกัดมุมฉากสามมิติ (3.2 ก) ถึง (3.2 ง) ลงในสมการ (3.4) จะได้สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าใหม่ 6 สมการ ดังนี้

$$\frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) - H_x^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\begin{aligned} & \frac{E_y^n(i, j, k+1/2) - E_y^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \\ & - \frac{E_z^n(i, j+1/2, k) - E_z^n(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \\ & - \rho^* \cdot H_x^n(i, j, k) \end{aligned} \right] \quad (3.5 ก)$$

$$\frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) - H_y^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\begin{aligned} & \frac{E_z^n(i+1/2, j, k) - E_z^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \\ & - \frac{E_x^n(i, j, k+1/2) - E_x^n(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \\ & - \rho^* \cdot H_y^n(i, j, k) \end{aligned} \right] \quad (3.5 ข)$$

$$\frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) - H_z^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\begin{array}{c} \frac{E_x^n(i, j+1/2, k) - E_x^n(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \\ - \frac{E_y^n(i+1/2, j, k) - E_y^n(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \\ - \rho^* \cdot H_z^n(i, j, k) \end{array} \right] \quad (3.5 \text{ ก})$$

$$\frac{E_x^{n+1}(i, j, k) - E_x^n(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\begin{array}{c} \frac{H_z^{n+1/2}(i, j+1/2, k) - H_z^{n+1/2}(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \\ - \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \\ - \sigma \cdot E_x^{n+1/2}(i, j, k) \end{array} \right] \quad (3.5 \text{ ข})$$

$$\frac{E_y^{n+1}(i, j, k) - E_y^n(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\begin{array}{c} \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k+1/2) - H_x^{n+1/2}(i, j, k-1/2)}{\Delta z} \\ - \frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2, j, k) - H_z^{n+1/2}(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \\ - \sigma \cdot E_y^{n+1/2}(i, j, k) \end{array} \right] \quad (3.5 \text{ ค})$$

$$\frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\begin{array}{c} \frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k) - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k)}{\Delta x} \\ - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k) - H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k)}{\Delta y} \\ - \sigma \cdot E_z^{n+1/2}(i, j, k) \end{array} \right] \quad (3.5 \text{ ง})$$

เมื่อทำการประมาณค่าสนามแม่เหล็กในทิศทางใด ๆ ที่ช่วงเวลา n และค่าสนามไฟฟ้าในทิศทางใด ๆ ที่ช่วงเวลา $n+1/2$ จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$H_x^n(i, j, k) = \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k) + H_x^{n-1/2}(i, j, k)}{2} \quad (3.6 \text{ ก})$$

$$H_y^n(i, j, k) = \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k) + H_y^{n-1/2}(i, j, k)}{2} \quad (3.6 \text{ ข})$$

$$H_z^n(i, j, k) = \frac{H_z^{n+1/2}(i, j, k) + H_z^{n-1/2}(i, j, k)}{2} \quad (3.6 \text{ ก})$$

$$E_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{E_x^{n+1}(i, j, k) + E_x^n(i, j, k)}{2} \quad (3.6 \text{ ง})$$

$$E_y^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{E_y^{n+1}(i, j, k) + E_y^n(i, j, k)}{2} \quad (3.6 \text{ จ})$$

$$E_z^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{E_z^{n+1}(i, j, k) + E_z^n(i, j, k)}{2} \quad (3.6 \text{ ฉ})$$

นำสมการที่ (3.6) แทนลงในสมการที่ (3.5) จะได้เป็นสมการผลต่างสี่บเนื่องจำกัดสำหรับแต่ละส่วนประกอบสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่ใช้คำนวณในวิธี FDTD ดังนี้

$$H_x^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{1 - \rho^* \Delta t / 2\mu}{1 + \rho^* \Delta t / 2\mu} H_x^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t / \mu}{1 + \rho^* \Delta t / 2\mu} \cdot \left[\frac{E_z^n(i, j, k) - E_z^n(i, j-1, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i, j, k) - E_y^n(i, j, k-1)}{\Delta z} \right] \quad (3.7 \text{ ก})$$

$$H_y^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{1 - \rho^* \Delta t / 2\mu}{1 + \rho^* \Delta t / 2\mu} H_y^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t / \mu}{1 + \rho^* \Delta t / 2\mu} \cdot \left[\frac{E_x^n(i, j, k) - E_x^n(i, j, k-1)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j, k) - E_z^n(i-1, j, k)}{\Delta x} \right] \quad (3.7 \text{ ข})$$

$$H_z^{n+1/2}(i, j, k) = \frac{1 - \rho^* \Delta t / 2\mu}{1 + \rho^* \Delta t / 2\mu} H_z^{n-1/2}(i, j, k) - \frac{\Delta t / \mu}{1 + \rho^* \Delta t / 2\mu} \cdot \left[\frac{E_y^n(i, j, k) - E_y^n(i-1, j, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j, k) - E_x^n(i, j-1, k)}{\Delta y} \right] \quad (3.7 \text{ ค})$$

$$E_x^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \sigma \Delta t / 2\varepsilon}{1 + \sigma \Delta t / 2\varepsilon} E_x^n(i, j, k) + \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \sigma \Delta t / 2\varepsilon} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{H_z^{n+1/2}(i, j+1, k) - H_z^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta y} \\ & - \frac{H_y^{n+1/2}(i, j, k+1) - H_y^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta z} \end{aligned} \right] \quad (3.7 \text{ ง})$$

$$E_y^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \sigma \Delta t / 2\varepsilon}{1 + \sigma \Delta t / 2\varepsilon} E_y^n(i, j, k) + \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \sigma \Delta t / 2\varepsilon} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{H_x^{n+1/2}(i, j, k+1) - H_x^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta z} \\ & - \frac{H_z^{n+1/2}(i+1, j, k) - H_z^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta x} \end{aligned} \right] \quad (3.7 \text{ จ})$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = \frac{1 - \sigma \Delta t / 2\varepsilon}{1 + \sigma \Delta t / 2\varepsilon} E_z^n(i, j, k) + \frac{\Delta t / \varepsilon}{1 + \sigma \Delta t / 2\varepsilon} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{H_y^{n+1/2}(i+1, j, k) - H_y^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta x} \\ & - \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1, k) - H_x^{n+1/2}(i, j, k)}{\Delta y} \end{aligned} \right] \quad (3.7 \text{ ฉ})$$

3.5 การกระตุ้นแหล่งกำเนิดแรงดัน

การเลือกแหล่งกำเนิดแรงดันที่เหมาะสมเป็นปัจจัยสำคัญประการหนึ่งในการจำลองแบบโครงสร้างแบบ FDTD ในระยะแรกเริ่มได้มีการใช้แหล่งกำเนิดแรงดันแบบ สภาวะเริ่มต้นของคลื่นระนาบ ซึ่งเหมาะสำหรับการแก้ปัญหาในโครงสร้างที่มีมิติเดียว แต่สำหรับการจำลองโครงสร้างแบบ FDTD ที่มีการแก้ปัญหาคือในไมโครเวฟด้วยโครงสร้างสามมิตินั้น [8] จะใช้การกระตุ้นแหล่งกำเนิดแรงดันที่เป็นพัลส์แบบเกาส์ (Gaussian Pulse) หรือพัลส์แบบเกาส์มอดูเลต (Modulated Gaussian Pulse) เนื่องจากหารูปคลื่นและฟูริเยร์สเปกตรัมได้ง่ายกว่า ซึ่งการกระตุ้นแหล่งกำเนิดแรงดันของพัลส์แบบเกาส์แสดงได้ดังสมการ

$$g(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2} \quad (3.8)$$

เมื่อ $g(t)$ คือ พัลส์แบบเกาส์ (Gaussian Pulse)

โดยที่ T คือความกว้างของพัลส์ และ t_o คือ กึ่งกลางของพัลส์ ($t_o = 3T$) ในขณะที่สมการของการกระตุ้นแหล่งกำเนิดแรงดันของพัลส์แบบเกาส์มอดูเลตนั้นจะแสดงได้ดังสมการ

$$g(t) = e^{-\left(\frac{t-t_o}{T}\right)^2} \sin 2\pi f_o(t-t_o) \quad (3.9)$$

เมื่อ f_o คือความถี่ที่เข้ามามอดูเลต

ดังนั้นจากสมการของการกระตุ้นแหล่งกำเนิดแรงดันทั้งสองสมการ จากที่ได้กล่าวมา จึงสามารถที่จะนำไปแปลงโดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ (Fourier Transform) ซึ่งเป็นการแปลงสัญญาณของแหล่งกำเนิดแรงดันที่อยู่ในโดเมนของเวลาให้อยู่ในโดเมนความถี่ ทำให้ได้รูปแบบของสมการที่คล้ายกันคือ

