บทที่ 3
เพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแปลงสมการออยเลอร์ที่สอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล และเงื่อนไขค่าขอบเขตต่างๆ ให้เหมาะสม เพื่อที่จะนำไปใช้ในการหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปของสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่ได้จากวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) ซึ่งทำโดยการใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) [9] ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

3.1 การไร้มิติ (Nondimensionalisation)

การไร้มิติเป็นการทำให้ตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณไม่มีหน่วย โดยใช้สเกลของระยะทาง และของเวลาที่มีความเหมาะสมเป็นตัวกำหนด เช่นเดียวกับที่ได้กล่าวในส่วนที่ 2.1.5 โดยอันดับแรกขอกล่าวถึงสเกลของระยะทาง ได้แก่ h_0 แทนความลึกที่ไม่ถูกรบกวน (เป็นค่าคงที่) ที่ $x' < 0$, a แทนแอมพลิจูดของคลื่น และ λ แทนความยาวคลื่นพื้นผิว สำหรับสเกลของเวลาจะนำมาใช้เพื่อหาตัวที่เหมาะสมที่จะใช้เป็นสเกลของความเร็ว ที่ได้จากการประมาณการแผ่ขยายของคลื่นยาวเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกบนพื้นผิวที่ความลึก h_0 เป็น $\sqrt{gh_0}$ โดย g แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่มีค่าคงที่ ตัวแปรต่างๆ (จากรูปที่ 2.6) ที่ถูกกำหนดให้ไร้มิติเป็น ดังนี้

$$x' = \lambda x, \quad z' = h_0 z, \quad t' = \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t,$$

$$u' = \sqrt{gh_0}\, u, \quad w' = \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda} w, \quad b' = h_0 b$$

ร่วมกับพื้นผิวอิสระ

$$h'(x',t') = h_0 h(x,t)$$

สำหรับความดันจะใช้ $\rho g h_0$ ทำให้เป็นสเกลที่ไร้มิติ ดังนั้นความดันสามารถเขียนได้เป็น

$$P' = P_a - \rho g z' + \rho g h_0 p$$

โดยที่ p แทนความดันที่เปลี่ยนให้ไร้มิติ

รูปแบบของสมการออยเลอร์ (Euler's Equation) ร่วมกับสมการของกฎทรงมวล สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.1}$$

โดยที่

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.2}$$

เหล่านี้เป็นสมการที่เขียนในเทอมของตัวแปรที่ไร้มิติ โดยที่ $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นยาว หรือ คลื่นน้ำตื้น

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขค่าขอบเขตบนพื้นผิว $z' = h'(x', t')$ แล้วใช้ $h' = h_0 h(x,t)$ และ $z' = h_0 z$ ที่ไร้มิติ จะได้

$$z = h$$

และในทำนองเดียวกันเงื่อนไขค่าขอบเขตล่างเป็น

$$z = b$$

จะเห็นได้ว่าบนพื้นผิว $z = h$ เป็นรูปแบบของพื้นผิวที่ไร้มิติ แล้วเงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์ (Kinematic Condition) (ในส่วนที่ 2.1.4.1.1) และเงื่อนไขพลศาสตร์ (Dynamic Condition) (ในส่วนที่ 2.1.4.1.2) สามารถเขียนในรูปตัวแปรที่ไร้มิติได้ดังนี้

$$w = h_t + uh_x \quad \text{และ} \quad p = h \quad \text{ตามลำดับ} \tag{3.3}$$

สำหรับเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (Bottom Boundary Condition) (ในส่วนที่ 2.1.4.2) ที่ไร้มิติเป็น

$$w = u\frac{db}{dx} \qquad \text{บน} \qquad z = b(x) \tag{3.4}$$

เมื่อนำสมการ และเงื่อนไขต่างๆ เหล่านั้นมารวมกัน จะทำให้ได้สมการ และเงื่อนไขที่เหมาะสมสำหรับสภาวะพื้นฐาน (Background State) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$u_t + uu_x + wu_z + p_x = 0; \tag{3.5}$$

$$\delta^2(w_t + uw_x + ww_z) + p_z = 0; \tag{3.6}$$

$$u_x + w_z = 0 \tag{3.7}$$

ร่วมกับ

$$\left.\begin{aligned} &p = h; \\ &w = h_t + uh_x \end{aligned}\right\} \quad \text{บน}\, z = h, \tag{3.8}$$

