บทที่ 4

ผลของงานวิจัย

การศึกษาครั้งนี้ทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่มีรูปแบบเป็น

$$2S\frac{\left(U_0+D\sqrt{D}\right)}{D\sqrt{D}}\eta_{00X}+\frac{3}{(U_0+D\sqrt{D})}\eta_{00}\eta_{00\xi}+\frac{D^5}{3\left(U_0+D\sqrt{D}\right)^3}\eta_{00\xi\xi\xi}=0$$

โดยได้มาจากวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) ที่ใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) [9] สัมประสิทธิ์ที่เป็นตัวแปรเหล่านี้จะเขียนอยู่ในรูปของความลึก จากนั้นพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความลึกระดับต่างๆ สำหรับผลเฉลยที่ได้ที่อันดับ $O(1)$ และ $O(\varepsilon)$ จะกล่าวเป็นลำดับได้ดังนี้

4.1 ผลเฉลยที่ $O(\varepsilon^n\sigma^m)$

พิจารณาระบบสมการที่ถูกสร้างขึ้นที่แต่ละอันดับของ $\varepsilon^n\sigma^m$ โดยการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) และกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ที่มีความจำเป็น ซึ่งทำให้ทราบว่าการกระจายนี้มีรูปแบบของการกระจายที่อยู่ในรูปของระยะทาง และเวลา เพื่อที่จะหาค่า η_{00} ที่เป็นคลื่นขั้นต้น และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นขั้นต้นนี้ที่ความลึกระดับต่างๆ

เมื่อนำสมการ (3.45) มาหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) จะได้

$$\varepsilon^0[\sigma^0(RU-1)u_{00\xi}+\sigma^0\varepsilon\sigma(RU+1)u_{00\zeta}+\sigma^0\varepsilon SUu_{00X}+\sigma^0\varepsilon\sigma u_{00}U_Y+\sigma^0\varepsilon\sigma u_{00Y}U$$

$$+\sigma^0\varepsilon u_{00}\{R(u_{00\xi}+\varepsilon\sigma u_{00\zeta})+\varepsilon Su_{00X}+\varepsilon\sigma u_{00Y}\}+\sigma^0 w_{00}(U_z+\varepsilon u_{00z})+\sigma^0\varepsilon\sigma Wu_{00z}$$

$$+\sigma^0R(p_{00\xi}+\varepsilon\sigma p_{00\zeta})+\sigma^0\varepsilon Sp_{00X}+\sigma^0\varepsilon\sigma p_{00Y}]+\varepsilon^1[\sigma^0(RU-1)u_{10\xi}+\sigma^0\varepsilon\sigma(RU+1)u_{10\zeta}$$

$$+\sigma^0\varepsilon SUu_{10X}+\sigma^0\varepsilon\sigma u_{10}U_Y+\sigma^0\varepsilon\sigma u_{10Y}U+\sigma^0\varepsilon u_{10}\{R(u_{10\xi}+\varepsilon\sigma u_{10\zeta})+\varepsilon Su_{10X}+\varepsilon\sigma u_{10Y}\}$$

$$+\sigma^0 w_{10}(U_z+\varepsilon u_{10z})+\sigma^0\varepsilon\sigma W u_{10z}+\sigma^0 R(p_{10\xi}+\varepsilon\sigma p_{10\zeta})+\sigma^0\varepsilon S p_{10X}+\sigma^0\varepsilon\sigma p_{10Y}+...=0$$

สำหรับสมการ (3.46) , (3.47) และเงื่อนไขค่าขอบเขตบนจะพิจารณาจากสมการ (3.50) , (3.51) แต่เงื่อนไขค่าขอบเขตล่างจะพิจารณาจากสมการ (3.49) ก็จะทำในทำนองเดียวกันนี้ จะได้เทอมต่างๆ ดังนี้

เทอม $\varepsilon^0\sigma^0$

พิจารณาสมการต่างๆ ที่ถูกสร้างขึ้นที่ $O(1)$ แล้วทำการอธิบายสมการเหล่านั้นที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่างๆ ที่อันดับนี้ สมการต่างๆ ที่สร้างขึ้นคือ

$$(RU-1)u_{00\xi}+U_z w_{00}+Rp_{00\xi}=0; \tag{4.1}$$

$$p_{00z}=0; \tag{4.2}$$

$$Ru_{00\xi}+w_{00z}=0; \tag{4.3}$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\left.\begin{aligned} p_{00}&=\eta_{00}; \\ w_{00}&=(UR-1)\eta_{00\xi} \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z=1+H \tag{4.4}$$