$$G(f) \propto e^{-(\pi T f)^2} \quad (3.10)$$

3.6 เงื่อนไขความเสถียรเชิงตัวเลข

สิ่งหนึ่งที่สำคัญในการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี FDTD นั้นคือ เงื่อนไขความเสถียรเชิงตัวเลข และในการกำหนดค่าพารามิเตอร์ให้เหมาะสมกับการคำนวณจะเป็นสิ่งที่สำคัญอย่างยิ่ง ซึ่งได้แก่ การกำหนดขนาดของช่วงเวลา Δt ขนาดของช่วงระยะทางคือ Δx , Δy , Δz และจำนวนช่วงระยะทางที่สามารถครอบคลุมพื้นที่ของอุปกรณ์ได้ทั้งหมด และจำนวนช่วงเวลาเพียงพอให้คลื่นสามารถเดินทางผ่านเส้นทางที่ต้องการได้จนเสร็จสิ้น อย่างไรก็ตามการที่ตัวแปรที่มีความสำคัญก็คือขนาดของช่วงระยะทางซึ่งควรมีขนาดต่ำกว่าหนึ่งในสิบถึงหนึ่งในยี่สิบของความยาวคลื่นที่ใช้ งาน และตัวแปรที่สำคัญที่สุดที่ส่งผลกระทบต่อการคำนวณมากอีกตัวหนึ่งก็คือขนาดของช่วงเวลา เนื่องจากการกำหนดช่วงเวลาที่ไม่เหมาะสมหรือมากเกินไปจะทำให้การคำนวณขาดเสถียรภาพไม่สามารถหาคำตอบได้ กล่าวคือการคำนวณจะเกิดการลู่ออกทุกครั้งที่ทำซ้ำในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งอาจจะแก้ปัญหาก็ได้โดยการกำหนดค่าช่วงเวลาไว้ต่ำ แต่อย่างไรก็ดีการใช้ช่วงเวลาที่ยาวนาน ๆ จะทำให้ต้องใช้จำนวนช่วงเวลาที่มากจนเกินความจำเป็น ทำให้การคำนวณเกิดความล่าช้า ดังนั้นจึงต้องมีข้อกำหนดในการเลือกค่าช่วงเวลาที่เหมาะสม โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาสมการเคิร์ลของแมกซ์เวลล์ ซึ่งจะทำให้การนอร์มอลไรซ์ (Normalize) ให้ $\mu=1$, $\epsilon=1$, $\sigma=0$, $\rho^*=0$ และ $c=1$ จากนั้นเอาสมการที่ (3.1 ก) บวกกับสมการที่ (3.1 ข) แล้วคูณด้วย j เมื่อ $j=\sqrt{-1}$ จะได้เป็น

$$j\nabla \times (\vec{H} + j\vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} + j\vec{E}) \quad (3.11)$$

กำหนดให้ $\vec{V} = \vec{H} + j\vec{E}$ ดังนั้นสมการที่ (3.33) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$j\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (3.12)$$

พิจารณาค่าเฉพาะ (Eigenvalue) ของสมการที่ (3.12)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \Lambda \vec{V} \quad (3.13 \text{ ก})$$

$$j\nabla \times \vec{V} = \Lambda \vec{V} \quad (3.13 \text{ ข})$$

ทำการหาค่าเฉพาะเวลา (Time Eigenvalue) โดยที่ตัวดำเนินการอนุพันธ์ย่อยในสมการที่ (3.13 ก) สามารถเปลี่ยนมาเป็นตัวดำเนินการผลต่างสืบเนื่องที่มีตำแหน่งขั้นเวลาแบบลิฟฟรอกซึ่งจะได้เป็น

$$\frac{V_{i,j,k}^{n+1/2} - V_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} = \Lambda V_{i,j,k}^n \quad (3.14)$$

นิยามตัวร่วมการเพิ่มขึ้น (Growth Factor) เป็น

$$q_{i,j,k} = \frac{V_{i,j,k}^{n+1/2}}{V_{i,j,k}^n} = \frac{V_{i,j,k}^n}{V_{i,j,k}^{n-1/2}} \quad (3.15)$$

ทำการแทนสมการที่ (3.15) ลงในสมการที่ (3.14) แล้วทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$(q_{i,j,k})^2 - \Lambda \Delta t q_{i,j,k} - 1 = 0 \quad (3.16)$$

แก้สมการหาค่า $q_{i,j,k}$

$$q_{i,j,k} = \frac{\Lambda \Delta t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Lambda \Delta t}{2}\right)^2 + 1} \quad (3.17)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าของ $|q_{i,j,k}|$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ อยู่ในเงื่อนไขความเสถียรเชิงตัวเลข $|q_{i,j,k}| \leq 1$) เมื่อ $\frac{\Lambda \Delta t}{2}$ มีส่วนจำนวนจริงเป็น 0 และมีส่วนจำนวนจินตภาพอยู่ในช่วง $-1j$ ถึง

แทน $1j$ ค่าของ $\frac{\Lambda \Delta t}{2}$ ลงในช่วงนี้แล้วจัดรูปใหม่ จะได้เงื่อนไขของค่าเจาะจงเวลาเป็น

$$\text{Re}(\Lambda) = 0 \quad (3.18 \text{ ก})$$

$$-\frac{2}{\Delta t} \leq \text{Im}(\Lambda) \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (3.18 \text{ ข})$$

ทำการหาค่าเจาะจงสเปซ (Space Eigenvalue) โดยกำหนดให้

$$\vec{V}_{i,j,k} = \vec{V}_0 e^{j(\tilde{k}_x i \Delta x + \tilde{k}_y j \Delta y + \tilde{k}_z k \Delta z)} \quad (3.19)$$

การแสดงแบบแผนคลื่นสเปซแลตทิซใด ๆ ใช้การทำผลต่างสืบเนื่องสเปซแบบตรงกลางแทนอนุพันธ์ย่อยของตัวดำเนินการเกร็ดในสมการที่ (3.13 ข) จะได้

$$-2 \left[\frac{\hat{x}}{\Delta x} \sin(\tilde{k}_x \Delta x / 2) + \frac{\hat{y}}{\Delta y} \sin(\tilde{k}_y \Delta y / 2) + \frac{\hat{z}}{\Delta z} \sin(\tilde{k}_z \Delta z / 2) \right] \times \vec{V}_{i,j,k} = \Lambda \vec{V}_{i,j,k} \quad (3.20)$$

เมื่อ $\hat{x}$, $\hat{y}$ และ $\hat{z}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x , y และ z ตามลำดับ หลังจากทำผลคูณเชิงเวกเตอร์ และเขียนสมการให้อยู่ในเทอมของส่วนประกอบ x , y และ z แล้วทำการแก้สมการหาค่าของ Λ^2 จะได้

$$\Lambda^2 = -4 \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \sin^2(\tilde{k}_x \Delta x / 2) + \frac{1}{(\Delta y)^2} \sin^2(\tilde{k}_y \Delta y / 2) + \frac{1}{(\Delta z)^2} \sin^2(\tilde{k}_z \Delta z / 2) \right] \quad (3.21)$$

$$\text{Re}(\Lambda) = 0 \quad (3.22 \text{ ก})$$

$$-2 \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} \leq \text{Im}(\Lambda) \leq 2 \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}} \quad (3.22 \text{ ข})$$

สำหรับการหาเงื่อนไขความเสถียรเชิงตัวเลข [8] เงื่อนไขของค่าเจาะจงสเปซที่กำหนดโดยสมการที่ (3.22) จะต้องอยู่ในเงื่อนไขของค่าเจาะจงเวลาที่กำหนดโดยสมการที่ (3.18) อย่างสมบูรณ์แล้วยกเลิกการนอร์มอลไรซ์ค่าของ c ซึ่งจะได้เงื่อนไขความเสถียรเชิงตัวเลขสำหรับสมการผลต่างสืบเนื่องจำกัดเป็น

$$\Delta t \leq \frac{1}{c\sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}} \quad (3.23)$$

โดยที่ c คือ ความเร็วในการแพร่กระจายคลื่นในขอบเขตสเปซ โดยสามารถใช้ค่าเหมือนกับความเร็วแสงได้คือ $c = 2.996925 \times 10^8$ m/s

3.7 เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืน

ในการแก้ปัญหาทางคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยวิธี FDTD นั้นมักจะให้บริเวณที่พิจารณาเป็นบริเวณเปิด ซึ่งโดเมนการคำนวณสนามจะไม่ถูกจำกัดในทิศทางใด ๆ ดังนั้นในการจำลองโครงสร้างกริดเซลล์ของ FDTD ที่ใช้ขอบเขตเปิด (Open-Boundary) จึงเกิดปัญหาในการวิเคราะห์คือ ปัญหาของขอบเขตในการแพร่กระจายคลื่นที่มีลักษณะการแพร่กระจายเหมือนลู่อู่เข้าสู่ระยะอนันต์ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วคงไม่มีคอมพิวเตอร์ที่สามารถเก็บข้อมูลได้โดยไม่จำกัด เพื่อเป็นการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้จึงได้มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืน (Absorbing Boundary Condition : ABC) ขึ้น โดยเป็นการจำกัดโดเมนการคำนวณสนามไว้ที่ขนาดใดขนาดหนึ่งซึ่งใหญ่พอที่จะครอบคลุมโครงสร้างที่พิจารณาและมีเงื่อนไขขอบเขตที่ขอบนอกของโดเมนเสมือนเป็นระยะอนันต์ และเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนนี้จะกำจัดหรือลดการสะท้อนกลับของสนามที่ขอบของโดเมนการคำนวณ ทำให้เปรียบเสมือนว่าในขณะที่ทำการคำนวณ โดเมนการคำนวณมีขนาดเป็นอนันต์ ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนนี้จะได้นำมาวิเคราะห์และพัฒนาเพื่อช่วยลดขนาดของกริดเซลล์ (grid cell) ให้มีขนาดลดลง สิ่งสำคัญที่สุดในการวิเคราะห์การกระทำในเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนนั้น ก็คือประสิทธิภาพและความเที่ยงตรงในการคำนวณ เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนได้มีการพัฒนาต่อเนื่องมาในช่วงสามสิบกว่าปีที่ผ่านมา หลักในการวิเคราะห์ขอบเขตการดูดกลืนในระบบสามมิตินั้นสามารถที่จะแบ่งได้ 2 กลุ่มหลัก ๆ คือ กลุ่มแรกจะมีการใช้คุณสมบัติของคลื่นเดินทางเดียว (One-Way Wave Characteristics) โดยจะใช้แฟกเตอร์ (factor) เชิงอนุพันธ์ของสมการคลื่นในการคำนวณ การคิดคำนวณแบบนี้จะใช้เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนแบบหนึ่งที่เป็นที่นิยมนั้นมากก็คือ เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนแบบเมอร์ (Mur's ABC) ซึ่งเงื่อนไขชนิดนี้จะได้นำมาวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้ด้วย และในกลุ่มที่สองจะใช้หลักการพื้นฐานของการให้วัสดุดูดกลืน (Absorbing Materials) โดยเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนที่นิยมใช้สำหรับการวิเคราะห์แบบ

