ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ความรู้พื้นฐานของทฤษฎีระบบ

ทฤษฎีระบบ

ภาคผนวกนี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั่วไปของทฤษฎีระบบที่จำเป็นสำหรับเข้าใจสูตรของระบบสโตแคสติคพลวัต

ก.1 พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ก.1.1 เวกเตอร์

เวกเตอร์ คือแถวตั้ง (column) ของสมาชิก n ตัว เมื่อ n = 1 เป็น *สเกลาร์* เวกเตอร์แถวนอน คือ เวกเตอร์แถวตั้งสลับเปลี่ยน (column vector transposed) ที่มีมิติ 1xn

$$X^T = [x_1 \ldots x_n] \qquad (ก.1)$$

การดำเนินการบนเวกเตอร์ คือการบวกและการคูณโดยค่าคงที่

$$x + y = [x_i + y_i] \qquad kx = [kx_i] \qquad (ก.2)$$

เมตริก (matrix) ของเวกเตอร์คือความยาวของเวกเตอร์ ค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean norm) คือ

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \qquad (ก. 3)$$

อนุพันธ์ของเวกเตอร์และอินทิกรัลของเวกเตอร์คือ

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= [dx_1/dt \ldots dx_n/dt]^T \\ \int x(t)dt &= \left[\int x_1 dt \ldots \int x_n dt\right]^T \end{aligned} \qquad (ก. 4)$$

สมมติว่าเวกเตอร์ เป็นฟังก์ชันของเวลา

ก.1.2 เมตริกซ์

เมตริกซ์ คือ แถวลำดับ (array) mxn ที่มีสมาชิก a_{ij} โดยที่ I = 1 …m, j = 1…n

$$A = \{a_{ij}\} \qquad (ก. 5)$$

การดำเนินการบนเมตริกซ์ คือ การบวก, การคูณและการคูณด้วยค่าคงที่

$$A+B=B+A=\{a_{ij}+b_{ij}\}$$
$$AB\neq BA=\left\{\sum_k a_{ik}b_{kj}\right\} \quad (ก. 6)$$
$$kA=Ak=\{ka_{ij}\}$$

การหาอนุพันธ์เมตริกซ์และการอินทิเกรต คือ

$$dA(t)/dt=\{da_{ij}/dt\} \quad (ก. 7)$$
$$\int A(t)dt=\left\{\int a(t)_{ij}\,dt\right\} \quad (ก. 8)$$

เมตริกซ์เอกลักษณ์ คือ

$I=\{\delta_{ij}\}$ เมื่อ δ_{ij} คือ ครอเนคเคอร์เดลตา $\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$ (ก. 9)

ตัวกำหนด (determinant) ของเมตริกซ์จัตุรัส (nxn)1 เป็นสเกลาร์

$$\det[A]=|A|=\sum_{i=1}^{n}\cdots\sum_{\substack{I=1\\ I\neq 1\ldots j}}^{n}[a_{1i}a_{2i}\ldots a_{n1}] \quad (ก. 10)$$

เมตริกซ์ที่มี $\det[A]=0$ เรียกว่าเมตริกซ์เอกฐาน (singular matrix)
ตัวสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ คือ

$$A^T=\{a_{ij}\} \quad (ก. 11)$$

ตัวผูกผัน (adjoint) ของเมตริกซ์ (ใช้สัญลักษณ์ $Adj[A]$) คือเมตริกซ์ที่จัดรูปโดยการแทนที่แต่ละสมาชิก a_{ij} โดยตัวกำหนดของเมตริกซ์ย่อยที่จัดรูปโดยการลบแถวนอนที่ iและแถวตั้งที่ j ของ A และคูณด้วย $(-1)^{i-j}$ (โคแฟกเตอร์) และสลับเปลี่ยนผลลัพธ์

การทำเมตริกซ์ผกผัน (matrix inverse) ของเมตริกซ์จัตุรัสถูกนิยามได้เป็น

$$A^{-1}=|A|^{-1}Adj|A| \qquad AA^{-1}=I \quad (ก. 12)$$

ผลบวกเฉียง (trace) ของเมตริกซ์ คือผลรวมของพจน์แนวทแยงมุม

$$Trace[A] = Tr[A] = \sum_i a_{ii} \qquad (ก. 13)$$

สังเกตว่า

$$Trace[aa^T] = a^T a$$

ถ้าตัวผกผัน (inverse) ของเมตริกซ์ไม่ได้มีอยู่ เพราะว่าไม่ได้เป็นจัตุรัสหรือค่าลำดับชั้น (rank) ของเมตริกซ์น้อยกว่าค่ามากที่สุด แล้วอาจจะแทนด้วยตัวผกผันเทียม (pseudoinverse)

$$A^{\#} = \left(A^T A\right)^{-1} = A^T \qquad (ก. 14)$$

สังเกตว่า $AA^{\#}A = A$ และ $\left(A^{\#}A\right)^T = A^{\#}A$

สมการลักษณะเฉพาะของเมตริกซ์ คือ

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = 0 \qquad (ก. 15)$$

ผลเฉลยของสมการลักษณะเฉพาะให้ค่าเจาะจง (eigenvalue) $\lambda = \lambda_1 \ldots \lambda_n$