และ

$$w = u\frac{db}{dx} \qquad \text{บน} \qquad z = b(x) \tag{3.9}$$

เนื่องจากสมการต่างๆ เหล่านี้ถูกเขียนให้อยู่ในรูปตัวแปรที่ไร้มิติ ดังนั้นเมื่อนำสมการต่างๆ ไปใช้จะสามารถใช้ได้โดยง่าย

3.2 การเปลี่ยนสเกลสำหรับตัวแปรต่างๆ (Scaling Of The Variables)

เมื่อพิจารณาพื้นผิวของคลื่นที่มีการเคลื่อนที่ไปทางขวาจากที่ $x < 0$ โดยที่ความลึกคงที่ความสูงของพื้นผิวที่ไร้มิติของของพื้นผิวแทนด้วย h (ในส่วนที่ 2.1.5) สามารถเขียนได้เป็น

$$h = 1 + \varepsilon\eta(x,t), \qquad x < 0 \tag{4.10}$$

ดังนั้นพื้นผิวที่ไม่ถูกรบกวน ($h = 1$) จะถูกรบกวนโดยกำหนดให้เป็นคลื่น $\varepsilon\eta(x,t)$ และกำหนดให้ ε เป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ ที่อธิบายถึงแอมพลิจูดที่ไร้มิติของคลื่น ตัวอย่างเช่น $\varepsilon =$(ค่าเฉลี่ยของแอมพลิจูด/ h_0)

ในการศึกษาจะพิจารณากรณีที่เป็นรูปแบบ KdV ที่มีความสมดุลระหว่างแบบไม่เชิงเส้นและผลจากการแพร่กระจาย (ที่อันดับนำ (Leading Order)) โดยอันดับนำที่ได้จากเทอมแพร่กระจาย และจากแบบไม่เชิงเส้นจะมีอันดับที่เท่ากัน ซึ่งอันดับดังกล่าวจะนำมาใช้ในการอธิบายคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) ในระบบนี้

ดังนั้นสามารถแสดงได้ว่าสำหรับ δ ใดๆ ที่ $\varepsilon \to 0$ มีค่าขอบเขตเป็น (x,t) ซึ่งค่าขอบเขตนี้จะเปลี่ยนรูปโดยใช้ตัวแปรอิสระ [15-16] ได้เป็น

$$\chi = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} x, \qquad \tau = \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} t \tag{3.11}$$

สำหรับ ε และ δ ใดๆ การเปลี่ยนรูปนี้จะต้องมีความสอดคล้องกับสมการของกฎทรงมวล จึงสามารถเปลี่ยนรูปได้เป็น

$$w \to \frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} w$$

โดยกำหนดให้ "$\to$" หมายความว่า "แทนที่ด้วย" เมื่อเกิดการค่อยๆ เปลี่ยนพื้นผิวท้องน้ำต้องสมมุติสเกลที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนความลึกที่เกิดขึ้น ได้แก่พารามิเตอร์ α ที่เป็นสเกลของการค่อยๆ เปลี่ยนพื้นผิวท้องน้ำ ดังนี้

$$b(x) = B(Y), \qquad Y = \alpha\chi \tag{3.12}$$

โดยปกติแล้วจะกำหนด $B(Y) = 0$ ที่ $x < 0$ เพราะว่าคลื่นแผ่ขยายจากขอบเขตของความลึกคงที่ ดังนั้นสมการ (3.5)-(3.9) กลายเป็น

$$u_\tau + uu_\chi + wu_z + p_\chi = 0; \tag{3.13}$$

$$\varepsilon(w_\tau + uw_\chi + ww_z) + p_z = 0; \tag{3.14}$$

$$u_\chi + w_z = 0 \tag{3.15}$$

ร่วมกับ

$$\left.\begin{aligned} p &= h; \\ w &= h_\tau + uh_\chi \end{aligned}\right\} \quad \text{บน} \quad z = h \tag{3.16}$$

