

บทที่ 3

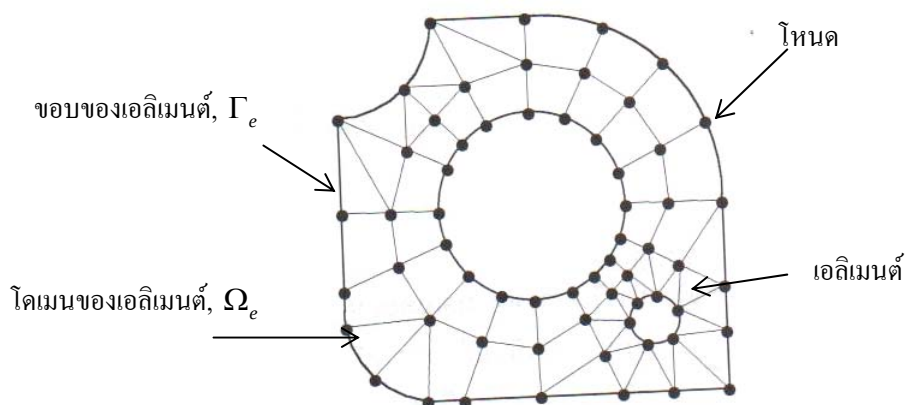
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะประกอบด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การแก้ปัญหาทางความร้อนและไฟฟ้าแบบ 3 มิติ กระบวนการแก้ปัญหาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ และการประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) หรือ FEM เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขชนิดหนึ่งสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ในการแก้ปัญหาหนึ่งๆด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลายๆชิ้นที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (Element) ซึ่งสามารถจำลองรูปแบบที่เที่ยงตรง ดังรูปที่ 3.1 ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะต้องประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมา การหาค่าผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solution) จะประกอบด้วยค่าต่างๆ เป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งเราไม่สามารถหาค่าผลเฉลยได้ จึงต้องเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นอนันต์ให้เป็นจำนวนที่นับได้ (Finite) ทำการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างกัน หลักการทางไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มจากการพิจารณาเอลิเมนต์ที่ละเอลิเมนต์ ทำการสร้างสมการให้แต่ละเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาประกอบเข้าด้วยกัน รวมเป็นระบบสมการชุดใหญ่ จากนั้นทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ที่ให้มาลงในสมการชุดใหญ่ แล้วจึงทำการแก้สมการและจะเกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งต่างๆของปัญหานั้น



รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์และโหนด

กระบวนการวิเคราะห์ปัญหาใดๆโดยทั่วไปด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอนหลักๆ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ กระบวนการขั้นตอนแรกนี้ โดยปกติจะใช้เวลามากในทางปฏิบัติ เพราะจำเป็นต้องสร้างรูปร่างของปัญหา (Geometry) อย่างถูกต้องขึ้นมาก่อน รูปร่างของปัญหาอาจประกอบด้วยส่วนเว้าส่วนโค้งที่มีความซับซ้อนในขั้นตอนนี้จึงจำเป็นต้องอาศัยความรู้อันประกอบไปด้วยประสบการณ์เป็นอย่างมาก

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ย่อยที่แบ่งบนโดเมนของปัญหานั้นอาจเป็นเอลิเมนต์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ หากแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ตัวไม่รู้ค่า (Unknowns) จะอยู่ที่มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมนั้น ซึ่งเรียกกันว่าจุดต่อ (Node) การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์จะสอดคล้องกับลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าที่สมมติขึ้นบนเอลิเมนต์นั้นๆ เช่นหากเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อที่มุมทั้งสามแล้ว ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นั้นจะถูกสมมติให้อยู่ในรูปแบบของแผ่นเรียบ เป็นต้น แต่หากเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่มุมทั้งสี่ ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมนี้อาจไม่เรียบแต่โค้งไปโค้งมาได้ ดังนั้นการเลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดต่างๆกันจึงมีผลโดยตรงกับผลลัพธ์ที่จะคำนวณได้

ขั้นตอนที่ 3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่วิเคราะห์อยู่นั้นจะถูกเปลี่ยนไปเป็นสมการทางพีชคณิตที่เรียกกันว่า สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะถูกสร้างขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์เนื่องจากเอลิเมนต์ต่างมีขนาดไม่เท่ากัน กระบวนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์นี้นับเป็นหัวใจหลักของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพราะหากมีความเข้าใจในขั้นตอนนี้แล้วก็สามารถประยุกต์ใช้วิธีการทำนองเดียวกันนี้ในการแก้ปัญหาคณิตอื่นๆได้