ค่าลำดับชั้นของเมตริกซ์ rank $[A]$ คือขนาดของตัวกำหนดไม่เป็นศูนย์สูงสุดของ A

การแปลงแบบคล้าย (similarity transformation) T บน A โดยที่หา T^{-1} ได้ (ไม่เอกฐาน) ให้เมตริกซ์ B มีค่าเจาะจงเหมือนกัน

$$TAT^{-1} = B$$

เวกเตอร์เจาะจง (eigenvalue) ของเมตริกซ์ A $n\times n$ (e_i) เกี่ยวข้องกับค่าเจาะจง มีสมการคือ

$$\lambda_i e_i = Ae_i$$

เมตริกซ์ E={e_i} ประกอบด้วยเวกเตอร์เจาะจงของA เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐานและมีเงื่อนไขคือ

AE=EA เมื่อ A = diag $\{\lambda_i\}$

ทฤษฎีบทเคย์เลย์-แฮมิลตัน (Cayley-Hamilton Theorem) กล่าวว่าการแทนที่ λ ด้วย A ในสมการลักษณะเฉพาะ (ก. 15) ให้

$$f(A)=0$$

สิ่งนี้นำไปสู่คำจำกัดความของเมตริกซ์ลักษณะเฉพาะ

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots$$

พหุนามเอกพันธุ์กำลังสอง (quadratic form) ถูกนิยามเป็น

$$x^T Ax = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

ค่าประจำของเมตริกซ์ถูกนิยามเป็น

$$\|A\| = \max_x \|Ax\| / \|x\| = \sqrt{\lambda_1}$$

เมื่อ λ_1 คือค่าเจาะจงมากที่สุดของ A

เกรเดียนต์ (Gradient) ของ z(x)

สเกลาร์ x $\partial z/\partial x = a$ (สเกลาร์) $\partial^2 z/\partial x^2 = A$ เมตริกซ์เฮสเซียน (Hessian matrix)

เวกเตอร์ x $\partial z/\partial x = A$ (เมตริกซ์) ยาโคเบียน (Jacobian)

เมตริกซ์ x $\partial z/\partial x = B$ (เมตริกซ์)

ก.1.3 ปริภูมิเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์ คือเซตที่สมาชิกเป็นไปตามกฎของการบวกและการคูณด้วยค่าคงที่ ปริภูมิเวกเตอร์เมตริก (metric vector space) เป็นเรื่องหนึ่งที่มีเมตริกเกี่ยวข้อง ปริภูมิเวกเตอร์เมตริกปกติส่วนใหญ่ คือยุคลิด (Euclidean) ซึ่งเกี่ยวข้องกับค่าประจำแบบยุคลิด (ก.3)

ก. 1.4 ทฤษฎีเซต

เซต ประกอบด้วยสมาชิกที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน การดำเนินการต่อไปนี้ : การผนวก (union ใช้สัญลักษณ์ $\cup$), การตัดกัน (intersection ใช้สัญลักษณ์ $\cap$), ส่วนเติมเต็ม (complement ใช้สัญลักษณ์ $\bar{\ }$) และผลรวมอนันต์ (infinite summationใช้สัญลักษณ์ U_i^∞), เซตว่าง (null set ใช้สัญลักษณ์ ø), ปริภูมิทั้งหมด (whole space) ถูกนิยามเป็น

$$A \cup B,\ A \cap B,\ \overline{A},\ \bigcup_i^\infty A,\ ø,\ S$$

ทฤษฎีบท ก. 1 เดอมอร์แกน (DeMorgan)

$$\overline{(A+B)} = \overline{AB} \text{ และ } \overline{(AB)} = \overline{A} + \overline{B}$$

เมทริกซ์ $\mu(A)$ อาจจะเกี่ยวพันกับปริภูมิเวกเตอร์ ทฤษฎีความน่าจะเป็นตัวอย่างตามแบบของปริภูมิ $\{S, F, P\}$

ภาคผนวก ข

สัญญาณสุ่ม (Random Signal)