และ

$$w = \alpha u B' \qquad \text{บน} \qquad z = B(Y) \tag{3.17}$$

สุดท้ายผลของการเปลี่ยนรูปจะแทนที่ δ^2 ด้วย ε ในสมการ (3.6) และการแสดงที่ว่า $h = 1 + \varepsilon\eta$ จะใช้เฉพาะที่ $x < 0$ เท่านั้น แต่รูปแบบของ h ที่ $x > 0$ จะถูกอธิบายต่อไป

3.3 สภาวะพื้นฐาน (The Background State)

เมื่อไม่เกิดคลื่นพื้นผิว จะทำการพิจารณาการไหลแบบคงที่ และการแพร่กระจายใดๆ ของกระแสน้ำวนที่ $x < 0$ นอกจากนั้นยังคงพิจารณาการไหลแบบนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งมีการค่อยๆ เปลี่ยนแปลงบนสเกล $\alpha\chi\,(=Y)$ ที่ $x > 0$ เช่นเดียวกับการค่อยๆ เปลี่ยนท้องน้ำ $z = B(Y)$ โดยจะสามารถอธิบาย Background State [4] ได้เป็น

$$u = U(z, Y; \varepsilon); \qquad w = \alpha W(z, Y; \varepsilon);$$

$$p = P(z, Y; \varepsilon); \qquad h = 1 + H(Y; \varepsilon)$$

(โดยที่ '1' เป็นนิยามสำหรับ h เท่านั้น เพื่อความเหมาะสม) ดังนั้น

$$UU_Y + WU_z = -P_Y; \tag{3.18}$$

$$P_z = -\varepsilon\alpha^2 (UW_Y + WW_z); \tag{3.19}$$

$$U_Y + W_z = 0, \tag{3.20}$$

ร่วมกับ

$$\left.\begin{aligned} P &= 1 + H; \\ W &= UH' \end{aligned}\right\} \text{ บน } z = 1 + H, \tag{3.21}$$

และ

$$W = UB' \qquad \text{บน} \quad z = B \tag{3.22}$$

สามารถอธิบาย P ได้โดยตรงจาก

$$P = 1 + H + O(\varepsilon\alpha^2) \qquad (B \le z \le 1 + H) \tag{3.23}$$

และดังนั้นจะได้

$$UU_Y + WU_z = -H'(Y) + O(\varepsilon\alpha^2); \quad U_Y + W_z = 0$$

สิ่งที่กล่าวมาข้างต้นเหมาะสมที่จะนำไปสู่ฟังก์ชันสายธาร (Stream Function) ซึ่งกำหนดเป็น $\Psi(z, Y; \varepsilon)$ [4] (เป็นไปตามสมการกฏทรงมวล (3.20)) ร่วมกับ

$$U = \Psi_z, \quad W = -\Psi_Y \tag{3.24}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (3.18) กลายเป็น

$$\Psi_z \Psi_{zY} - \Psi_Y \Psi_{zz} = -H'(Y) + O(\varepsilon\alpha^2) \tag{3.25}$$

จากนั้นหาอนุพันธ์เทียบกับ z แล้วสมการ (3.25) กลายเป็น

$$\Psi_z \Psi_{Yzz} - \Psi_Y \Psi_{zzz} = O(\varepsilon\alpha^2)$$

ดังนั้นจะได้กลุ่มคำตอบคือ

$$\Psi_{zz} = \frac{1}{2}F'(\Psi) + O(\varepsilon\alpha^2) \qquad \text{หรือ} \quad \Psi_z^2 = F(\Psi) + A(Y) + O(\varepsilon\alpha^2) \tag{3.26}$$

