บทที่ 4
ตัวทำนาย

4.1 กล่าวนำ

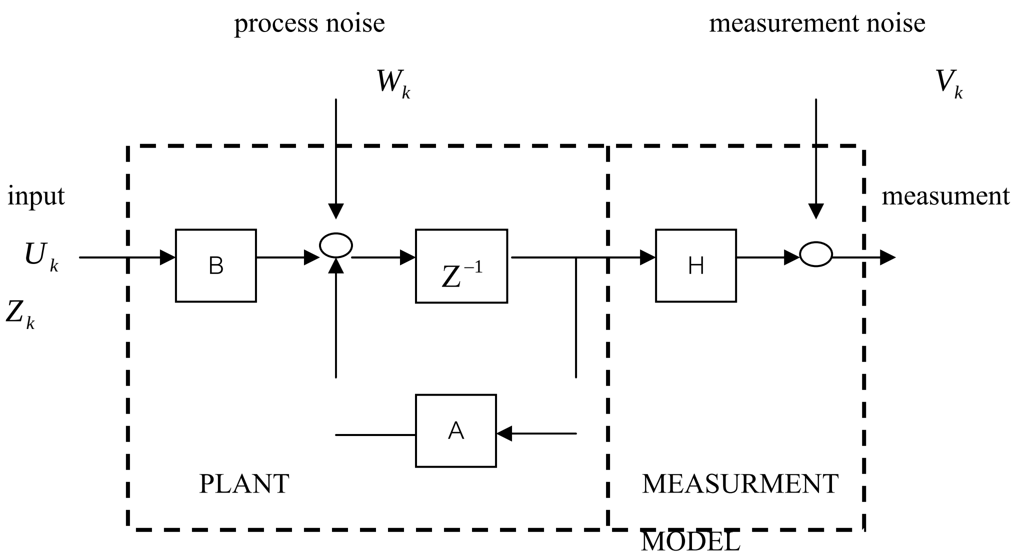
ในบทนี้เราจะได้นำเสนอ อัลกอริทึมที่ใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ซึ่งมีชื่อเรียกว่า ดิสครีทคาลมานฟิลเตอร์ (Discrete Kalman filter) และคุณสมบัติของแบบจำลองการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ ซึ่งมีรูปแบบการพยากรณ์ในลักษณะคล้ายคลึงตัวเอง

4.2 ดีสครีทคาลมานฟิลเตอร์

คาลมานฟิลเตอร์เป็นกลุ่มสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งให้ประสิทธิภาพต่อการแก้ปัญหาการคำนวณแบบวนซ้ำด้วยวิธีการ least-squares ตัวฟิลเตอร์นี้จะมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการใช้งานในหลาย ๆ รูปแบบ โดยจะสนับสนุนต่อการประมาณเหตุการณ์สถานะในอดีต ปัจจุบัน และอนาคต และสามารถที่จะทำงานได้ในสภาวะที่เราไม่ทราบลักษณะที่แน่นอนของระบบแบบจำลอง

4.2.1 การประมาณกระบวนการ

คาลมานฟิลเตอร์จะกล่าวถึงปัญหาโดยทั่วไป ของความพยายามที่จะประมาณสถานะ χ_k ของตัวควบคุมกระบวนการเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง (discrete-time controlled process) ซึ่งกำหนดโดยสมการความแตกต่างสโตแคสติกลักษณะเชิงเส้น (linear stochastic difference equation)



รูปที่ 4.1 การวัดค่าของสัญญาณระบบเชิงเส้นแบบเวลาไม่ต่อเนื่องเมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาเกี่ยวข้อง

จากรูปที่ 4.1 เราสามารถแสดงสมการความแตกต่างสโตแคสติกแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\chi_k = \mathrm{A}_k \chi_{k-1} + \mathrm{B}_k u_{k-1} + w_{k-1} \tag{4.1}$$

เมื่อ χ_k แทนสถานะที่เวลา k

u_k แทนสัญญาณอินพุต

w_{k-1} แทนการรบกวนของกระบวนการที่สถานะ $k-1$

A_k แทนเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานะที่ k กับ $k-1$

B_k แทนเมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์กันกับตัวควบคุมทางเข้า u_k ที่สถานะ χ_k