ขั้นตอนที่ 4 การรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าด้วยกันแล้วแก้ระบบสมการใหญ่ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการทางพีชคณิตซึ่งได้ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่แล้วจำเป็นต้องนำมารวมกันอย่างถูกต้องและมีหลักการ การประกอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แต่ละสมการเข้าด้วยกัน จะก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้นๆก่อนแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ชุดนั้นเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อ ซึ่งผลลัพธ์ที่จุดต่อเหล่านี้อาจแทนค่าอุณหภูมิหากเป็นการวิเคราะห์ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 5 การคำนวณหาค่าอื่นๆที่เหลือ จากนั้นจึงเป็นการหาค่าอื่นๆที่ต้องการทราบเพื่อที่จะทำให้ปัญหานั้นได้รับการวิเคราะห์โดยสมบูรณ์ เช่นในการแก้ปัญหาด้านความร้อนเมื่อทราบอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆแล้วก็จะสามารถคำนวณหาปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านได้

3.3 การแก้ปัญหาทางความร้อนและไฟฟ้าแบบ 3 มิติ

ในการใช้ทฤษฎีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ในการประมวลผล ในงานวิจัยเป็นการใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์รูปแบบของเมทริกซ์ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ และไฟฟ้า ในสมการรูปแบบเมทริกซ์ที่ใช้ ดังนี้

3.3.1 การแก้ปัญหาทางความร้อน

จากสมการ Bioheat equation พิจารณาทางด้านความร้อนเพียงอย่างเดียว

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T = 0 \quad (3.1)$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$ เมื่อ T_0 = อุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุ
สร้างสมการไฟไนต์สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย m จุดต่อ (วิธีถ่วงน้ำหนักเศษค้ำ) []

ความหมายของตัวแปรที่ใช้ในหัวข้อ

R = เศษตกค้ำ

W = ฟังก์ชันน้ำหนัก

N_i = ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

$[C]$ = เมทริกซ์ความร้อนจำเพาะ

$\{Q_c\}$ = โหลดเวกเตอร์อื่นเนื่องมาจากการนำความร้อน

$[K_c]$ = เอลิเมนต์ของการนำความร้อน

$\{T\}$ = เวกเตอร์อุณหภูมิที่โหนด

$\left\{ \dot{T} \right\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่โหนดโดยสัมพันธ์กับเวลา

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R d\Omega = 0 \quad i=1,2,3,\dots,m \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \Phi_i) d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \Phi_i) d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

จากสมการที่ 3.3 ในพจน์แรกจะเกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์ $\Omega^{(e)}$ ในพจน์ที่ 2 จะเป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot k \nabla T \right) d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

แทน ∇ ด้วย $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ ดังนั้น สมการที่ 3.4 จะถูกทำให้้อยู่ในสมการที่ 3.5 และ 3.6 กำหนดให้ k เป็นค่าคงที่

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right) d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} W_i \left(\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right) d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ 3.6 โดยใช้ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss's theorem)

$$\int_{\Omega^{(e)}} x (\nabla \cdot \vec{Y}) d\Omega = \int_{\Gamma^{(e)}} x (\vec{Y} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega^{(e)}} x (\nabla x \cdot \vec{Y}) d\Omega \quad (3.7)$$

ทำการเปรียบเทียบ $\int_{\Omega^{(e)}} x (\nabla \cdot \vec{Y}) d\Omega$ กับพจน์ที่ 2 ของสมการที่ 3.6 จะได้ดังนี้

$$x = W_i \quad (3.8)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (3.9)$$

$$\vec{Y} = k \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + k \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} + k \frac{\partial T}{\partial z} \hat{k} \quad (3.10)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad (\nabla \cdot \vec{Y}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) \quad (3.11)$$

จาก $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$ ดังนั้น

$$\vec{Y} \cdot \hat{n} = k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z \quad (3.12)$$

$$x(\vec{Y} \cdot \hat{n}) = W_i \left(k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) \quad (3.13)$$

$$\nabla x = \frac{\partial W_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \hat{k} \quad (3.14)$$

$$\nabla x \cdot \vec{Y} = \frac{\partial W_i}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.15)$$

แทน $W_i = N_i$ ลงในสมการที่ 3.6

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} N_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \\ + \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} N_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z} \right) d\Omega = \\ \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left(k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