โดยที่ F และ A เป็นฟังก์ชันใดๆ กระแสน้ำวนในการไหล (การไหลในท่อปลายปิดในทิศทางของ y) เป็น

$$\Psi_{zz} + O(\varepsilon\alpha^2)$$

Background State เป็นการแสดงโดยทางเลือกที่เหมาะสมของ Ψ ที่เป็นไปตามสมการ (3.25) และเงื่อนไขค่าขอบเขต 2 เงื่อนไขจะถูกกำหนดในสมการ (3.21) และ (3.22) (ภายหลังจากไม่กำหนดเทอมที่มีขนาดเล็ก $O(\varepsilon\alpha^2)$ การวัดค่าคลาดเคลื่อนก็จะหายไปในการอธิบายถึง Background State)

สำหรับตัวอย่างง่ายๆ ของ Background Flow ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

$$\Psi = \phi(Y)z + \beta(Y) \tag{3.27}$$

ดังนั้น $F(\Psi) \equiv 0$ และ $\Psi_{zz} = 0$ นั่นคือกระแสน้ำวนเป็นศูนย์ เพราะฉะนั้นจะเป็นไปตามสมการ (3.26) สำหรับการใส่ β ในสมการ (3.27) เพื่อปฏิบัติตามกฎขององค์ประกอบ Y ของฟังก์ชันสายธาร อันดับที่เป็นไปตามสมการ (3.25) กำหนดดังนี้

$$\phi^2 + 2H = U_0^2 \tag{3.28}$$

โดยที่ $\phi = U_0$ ที่ $Y < 0$ ($H = 0$) เงื่อนไขค่าขอบเขต (3.21) และ (3.22) กลายเป็น

$$\phi(1+H) + \beta = U_0 + \beta_0 \tag{3.29}$$

$$\phi B + \beta = \beta_0 \tag{4.30}$$

โดยที่ $\beta = \beta_0 =$ ค่าคงที่ ที่ $Y < 0$ ($B = 0$) เมื่อนำเงื่อนไข (3.29) ลบกับ (3.30) ผลที่ได้เป็น

$$\phi D = U_0 \tag{3.31}$$

โดยที่ $D(Y)=1+H-B$ เป็นความลึกเฉพาะที่ ดังนั้น $D(Y)$ จะถูกกำหนดโดยใช้สมการ (3.28) และ (3.31) เพื่อไปสู่การกำหนด $H(Y)$ และ $U=\Psi_z=\phi(Y)$ (เป็นอันดับของการประมาณ)

3.4 กรณีพิเศษ (Special Case)

จุดมุ่งหมายของการศึกษาคือสามารถวิเคราะห์รายละเอียดต่างๆ สำหรับการไหลที่มีการค่อยๆ เปลี่ยน U (ค่อยๆ เปลี่ยนความลึก) ดังนั้นการศึกษาครั้งนี้ขั้นแรกจะสนใจการวิเคราะห์ปัญหาทั่วๆ ไป แต่สุดท้ายแล้วจะเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่จะก่อให้เกิดผลลัพธ์ และอธิบายรายละเอียดขององค์ประกอบในการไหล

จากที่เลือกสมการ (3.27) และมี Background Flow จะได้

$$U=\Psi_z=\phi(Y) \tag{3.32}$$

และจากสมการ (3.28) คือ

$$H=\frac{1}{2}(U_0^2-\phi^2)=\frac{1}{2}(U_0^2-U^2) \tag{3.33}$$

ดังนั้นสมการ (3.31) ที่สอดคล้องกับสมการ (3.32) ผลที่ได้เป็น

$$U_0=UD \tag{3.34}$$

โดยที่ $$D=1+H-B$$

ในกรณีที่ $Y<0$ โดย $B=0$ และ $U=U_0=$ ค่าคงที่ จะได้ $D=1$ ในกรณีที่ $Y>0$, $U(Y)$ จะค่อยๆ เปลี่ยนเช่นเดียวกับ $D(Y)$ ที่ค่อยๆ เปลี่ยน

3.5 เงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (The Bottom Boundary)