นี่ก็คือ เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนของชั้นแมตช์สมบูรณ์ (Perfectly Matched Layer ABC : PML) ในการวิเคราะห์เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนที่คตินั้นควรมีคุณสมบัติหลักที่สำคัญ ๆ คือ

1. จะต้องมีความเที่ยงตรงในการแก้ปัญหาเชิงวิศวกรรม
2. วิเคราะห์คุณสมบัติของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโครงสร้างต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นโครงสร้างทั่วไป หรือโครงสร้างที่ซับซ้อนได้
3. ควรมีความเสถียรเชิงตัวเลขในการใช้งาน

จากคุณสมบัติสามข้อที่กล่าวมานั้น จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนแบบเมอร์เป็นเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนชนิดหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการวิเคราะห์รหัสเซลล์ของ FDTD [7] ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยที่เงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนแบบเมอร์จะมีลักษณะของสมการอยู่สองแบบ คือ แบบอันดับหนึ่ง (Mur's first order) และ แบบอันดับสอง (Mur's second order) ซึ่งทั้งสองแบบนี้จะได้สมการพื้นฐานมาจากสมการคลื่นทางเดียว (One Way Wave Equation) ซึ่งแบบนี้กลุ่มนักวิจัยกลุ่มแรกที่คิดคือ Engquist and Majda เงื่อนไขขอบเขตของสมการคลื่นแสดงดังสมการที่ (3.24)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - v^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_i = 0 \quad (3.24)$$

เมื่อ $i = x, y$ หรือ z และ v คือ ความเร็วเฟส

ในระนาบของคลื่นที่แพร่กระจายจากพื้นที่ $x > 0$ มาถึงขอบเขตที่ $x = 0$ จะเห็นได้ว่าไม่มีคลื่นสะท้อนจากขอบเขตการดูดกลืนเลย ดังนั้นจะได้สมการคลื่นเป็น

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (1 - (vs_y)^2 - (vs_z)^2)^{1/2}\right) E_i \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.25)$$

เมื่อ $i = y$ หรือ z และ $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = v^{-2}$ อย่างไรก็ตามจะต้องหาค่าที่แน่นอนของ $(1 - (vs_y)^2 - (vs_z)^2)^{1/2}$ ในสมการ (3.21) ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansions) ดังนั้นเมอร์จึงได้เสนอสมการของเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนอันดับแรก จะได้สมการเป็น

$$(1 - (vs_y)^2 - (vs_z)^2)^{1/2} = 1 + O((vs_y)^2 + (vs_z)^2) \quad (3.26)$$

ซึ่งสมการที่ (3.26) จะให้การดูดกลืนของคลื่นใกล้เคียงกับคลื่นที่ส่งมา (Incident Waves) และเมอร์จึงได้นำเสนอสมการสำหรับอันดับที่สองดังสมการ

$$(1 - (vs_y)^2 - (vs_z)^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}((vs_y)^2 + (vs_z)^2) + O(((vs_y)^2 + (vs_z)^2)^2) \quad (3.27)$$

ดังนั้นจึงทำให้คลื่นมาตกกระทบบน $x = 0$ จะได้สมการคลื่นทางเดียวสำหรับเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนอันดับแรกดังสมการ

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_i \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.28)$$

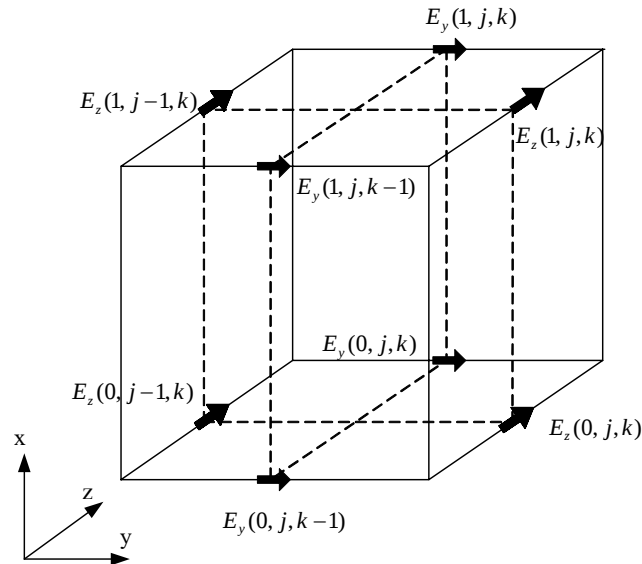
และอันดับสองดังสมการ

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \left(\frac{1}{v}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right) E_i \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.29)$$

จากรูปที่ 3.5 แสดงตำแหน่งในหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี่ซึ่งเป็นกริดต่ำสุดของ FDTD ตำแหน่งที่ กริด ($i = 1$) ทำให้มีสนามไฟฟ้าที่ผิวบนระนาบกริด $x = 0$ คือ $E_y(0, j, k-1)$, $E_y(0, j, k)$, $E_z(0, j-1, k)$ และ $E_z(0, j, k)$ ดังนั้นจึงได้สมการของยี่อัลกอริทึมสำหรับเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนของเมอร์อันดับแรกดังสมการ

$$E_y^{n+1}(0, j, k) = E_y^n(1, j, k) + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \cdot [E_y^{n+1}(1, j, k) - E_y^n(0, j, k)] \quad (3.30)$$

$$E_z^{n+1}(0, j, k) = E_z^n(1, j, k) + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \cdot [E_z^{n+1}(1, j, k) - E_z^n(0, j, k)] \quad (3.31)$$



รูปที่ 3.4 สนามไฟฟ้าที่ผิวในหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี่ที่ตำแหน่ง $(1, j, k)$

สมการที่ (3.30) นั้นจะบ่งบอกถึงการกระทำของสนามไฟฟ้าที่ผิวของหนึ่งหน่วยเซลล์ของ ยี ($E_y(0, j, k)$) บนขอบเขตนอกสุดของกริดเซลล์ของ FDTD โดยสมการที่ได้มานั้นจะใช้ข้อมูลของการกระทำสนามไฟฟ้าบนกริดเซลล์ของ FDTD ($E_y(I, j, k)$) โดยหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี่ที่ตำแหน่งขอบเขตบนสุดของกริดนั้น ($i = \max x$) จะมีสมการคือ

$$E_t^{n+1}(\max x, j, k) = E_t^n(\max x - 1, j, k) + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \cdot [E_t^{n+1}(\max x - 1, j, k) - E_t^n(\max x, j, k)] \quad (3.32)$$

เมื่อ $t = y$ หรือ z

ในเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนอันดับแรกของเมอร์จะได้สมการในขอบเขตต่าง ๆ คือ $y = 0$, $y = \max y$, $z = 0$ และ $z = \max z$ ดังนี้

1. ขอบเขตที่ $y = 0$

$$E_t^{n+1}(i, 0, k) = E_t^n(i, 1, k) + \frac{v\Delta t - \Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^{n+1}(i, 1, k) - E_t^n(i, 0, k)] \quad (3.33 ก)$$

2. ขอบเขตที่ $y = \max y$

$$E_t^{n+1}(i, \max y, k) = E_t^n(i, \max y - 1, k) + \frac{v\Delta t - \Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^{n+1}(i, \max y - 1, k) - E_t^n(i, \max y, k)] \quad (3.33 ข)$$

3. ขอบเขตที่ $z = 0$

$$E_t^{n+1}(i, j, 0) = E_t^n(i, j, 1) + \frac{v\Delta t - \Delta z}{v\Delta t + \Delta z} \cdot [E_t^{n+1}(i, j, 1) - E_t^n(i, j, 0)] \quad (3.33 ค)$$

4. ขอบเขตที่ $z = \max z$

$$E_t^{n+1}(i, j, \max z) = E_t^n(i, j, \max z - 1) + \frac{v\Delta t - \Delta z}{v\Delta t + \Delta z} \cdot [E_t^{n+1}(i, j, \max z - 1) - E_t^n(i, j, \max z)] \quad (3.33 ง)$$

เมื่อ t ก็คือการกระทำของสนามไฟฟ้าที่ผิวในหนึ่งหน่วยเซลล์ของยี่ โดยที่ขอบเขตของ $y = 0$ และ $y = \max y$ จะมีค่า $t = x$, z ถ้า $z = 0$ และ $z = \max z$ จะได้ $t = x, y$

สมการที่กล่าวมาเป็นเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนของเมอร์อันดับหนึ่ง แต่ถ้าเป็นเงื่อนไขขอบเขตการดูดกลืนของเมอร์อันดับสองจะแสดงดังสมการข้างล่าง

1. ขอบเขตที่ $x = 0$

$$\begin{aligned}
 E_t^{n+1}(0, j, k) = & -E_t^{n-1}(1, j, k) \\
 & + \frac{v\Delta t - \Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^{n+1}(1, j, k) + E_t^n(0, j, k)] \\
 & + \frac{2\Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \cdot [E_t^{n+1}(0, j, k) + E_t^n(1, j, k)] \\
 & + \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(v\Delta t + \Delta x)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(0, j+1, k) - 2E_t^n(0, j, k) + E_t^n(0, j-1, k) + \right. \\
 & \left. E_t^n(1, j+1, k) - 2E_t^n(1, j, k) + E_t^n(1, j-1, k) \right] \\
 & + \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta z)^2(v\Delta t + \Delta x)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(0, j, k+1) - 2E_t^n(0, j, k) + E_t^n(0, j, k-1) + \right. \\
 & \left. E_t^n(1, j, k+1) - 2E_t^n(1, j, k) + E_t^n(1, j, k-1) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34 ก}$$