ข. 1 คำจำกัดความของปริมาณสัญญาณสุ่ม

ข.1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

สำหรับตัวอย่างสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา x(t) n ตัวอย่าง เกิดขึ้นที่เวลา $t_1, t_2, \ldots, t_n$ และมีค่าที่สอดคล้องกัน $x_1, x_2, \ldots x_n$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างง่ายมีค่าเท่ากับผลบวกของค่าทั้งหมดหารด้วยจำนวนของตัวอย่าง

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

ถ้าต้องการเดาค่าของ x มีค่าเป็นเท่าไร ณ เวลาที่กำหนดไว้ (เนื่องจากขาดรายละเอียดเกี่ยวกับสัญญาณ x(t)) แล้วบางทีค่าเฉลี่ยนี้เป็นการเดาที่ดีที่สุดที่สามารถทำได้ ดังนั้นมักเรียกว่า “ค่าคาดหมาย (expected หรือ expextation)” ของ x (แทนด้วย $E[x]$) ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างทั้งหมด

$$E[x] = \bar{x}$$

ข. 1.2 ความแปรปรวน

ความแปรปรวนเป็นอีกปริมาณหนึ่งที่ต้องการในการวิเคราะห์ต่อไป ซึ่งเป็นการวัดความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นเมื่อมีการเดาค่าของสัญญาณจากค่าเฉลี่ยของสัญญาณ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับการกระจายของตัวอย่างสัญญาณ x(t) (นั่นคือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$) รอบค่าเฉลี่ยของตัวอย่างว่าเป็นเช่นใด ความแปรปรวนมีค่าน้อยแสดงว่า ตัวอย่างส่วนใหญ่อยู่ใกล้กับค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่าเฉลี่ยของสัญญาณในช่วงเวลาทั้งหมดเป็นค่าที่น่าเป็นจริงของสัญญาณ ณ เวลานี้ อีกด้านหนึ่ง ความแปรปรวนมีค่าสูงหมายความว่า ตัวอย่างสัญญาณแต่ละค่ากระจัดกระจายออกไปเป็นวงกว้างในแต่ละด้านของค่าเฉลี่ย ดังนั้นค่าเฉลี่ยไม่ได้เป็นค่าที่ดีที่นำไปสู่ค่าสัญญาณที่น่าเป็นจริงที่เวลาใด ๆ และดังนั้นค่ามีความไม่แน่นอน

นิยามของความแปรปรวน คือกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร σ_x ซึ่งเป็นรากของกำลังสองเฉลี่ย (root-mean-square) ของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเป็นดังนี้

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2}$$

ดังนั้น

$$\text{ความแปรปรวน } = \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}\right)^2 = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right] - \bar{x}^2$$

หรือในพจน์ของค่าคาดหมาย

$$\sigma_x^2 = E\left[\left(x-\bar{x}\right)^2\right] = E\left[x^2\right] - \bar{x}^2 = E\left[x^2\right] - \left\{E\left[\bar{x}\right]\right\}^2$$

ความแปรปรวนของชุดของค่าการวัด (หรือชุดของตัวอย่างสัญญาณ) คือค่าเฉลี่ยกำลังสองของค่าความเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของชุดของแต่ละตัวอย่างทั้งหมด ถ้าความแปรปรวนเป็นศูนย์ แล้วสัญญาณต้องเท่ากับค่าเฉลี่ยของมันทุก ๆ ตัวอย่าง

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 4 ตัวกรองคาลมานเป็นตัวประมาณค่าที่มีความแปรปรวนน้อยสุด (minimum-variance estimator) ในที่นี้ ความแปรปรวนคือความผิดพลาดระหว่างค่าที่ประมาณกับค่าจริงของเวกเตอร์สเตตของระบบ ดังนั้นตัวกรองคาลมานทำให้ความไม่แน่นอนในค่าประมาณสเตตน้อยลงเมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณค่าแบบอื่น ๆ ในลักษณะนี้ บางครั้งอาจกล่าวได้ว่าเป็นตัวประมาณค่าสเตตที่ได้ผลดีที่สุด (optimal state estimator)

ภาคผนวก ค

บทพิสูจน์

$$X_{k+1} = \varnothing_{k} x_k + w_k \quad (1)$$

X_{k+1} แทนสถานะที่เวลา

$$Z_k = H_k X_k + V_k \quad (2)$$

W_k = การรบกวนของกระบวนการ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ (เมตริกซ์ $n \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