ตัวแปรสุ่ม w_k แทนการรบกวนของกระบวนการ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $(\overline{w_k} = 0)$ และมีค่าโควาเรียนเท่ากับ Q_k $\left(\overline{w_k w_k^T} = Q_k\right)$ ในการวัดสัญญาณนั้น กำหนดให้ค่าที่วัดได้เป็น Z_k จะได้สมการดังนี้ คือ

$$z_k = \mathrm{H}_k \chi_k + v_k \tag{4.2}$$

ค่า z_k ที่วัดได้จะขึ้นอยู่กับค่าปัจจุบันของ χ_k เมตริกซ์ H_k จะสัมพันธ์กันกับสถานะของการวัด z_k การวัดนี้มีค่าการรบกวน แทนการรบกวนของการวัดมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $\left(\overline{v_k} = 0\right)$ จะมีค่าโควาเรียนเท่ากับ $R_k \left(\overline{v_k v_k^T} = R_k\right)$ โดยตัวแปร w_k และ v_k เป็นอิสระซึ่งกันและกัน นั่นคือ จะไม่เกี่ยวข้องกันเลย และเป็นกระบวนการรบกวนสีขาวแบบคงที่ (stationary white noise process) ซึ่งมีสัญลักษณ์ คือ

$$w_k = (0, Q), \tag{4.3}$$

$$v_k = (0, R) \tag{4.4}$$

ในทางปฏิบัติแล้วเมตริกซ์โควาเรียนการรบกวนของกระบวนการ Q_k และเมตริกซ์โควาเรียนการรบกวนของการวัด R_k จะแสดงถึงความน่าเชื่อถือของระบบและการวัด ซึ่งอาจจะวัดมีค่าเปลี่ยนแปลงที่แต่ละจังหวะเวลา (step time) หรือแต่ละการวัด ตามลำดับ

4.2.2 การคำนวณของคาลมานฟิลเตอร์

เรานิยาม $\hat{\chi}_k^- \in \Re^n$ (สังเกตที่เครื่องหมายลบ) เป็นการประมาณสถานะข้างหน้าที่ลำดับ k และ $\hat{\chi}_k \in \Re^n$ เป็นการประมาณสถานะข้างหลังที่ลำดับ k กำหนดให้การวัดเป็น z_k เราสามารถนิยามความผิดพลาดของการประมาณข้างหน้าและข้างหลัง คือ

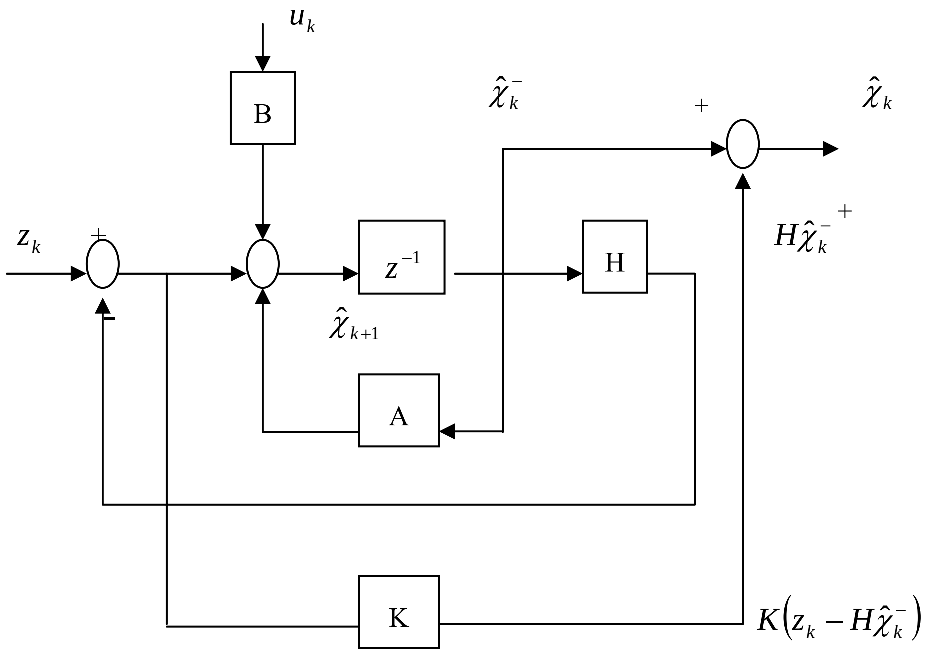
$$\ell_k^- = \chi_k - \hat{\chi}_k^-, \qquad \ell_k = \chi_k - \hat{\chi}_k$$