2. ขอบเขตที่ $x = \max x$

$$\begin{aligned}
 E_t^{n+1}(\max x, j, k) = & -E_t^{n-1}(\max x - 1, j, k) \\
 & + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \cdot [E_t^{n+1}(\max x - 1, j, k) - E_t^{n-1}(\max x, j, k)] \\
 & + \frac{2\Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \cdot [E_t^n(\max x, j, k) - E_t^n(\max x - 1, j, k)] \\
 & + \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(v\Delta t + \Delta x)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(\max x, j+1, k) + E_t^n(\max x, j-1, k) - \right. \\
 & \left. 2E_t^n(\max x, j, k) + E_t^n(\max x - 1, j+1, k) + \right. \\
 & \left. E_t^n(\max x - 1, j-1, k) - 2E_t^n(\max x - 1, j, k) \right] \\
 & + \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta z)^2(v\Delta t + \Delta x)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(\max x, j, k+1) + E_t^n(\max x, j, k-1) - \right. \\
 & \left. 2E_t^n(\max x, j, k) + E_t^n(\max x - 1, j, k+1) + \right. \\
 & \left. E_t^n(\max x - 1, j, k-1) - 2E_t^n(\max x - 1, j, k) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34 ข}$$

3. ขอบเขตที่ $y = 0$

$$\begin{aligned}
 E_t^{n+1}(i, 0, k) = & -E_t^{n-1}(i, 1, k) \\
 & + \frac{v\Delta t - \Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^{n+1}(i, 1, k) + E_t^{n-1}(i, 0, k)] \\
 & + \frac{2\Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^n(i, 0, k) + E_t^n(i, 1, k)] \\
 & + \frac{\Delta y(v\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2(v\Delta t + \Delta y)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i+1, 0, k) - 2E_t^n(i, 0, k) + E_t^n(i-1, 0, k) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i+1, 1, k) - 2E_t^n(i, 1, k) + E_t^n(i-1, 1, k) \right] \\
 & + \frac{\Delta y(v\Delta t)^2}{2(\Delta z)^2(v\Delta t + \Delta y)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i, 0, k+1) - 2E_t^n(i, 0, k) + E_t^n(i, 0, k-1) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i, 1, k+1) - 2E_t^n(i, 1, k) + E_t^n(i, 1, k-1) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34 ก}$$

4. ขอบเขตที่ $y = \text{max}y$

$$\begin{aligned}
 E_t^{n+1}(i, \text{max}y, k) = & -E_t^{n-1}(i, \text{max}y-1, k) \\
 & + \frac{v\Delta t - \Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^{n+1}(i, \text{max}y-1, k) + E_t^{n-1}(i, \text{max}y, k)] \\
 & + \frac{2\Delta y}{v\Delta t + \Delta y} \cdot [E_t^n(i, \text{max}y, k) + E_t^n(i, \text{max}y-1, k)] \\
 & + \frac{\Delta y(v\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2(v\Delta t + \Delta y)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i+1, \text{max}y, k) + E_t^n(i-1, \text{max}y, k) - \right. \\
 & \left. 2E_t^n(i, \text{max}y, k) + E_t^n(i+1, \text{max}y-1, k) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i-1, \text{max}y-1, k) - 2E_t^n(i, \text{max}y-1, k) \right] \\
 & + \frac{\Delta y(v\Delta t)^2}{2(\Delta z)^2(v\Delta t + \Delta y)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i, \text{max}y, k+1) + E_t^n(i, \text{max}y, k-1) - \right. \\
 & \left. 2E_t^n(i, \text{max}y, k) + E_t^n(i, \text{max}y-1, k+1) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i, \text{max}y-1, k-1) - 2E_t^n(i, \text{max}y-1, k) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34 ข}$$

5. ขอบเขตที่ $z = 0$

$$\begin{aligned}
 E_t^{n+1}(i, j, 0) = & -E_t^{n-1}(i, j, 1) \\
 & + \frac{v\Delta t - \Delta z}{v\Delta t + \Delta z} \cdot [E_t^{n+1}(i, j, 1) + E_t^{n-1}(i, j, 0)] \\
 & + \frac{2\Delta z}{v\Delta t + \Delta z} \cdot [E_t^n(i, j, 0) + E_t^n(i, j, 1)] \\
 & + \frac{\Delta z(v\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2(v\Delta t + \Delta z)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i+1, j, 0) - 2E_t^n(i, j, 0) + E_t^n(i-1, j, 0) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i+1, j, 1) - 2E_t^n(i, j, 1) + E_t^n(i-1, j, 1) \right] \\
 & + \frac{\Delta z(v\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(v\Delta t + \Delta z)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i, j+1, 0) - 2E_t^n(i, j, 0) + E_t^n(i, j-1, 0) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i, j+1, 1) - 2E_t^n(i, j, 1) + E_t^n(i, j-1, 1) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34 จ}$$

6. ขอบเขตที่ $z = \text{max}z$

$$\begin{aligned}
 E_t^{n+1}(i, j, \text{max}z) = & -E_t^{n-1}(i, j, \text{max}z - 1) \\
 & + \frac{v\Delta t - \Delta z}{v\Delta t + \Delta z} \cdot [E_t^{n+1}(i, j, \text{max}z - 1) + E_t^{n-1}(i, j, \text{max}z)] \\
 & + \frac{2\Delta z}{v\Delta t + \Delta z} \cdot [E_t^n(i, j, \text{max}z) + E_t^n(i, j, \text{max}z - 1)] \\
 & + \frac{\Delta z(v\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2(v\Delta t + \Delta z)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i+1, j, \text{max}z) + E_t^n(i-1, j, \text{max}z) - \right. \\
 & \left. 2E_t^n(i, j, \text{max}z) + E_t^n(i+1, j, \text{max}z - 1) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i-1, j, \text{max}z - 1) - 2E_t^n(i, j, \text{max}z - 1) \right] \\
 & + \frac{\Delta z(v\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(v\Delta t + \Delta z)} \cdot \\
 & \left[E_t^n(i, j+1, \text{max}z) + E_t^n(i, j-1, \text{max}z) - \right. \\
 & \left. 2E_t^n(i, j, \text{max}z) + E_t^n(i, j+1, \text{max}z - 1) + \right. \\
 & \left. E_t^n(i, j-1, \text{max}z - 1) - 2E_t^n(i, j, \text{max}z - 1) \right]
 \end{aligned} \tag{3.34 ฉ}$$

3.8 การวิเคราะห์สายอากาศด้วยวิธี FDTD

3.8.1 พารามิเตอร์การกระจัดกระจาย

การวิเคราะห์ค่าพารามิเตอร์ของการกระจัดกระจาย (S- Parameters) จะใช้วิธีการวิเคราะห์สองครั้ง โดยการวิเคราะห์ครั้งแรกจะสร้างแบบจำลองของโครงสร้างให้มีความยาวเป็นอนันต์แล้วทำการวิเคราะห์หาสนามในโครงสร้างนั้นโดยตรง ส่วนครั้งที่สองจะสร้างแบบจำลองของโครงสร้างจริงที่ทำการวิเคราะห์แล้วทำการวิเคราะห์หาสนามจากโครงสร้างดังกล่าว [26] ซึ่งสนามที่วิเคราะห์ได้มาในครั้งนี้เป็นสนามรวมที่ประกอบไปด้วยสนามในโครงสร้าง และสนามที่สะท้อนออกมาจากโครงสร้าง จากนั้นก็นำสนามในโครงสร้างและสนามที่สะท้อนออกมาในแต่ละพอร์ตที่อยู่ในโดเมนเวลาทำการแปลงโดยใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ก็จะได้สนามอยู่ในโดเมนความถี่แล้วนำค่าสนามที่อยู่ในโดเมนความถี่เหล่านั้นมาคำนวณหาพารามิเตอร์การกระจัดกระจายต่อไป โดยสมการของพารามิเตอร์การกระจัดกระจายจะเป็นไปตามสมการ

$$S_{mn} = \frac{F[V_m(t)]}{F[V_n(t)]} \sqrt{\frac{Z_{0n}}{Z_{0m}}} \quad (3.35)$$

เมื่อ F คือ การกระทำผลการแปลงฟูริเยร์โดยที่ $m, n = 1, 2, \dots, N$ และ $V_m(t)$ กับ $V_n(t)$ เป็นแรงดันในโดเมนเวลาที่พอร์ต m และ n ส่วน Z_{0m} และ Z_{0n} เป็นอิมพีแดนซ์คุณลักษณะของสายส่งซึ่งต่ออยู่ที่ พอร์ต m และ n ตามลำดับ โดยคุณลักษณะของสายส่งจะมีค่า 50 โอห์ม และพารามิเตอร์การกระจัดกระจายจะแสดงดังสมการ