X_k = แทนสถานะที่เวลา k (เมทริกซ์ $n \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$\varnothing_k$ = เมตริกซ์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานที่ k กับ k+1 (เมทริกซ์ $n \times n$)

$$= \begin{bmatrix} \varnothing_{11} & \cdots & \varnothing_{1n} \\ \vdots & & \\ \varnothing_{n1} & \cdots & \varnothing_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

z_k = ค่าที่ได้ในการวัด (เมทริกซ์ $m \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

H_k = เมตริกซ์คงที่ที่สัมพันธ์กับสถานะของการวัด (เมตริกซ์ $m \times n$)

$$= \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1m} \\ \vdots & & \\ H_{m1} & \dots & H_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

v_k = แทนการรบกวนของกระบวนการ (เมทริกซ์ $m \times 1$)

$$= \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

จากนิยาม

Covariance matrix สำหรับ W_k และ v_k

$$E\left[w_k w_i^{\ T}\right] = \begin{cases} Q_k ; i = k \\ 0; i \neq k \end{cases} \tag{3}$$

$$E\left[v_k v_i^{\ T}\right] = \begin{cases} R_k ; i = k \\ 0; i \neq k \end{cases} \tag{4}$$

$$E\left[w_k v_i^{\ T}\right] = 0 \qquad \text{for all k and i} \tag{5}$$

พิจารณาให้ละเอียดยิ่งขึ้น

$$E\left[w_k w_i^{\ T}\right] = E\begin{bmatrix} w_1 w_1^T & w_1 w_2^T & \dots & w_1 w_n^T \\ w_2 w_1^T & w_2 w_2^T & \dots & w_2 w_n^T \\ \vdots & & & \\ w_n w_1^T & w_n w_2^T & \dots & w_n w_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left[w_1 w_1^T\right] & E\left[w_1 w_2^T\right] & \dots & E\left[w_1 w_n^T\right] \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & E\left[w_n w_n^T\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varnothing_k & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \varnothing_k & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & \varnothing_k \end{bmatrix}$$

เช่นเดียวกัน จะได้ $E\left[v_k v_i^{\ T}\right]$

ความผิดพลาดของการประมาณข้างหน้าและข้างหลัง คือ

$$\ell_n^- = X_k - \hat{X}_k^- \tag{6}$$

ความแปรปรวนร่วมของการประมาณข้างหน้าที่ผิดพลาด

$$\begin{aligned} P_k^- &= E\left[\ell_k^- \ell_k^{-T}\right] \\ &= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T\right] \end{aligned} \tag{7}$$

การประมาณสถานะข้างหลัง $\hat{X}_k$ โดยการรวมแบบเชิงเส้น ของการประมาณข้างหน้า $\hat{X}_k^-$ และน้ำหนัก (weighted) ที่แตกต่างกันระหว่างการวัดค่าจริง Z_k และการทำนายการวัด $H_k \hat{X}_k^-$

$$\hat{X}_k = X_k^- + K_k\left(\hat{Z}_k - H_k \hat{X}_k^-\right) \tag{8}$$

$K_k =$ อัตราการขยายคาลมาน (Kalman gain : K)

$$\begin{aligned} P_k &= E\left[\ell_k \ell_k^T\right] \\ &= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k\right)\left(X_k - \hat{X}_k\right)^T\right] \end{aligned} \tag{9}$$

แทนสมการที่ (2) คือ $Z_k = H_k X_k + v_k$ ลงในสมการที่ 8 ได้

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k\left(H_k X_k + v_k - H_k \hat{X}_k^-\right)$$

$$P_n = E\left[\left\{\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k\left(H_k X_k + v_k - H_k \hat{X}_k^-\right)\right\}\left\{\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k\left(H_k X_k + v_k - H_k \hat{X}_k^-\right)\right\}^T\right] \tag{10}$$

$$= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k H_k X_k - K_k v_k + K_k H_k \hat{X}_k^-\right]\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k H_k\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k v_k\right]^T$$

$$= E\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k H_k\left(X_k - \hat{X}_k^-\right) - K_k v_k\right]\left[\left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T - \left(X_k - \hat{X}_k^-\right)^T H_k^T K_k^T - v_k^T K_k^T\right]$$

$$=E\begin{bmatrix}\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)^T-\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)^T H_k^T K_k^T-\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)v_k^T K_k^T-\\ K_kH_k\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)^T+K_kH_k\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)^T H_k^T K_k^T+K_kH_k\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)v_k^Y K_k^T-\\ H_kv_k\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)^T+K_kv_k\left(X_k-\hat{X}_k^-\right)^T H_k^T K_k^T+K_kv_kv_k^T K_k^T\end{bmatrix}$$

$$= P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T - 0 - K_k H_k P_k^- + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + 0 - 0 + 0 + K_k R_k K_k^T$$

$$= P_k^-\left(I - H_k^T K_k^T\right) - K_k H_k P_k^-\left(I - H_k^T K_k^T\right) + K_k R_k K_k^T$$

$$= \left(P_k^- - K_k H_k P_k^-\right)\left(I - H_k^T K_k^T\right) + K_k R_k K_k^T$$

$$= \left(I - K_k H_k\right)P_k^-\left(I - K_k H_k\right)^T + K_k R_k K_k^T \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dA}\left[trace(AB)\right] = B^T \quad \text{, (AB must be square)} \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dA}\left[trace\left(ACA^T\right)\right] = 2AC \quad \text{, (C must be square)} \qquad (13)$$