จุดมุ่งหมายในการศึกษาจะอธิบายการแผ่ขยายของพื้นผิวของคลื่นที่ความลึกระดับต่างๆ ดังนั้นเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับความลึกระดับต่างๆ ในปัญหาจึงมีความสำคัญ นอกจากนี้ยังจะแบ่งท้องน้ำ ตามลักษณะทางภูมิศาสตร์ซึ่งขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างสเกลบนท้องน้ำที่ค่อยๆ

เปลี่ยน และสเกลบนคลื่นพื้นผิวที่ค่อยๆ เปลี่ยน โดยมีการกำหนดพารามิเตอร์ที่อธิบายการค่อยๆ เปลี่ยนพื้นผิวท้องน้ำบนสเกล α เป็น

$$b(x) = B(Y) \quad , \quad Y = \alpha\chi = \alpha\frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta}x \tag{3.35}$$

โดยที่ α^{-1} เป็นสเกลที่เปลี่ยนความลึก นอกจากนั้นยังมี 3 กรณีที่น่าสนใจ ซึ่งแต่ละกรณีจะถูกควบคุมโดยขนาดของ α ที่สัมพันธ์กับ ε และมีการกำหนดพารามิเตอร์ σ ซึ่งจะถูกใช้ในการคำนวณต่อไปที่เกี่ยวข้องกับการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก จะอธิบายกรณีทั้ง 3 ที่มีความเกี่ยวข้องกับสเกล x ที่กำหนดในสมการ (3.11) และ (3.35) ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับ ε และ σ ผลที่ตามมาเป็น

กรณีที่ 1 เกิดการเปลี่ยนความลึกบนสเกลที่ยาวกว่าสเกลที่เกี่ยวข้องกับการค่อยๆ เปลี่ยนของคลื่นแบบไม่เชิงเส้นเป็น

$$\frac{\varepsilon^{1/2}\alpha}{\delta} = \varepsilon\sigma \quad , \quad \varepsilon \to 0, \sigma \to 0$$

ปัญหานี้เป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป และเป็นที่น่าสนใจอย่างมากจึงทำให้เกิดผลงานมากมาย โดยจะศึกษาตามกระบวนการที่คล้ายกันกับที่ใช้ในจอร์นสัน [15] และนีคเคอะบอเคิส และ นีเวว [16] สำหรับการศึกษาครั้งนี้จะทำการศึกษากรณีนี้ เพื่อที่จะทำให้เกิดผลลัพธ์แบบใหม่

กรณีที่ 2 สเกลของความลึกเป็นเช่นเดียวกับของการค่อยๆ เปลี่ยนของคลื่นแบบไม่เชิงเส้นเป็น

$$\frac{\varepsilon^{1/2}}{\delta} = \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \to 0$$

ในกรณีนี้ จะได้สมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร [4] คือ

$$2\sqrt{D}\eta_{0X} + \frac{1}{2}\frac{D}{\sqrt{D}}\eta_0 + \frac{3}{D}\eta_0\eta_{0\xi} + \frac{1}{3}D\eta_{0\xi\xi\xi} = 0 \tag{3.36}$$

โดยที่ $D = D(Y), Y = \varepsilon x$ สำหรับ $D = 1$ สมการ (3.36) ลดรูปเป็นสมการ KdV แบบดั้งเดิม (The Classical KdV Equation) คือ

$$2\eta_{0X} + 3\eta_0\eta_{0\xi} + \frac{1}{3}\eta_{0\xi\xi\xi} = 0$$

นี่เป็นกรณีหนึ่งที่ไม่ทำให้เกิดความเจริญก้าวหน้าในการวิเคราะห์ (ที่น้อยที่สุดสำหรับความลึกใดๆ $D(Y)$) และสมการ (3.36) นี้ไม่เป็นส่วนหนึ่งของสมการลักษณะเฉพาะที่หาปฏิยานุพันธ์ได้อย่างสมบูรณ์ เพราะฉะนั้นรูปแบบของสมการ KdV ประเภทนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ ดังนั้นจะไม่พิจารณารายละเอียดใดๆ สำหรับกรณีนี้