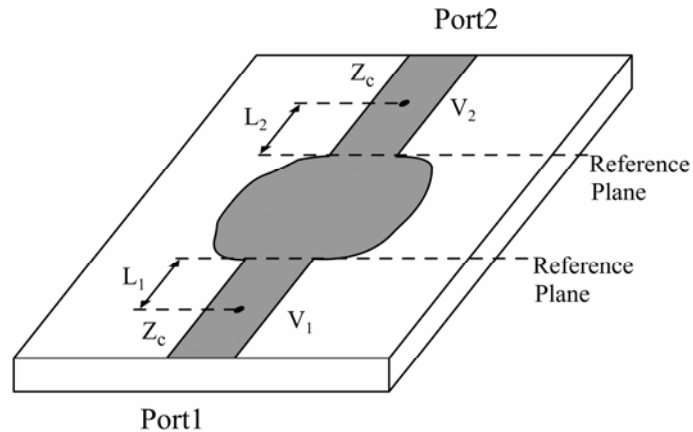
$$S_{11} = \frac{F[V_{1ref}(t)]}{F[V_{1inc}(t)]} \quad (3.36 ก)$$

$$S_{12} = \frac{F[V_{1trans}(t)]}{F[V_{2inc}(t)]} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \quad (3.36 ข)$$

$$S_{21} = \frac{F[V_{2trans}(t)]}{F[V_{1inc}(t)]} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (3.36 ค)$$

$$S_{22} = \frac{F[V_{2ref}(t)]}{F[V_{2inc}(t)]} \quad (3.36 ง)$$

เมื่อ $V_{i inc}(t)$ และ $V_{i ref}(t)$ ($i = 1, 2$) เป็นแรงดันในส่วนที่ส่งเข้าไปในโครงสร้างและแรงดันที่สะท้อนกลับตามลำดับของแต่ละพอร์ต และ $V_{i trans}(t)$ คือแรงดันที่ส่งมาที่พอร์ต i ซึ่งเป็นผลตอบสนองของสัญญาณมาจากพอร์ตอื่น



รูปที่ 3.5 วงจรความถี่สูงทั่วไปที่มีลักษณะการต่อแบบ 2 พอร์ต

ในรูปทั่วไปของพารามิเตอร์การกระจายจะอยู่ในรูปของคอมเพล็กซ์ซึ่งจะประกอบไปด้วยค่าของขนาดกัมเฟส ดังนั้นพารามิเตอร์การกระจายจะได้มาซึ่งสมการที่มีทั้งขนาดและเฟส

$$S_{11} = \frac{F[V_{1ref}(t)]}{F[V_{1inc}(t)]} \cdot e^{2\gamma_1 L_1} \quad (3.37 \text{ ก})$$

$$S_{12} = \frac{F[V_{1trans}(t)]}{F[V_{2inc}(t)]} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cdot e^{\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2} \quad (3.37 \text{ ข})$$

$$S_{21} = \frac{F[V_{2trans}(t)]}{F[V_{1inc}(t)]} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cdot e^{\gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2} \quad (3.37 \text{ ค})$$

$$S_{22} = \frac{F[V_{2ref}(t)]}{F[V_{2inc}(t)]} \cdot e^{2\gamma_2 L_2} \quad (3.37 \text{ ง})$$

โดยที่ L_1 และ L_2 เป็นระยะห่างระหว่างจุดสมมุติ (Observation Point) และระนาบเฟสอ้างอิง (Phase Reference Plane) โดยจะมีค่าของ γ_1 และ γ_2 ($\gamma = \alpha + j\beta$) เป็นค่าคงที่ของการแพร่กระจายคลื่นของสายส่งสัญญาณที่พอร์ต 1 และ พอร์ต 2

S พารามิเตอร์ที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์สายอากาศนั้นก็คือ S_{ij} พารามิเตอร์ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับแรงดันของสายอากาศ

3.8.2 อินพุตอิมพีแดนซ์และอัตราส่วนแรงดันคลื่นนิ่ง

ในการวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศนั้น อินพุตอิมพีแดนซ์ (Input Impedance) และอัตราส่วนแรงดันคลื่นนิ่ง (Voltage Standing Wave Ratio, VSWR) จัดเป็นสองพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญ ซึ่งจะเห็นได้ว่า FDTD เป็นวิธีการหนึ่งที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์คุณสมบัติของสายอากาศ และในการคำนวณอินพุตอิมพีแดนซ์ของสายอากาศจะใช้สมการคือ

$$Z_{in} = Z_c \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \quad (3.38)$$

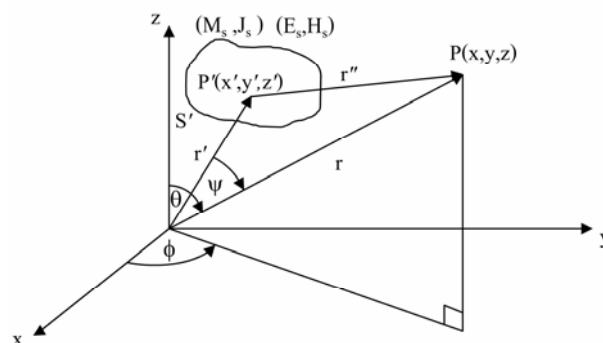
Z_c เป็นอิมพีแดนซ์คุณลักษณะของสายส่งสัญญาณโดยทั่วไป และค่าอินพุตอิมพีแดนซ์จะเป็นค่าแบบคอมเพล็กซ์ ที่ซึ่งจะมีทั้งค่าจริงและค่าจินตภาพ ในส่วนของสมการหาอัตราส่วนแรงดันคลื่นนิ่งนั้น สามารถที่จะพิจารณาหาจากสัมประสิทธิ์การสะท้อนกลับแรงดันของสายอากาศได้ดังสมการ

$$VSWR = \frac{1 + |S_{11}|}{1 - |S_{11}|} \quad (3.39)$$

3.8.3 แบบรูปการแผ่พลังงานสนามระยะไกลของสายอากาศ

ในการวิเคราะห์ในแบบวิธี FDTD นั้นไม่สามารถหาผลลัพธ์ของแบบรูปการแผ่พลังงานสนามระยะไกล (Far-Field Radiation Pattern) ได้โดยตรง เนื่องจากกริดของ FDTD จะคำนวณเฉพาะพื้นที่ของสนามระยะใกล้ (Near-Field) เท่านั้น โดยจะไม่สามารถคำนวณในขอบเขตของสนามระยะไกลได้ (Far Field) ดังนั้นในวิธี FDTD จึงต้องทำการแปลงผลการคำนวณของสนามระยะใกล้ไปเป็นสนามระยะไกล (Near-Field to Far-Field) [6]

เงื่อนไขการแผ่พลังงานของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจากพื้นที่ผิวปิด S' ของแหล่งกำเนิดแสดงดังรูปที่ 3.6 โดยการอ้างอิงหลักการของทฤษฎีสมมูลย์ทางผิวเพื่อหาค่าความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า $\vec{J}_s$ และความหนาแน่นของกระแสแม่เหล็ก $\vec{M}_s$ บนพื้นที่ S' เพื่อที่จะหาผลลัพธ์ของสนามระยะไกล

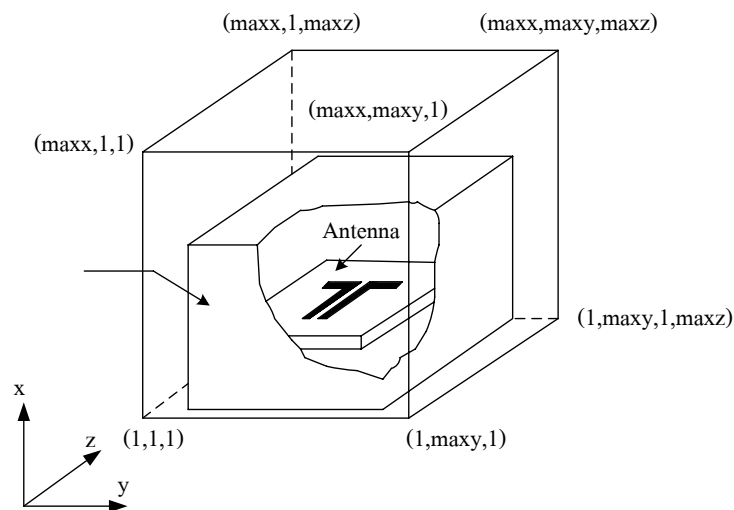


รูปที่ 3.6 ระบบพิกัดสามมิติสำหรับการแปลงสนามระยะใกล้เป็นสนามระยะไกล

พื้นที่ผิว S' ที่แสดงในรูปที่ 3.7 เป็นแหล่งกำเนิดสมมูลย์ที่แปลงสนามระยะใกล้เป็นสนามระยะไกล โดยแหล่งกำเนิดสมมูลย์นี้ถ้าเป็นการวิเคราะห์ด้วยวิธี FDTD จะให้นิยามเป็นกล่องเสมือน (Virtual Box) ในกริดของ FDTD ซึ่งแสดงดังรูปที่ 3.7 ตำแหน่งที่กำหนดให้เป็นกล่องเสมือนนั้นจะกำหนดให้เข้ามาในขอบเขตกริดของ FDTD ประมาณ 3-5 เซลล์จากขอบเขตนอกสุด ซึ่งจะทำให้ได้สมการความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า ($\vec{J}_s$) และ กระแสแม่เหล็ก ($\vec{M}_s$) ดังนี้

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad (3.40 \text{ ก})$$

$$\vec{M}_s = -\hat{n} \times \vec{E} \quad (3.40 \text{ ข})$$



รูปที่ 3.7 กล่องเสมือนสำหรับการแปลงสนามระยะใกล้เป็นสนามระยะไกล

ซึ่งความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็กดังสมการที่ (3.40 ก) และ (3.40 ข) จะได้มาจากสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ผิวของกล่องเสมือนทุกด้าน โดยในระบบพิกัดมุมฉากนั้นจะได้สมการของความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็กในแกน x, y และ z ตามสมการ

$$\vec{J}_s = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z} \quad (3.41 \text{ ก})$$

$$\vec{M}_s = M_x \hat{x} + M_y \hat{y} + M_z \hat{z} \quad (3.41 \text{ ข})$$

ในการหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสนามระยะไกลที่จุด P ดังรูปที่ 3.4 นั้นจะใช้ศักดาเวกเตอร์มาช่วยในการหา ซึ่งศักดาเวกเตอร์แม่เหล็กไฟฟ้าจะได้ดังสมการ

$$\vec{A} = \mu \iint_{S'} \frac{\vec{J}_s e^{-jkr''}}{4\pi r''} dS' \quad (3.42 \text{ ก})$$

$$\vec{F} = \varepsilon \iint_{S'} \frac{\vec{M}_s e^{-jkr''}}{4\pi r''} dS' \quad (3.42 \text{ ข})$$