และ

$$w_{00}=0 \quad \text{บน} \quad z=B \tag{4.5}$$

ดังนั้น

$$p_{00}=\eta_{00} \qquad B\le z\le 1+H,$$

จากสมการ (4.3) จะได้

$$u_{00\xi}=-\frac{1}{R}w_{00z}$$

จากนั้นนำ $u_{00\xi} = -\frac{1}{R} w_{00z}$ แทนลงในสมการ (4.1) ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขตบน $z = B$ จะได้

$$(RU-1)(-\frac{1}{R} w_{00z}) + Rp_{00\xi} = 0 \qquad (\because w_{00} = 0)$$

$$w_{00z} = \frac{R^2 \eta_{00\xi}}{(RU-1)}$$

$$w_{00} = R^2 \eta_{00\xi} \int_B^z \frac{dz}{(UR-1)} + F$$

นั่นคือ $F = 0$ เพราะว่า $w_{00} = 0$ ดังนั้นจะได้

$$w_{00} = R^2 (UR-1) \eta_{00\xi} \int_B^z \frac{dz}{(UR-1)^2}$$

$$= \eta_{00\xi} I \tag{4.6}$$

โดยจะเขียน (เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ $C(Y) = \frac{1}{R(Y)}$)

$$I(z,Y) = (UR-1) \int_B^z \frac{dz}{(U-C)^2} \tag{4.7}$$

และจากสมการ (4.6) ทำให้สมการ $u_{00\xi} = -\frac{1}{R} w_{00z}$ กลายเป็น

$$u_{00\xi} = -\frac{1}{R} \eta_{00\xi} I_z$$

$$\therefore \quad u_{00} = -\frac{1}{R} \eta_{00} I_z$$

และจากเงื่อนไข (4.4) บน $z = 1 + H$

$$w_{00} = (UR-1) \eta_{00\xi}$$

ดังนั้น

$$\int_{B}^{1+H} \frac{dz}{(U(z,Y)-C(Y))^2} = 1 \tag{4.8}$$

$$\because \quad w_{00} = R^2 \eta_{00\xi}(UR-1)\int_{B}^{1+H} \frac{dz}{R^2(U-C)^2}$$

ผลลัพธ์ที่ (4.8) เป็นเงื่อนไขเบิร์นแบบดั้งเดิม (Classical Burns Condition) [17] ที่กำหนดให้ $U(z,Y)$ แสดงความเร็วของคลื่นในแนวตรง ซึ่งความเร็วเป็น $C(Y)$

ผลเฉลยของ (4.8) สำหรับ $C(Y)$ จะเกิดขึ้น ภายใต้เงื่อนไข $U(z,Y) \neq C(Y)$ เมื่อ $0 \le z \le 1$ เท่านั้น ถ้า $U(z_C, Y) = C(Y)$ สำหรับบางค่าที่ $z_C \in (0,1)$ และ $U(0) = C$ หรือ $U(1) = C$ ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ แล้วทางด้านซ้ายมือของสมการ (4.8) ไม่นิยาม และ $z = z_C$ เรียกว่า Critical Level or Layer [4] เพราะฉะนั้นเงื่อนไขเบิร์นพอเพียงสำหรับที่จะแสดงว่าผลเฉลยของสมการ (4.8) จะสามารถหาได้ และสำหรับโครงสร้าง Monotonic ที่เป็นไปตาม $U(0) \le U(z) \le U(1)$ โดยที่ทุกครั้งที่ความเร็วน้อยที่สุด 2 ตัวของการแผ่ขยายหนึ่งครั้งเป็น $C(Y) > U(1,Y)$ และนอกเหนือจากนี้เป็น $C(Y) < U(0,Y)$ สำหรับกรณีที่เป็นการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) (U ไม่เป็นฟังก์ชันของ z เช่นเดียวกับสมการ (3.32)) จะได้

$$C(Y) = U \pm \sqrt{D} \tag{4.9}$$

โดยที่

$$D = 1 + H - B \tag{4.10}$$

ดังนั้นไม่เกิด Critical Layer คือสามารถหาค่าสมการได้ ในการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) ในกรณีที่การแผ่ขยายไม่เกิดขึ้นใน Background Flow ใดๆ (ถ้า $U = 0$) ความเร็วของคลื่นเป็น $C(Y) = \pm\sqrt{D}$ [15] เท่านั้น สำหรับการแผ่ขยายของคลื่นทางด้านซ้าย และทางด้านขวา ในขณะที่ $U = U(Y)$ (U เปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกับการเปลี่ยนความลึก) ความเร็วทั้งสองของการแผ่ขยายจะถูกกำหนดเป็น $C(Y) = U \pm \sqrt{D}$