ความแปรปรวนร่วมของการประมาณข้างหน้าที่ผิดพลาด คือ

$$P_k^- = E\left[e_k^- e_k^{-T}\right] \tag{4.5}$$

และความแปรปรวนร่วมของการประมาณข้างหลังที่ผิดพลาด คือ

$$P_k = E\left[e_k e_k^T\right] \tag{4.6}$$



รูปที่ 4.2 การสร้างระบบจำลองมาเพื่อประมาณ χ_k

การได้มาของสมการคาลมานฟิลเตอร์นั้น เริ่มต้นด้วยจุดมุ่งหมายที่จะสร้างสมการ ซึ่งคำนวณการประมาณสถานะข้างหลัง $\hat{\chi}_k$ โดยการรวมแบบเชิงเส้นของการประมาณข้างหน้า $\hat{\chi}_k^-$ และน้ำหนัก (weighted) ที่แตกต่างกันระหว่างการวัดค่าจริง z_k และการทำนายการวัด $H_k\hat{\chi}_k^-$ ซึ่งสมการที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.2

$$\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k^- + K_k\left(z_k - H_k\hat{\chi}_k^-\right) \tag{4.7}$$

เมตริกซ์ ในสมการที่ (4.7) เรียกว่า อัตราขยายคาลมาน (Kalman gain : K) หรือตัวประกอบของความกลมกลืน(blending factor) ซึ่งมีค่าโควาเรียนข้างหลังที่ผิดพลาดในสมการที่ (4.6) ต่ำที่สุด (ภาคผนวก ค) และสามารถที่จะทำให้สมบูรณ์ได้โดย แทนสมการที่ (4.7) ลงในนิยามข้างบนสำหรับค่า e_k แล้วแทนลงในสมการที่ (4.6) ทำการหาค่าความคาดหวัง (Expectation) โดย

ผลลัพธ์ที่ได้จากการทำนายจะเกี่ยวข้องกับค่า K_k ให้ผลลัพธ์มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วแก้สมการหาค่า K_k จะได้

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k \right)^{-1} \\ &= \frac{P_k^- H_k^T}{H_k P_k^- H_k^T + R_k} \end{aligned} \tag{4.8}$$

จากสมการที่ (4.8) เราพบว่า ขณะที่ค่าโควาเรียนการวัดที่ผิดพลาด R_k มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ อัตราขยายคาลมาน K_k จะมีน้ำหนักของสิ่งที่เหลืออยู่อย่างมาก ๆ โดยเฉพาะเมื่อ

$$\lim_{R_k \to 0} K_k = H_k^{-1}$$

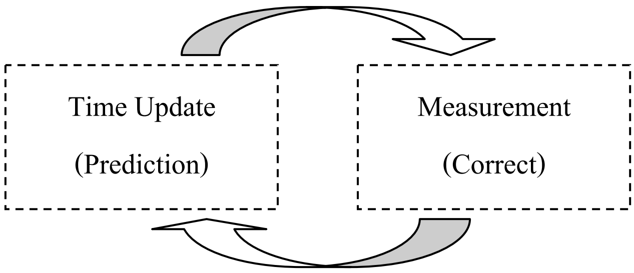
หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าโควาเรียนของการประมาณข้างหน้าที่ผิดพลาด P_k^- มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ อัตราขยายคาลมาน K_k จะมีน้ำหนักของสิ่งที่เหลืออยู่น้อยมาก เมื่อ

$$\lim_{P_k^- \to 0} K_k = 0$$

วิธีการอย่างหนึ่งของการคิดเกี่ยวกับน้ำหนักของ K_k นั่นคือโควาเรียนการวัดที่ผิดพลาด R_k มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ การวัดค่าจริง z_k จะมีความน่าเชื่อถือมาก ๆ ขณะที่การวัดการทำนาย $H_k \hat{\chi}_k^-$ จะมีความน่าเชื่อถือน้อยมาก หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ โควาเรียนของการประมาณข้างหน้าที่ผิดพลาด P_k^- มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ การวัดค่าจริง z_k จะมีความน่าเชื่อถือน้อยมาก ขณะที่การวัดการทำนาย $H_k \hat{\chi}_k^-$ จะมีความน่าเชื่อถือสูงมาก