ดังนั้นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่สนามระยะไกลจะได้สมการเป็น

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \frac{j\omega}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F} \quad (3.43 \text{ ก})$$

$$\vec{H} = -j\omega \vec{F} - \frac{j\omega}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (3.43 \text{ ข})$$

เมื่อค่า $r' \ll r$ ที่จุด P ของสนามระยะไกล

$$\begin{aligned} r'' &= \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \psi + r'^2} \\ &\cong r \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong r \left(1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\cong r - r' \cos \psi \end{aligned} \quad (3.44)$$

และจากสมการที่ (3.42 ก) และ (3.42 ข) สามารถเขียนศักดาเวกเตอร์แม่เหล็กไฟฟ้าใหม่ได้เป็น

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iint_{S'} \vec{J}_s e^{-jkr' \cos \psi} dS' \quad (3.45 \text{ ก})$$

$$\vec{F} = \varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \iint_{S'} \vec{M}_s e^{-jkr' \cos \psi} dS' \quad (3.45 \text{ ข})$$

เมื่อ

$$r' \cos \psi = r' \cdot \hat{r} = x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi + z' \cos \theta \quad (3.46)$$

จากสมการ (3.45 ก) และ (3.45 ข) ที่อยู่เหนือของอินทิกรัลนั้นจะให้นิยามใหม่เป็นค่าของ $\vec{N}$ และ $\vec{L}$ ดังสมการ

$$\vec{N} = \iint_{S'} \vec{J}_s e^{jkr' \cos \psi} dS' \quad (3.47 \text{ ก})$$

$$\vec{L} = \iint_{S'} \vec{M}_s e^{jkr' \cos \psi'} dS' \quad (3.47 \text{ ข})$$

และจะได้ความสัมพันธ์ของศักดาเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{F}$

$$\vec{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{N} \quad (3.48 \text{ ก})$$

$$\vec{F} = \varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \vec{L} \quad (3.48 \text{ ข})$$

นำสมการที่ (3.48) ไปใส่ไว้ในสมการ (3.43) จะได้ซึ่งสมการในการแผ่พลังงานสนามระยะไกล ดังนี้

$$E_\theta = \eta H_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\eta N_\theta + L_\phi) \quad (3.49 \text{ ก})$$

$$E_\phi = \eta H_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (-\eta N_\theta + L_\theta) \quad (3.49 \text{ ข})$$

โดยจะมีค่าของ

$$N_\theta = \iint_{S'} (J_x \cos \theta \cos \phi + J_y \cos \theta \sin \phi - J_z \sin \theta) e^{jkr' \cos \phi} dS' \quad (3.50 \text{ ก})$$

$$N_\phi = \iint_{S'} (-J_x \sin \phi + J_y \cos \phi) e^{jkr' \cos \phi} dS' \quad (3.50 \text{ ข})$$

$$L_\theta = \iint_{S'} (M_x \cos \theta \cos \phi + M_y \cos \theta \sin \phi - M_z \sin \theta) e^{jkr' \cos \phi} dS' \quad (3.50 \text{ ก})$$

$$L_\phi = \iint_{S'} (-M_x \sin \phi + M_y \cos \phi) e^{jkr' \cos \phi} dS' \quad (3.50 \text{ ข})$$

ในการวิเคราะห์สนามระยะไกลในกล่องเสมือน ดังสมการที่ได้กล่าวมานั้นจะวิเคราะห์อยู่ในโดเมนเวลา ดังนั้นจึงสามารถใช้ผลการแปลงฟูริเยร์ไม่ต่อเนื่อง (Discrete Fourier Transform : DFT) ซึ่งมีสมการทั่วไปเป็น

$$E(\omega) = \int_0^{+\infty} E(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.51 \text{ ก})$$

$$H(\omega) = \int_0^{+\infty} H(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.52 \text{ ข})$$

เมื่อ $\omega = 2\pi f$ และ f คือความถี่ที่จะใช้คำนวณหาการแผ่พลังงานระยะไกลโดยสมการหาการแผ่พลังงานระยะไกลในโดเมนความถี่ของ FDTD มีสมการดังนี้

$$E(\omega) = \sum_{n=0}^{NSTEP} E(n\Delta t) \cdot e^{-j\omega n\Delta t} \Delta t \quad (3.53 \text{ ก})$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{NSTEP} H(n\Delta t) \cdot e^{-j\omega n\Delta t} \Delta t \quad (3.53 \text{ ข})$$

3.9 การพัฒนาคุณสมบัติต่าง ๆ ของสายอากาศ

3.9.1. สูตรการหาอัตราขยาย (gain) ของสายอากาศ

อัตราขยายเป็นสิ่งที่แสดงคุณสมบัติอย่างหนึ่งของ สิ่งที่จะวัดความสามารถของสายอากาศในเชิงประสิทธิภาพ gain ของสายอากาศจะสัมพันธ์กับไดเรกทิวิตี (directivity) นั่นคือจะเป็นการวัดที่คิดจากประสิทธิภาพของสายอากาศ เช่นเดียวกับความสามารถในการชี้ทิศทางของสายอากาศ ทั้งนี้ directivity จะเป็นการวัดรายละเอียดเพียงแก่คุณสมบัติในการชี้ทิศทางของสายอากาศที่ถูกควบคุมโดย pattern ของสายอากาศนั้น

Absolute gain ของสายอากาศในทิศทางที่กำหนด คือ อัตราส่วนระหว่างความเข้มในทิศทางที่กำหนด หาด้วยความเข้มในการแพร่กระจายคลื่น [5] ซึ่งจะหาได้ถ้ากำลังงานที่ป้อนให้สายอากาศถูกแพร่ออกไปทุกทิศทาง ความเข้มในการแพร่กระจายคลื่นจะตรงกันกับกำลังงานที่แพร่กระจายออกไปทุกทิศทุกทาง โดยมีค่าเท่ากับกำลังงานที่ป้อนให้สายอากาศหารด้วย 4π

$$G = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (3.54)$$

ในกรณีตามที่กล่าวมาทั้งหมดนี้จะเกี่ยวกับ relative gain ซึ่งถูกกำหนดว่า เป็นอัตราส่วนของ power gain ในทิศทางที่กำหนด หาด้วย power gain ของสายอากาศอ้างอิงในทิศทางที่อ้างอิง ซึ่งในที่นี้จะใช้สายอากาศอ้างอิงที่เป็น isotropic source ที่ไม่มีการสูญเสีย

$$G = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in}(\text{lossless isotropic source})} \quad (3.55)$$

โดยปกติเมื่อไม่ได้กำหนดทิศทาง power gain จะคิดจากทิศทางที่มีการแพร่กระจายคลื่นสูงสุด จะเขียนผลรวมของกำลังงานที่แพร่กระจายได้ดังสมการ (3.55) สำหรับค่าของกำลังงานแพร่กระจาย P_{rad} สามารถหาได้จาก

$$P_{rad} = e_{cd} P_{in} \quad (3.56)$$

เมื่อ e_{cd} คือ ค่าประสิทธิภาพในการแพร่กระจายของสายอากาศ ดังนั้นสามารถเขียนสูตรอัตราขยายได้ดังนี้

$$G(\theta, \phi) = e_{cd} \left[4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{rad}} \right] \quad (3.57)$$

หรือ

$$G(\theta, \phi) = e_{cd} D(\theta, \phi) \quad (3.58)$$

เมื่อ $D(\theta, \phi)$ เป็นค่าของ directivity ซึ่งหาได้จากสูตร

$$D = \frac{U}{U_o} = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (3.59)$$

ดังนั้นสามารถหาเกณฑ์ของสายอากาศในหน่วย dB ได้จากสมการ (3.60)

$$G(dB) = 10 \log_{10}(e_{cd} D(\theta, \phi)) \quad (3.60)$$

สำหรับการหาค่าของ P_{rad} นั้นเราจะใช้สูตรในสมการที่ (3.61)

$$P_{rad} = B_o \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi f(\theta) g(\phi) \sin \theta d\theta \right] d\phi \quad (3.61)$$

โดยค่า B_o นี้จะเป็นค่าคงที่

สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ (3.62)

$$P_{rad} = B_o \int_0^{2\pi} g(\phi) \left[\int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta \right] d\phi \quad (3.62)$$

ซึ่งสามารถนำเอาสูตรที่อยู่ในรูปอินทิกรัลของมุม θ_i มาเขียนให้อยู่ในรูปของการประมาณค่าได้ ดังสมการที่ (3.63)

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta = \sum_{i=1}^N [f(\theta_i) \sin \theta_i] \Delta \theta_i \quad (3.63)$$

เมื่อ

$$\Delta\theta_i = \frac{\pi}{N} \quad (4)$$

และ

$$\theta_i = i \left(\frac{\pi}{N} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.65)$$

สำหรับสูตรที่อยู่ในรูปอินทิกรัลของมุม ϕ_j เมื่อนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของการประมาณค่าก็จะได้
ดังสมการที่ (3.66)

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\phi = \sum_{j=1}^M g(\phi_j) \Delta\phi_j \quad (3.66)$$

$$\Delta\phi_j = \frac{\pi}{N} \quad (3.67)$$

$$\phi_j = j \left(\frac{2\pi}{N} \right), \quad 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.68)$$

ดังนั้นจากสมการที่ได้เมื่อนำมารวมกันจะได้

$$P_{rad} = Bo \left(\frac{\pi}{N} \right) \left(\frac{2\pi}{M} \right) \sum_{j=1}^M \left\{ g(\phi_j) \left[\sum_{i=1}^N f(\theta_i) \sin \theta_i \right] \right\} \quad (3.69)$$