ซึ่ง derivative of a scalar with respect to a matrix is defined as

$$\frac{ds}{dA} = \begin{bmatrix}\frac{ds}{da_{11}} & \frac{ds}{da_{12}} & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \qquad (14)$$

เพื่อเป็นการง่าย จากสมการที่ (11) จะไม่ใส่ Subscript จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} P &= (I - KH)P^-(I - KH)^T + KRK^T \\ &= \left(IP^- - KHP^-\right)\left(I - H^T K^T\right) + KRK^T \\ &= P^- - P^- H^T K^T - KHP^- + KHP^- H^T K^T + KRK^T \\ &= P^- - KHP^- - P^- H^T K^T + K\left(HP^- H^T + R\right)K^T \end{aligned} \qquad (15)$$

เทอมที่ 2 และเทอมที่ 3 เป็น linear in เทอม K

ในการ minimize trace of P เพราะว่าเป็นการประมาณค่าที่มี sum of mean square error ต่ำ

* trace ของ KHP^- และ $P^- H^T K^T$ เท่ากัน

$$\therefore \frac{d}{dk} traceP = 0 - 2\left(HP^{-}\right)^{T} + 2K\left(HP^{-}H^{T} + R\right) \quad (16)$$

derivative equal to zero

$$\begin{aligned} -2\left(HP^{-}\right)^{T} + 2K\left(HP^{-}H^{T} + R\right) &= 0 \\ 2K\left(HP^{-}H^{T} + R\right) &= 2\left(HP^{-}\right)^{T} \\ \mathrm{K} &= P^{-}H^{-}\left(HP^{-}H^{T} + R\right)^{-1} \\ \therefore K_k &= P_k^{-}H_k^{T}\left(H_k P_k^{-} H_k^{T} + R_k\right)^{-1} \quad (17) \end{aligned}$$

จากสมการที่ (11)

$$\begin{aligned} P_n &= \left(I - K_k H_k\right)P_k^{-}\left(I - K_k H_k\right)^{T} + K_k R_k K_k^{T} \quad (18) \\ &= \left(P_k^{-} - K_k H_k P_k^{-}\right)\left(I - H_k^{T} K_k^{T}\right) + K_k R_k K_k^{T} \\ &= P_k^{-} - P_k^{-}H_k^{T}K_k^{T} - K_k H_k P_k^{-} + K_k H_k P_k^{-} H_k^{T} K_k^{T} + K_k R_k K_k^{T} \\ &= P_k^{-} - P_k^{-}H_k^{T}K_k^{T} - K_k H_k P_k^{-} + K_k\left(H_k P_k^{-} H_k^{T} + R_k\right)K_k^{T} \quad (19) \end{aligned}$$

นำค่า K_k ในสมการที่ (17) ลงในสมการที่ (19)

$$\begin{aligned} &= P_k^{-} - P_k^{-}H_k^{T}K_k^{T} - P_k^{-}H_k^{T}\left(H_k P_k^{-} H_k^{T} + R_k\right)^{-1} H_k P_k^{-} + P_k^{-}H_k^{T}K_k^{T} \\ &= P_k^{-} - P_k^{-}H_k^{T}\left(H_k P_k^{-} H_k^{T} + R_k\right)^{-1} H_k P_k^{-} \quad (20) \end{aligned}$$

แทนค่า K_k

$$\begin{aligned} &= P_k^{-} - K_k H_k P_k^{-} \\ &= \left(I - K_k H_k\right)P_k^{-} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\hat{X}_{k+1}^{-} = \varnothing_k \hat{X}_k \quad (22)$$