สมมติลักษณะผลเฉลยโดยประมาณในรูปแบบดังนี้

$$T(x, y, z, t) = [N(x, y, z)] \{T(t)\} \quad (3.18)$$

กำหนด

$$N_i = \left\{ N \right\}_{(mx1)} [N]_{mx1}, \frac{\partial T}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{(1xm)} \{T\}_{(mx1)}, \frac{\partial T}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{(1xm)} \{T\}_{(mx1)}, \frac{\partial T}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{(1xm)} \{T\}_{(mx1)} \quad (3.19)$$

แทนสมการที่ลงในสมการที่ 3.17

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} \rho c \{N\} [N] d\Omega \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} k \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} k \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} k \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) d\Omega \{T\} \\ = \int_{\Gamma^{(e)}} N \left(k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.20)$$

กำหนดให้

$$[C] = \int_{\Omega^{(e)}} \rho c \{N\} [N] d\Omega \quad (3.21)$$

$$\{\dot{T}\} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} \quad (3.22)$$

$$[K_c] = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} k \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} k \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} k \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) d\Omega \quad (3.23)$$

$$\{Q_c\} = \int_{\Gamma^{(e)}} N \left(k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \quad (3.24)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทางความร้อนที่อยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$[C] \{\dot{T}\} + [K_c] \{T\} = \{Q_c\} \quad (3.25)$$

3.3.2 การแก้ปัญหทางไฟฟ้า

จากสมการลาปลาซ (Laplace equation) ได้นำมาใช้ในการหาการกระจายตัวของแรงดัน

$$\nabla \cdot \sigma \nabla V = 0 \quad (3.26)$$

สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบไปด้วย m จุด (วิธีถ่วงน้ำหนักเศษค้ำง)

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

ความหมายของตัวแปรที่ใช้ในหัวข้อ

$\{I\}$ = โหลดแวกเตอร์อื่นเนื่องมาจากการไหลของกระแสที่โหนด

$[K_v]$ = เอลิเมนต์ของการนำไฟฟ้า

$\{V\}$ = แวกเตอร์แรงดันที่โหนด

σ = สภาพการนำไฟฟ้า

ทำการอินทิเกรตสมการที่ 3.27 โดยใช้ทฤษฎีของเกาส์ (Gauss's theorem)

$$x = W_i \quad (3.28)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (3.29)$$

$$\vec{Y} = \sigma \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (3.30)$$

$$(\nabla \cdot \vec{Y}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) \quad (3.31)$$

เนื่องจาก $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$ ดังนั้น

$$\vec{V} \cdot \hat{n} = \sigma \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} n_z \quad (3.32)$$

$$x(\vec{V} \cdot \hat{n}) = W_i \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right) \quad (3.33)$$

$$\nabla x = \frac{\partial W_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \hat{k} \quad (3.34)$$

$$\nabla x \cdot \vec{Y} = \frac{\partial W_i}{\partial x} \sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W_i}{\partial z} \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3.35)$$

แทน $W_i = N_i$ ลงในสมการที่ 3.27

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad \text{เมื่อ } i=1,2,3,\dots,m \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^{(e)}} N_i \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial z} \right\} \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad \text{เมื่อ } i=1,2,3,\dots,m \end{aligned} \quad (3.37)$$

กำหนด

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{(1 \times m)} \{V\}_{(m \times 1)}, \frac{\partial V}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{(1 \times m)} \{V\}_{(m \times 1)}, \frac{\partial V}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{(1 \times m)} \{V\}_{(m \times 1)} \quad (3.38)$$

แทนสมการที่ 3.38 ลงในสมการที่ 3.37

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \sigma \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \sigma \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \sigma \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) d\Omega \{V\} \\ = \int_{\Gamma^{(e)}} \{N\} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.39)$$

กำหนดให้

$$[K_v] = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \sigma \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \sigma \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] + \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \sigma \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) d\Omega \quad (3.40)$$

$$[I] = \int_{\Gamma^{(e)}} \{N\} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} n_x + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} n_y + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \quad (3.41)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทางไฟฟ้าที่อยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$[K_v] \{V\} = \{I\} \quad (3.43)$$

ทำการจัดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ทางความร้อนและไฟฟ้า

$$\begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_c] & [0] \\ [0] & [K_v] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q_c\} \\ \{I\} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