กรณีที่ 3 การเปลี่ยนความลึกเปลี่ยนแบบช้าๆ แต่ยังเร็วกว่าการค่อยๆ เปลี่ยนของคลื่นแบบไม่เชิงเส้น และเกี่ยวกับ $\varepsilon = \Delta\sigma$ เป็น

$$\frac{\varepsilon^{1/2}\alpha}{\delta} = \sigma \quad , \quad \sigma \to 0, \Delta \to 0$$

ในกรณีนี้ $\Delta^{-1}\sigma^{-1}$ ใหญ่กว่า σ^{-1} และมีความสอดคล้องกับสมมุติฐานอย่างเดียวกับที่ใช้สำหรับสมการ KdV ในจอร์นสัน [11] ซึ่งเป็นการแสดงที่ทำให้ได้ผลลัพธ์บางตัว ที่เหมือนกับกรณีที่อธิบายในจอร์นสัน [15] สำหรับโครงสร้างทั่วๆ ไปที่มีความสำคัญจะเป็นเช่นเดียวกับกรณีที่ 1 ที่มีการเปลี่ยนความลึกอย่างช้าๆ แต่มีรายละเอียดบางอย่างที่แตกต่างกัน ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จะไม่พิจารณากรณีนี้

3.6 กฎทรงมวล (Mass Conservation)

กฎทรงมวลถือเป็นหลักที่สำคัญในการศึกษาปัญหาคลื่นน้ำ รูปแบบของคลื่นเริ่มต้น (คือคลื่นโซลิทอรี่ , โซลิตอน และอื่นๆ อีก) ซึ่งเกิดจากทางซ้าย (โดยความลึกคงที่) พร้อมกับปริมาณของน้ำ ดังนั้นจะพามวลมาด้วย จากนั้นรูปแบบของคลื่นเริ่มต้นนี้มีเคลื่อนที่ (ไปทางขวา) โดยที่ความลึกจะค่อยๆ เปลี่ยน ปริมาณทั้งหมดของน้ำในระบบต้องยังคงเท่าเดิม และอธิบายได้เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ในการอธิบายระบบนี้สามารถทำได้ โดยเมื่อพิจารณาสมการของกฎทรงมวล (3.15) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

หาปฏิยานุพันธ์เทียบกับ z ผลที่ได้คือ

$$\int_b^{1+\varepsilon\eta} u_x dz + w\Big|_b^{1+\varepsilon\eta} = 0 \tag{3.37}$$

และเมื่อกล่าวถึงวิธีการของการหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายของการหาปฏิยานุพันธ์จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{b}^{1+\varepsilon\eta} u dz = \int_{b}^{1+\varepsilon\eta} u_x dz + u_s \frac{\partial}{\partial x}(1+\varepsilon\eta) - u_b \frac{\partial b}{\partial x} \tag{3.38}$$

แทนสมการ (3.38) รวมทั้งเงื่อนไขค่าขอบเขต w ในสมการ (3.8) และ (3.9)

$$w = \eta_t + \varepsilon u_s \eta_x \qquad \text{บน} \qquad z = 1+\varepsilon\eta$$

และ

$$w = u_b \frac{\partial b}{\partial x} \qquad \text{บน} \qquad z = b$$

ในสมการ (3.37) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{b}^{1+\varepsilon\eta} u dz - \varepsilon u_s \eta_x + u_b \frac{\partial b}{\partial x} + (\eta_t + \varepsilon u_s \eta_x) - u_b \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

สุดท้ายแล้วสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

โดย $\bar{u} = \int_{b}^{1+\varepsilon\eta} u(x,z,t) dz$ เป็นค่าเฉลี่ยที่เป็นองค์ประกอบของความเร็ว

ถ้ามีเงื่อนไขที่ไม่ถูกรบกวนเกิดขึ้นในด้านหน้า และด้านหลังแล้วจะได้

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t) dx = 0$$

หรือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,t) dx = \text{ค่าคงที่} \tag{3.39}$$