เมื่อ

$$U = BoF(\theta, \phi) \quad (3.70)$$

ดังนั้นจะได้สูตรของการหาค่า P_{rad} ดังนี้

$$P_{rad} = Bo \left(\frac{\pi}{N} \right) \left(\frac{2\pi}{M} \right) \sum_{j=1}^M \left[\sum_{i=1}^N F(\theta, \phi) \sin \theta_i \right] \quad (3.71)$$

$$F(\theta, \phi) = \frac{f^2}{480\pi} \left| L\phi + \eta N\theta \right|^2 + \left| L\theta - \eta N\phi \right|^2 \quad (3.72)$$

จากสูตรการหาค่าของ P_{rad} สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของโปรแกรมได้ โดยลักษณะการเขียนเป็นโปรแกรมนี้นี้จะเอาค่าของสมการที่ (3.72) มาแทนในสมการที่ (3.71) แล้วเขียนเป็นลักษณะของโปรแกรมเพื่อหาค่าของ P_{rad} ในลักษณะของการหาค่าผลบวกรวมโดยค่าของ j และ i จะเริ่มเพิ่มค่าขึ้นในแต่ละรอบจาก 0 ถึง 360 จนครบก็จะได้ออกค่าของ P_{rad} ในแต่ละระนาบออกมา ดังนี้

```

DO j=0,360
    prad_xy111=0
    prad_xz111=0
    prad_yz111=0
    prad_xz11=0
    prad_yz11=0
DO i=0,360
    prad_xy11=(abs(lph(1,j)+eta*nth(1,i))**2
&               +abs(lth(1,i)-eta*nph(1,j))**2)*sin((i*pi)/360)
    prad_xz11=(abs(lph(2,j)+eta*nth(2,i))**2
&               +abs(lth(2,i)-eta*nph(2,j))**2)*sin((i*pi)/360)
    prad_yz11=(abs(lph(3,j)+eta*nth(3,i))**2
&               +abs(lth(3,i)-eta*nph(3,j))**2)*sin((i*pi)/360)
    prad_xy111=prad_xy111+prad_xy11
    prad_xz111=prad_xz111+prad_xz11
    prad_yz111=prad_yz111+prad_yz11
ENDDO
    prad_xy1=prad_xy1+prad_xy111
    prad_xz1=prad_xz1+prad_xz111
    prad_yz1=prad_yz1+prad_yz111
ENDDO
prad_xy=(Pi**2/(180*360))*((freq*1e9)**2/(480*pi*c**2))*prad_xy1
prad_xz=(Pi**2/(180*360))*((freq*1e9)**2/(480*pi*c**2))*prad_xz1
prad_yz=(Pi**2/(180*360))*((freq*1e9)**2/(480*pi*c**2))*prad_yz1

```

สำหรับค่าของ directivity ของสายอากาศ ก็คือ ค่าอัตราส่วนของความเข้มในการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศในทิศทางที่กำหนด หาด้วยความเข้มในการแพร่กระจายคลื่นเฉลี่ยตลอดทุกทิศทาง ซึ่งความเข้มในการแพร่กระจายคลื่นเฉลี่ยจะเท่ากับพลังงานทั้งหมดที่แพร่กระจายออกจากสายอากาศหารด้วย 4π ถ้าไม่ได้กำหนดทิศทางจะใช้ทิศที่มีความเข้มของการแพร่กระจายคลื่นสูงสุด ดังสมการที่ (3.73)

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (3.73)$$

เมื่อ U = ค่าความเข้มของการแพร่กระจายคลื่น

$$U = \frac{f^2}{480\pi c^2} |L\phi + \eta N\theta|^2 + |L\theta - \eta N\phi|^2 \quad (3.74)$$

สำหรับค่าของ directivity นี้เราจะใช้สมการที่ (3.73) มาใช้ในการคำนวณ ส่วนค่าของ P_{rad} นั้นเราจะเอาค่าที่ได้จากการหาในสมการที่ (3.71) และ (3.72) มาใช้ร่วมในการคำนวณหาค่าของ directivity ด้วย ซึ่งสามารถเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังรูปแบบข้างล่างนี้

```
k = 2*Pi*freq*1e+9
coss=k**2/(480*pi**2)
DO i=0,360
    direc_xy(i)=(coss*(abs(lph(1,i)+eta*nth(1,i))**2
&                +abs(lth(1,i)-eta*nph(1,i))**2))/prad_xy
    direc_xz(i)=(coss*(abs(lph(2,i)+eta*nth(2,i))**2
&                +abs(lth(2,i)-eta*nph(2,i))**2))/prad_xz
    direc_yz(i)=(coss*(abs(lph(3,i)+eta*nth(3,i))**2
&                +abs(lth(3,i)-eta*nph(3,i))**2))/prad_yz
ENDDO
```

สำหรับค่าของ directivity นี้ จะใช้สมการที่ (3.73) มาใช้ในการคำนวณ ส่วนค่าของ P_{rad} นั้นจะเอาค่าที่ได้จากการหาในสมการที่ (3.71) และ (3.72) มาใช้ร่วมในการคำนวณหาค่าของ directivity เมื่อสมมุติให้สายอากาศเป็นแบบ lossless จะทำให้ค่าของ $e_{cd} = 1$ ดังนั้นจากสมการที่ (3.58) จะได้สมการหาอัตราขยาย (Gain) ดังสมการที่ (3.76) เมื่อแทนค่า $e_{cd} = 1$

$$G(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) \quad (3.75)$$

และหาเกณฑ์ของสายอากาศในหน่วย dB ได้ดังสมการที่ (3.76) เมื่อแทนค่า $e_{cd} = 1$

$$G(\theta, \phi)_{dB} = 10 \log(D(\theta, \phi)) \quad (3.76)$$

ดังนั้นจึงนำเอาสมการที่ (3.76) มาเขียนเป็นโปรแกรมโดยกำหนดให้ค่า $e_{cd} = 1$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{gain_xy} &= 10 * \log_{10}(\text{direc_xy}(i) * e_{cd}) \\ \text{gain_xz} &= 10 * \log_{10}(\text{direc_xz}(i) * e_{cd}) \\ \text{gain_yz} &= 10 * \log_{10}(\text{direc_yz}(i) * e_{cd}) \end{aligned}$$

3.9.2 การหาค่าประสิทธิภาพของสายอากาศ (Antenna Efficiency)

ประสิทธิภาพทั้งหมดของสายอากาศ คือ e_o ใช้อธิบายถึงความสูญเสียที่ขั้วอินพุตและภายในโครงสร้างของสายอากาศ ซึ่งการสูญเสียนี้อาจหลีกเลี่ยงไม่ได้ [9] จะเห็นได้ว่าการสูญเสียอาจเกิดขึ้นได้เนื่องจาก

1. การสะท้อนกลับเนื่องจากความไม่สมพจน์ (Mismatch) กันระหว่างสายส่ง (Transmission Line) กับสายอากาศ
 2. การสูญเสียทั้งในตัวนำและฉนวน ($I^2 R$)
- โดยทั่วไปแล้วประสิทธิภาพทั้งหมด คำนวณได้จาก

$$e_o = e_r e_c e_d \quad (3.77)$$

เมื่อ e_o = ประสิทธิภาพทั้งหมด

e_r = ประสิทธิภาพเกี่ยวกับการสะท้อนกลับ $= (1 - |\Gamma|^2)$

e_c = ประสิทธิภาพของตัวนำ

e_d = ประสิทธิภาพของฉนวน

Γ = สัมประสิทธิ์การสะท้อนของศักดาไฟฟ้าที่ขั้วของสายอากาศ

$[\Gamma = (Z_{in} - Z_o) / (Z_{in} + Z_o)]$ เมื่อ Z_{in} = อิมพีแดนซ์ของสายอากาศ

Z = อิมพีแดนซ์ลักษณะ (Characteristic Impedance) ของสายส่ง

ปกติ e_c และ e_d คำนวณหาได้ลำบาก ส่วนมากมักหาได้จากการทดลองแต่ถึงกระนั้นก็แยก e_c จาก e_d ไม่ออก ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงเขียน (3.34) ใหม่เป็น

$$e_o = e_r e_{cd} = e_{cd} (1 - |\Gamma|^2) \quad (3.78)$$

เมื่อ $e_{cd} = e_c e_d$ = ประสิทธิภาพในการแพร่กระจายคลื่นของสายอากาศ

ซึ่งนำมาเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังนี้

$$er=(1-(abs((zi-z0)/(zi+z0))))**2)$$

$$eo=(er*ecd)*100$$

3.9.3 สูตรการหาค่าของแบนด์วิธ (bandwidth)