เมื่อ

$[C]$ = เมตริกซ์ของความร้อนจำเพาะ

$[K_c]$ = เอลิเมนต์ของการนำความร้อน

$[K_V]$ = เอลิเมนต์ของการนำไฟฟ้า

$\{T\}$ = เวกเตอร์ของอุณหภูมิที่โหนด

$\{\dot{T}\}$ = เวกเตอร์การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่โหนดโดยสัมพันธ์กับเวลา

$\{V\}$ = เวกเตอร์แรงดันที่โหนด

$\{Q_C\}$ = โหลดเวกเตอร์อื่นเนื่องมาจากความนำความร้อน

$\{I\}$ = โหลดเวกเตอร์อื่นเนื่องมาจากการไหลของกระแสที่โหนด

จากสมการที่ 3.44 เป็นสมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปทั่วไปที่มีความสัมพันธ์ของความร้อนและไฟฟ้า ซึ่งการหาผลเฉลยสามารถทำได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และทำการประมวลผลโดยใช้คอมพิวเตอร์ ในลักษณะการคำนวณจะแบ่งโดยการคำนวณทางไฟฟ้าเสียก่อน และการนำผลการคำนวณที่ได้ทำการคำนวณทางความร้อน หลังจากได้ผลการคำนวณทางความร้อนแล้วจึงนำไปในการประมวลผลทางไฟฟ้าต่อไป

3.4 กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์

กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆ 3 ขั้นตอนดังนี้

1. กระบวนการขั้นต้น (pre-processor) คือ การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จากรูปร่างลักษณะที่แท้จริงของปัญหา จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนวิเคราะห์ปัญหานั้น การสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์อันประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวนมากบนรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ นั่น ตามปกติจะใช้เวลานาน โดยเฉพาะอย่างยิ่งหากรูปร่างของปัญหาที่มีความซับซ้อน ผู้สร้างรูปร่างบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ควรมีประสบการณ์ในการใช้ซอฟต์แวร์นั้นๆ มาสักระยะหนึ่ง จึงสามารถสร้างรูปแบบที่กำหนดให้อย่างถูกต้องและมีประสิทธิภาพได้ ตั้งแต่การสร้างจุด เส้นตรง เส้นโค้งต่างๆ รวมทั้งพื้นผิว โดยข้อมูลของจุดเส้นตรง เส้นโค้ง และพื้นผิวเหล่านี้จะถูกเก็บในรูปแบบของสมการทางเรขาคณิตในหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ เพื่อผู้ใช้สามารถสร้างเอลิเมนต์ทั้งขนาดและจำนวนต่างๆ กันได้ โดยรูปแบบของไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นยังเสมือนรูปร่างต้นแบบของจริงมากที่สุดรูปแบบของไฟไนต์นี้ยังประกอบไปด้วยหมายเลขของจุดต่อ หมายเลขของเอลิเมนต์และข้อมูลอื่นๆ ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในกระบวนการวิเคราะห์ขั้นต่อไป รายละเอียดต่างๆ จำนวนมากเหล่านี้ปกติจะไม่แสดงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ยกเว้นผู้ใช้ต้องการให้แสดงเพื่อการตรวจสอบ หลังจากสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ได้เสร็จสิ้นลงแล้ว ผู้ใช้จำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตอันอาจประกอบไปด้วย การกำหนดค่าให้กับบางจุดต่อของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น เงื่อนไข

ของเขตเหล่านี้ จำเป็นต้องเหมือนหรือใกล้เคียงกับของจริงให้มากที่สุดจึงจะนำไปสู่ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับความเป็นจริง

2. กระบวนการวิเคราะห์ ข้อมูลต่างๆของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นและเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ในขั้นตอนแรก จะถูกส่งเข้าสู่กระบวนการวิเคราะห์ โปรแกรมคอมพิวเตอร์จะสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหานั้นสำหรับทุกๆเอลิเมนต์ ก่อนที่จะนำมาประกอบกันเข้าเป็นระบบสมการรวมขนาดใหญ่แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้ จากนั้นจึงแก้ระบบสมการรวมขนาดใหญ่นั้น โดยเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะขึ้นอยู่กับเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ผู้ใช้ได้สร้างขึ้น และขนาดของระบบสมการรวมขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้น หากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นอยู่ในรูปแบบเชิงเส้น ระบบสมการรวมนี้จะถูกแก้เพียงครั้งเดียว ทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นไม่มากนัก แต่หากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ระบบสมการรวมนี้จะถูกแก้ด้วยการวนซ้ำ หลายรอบทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นนานมากขึ้น โดยเฉพาะหากเป็นรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์เป็นจำนวนมาก ดังนั้นหากผู้ใช้ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปมีความเข้าใจถึงองค์ความรู้พื้นฐานภายในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บ้าง ก็จะช่วยในการตัดสินใจสิ่งต่างๆก่อนทำการวิเคราะห์ได้เป็นอย่างดี