เทอม $O(\varepsilon^1\sigma^0)$

ในขณะนี้จะการพิจารณาระบบสมการที่ได้จาก $O(\varepsilon)$ ในการกระจายเชิงเส้นกำกับ สมการเหล่านั้นคือ

$$(RU-1)u_{10\xi}+SUu_{00X}+Ru_{00}u_{00\xi}+w_{10}U_z$$

$$w_{00}u_{00z}+Rp_{10\xi}+Sp_{00X}=0; \qquad (4.11)$$

$$(RU-1)w_{00\xi}+p_{10z}=0; \qquad (4.12)$$

$$Ru_{10\xi}+Su_{00X}+w_{10z}=0; \qquad (4.13)$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\left.\begin{aligned} p_{10} &= \eta_{10}; \\ w_{10} &= (UR-1)\eta_{10\xi}-\eta_{00}w_{00z}+RU_z\eta_{00}\eta_{00\xi} \\ &\quad +US\eta_{00X}+Ru_{00}\eta_{00\xi} \end{aligned}\right\} \quad \text{บน } z=1+H \qquad (4.14)$$

และ

$$w_{10}=0 \qquad \text{บน } z=B \qquad (4.15)$$

จากสมการ (4.12) , (4.13) และผลที่ได้จากอันดับที่ต่ำกว่า จะสามารถเขียนสมการ (4.11) ใหม่ ได้เป็น

$$(RU-1)[-C(Su_{00X}+w_{10z})]+SUu_{00X}+CI_z^2\eta_{00}\eta_{00\xi}$$

$$+w_{10}U_z-CII_{zz}\eta_{00}\eta_{00\xi}+Rp_{10\xi}+S\eta_{00X}=0; \qquad (4.16)$$

และจากสมการ (4.6) และ (4.7) จะได้

$$w_{00\xi}=\eta_{00\xi\xi}I(z,Y) \qquad (4.17)$$

โดยที่ I จะกำหนดเช่นดียวกับสมการ (4.7) และจากสมการ (4.12)

$$p_{10z} = -(RU-1)^2 \eta_{00\xi\xi} \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz \tag{4.18}$$

เมื่อหาปฏิยานุพันธ์เทียบกับ z และหาค่าบน $z = 1 + H$ ดังนั้นสมการ (4.18) กลายเป็น

$$p_{10} = -\eta_{00\xi\xi} \int_B^z [(RU-1)^2 \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz] dz + F$$

$$= -\eta_{00\xi\xi} \int_B^z [(RU-1)^2 \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz] dz + \eta_{10} \quad (\text{บน } z = 1 + H; F = \eta_{10})$$

$$\therefore \quad p_{10} = J\eta_{00\xi\xi} + \eta_{10} \tag{4.19}$$

โดยที่

$$J(z,Y) = \int_z^{1+H} \left[(UR-1)^2 \int_B^z \frac{1}{(U-C)^2} dz \right] dz$$

จากสมการ (4.16) เมื่อแทนค่า $u_{00} = -\frac{1}{R}\eta_{00} I_z$ และ $p_{10} = J\eta_{00\xi\xi} + \eta_{10}$ ที่ได้ลงไป จะได้

$$(RU-1)[-C(S(-\frac{1}{R}\eta_{00} I_z)_X + w_{10z})] + SU(-\frac{1}{R}\eta_{00} I_z)_X + CI_z^2 \eta_{00}\eta_{00\xi}$$

$$+ w_{10}U_z - CII_{zz}\eta_{00}\eta_{00\xi} - R(J\eta_{00\xi\xi} + \eta_{10})_\xi + S\eta_{00X} = 0$$

จัดรูปสมการใหม่ และนำ $\left(-\frac{1}{(U-C)^2} \right)$ คูณตลอด ได้เป็น

$$\left(\frac{w_{10}}{(U-C)} \right) z = -\frac{C^2 S I_z}{(U-C)^2} \eta_{00X} + \frac{S}{(U-C)^2} \eta_{00X} + \frac{C}{(U-C)^2} \eta_{00}\eta_{00\xi} (I_z^2 - II_{zz})$$

$$+ \frac{J}{C(U-C)^2} \eta_{00\xi\xi\xi} + \frac{1}{C(U-C)^2} \eta_{10\xi} \tag{4.20}$$