ทำนองเดียวกัน ค่าผิดพลาด

$$\begin{aligned} \ell_{k+1}^{-} &= X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} \\ &= \left(\varnothing_k X_k + w_k\right) - \varnothing_k \hat{X}_k \\ &= \varnothing_k X_k - \varnothing_k \hat{X}_k + w_k \end{aligned}$$

$$= \varnothing_k \left(X_k - \hat{X}_k \right) + w_k$$

$$= \varnothing_k \ell_k + w_k \tag{23}$$

ค่า $E\left[w_k \ell_k^T\right] = 0$ เพราะว่า uncorrelated

$$\begin{aligned}
P_{k+1}^{-} &= E\left[\ell_{k+1}^{-} \ell_{k+1}^{-T}\right] \\
&= E\left[(\varnothing_k \ell_k + w_k)(\varnothing_k \ell_k + w_k)^T\right] \\
&= E\left[(\varnothing_k \ell_k + w_k)(\ell_k^T \varnothing_k^T + w_k^T)\right] \\
&= E\left[\varnothing_k \ell_k \ell_k^T \varnothing_k^T + \varnothing_k \ell_k w_k^T + w_k \ell_k^T \varnothing_k^T + w_k w_k^T\right] \\
&= E\left[\varnothing_k \ell_k \ell_k^T \varnothing_k^T\right] + E\left[\varnothing_k \ell_k w_k^T\right] + E\left[w_k \ell_k^T \varnothing_k^T\right] + E\left[w_k w_k^T\right] \\
&= \varnothing_k P_k \varnothing_k^T + 0 + 0 + Q_k \\
&= \varnothing_k P_k \varnothing_k^T + Q_k
\end{aligned} \tag{24}$$

ภาคผนวก ง

Program Mathlab

```
clear all;
close all;
Q = 0.01;
R = 0.01;
sigw = sqrt(Q);
sigv = sqrt(R);
ui= [2915366 3124543 3219879 3312435 3429000 3557821 3623421 3891234 4117133 4154361
4201345 4301432 4381489 4401876 4423156 4512301 4614739 4723415 4812342 4991876 5187337
5201867 5254315 5372435 5467696 5497123 5504328 5529871 5606933 5612398 5623987 5641987
5655354 5670123 5704357 5890143 5968145 5973425 5993425 6613054 6621748 6650143 6693458
7038799 7903485 8015987 8295487 8335365 8493036 8603456 8804357 8934657 9105150 9305468
9404256 9560435 9732888 9830234 9903452 9994536 10373970 10507432 10700033 10988989
11095388 11236358 11406573 11700045 11818280 11944537 12054389 12308977 12568323
12703452 12804535 13032577 13336981 13501876 13701863 13903425 14125478]

n=length(ui);
x=zeros(1,n);
xhatdat=zeros(1,n);
z=zeros(1,n);
xhatK=zeros(1,n);
P=zeros(1,n);
Phat=zeros(1,n);
K=zeros(1,n);
residual=zeros(1,n);
h=1;a=1;
for k=2:n;
    P(k)=P(k-1)+1;
    x(k)=ui(k);
```

```
    z(k)=x(k)+sigv*randn;
    xhatdat(k) = a*xhatK(k-1);
    Phat(k) = a*a*P(k-1)+Q;
    K(k)=h*Phat(k)/(h*h*Phat(k)+R);
    zhat(k)=xhatdat(k)*h;
    residual(k)=z(k)-zhat(k);
    xhatK(k)=xhatdat(k)+K(k)*residual(k);
    P(k)=Phat(k)-K(k)*h*Phat(k);
end;
  plot(P,xhatdat,P,ui)
```

ภาคผนวก จ

ผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SPSS

ตารางที่ จ.1 แสดงปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์, เลขหมายติดตั้ง, จำนวนประชากร และรายได้

year	lc	demand	pop	gdp
2535	3004002	3429000	56961030	2111862
2536	3549678	4117133	57788965	2282572
2537	3946272	4381489	58336072	2473937
2538	4228137	4614739	59095419	2695054
2539	4820175	5187337	59460382	2933168
2540	5085464	5467696	60116182	3095041
2541	5060055	5606933	60816227	3051710
2542	5086240	5655354	61466178	2722125
2543	5519819	5968145	61661701	2836454
2544	6000695	6621748	61878746	2961258
2545	7365238	7903485	62294094	3014560
2546	7970245	8493036	63589416	3111026

แหล่งที่มา

Lc = ปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงซึ่งได้มาจากส่วนโครงข่ายโทรคมนาคม บ.ทีโอที จำกัด (มหาชน)

demand = ปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ในปีก่อนหน้านั้นรวมกันปริมาณคำขอใช้โทรศัพท์ ณ ปีนี้ ซึ่งได้มาจาก ส่วนโครงข่ายโทรคมนาคม บ.ทีโอที จำกัด (มหาชน)

Pop = จำนวนประชากรซึ่งข้อมูลได้มาจากสำนักงานสถิติแห่งชาติ

GDP = รายได้ประชาชาติ ซึ่งข้อมูลได้มาจากสำนักงานพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ

ตารางที่ จ.2 แสดงจำนวนประชากรตั้งแต่ปี พ.ศ.2547-2554

year	pop(1)	pop(2)
2547	64754289	64739000
2548	65299430	65285000
2549	65826616	65812000
2550	66318548	66305000
2551	66794042	66781000
2552	67247995	67236000
2553	67681235	67670000
2554	68904483	68083000

แหล่งที่มา

Pop(1) = จำนวนประชากรที่ได้มาจากการคาดคะเนของสำนักงานคณะกรรมเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ

Pop(2) = จำนวนประชากรที่ได้มาจากการคาดคะเนด้วยวิธีตัวกรองคาลมาน

จ.1 การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างความต้องการใช้คู่สายโทรศัพท์กับจำนวนประชากรและรายได้

ผลการศึกษาเป็นดังนี้

Regression

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	POP	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).

a. Dependent Variable: DEMAND

ตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์นั้นได้แก่จำนวนประชากร (POP)

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.977[a]	.955	.951	330677.8

a. Predictors: (Constant), POP

ความเป็นไปได้ของการพยากรณ์เมื่อตัวแปรทั้งหมดนำมาวิเคราะห์มีความแม่นยำในการพยากรณ์ถึง 95.5%

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.3E+13	1	2.3E+13	213.221	.000[a]
	Residual	1.1E+12	10	1.1E+11		
	Total	2.4E+13	11			

a. Predictors: (Constant), POP

b. Dependent Variable: DEMAND

ตาราง ANOVA เป็นการทดสอบสมมุติฐานทางสถิติ

$\mathrm{H}_0 : \rho = 0$ ตัวแปรอิสระทุกตัวไม่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้โทรศัพท์ได้

$\mathrm{H}_1 : \rho \neq 0$ ตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์ได้

P(ความน่าจะเป็น) ที่ได้จากการคำนวณ=0.000 ถ้ากำหนด α ระดับนัยสำคัญ =0.05 ดังนั้นค่า P น้อยกว่าค่า α จึงปฏิเสธสมมุติฐาน H_0 ยอมรับ H_1

สรุปได้ว่าตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ความต้องการใช้ง่านคู่สายโทรศัพท์ได้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ 0.05

ค่า P(ความน่าจะเป็น) ของประชากร= 0.000 ซึ่งน้อยกว่า α =0.05 ดังนั้นตัวแปรด้านประชากรสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ปริมาณความต้องการใช้งานคู่สายโทรศัพท์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-3.9E+07	3036139		-12.744	.000
	POP	.728	.050	.977	14.602	.000

a. Dependent Variable: DEMAND

โดยสมการการพยากรณ์เป็นดังนี้คือ

Demand = -3.9*10^7 + 0.728 POP

Excluded Variables[b]

Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics Tolerance
1	GDP	-.080[a]	-.649	.532	-.211	.312

a. Predictors in the Model: (Constant), POP

b. Dependent Variable: DEMAND

ตารางนี้จะเห็นได้ว่าค่า GDP นั้นมีค่าความน่าจะเป็น 0.532 ซึ่งมากกว่าค่า 0.05 ตัวแปรนี้ไม่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์

จ.2 การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเลขหมายติดตั้งจริงกับจำนวนประชากรและรายได้มีผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

Regression

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	POP	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).

a. Dependent Variable: LC

ตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กับปริมาณการติดตั้งคู่สายโทรศัพท์นั้นได้แก่ จำนวนประชากร

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.974[a]	.949	.944	344035.2

a. Predictors: (Constant), POP

ความเป็นไปได้ของการพยากรณ์เมื่อนำตัวแปรทั้งหมดมาวิเคราะห์มีความแม่นยำในการพยากรณ์ 94.9%

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.2E+13	1	2.2E+13	186.937	.000[a]
	Residual	1.2E+12	10	1.2E+11		
	Total	2.3E+13	11			

a. Predictors: (Constant), POP

b. Dependent Variable: LC

ตาราง ANOVA เป็นการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ

$H_0 : \rho = 0$ ตัวแปรอิสระทุกตัวไม่สามารถนำมาพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งค่าสายโทรศัพท์ได้

$H_1 : \rho \neq 0$ ตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ได้

P(ความน่าจะเป็น) ที่ได้จากการคำนวณ= 0.000 ถ้ากำหนด ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ ดังนั้นค่า P น้อยกว่า α จึงปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ยอมรับ H_1

สรุปได้ว่า ตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งคู่สายโทรศัพท์ได้อย่างมีนัยสำคัญ 0.05