3. กระบวนการขึ้นท่าย ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่แล้วจะประกอบด้วยตัวเลขเป็นจำนวนมาก ซึ่งจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์กราฟิก โดยเฉพาะกราฟิกส์เพื่อแสดงตัวเลขจำนวนมากเหล่านี้ออกมาบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้ผู้ใช้สามารถเข้าใจปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้อย่างรวดเร็ว กระบวนการขึ้นท่ายนี้จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง ซึ่งรูปแบบของการแสดงผลนั้นก็มีหลายชนิด นับตั้งแต่การแสดงด้วยแถบชั้นสี การแสดงด้วยเส้นชั้นสี (Contour lines) การแสดงด้วยเวกเตอร์ (vector plot) เป็นต้น ดังนั้นความเข้าใจในผลลัพธ์อันเป็นผลจากรูปทรงที่ได้ออกแบบไปบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงอย่างรวดเร็วจะทำให้ผู้ออกแบบเข้าใจในปัญหานั้นได้อย่างลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น และอาจก่อให้เกิดแนวคิดในการปรับเปลี่ยนรูปทรงนั้น เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ดียิ่งขึ้นไปอีก

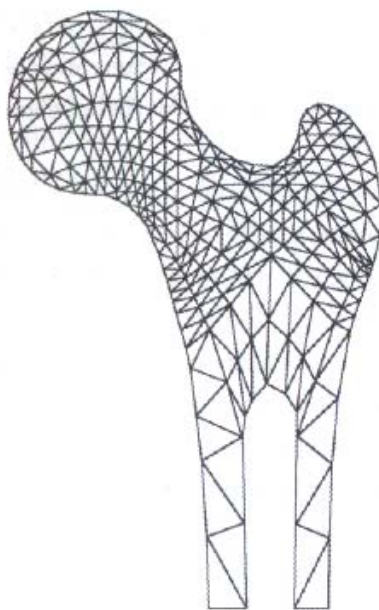
3.5 การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในงานต่างๆ ทางด้านวิศวกรรมโดยปกติแล้วพบว่ามีความซับซ้อนมาก วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากในการช่วยแก้ปัญหาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นปัญหาด้านการยึดหยุ่นของของแข็ง ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน หรือจะเป็นปัญหาด้านการไหลของของไหล เป็นต้น และเมื่อศึกษาถึงภาพรวมและประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะพบว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปใช้ประยุกต์กับงานชนิดต่างๆ ได้หากปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับงานชนิดนั้นๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ จากประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ควบคู่กัน

กับวิวัฒนาการทางด้านคอมพิวเตอร์จะทำให้เราสามารถคำนวณหาปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้ โดยสะดวกและยังทำให้ลดค่าใช้จ่ายที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการทดลองอีกด้วย

การแก้ปัญหาด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรกๆเริ่มปรากฏให้เห็นในงานทางด้านกลศาสตร์ของแข็งและโครงสร้างเป็นส่วนใหญ่ เนื่องจากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทำให้การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ขยายวงกว้างออกไปในงานที่นอกเหนือไปจากงานทางด้านวิศวกรรม เช่น ในงานทางการแพทย์ เป็นต้น จากรูปที่ 3.2 แสดงรูปแบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการกระจายของความเค้นในกระดูก นอกเหนือจากนั้นวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ยังถูกนำไปประยุกต์ใช้ใช้กับงานทางการแพทย์ในรูปแบบอื่นๆ อาทิเช่น การคำนวณหาลักษณะการไหลของเลือดในเส้นเลือดและหัวใจ รวมทั้งความกดดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่างๆในเส้นเลือด เป็นต้น

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มีส่วนช่วยเป็นอย่างมากในการศึกษาและออกแบบงานด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านวิศวกรรมต่างๆ หรือแม้แต่ในงานทางการแพทย์ดังที่กล่าวในข้างต้น ซึ่งวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะช่วยให้เราสามารถออกแบบงานได้อย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นและยังรวมถึงช่วยลดค่าใช้จ่ายที่จะต้องใช้ในการทดลองอีกด้วย



รูปที่ 3.2 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของกระดูก [17]