เมื่อหาปฏิยานุพันธ์เทียบกับ z สมการ (4.20) กลายเป็น

$$\frac{w_{10}}{(U-C)} = -C^2 S\eta_{00X}\int_B^Z \frac{I_z}{(U-C)^2}dz + S\eta_{00X}\int_B^Z \frac{1}{(U-C)^2}dz$$

$$+C\eta_{00}\eta_{00\xi}\int_B^z \frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2}dz + \frac{1}{C}\eta_{00\xi\xi\xi}\int_B^z \frac{J}{(U-C)^2}dz$$

$$+\frac{1}{C}\eta_{10\xi}\int_B^z \frac{1}{(U-C)^2}dz + F(\xi,\zeta,X,Y) \tag{4.21}$$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันใดๆ แต่เมื่อหาค่าบน $z=B$ และใช้สมการ (4.15) ดังนั้น $F=0$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{w_{10}}{(U-C)} = -C^2 S\eta_{00X}\int_B^Z \frac{I_z}{(U-C)^2}dz + S\eta_{00X}\int_B^Z \frac{1}{(U-C)^2}dz$$

$$+C\eta_{00}\eta_{00\xi}\int_B^z \frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2}dz + \frac{1}{C}\eta_{00\xi\xi\xi}\int_B^z \frac{J}{(U-C)^2}dz$$

$$+\frac{1}{C}\eta_{10\xi}\int_B^z \frac{1}{(U-C)^2}dz \tag{4.22}$$

เมื่อหาค่าบน $z=1+H$ โดยแทนค่า $u_{00} = -\frac{1}{R}\eta_{00}I_z$ และ $w_{00} = \eta_{00\xi}I_z$ ในสมการ (4.14) ได้เป็น

$$w_{10} = -2\eta_{00}\eta_{00\xi}I_z + \frac{1}{C}(U-C)\eta_{10\xi} + \frac{1}{C}U_z\eta_{00}\eta_{00\xi} + US\eta_{00X}$$

จากนั้นแทนค่า $I_z = \frac{1}{C(U_1-C)} + \frac{U_{1z}}{C}$ ได้ดังนี้

$$w_{10} = -2\eta_{00}\eta_{00\xi}\left[\frac{1}{C(U_1-C)} + \frac{U_{1z}}{C}\right] + \frac{1}{C}(U_1-C)\eta_{10\xi} + \frac{1}{C}U_{1z}\eta_{00}\eta_{00\xi} + U_1 S\eta_{00X}$$

$$= -\eta_{00}\eta_{00\xi}\left[\frac{2}{C(U_1-C)} + \frac{U_{1z}}{C}\right] + \frac{1}{C}(U_1-C)\eta_{10\xi} + U_1 S\eta_{00X} \tag{4.23}$$

แทนสมการ (4.23) ในสมการ (4.22) พิจารณาบน $z = 1 + H$ จะได้

$$S\eta_{00X}\left[C^2\int_B^{1+H}\frac{I_z}{(U-C)^2}dz + \frac{U_1}{(U_1-C)} - 1\right] - \frac{1}{C}\eta_{00\xi\xi\xi}\int_B^{1+H}\frac{J}{(U-C)^2}dz$$

$$-\eta_{00}\eta_{00\xi}\left[C\int_B^{1+H}\frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2}dz + \frac{2}{C(U_1-C)^2} + \frac{U_{1z}}{C(U_1-C)}\right] = 0$$

จากนั้นแทนค่า $C\int_B^{1+H}\frac{(I_z^2 - II_{zz})}{(U-C)^2}dz = \frac{3}{C}I_4 - \frac{2}{C(U_1-C)^2} - \frac{U_{1z}}{C(U_1-C)}$ และ

$\int_B^{1+H}\frac{I_z}{(U-C)^2}dz = \frac{2}{C}I_3 - \frac{1}{C(U_1-C)}$ จะได้

$$2CI_3S\eta_{00X} - \frac{3}{C}I_4\eta_{00}\eta_{00\xi} - \frac{J_1}{C^3}\eta_{00\xi\xi\xi} = 0 \tag{4.24}$$

โดยที่

$$J_1 = \int_B^{1+H}\int_z^{1+H}\int_B^{z_1}\frac{\left[U(z_1 - C)\right]^2}{\left[U(z)-C\right]^2\left[U(z_2)-C\right]^2}dz_2dz_1dz \tag{4.25}$$

สมการ (4.24) เป็นรูปแบบของสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$I_n(z,Y) = \int_B^{1+H}\frac{dz}{(U-C)^n} \tag{4.26}$$