4.2.3 อัลกอริทึมของดีสครีทคาลมานฟิลเตอร์

ฟิลเตอร์แบบคาลมานจะมีวิธีการทำงาน โดยอาศัยรูปแบบหนึ่งของการควบคุมการป้อนกลับของสัญญาณ (feedback control) ซึ่งวิธีการก็คือ ตัวฟิลเตอร์นี้จะประมาณสถานะของขบวนการขณะใดขณะหนึ่ง หลังจากนั้นจะนำไปป้อนกลับในรูปแบบของการวัดค่าสัญญาณรบกวน ซึ่งสมการสำหรับคาลมานฟิลเตอร์จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ สมการปรับเวลา (time update) และ สมการปรับการวัด (measurement update) สมการปรับเวลา ก็คือ ตัวที่ตอบสนองต่องานล่วงหน้าที่สถานะปัจจุบัน และโควาเรียนของการประมาณที่ผิดพลาด เพื่อให้ได้มาซึ่งการประมาณล่วงหน้าของช่วงเวลาต่อไป ส่วนสมการปรับการวัดจะตอบสนองต่อการป้อนกลับคือ การวัดครั้งใหม่จะถูกรวมเข้ากับการประมาณ เพื่อให้ได้มาซึ่งการปรับปรุงการประมาณล่วงหน้า โดยสมการปรับเวลาสามารถเรียกได้ว่าเป็น “สมการตัวทำนาย” (Predictor) และสมการปรับการวัดจะเรียกว่าเป็น “สมการตรวจแก้” (Corrector) ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.3 รูปแบบการทำงานของฟิลเตอร์แบบคาลมาน

สมการปรับเวลา

$$\hat{\chi}_k^- = A_k \hat{\chi}_{k-1} + B_k u_{k-1} \tag{4.9}$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k \tag{4.10}$$

สมการปรับการวัด

$$K_k = P_k^- H_k^T \left(H_k P_k^- H_k^T + R_k\right)^{-1} \tag{4.11}$$

$$\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k^- + K_k \left(z_k - H_k \hat{\chi}_k^-\right) \tag{4.12}$$

$$P_k = \left(I - K_k H_k\right) P_k^- \tag{4.13}$$

โดยที่

$\hat{\chi}_k^-$ คือ การประมาณการสถานะข้างหน้าหรือค่าทำนายก่อนการปรับการวัด

$\hat{\chi}_k$ คือ การประมาณการสถานะข้างหลังหรือผลการทำนายที่มีการปรับการวัดแล้ว

P_k^- คือ โควาเรียนของการประมาณการข้างหน้าที่ผิดพลาด

P_k คือ โควาเรียนของการประมาณการข้างหลังที่ผิดพลาด

R_k คือ โควาเรียนการรบกวนของการวัด

Q_k คือ โควาเรียนการรบกวนของกระบวนการ

A_k คือ เมททริกคงที่ที่สัมพันธ์กับสถานะที่เวลา k ไปยัง k+1

H_k คือ เมททริกคงที่ที่สัมพันธ์กับสถานะของการวัด

B_k คือ เมททริกคงที่ที่สัมพันธ์กับการควบคุมทางเข้า

สมการที่ (4.9) ถึง สมการที่ (4.13) เป็นสมการรูปแบบทั่วไปของคาลมานฟิลเตอร์ เมื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ เนื่องจากเป็นการทำนายค่า

แบบสุ่ม 1 มิติ ดังนั้นค่าคงที่ A_k, B_k และ H_k จึงมีค่าเท่ากับ 1 และไม่มีตัวควบคุมทางเข้าค่า u_k จึงเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการรูปแบบโดยทั่วไปของคาลมานฟิลเตอร์สามารถลดรูปได้เป็น

สมการปรับเวลา

$$\hat{\chi}_k^- = \hat{\chi}_{k-1} \tag{4.14}$$

$$P_k^- = P_{k-1} + Q_k \tag{4.15}$$

สมการปรับการวัด

$$K_k = \frac{P_k^-}{P_k^- + R_k} \tag{4.16}$$

$$\hat{\chi}_k = \hat{\chi}_k^- + K\left(z_k - \hat{\chi}_k^-\right) \tag{4.17}$$

$$P_k = \left(\mathrm{I} - K_k\right)P_k^- \tag{4.18}$$

เมื่อ

$$z_k = \chi_k + v_k \tag{4.19}$$

โดยที่ z_k คือ ค่าพยากรณ์ของความต้องการใช้งานโทรศัพท์จริง χ_k รวมกับค่าความคลาดเคลื่อน v_k