แบนด์วิธของสายอากาศ คือ ย่านความถี่ที่สายอากาศสามารถใช้งานได้ดี โดยจะต้องมีคุณสมบัติตรงตามมาตรฐานที่กำหนด สามารถพิจารณาแบนด์วิธว่าเป็นย่านความถี่ที่ลิดจากด้านข้างของสองด้านของจุดกึ่งกลางความถี่ใช้งาน

$$Bw = f_{high} - f_{low} \quad (3.79)$$

$$\text{Fractional bandwidth} = \frac{(f_{high} - f_{low})}{f_c} \quad (3.80)$$

และสามารถนำมาเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังนี้

$$fcc=(fH+fL)/2$$

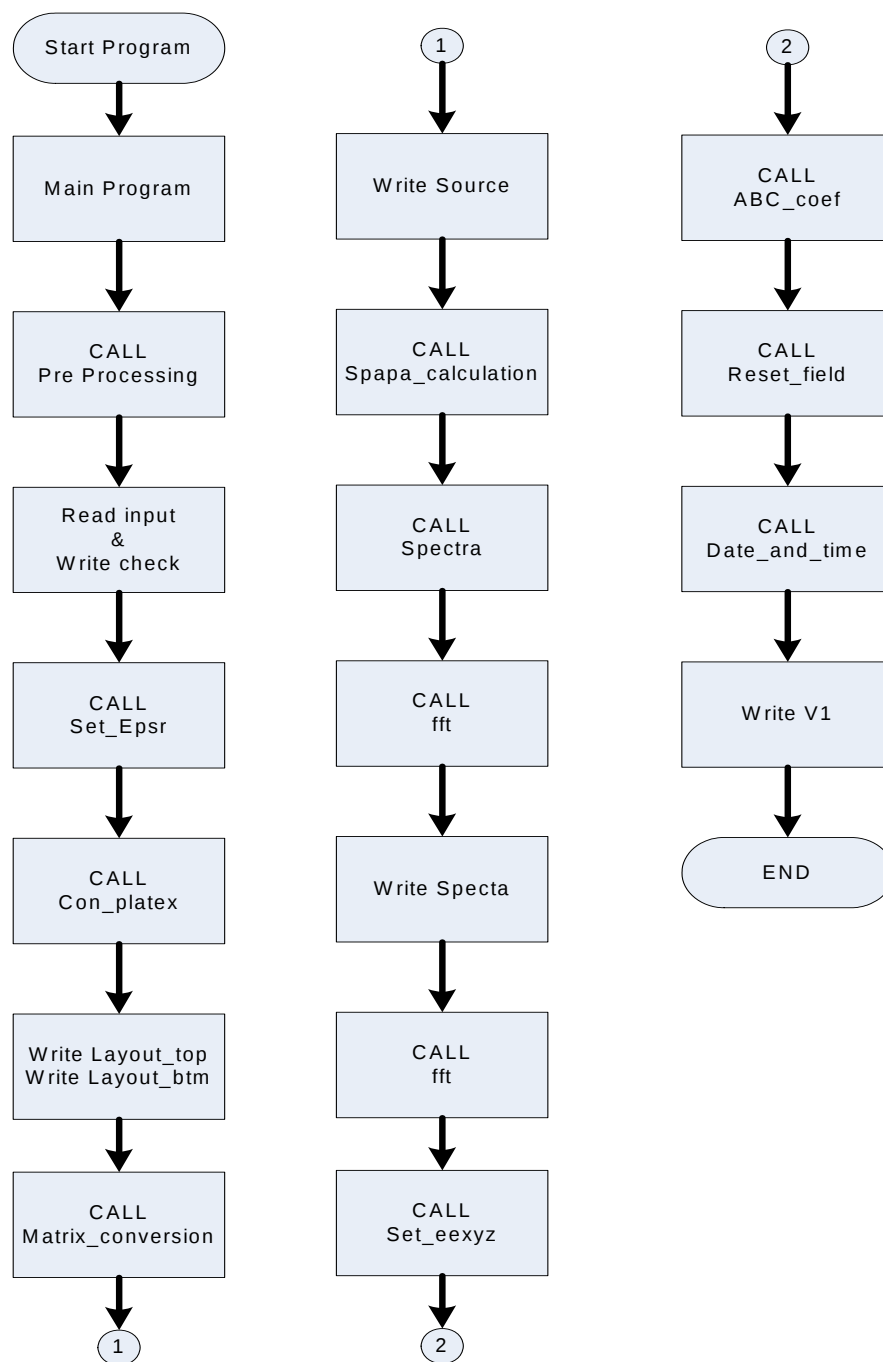
$$Bw=fH-fL$$

$$FBw=(Bw/fcc)*100$$

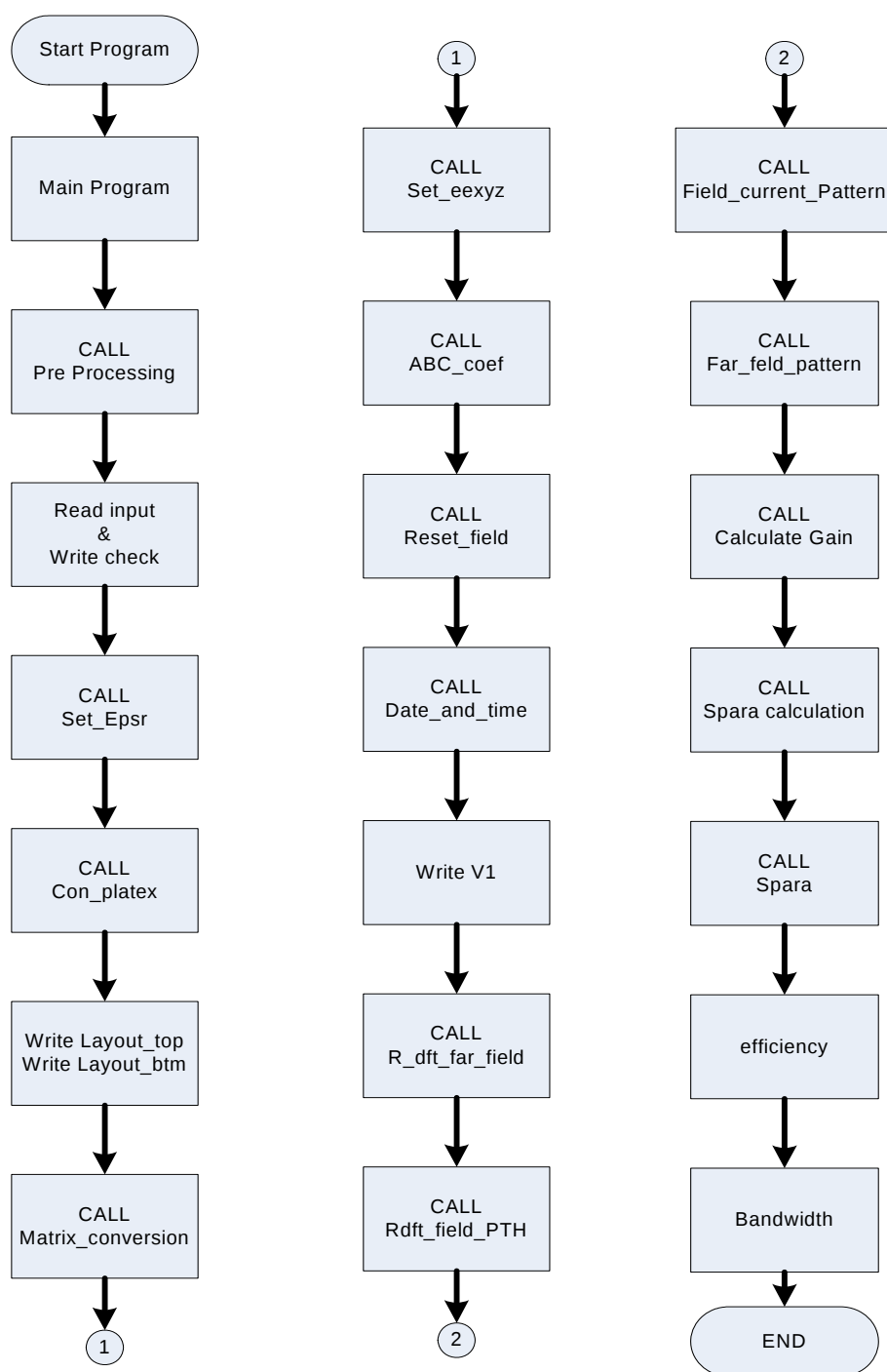
3.10 การทำงานของโปรแกรม FDTD

การทำงานของโปรแกรม FDTD จะใช้วิธีการวิเคราะห์สองครั้ง โดยการวิเคราะห์ครั้งแรกจะเป็นการสร้างแบบจำลองของโครงสร้างให้มีความยาวเป็นอนันต์ แล้วทำการวิเคราะห์หาสนามไฟฟ้าและ สนามแม่เหล็ก ในโครงสร้างนั้นโดยตรง ส่วนครั้งที่สองจะสร้างแบบจำลองของโครงสร้างจริงที่ต้องการทำการทำการวิเคราะห์ แล้วทำการวิเคราะห์หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจากโครงสร้างดังกล่าว โดยมีลำดับการทำงานดังนี้ การทำงานของ โปรแกรมในการวิเคราะห์ครั้งแรกเริ่มจาก main program จะทำการอ่านอินพุตจาก file “input.dat” พร้อมกำหนดตัวแปรต่าง ๆ จากนั้นจะทำการกำหนดค่าเริ่มต้นของ x, y, z และกำหนดค่าไดอิเล็กตริก จากนั้นทำการบันทึกโครงสร้างของสายอากาศและกำหนดค่าขอบเขตเป็นเมตริกจากนั้นทำการคำนวณเพื่อหาค่า V1 เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่สอง การทำงานของโปรแกรมในการวิเคราะห์ครั้งที่สอง ในขั้นแรกจะทำงานเหมือนการวิเคราะห์ครั้งแรกโดยจะทำการอ่านอินพุตจาก file “input.dat” และทำการกำหนดและตรวจสอบค่าที่จำเป็นที่ใช้ในโปรแกรม จากนั้นทำการบันทึกโครงสร้างของสายอากาศและกำหนดค่าขอบเขตเป็นเมตริก จากนั้นจะทำการคำนวณค่าของสนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก การ

สูญเสียจากการสะท้อนกลับ (s_{11}) อัตราขยาย และ การคำนวณหาค่าแบนด์วิดธ์ของสายอากาศ จนจบการทำงาน



รูปที่ 3.8 แสดงลำดับขั้นตอนการทำงานของ INPUT ครั้งที่ 1



รูปที่ 3.9 แสดงลำดับขั้นตอนการทำงานของ INPUT ครั้งที่ 2