สมการ (4.24) เป็นรูปแบบสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร [18] และถ้า $U = 0$ จะเป็นเช่นเดียวกับที่ได้รับจากการประมาณในจอร์นสัน [15] สมการ (4.24) สมการนี้เหมาะที่จะสร้างโครงร่างตอนแรกใน $Y < 0$ โดย $U = U(z,Y)$

ที่อันดับนี้ทำให้ได้ผลเฉลย ซึ่งผลเฉลยที่เกิดขึ้นนั้นเป็นคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) สำหรับ η_{00}

โดยกำหนดให้คลื่นขั้นต้นเป็นแนวทางของการสะท้อนกลับ (Reflection) และ Re-Reflection โดยการแผ่ขยายไปทางด้านขวาภายในขอบเขตของความลึกระดับต่างๆ ดังนั้นเมื่อกล่าวถึงการเคลื่อนที่ไปทางขวาจะคิดถึงคลื่นขั้นต้น

4.2 กรณีพิเศษ (Special Case) สำหรับผลเฉลย

จะเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ และอธิบายรายละเอียดของผลเฉลย เพราะฉะนั้นจะได้กรณีพิเศษสำหรับ Background Flow (สมการ 3.32) คือ

$$U = \Psi_z = \phi(Y)$$

จากสมการ (3.33) และสมการ (4.9) เป็น

$$H = \frac{1}{2}(U_0^2 - \phi^2) = \frac{1}{2}(U_0^2 - U^2)$$

$$C = U \pm \sqrt{D}$$

ตามลำดับ เมื่อแทนค่า $U_0 = UD; \quad D(Y) = 1 + H(Y) - B(Y)$ (สมการ (3.34)) ใน C จะได้

$$C = \frac{U_0}{D} \pm \sqrt{D}$$

$$\therefore \quad C = \left(\frac{U_0 \pm D\sqrt{D}}{D} \right)$$

จากสมการ (4.26) เมื่อแทนค่า U และ C ที่อยู่ในเทอมของ U_0 และ D แล้วหาปฏิยานุพันธ์ จะได้

$$I_3 = \int_B^{1+H} \frac{dz}{\left(\frac{U_0}{D} - \left(\frac{U_0}{D} + \frac{D\sqrt{D}}{D} \right) \right)^3}$$

$$I_3 = \frac{1 + H - B}{-D\sqrt{D}}; \quad D = 1 + H - B$$

$$\therefore \quad I_3 = -\frac{1}{\sqrt{D}}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$I_4(z,Y) = \frac{1}{D}$$

และจากสมการ (4.25) จะได้

$$J_1 = \int_B^{1+H}\int_z^{1+H}\int_B^{z_1} \frac{[U(z_1)-C]^2}{[U(z)-C]^2[U(z_2)-C]^2} dz_2 dz_1 dz$$

เมื่อจัดให้อยู่ในเทอมของ U_0 และ D แล้วหาปฏิยานุพันธ์ จะได้

$$J_1(z,Y) = \frac{D^2}{3}$$

จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ต่างๆ แทนค่าในสมการ (4.24) เป็น

$$2S\frac{\left(U_0 + D\sqrt{D}\right)}{D\sqrt{D}}\eta_{00X} + \frac{3}{(U_0 + D\sqrt{D})}\eta_{00}\eta_{00\xi} + \frac{D^5}{3\left(U_0 + D\sqrt{D}\right)^3}\eta_{00\xi\xi\xi} = 0 \qquad (4.27)$$

นั่นคือสมการ (4.27) เป็นรูปแบบสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร สำหรับกรณีที่ทำการศึกษา จากนั้นจะพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรดังกล่าว ที่ความลึกระดับต่างๆ โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.1-4.4 โดยรูปที่ 4.1 และ 4.2 จะกำหนดค่า U_0 ให้คงที่ แล้วเปลี่ยนค่า D ส่วนรูปที่ 4.3 และ 4.4 จะกำหนดค่า D ให้คงที่ แล้วเปลี่ยนค่า U_0 ซึ่งผลที่ได้เป็นดังนี้

เมื่อพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลองในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่ความลึกระดับต่างๆ จากรูปที่ 4.1 - 4.4 พบว่าเมื่อความลึกของแม่น้ำลำคลองเกิดการเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้น จะส่งผลต่อความสูงของคลื่น ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้นด้วย แต่ทำให้ความกว้างของคลื่นลดลง ดังนั้นการเปลี่ยนความลึกมีผลกระทบต่อความสูง และความกว้างของคลื่นในแม่น้ำลำคลอง