$\hat{\chi}_k^-$ คือ ค่าการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์ก่อนมีการปรับการวัด

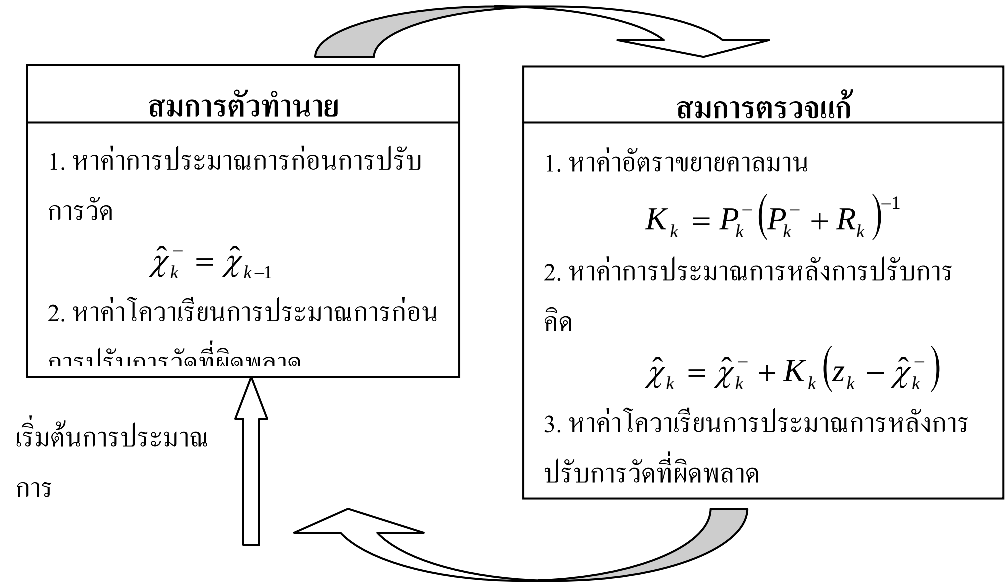
$\hat{\chi}_k$ คือ ผลการพยากรณ์ความต้องการใช้งานโทรศัพท์หลังมีการปรับการวัดแล้ว

สิ่งแรกที่ต้องกระทำก่อนการปรับการวัดคือ การคำนวณอัตราขยายคาลมาน โดยที่ค่า K_k ดูได้จากสมการที่ (4.16) ลำดับต่อมาคือการวัดค่าจริงของกระบวนการซึ่งจะรวมมากับการรบกวนของการวัดเพื่อหาค่า z_k ดังสมการที่ (4.19) และหลังจากนั้นจึงสร้างการประมาณสถานะข้างหลังหรือก็คือการทำนายที่มีการปรับการวัดแล้ว โดยการรวมการวัด เข้ากับสมการที่ (4.17) ต่อไปคือการหาค่าความแปรปรวนร่วมของการประมาณการข้างหลังที่ผิดพลาดด้วยสมการที่ (4.18) ขั้นตอนสุดท้ายคือ การหาค่าการทำนายก่อนการปรับการวัด และค่าความแปรปรวนร่วมของการประมาณการข้างหน้าที่ผิดพลาดด้วยสมการที่ (4.14) และสมการที่ (4.15) ตามลำดับ หลังจากแต่ละช่วงเวลาและคู่ของสมการปรับการวัด กระบวนการก็จะถูกทำซ้ำด้วยการประมาณกระบวนการหลังก่อน

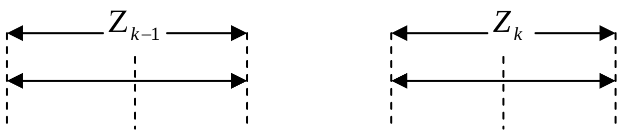
หน้านี้ เพื่อที่จะทำนายด้วยการประมาณล่วงหน้าใหม่ วิธีการนี้คือหนึ่งในขบวนการของฟิลเตอร์แบบคาลมาน ซึ่งจะเหมาะในการใช้และเป็นไปได้จริงกว่าการทำงานของฟิลเตอร์แบบเวียนเนอร์ (Weiner) ซึ่งถูกออกแบบให้เป็นตัวควบคุมข้อมูลทุกตัวแบบตรง ๆ ฟิลเตอร์แบบคาลมานจะเข้ามาแทนเงื่อนไขของการประมาณปัจจุบันในการวัดค่าในอดีต