ค่า P (ความน่าจะเป็น) ของประชากร0.000 ซึ่งน้อยกว่า $\alpha =$ 0.05 ดังนั้นตัวแปรอิสระด้านประชากรสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ปริมาณการติดตั้งคู่สายโทรศัพท์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ α ระดับ 0.05

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-3.8E+07	3158781		-12.040	.000
	POP	.709	.052	.974	13.672	.000

a. Dependent Variable: LC

โดยสมการการพยากรณ์เป็นดังนี้ คือ

Line Connect (LC) = -3.8*10^7 +0.709 *POP

Excluded Variables[b]

Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics Tolerance
1	GDP	-.033[a]	-.243	.814	-.081	.312

a. Predictors in the Model: (Constant), POP

b. Dependent Variable: LC

ตารางนี้จะเห็นได้ว่าค่า GDP นั้นมีความน่าจะเป็น 0.814 ซึ่งมากกว่าค่า $\alpha =$ 0.05 ตัวแปรนี้ไม่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์

จ.3 การหาความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานกับโทรศัพท์เคลื่อนที่

ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

Regression

Variables Entered/Removed[a]

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	MOBILE	.	Stepwise (Criteria: Probability-of-F-to-enter <= .050, Probability-of-F-to-remove >= .100).

a. Dependent Variable: FIX

ความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.878[a]	.770	.745	627204.37

a. Predictors: (Constant), MOBILE

ความเป็นไปได้ในการพยากรณ์มีความแม่นยำ 77.0%

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1.2E+13	1	1.2E+13	30.166	.000[a]
	Residual	3.5E+12	9	3.9E+11		
	Total	1.5E+13	10			

a. Predictors: (Constant), MOBILE

b. Dependent Variable: FIX

สำหรับตาราง ANOVA เป็นการทดสอยสมมุติฐานทางสถิติ

$H_0 : \rho = 0$ ตัวแปรอิสระทุกตัวไม่สามารถนำมาใช้พยากรณ์ได้

$H_1 : \rho \neq 0$ ตัวแปรอิสระบางตัวนำมาใช้ในการพยากรณ์ได้

P(ความน่าจะเป็น) ที่ได้จากการคำนวณได้ 0.000 ถ้ากำหนดระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$ ดังนั้นค่า P มีค่าน้อยกว่า α จึงปฏิเสธสมมุติฐาน H_0 ยอมรับ H_1 สรุปได้ว่าตัวแปรอิสระบางตัวสามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ได้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	4592108	235111.9		19.532	.000
	MOBILE	.215	.039	.878	5.492	.000

a. Dependent Variable: FIX

ดังนั้น สมการความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่เป็นดังนี้

$$FIX = 4592108 + 0.215*MOBILE$$

จ. 4 การศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานและโทรศัพท์เคลื่อนที่

ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

Correlations

Correlations

		FIX	MOBILE
Pearson Correlation	FIX	1.000	.878**
	MOBILE	.878**	1.000
Sig. (2-tailed)	FIX	.	.000
	MOBILE	.000	.
N	FIX	11	11
	MOBILE	11	11

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

ผลที่ได้จากการหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างโทรศัพท์พื้นฐานกับโทรศัพท์เคลื่อนที่ในช่วงปี พ.ศ.2535-2546 มีค่าเท่ากับ 0.878 ซึ่งมีค่าเป็นบวก และมีค่าใกล้ 1 สามารถแปลผลได้ว่า ปริมาณความต้องการใช้โทรศัพท์พื้นฐานกับโทรศัพท์เคลื่อนที่มีความสัมพันธ์กันสูงและไปในทิศทางเดียวกัน ข้อมูลที่นำมาใช้วิเคราะห์ ประกอบด้วย fix คือ ปริมาณเลขหมายโทรศัพท์พื้นฐาน และ Mobile คือ ปริมาณเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่

year	mobile	fix
2535	164637	3429000
2536	289939	4117133
2537	764849	4381489
2538	1253716	4614739
2539	1716719	5187337
2540	1973600	5467696
2541	1897643	5606933
2542	2356523	5655354
2543	3473913	5968145
2544	8012759	6621748
2545	17434294	7903485

แหล่งที่มาข้อมูล โทรศัพท์เคลื่อนที่(mobile) และโทรศัพท์พื้นฐาน(fix)ได้มาจากส่วนวางแผนโครงข่าย บ.ทีโอที จำกัด (มหาชน)

ภาคผนวก ฉ

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

C. Wongsuwan et. al. “Demand Forecasting on Telephone Usage Based on Kalman Filtering.” IEEE ICICS 2005. 6-9 December 2005, Bangkok. Thailand.