4.2.4 ตัวแปรฟิลเตอร์และการปรับแต่ง

ในการสร้างฟิลเตอร์ที่แท้จริงนั้นโควาเรียนการรบกวนของการวัด R_k เป็นการวัดข้างหน้าต่อการทำงานของฟิลเตอร์ การวัดค่าความแปรปรวนร่วมของการวัดที่ผิดพลาด R_k สามารถกระทำได้จริง เนื่องจากเราต้องการวัดกระบวนการ (ในขณะที่ฟิลเตอร์ทำงาน) อย่างไรก็ตาม เราควรทำการวัดค่าในอดีตแบบสุ่ม เพื่อที่จะกำหนดค่าความแปรปรวนของการรบกวนการวัด การกำหนดค่าความแปรปรวนร่วมของการรบกวนในกระบวนการ Q_k นั้น โดยทั่วไปแล้วกระทำได้ยากมาก ด้วยเหตุที่เราไม่มีความสามารถเฝ้ามองกระบวนการที่เรากำลังประมาณได้โดยตรง บางครั้งความสัมพันธ์ของแบบจำลองกระบวนการสามารถสร้างผลลัพธ์ให้เป็นที่ยอมรับได้ ถ้าป้อนค่าความไม่แน่นอนเพียงพอให้กับกระบวนการโดยการเลือกค่า Q_k แน่นอนที่สุดในกรณีนี้ความหวังอย่างหนึ่งต่อการวัดกระบวนการก็คือ ความน่าเชื่อถือนั่นเอง ในกรณีอีกอันหนึ่ง เรามีเหตุผลที่สำคัญต่อการเลือกตัวแปร บ่อยครั้งที่สมรรถนะของฟิลเตอร์จะดีกว่า ซึ่งสามารถที่จะทำได้โดยการปรับแต่งตัวแปรฟิลเตอร์ Q_k และ R_k การปรับ แต่งกระทำแบบการวัดค่าในอดีต ด้วยการปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรทั้งสอง ซึ่งคาลมานฟิลเตอร์ในกระบวนการทั่วไปจะอ้างถึงระบบการแยกแยะ ในการเลือกค่าตัวแปรนั้น เราสังเกตว่าภายใต้เงื่อนไขที่ Q_k และ R_k เป็นค่าคงที่แท้จริงทั้งค่าความแปรปรวนร่วมของการประมาณหลังการปรับการวัดที่ผิดพลาด P_k และอัตราขยายคาลมาน K_k จะมีเสถียรภาพอย่างรวดเร็ว ในกรณีที่ตัวแปรเหล่านี้สามารถคำนวณได้ โดยให้การทำงานของฟิลเตอร์เป็นแบบการคำนวณค่าในอดีตหรือกำหนดค่าสถานะคงตัวของ P_k อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติแล้วความผิดพลาดของการวัดจะไม่มีค่าเหลืออยู่



รูปที่ 4.4 การทำงานของคาลมานฟิลเตอร์



สถานะที่ทำนาย	$(k-1)^-$	$(k-1)$	$(k-1)^+$	$(k)^-$	(k)	$(k)^+$
การทำนาย	$(\hat{\chi}_{k-1}^-)$		$(\hat{\chi}_{k-1})$	$(\hat{\chi}_k^-)$		$(\hat{\chi}_k)$
ความแปรปรวนร่วม	(P_{k-1}^-) ทำนาย		(P_{k-1}) ปรับ	(P_k^-) ทำนาย		(P_k) ปรับ

รูปที่ 4.5 ความหมายของตัวแปรในสมการดีสครีทคาลมานฟิลเตอร์

ในรูปที่ 4.5 จะแสดงถึงความหมายของตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการของดีสครีตคาลมานฟิลเตอร์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ ส่วนของสมการของการทำนายและส่วนของสมการปรับการวัด ดังมีขั้นตอนการทำนายและการปรับการทำนายดังรูปที่ 4.4