มีความหมายว่าสำหรับทุกๆ เวลา และทุกๆ คลื่นพื้นผิว (Surface Waves) ที่แทนด้วย $\eta(x,t)$ มวลของของไหลที่ยังคงอยู่จะมีความสอดคล้องกับคลื่น โดยที่คลื่นจะพามวลมาด้วย ซึ่งมวลนั้นก็คือค่าคงที่ในสมการ (3.39)

3.7 ตัวแปรต่างๆ

สำหรับกรณีของการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกอย่างช้าๆ จะต้องมีการกำหนดพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ 2 ตัว [15] ได้แก่ ε ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่เป็นสเกลร์การวัดขนาดแอมพลิจูดของคลื่นและมีความสัมพันธ์กับสเกลร์ของการแผ่แบบไม่เชิงเส้นของคลื่นพื้นผิว , σ เป็นพารามิเตอร์ที่มีความจำเป็นซึ่งอธิบายเกี่ยวกับสเกลร์ของการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก

Blackground Flow ในการศึกษาครั้งนี้จะเลือกการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow) ดังนั้น Blackground Flow มีเงื่อนไขเป็น

$$\Psi = \phi(Y)z + \beta(Y)$$

ร่วมกับ

$$U = \Psi_z = \phi(Y)$$

และกำหนดให้

$$U = \frac{U_0}{D} \tag{3.40}$$

และ

$$D(Y) = 1 + H - B$$

โดยที่รายละเอียดของกรณีพิเศษ (Special Case) จะได้มาจากการใช้การไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform Flow)

ปัญหาที่จะศึกษาเป็นแบบไม่เชิงเส้น และมีการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกขณะที่น้ำกำลังไหล ดังนั้นสเกลที่ใช้เพื่ออธิบายปัญหานี้ต้องมี 2 ตัว และมีความแตกต่าง โดยที่สเกลที่อธิบายการแผ่แบบไม่เชิงเส้นของคลื่นคือ X [9] สามารถเขียนได้เป็น

$$X = \frac{1}{\sigma}\int_0^Y S(y)dy \tag{3.41}$$

ซึ่งเป็นสเกลของการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) และสเกลที่อธิบายการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกคือ Y ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับสมการที่ (3.35) แต่ในที่นี้ต้องการที่จะแสดงความหมายของ α ในเทอมของ ε ซึ่งกำหนดให้เพื่ออธิบายลักษณะเฉพาะของพื้นที่หนึ่งใต้น้ำสุดท้ายที่มีความสัมพันธ์กับคลื่น ดังนั้นจะได้ $\alpha = \sigma\varepsilon$ แล้วสามารถอธิบายถึงการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกได้เป็น

$$Y = \varepsilon\sigma\chi \tag{3.42}$$

ต่อไปต้องการหาตัวแปรที่เหมาะสมสำหรับการแผ่ขยายขององค์ประกอบต่างๆ ดังนั้นจะให้รูปแบบของคลื่นเริ่มต้น ก็คือคลื่นขั้นต้น (Primary Wave) ($\eta = O(1)$) ที่มีการเคลื่อนที่ไปทางขวา (โดยมีการแผ่ขยายจากทางซ้ายไปทางขวา) ลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางขวา [9] (สำหรับองค์ประกอบต่างๆ) เป็น

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon\sigma}\int_0^Y R_+(y)dy - \tau \qquad \text{โดยที่} \qquad Y = \varepsilon\sigma\chi \tag{3.43}$$

ฟังก์ชัน $R(Y)$ และ $S(Y)$ เป็นการแสดงในเทอมของ $D(Y)$

สำหรับกรณีของคลื่นที่เคลื่อนที่เหนือความลึกคงที่ สามารถเขียน $D =$ ค่าคงที่ (ประมาณ $=1$)

ถ้ากำหนด $R(Y) =$ ค่าคงที่ (ประมาณ $=1$) และ $S(Y) = 1$ แล้วนำไปแทนค่าในสมการ (3.41) และ (3.43) ดังนั้นจะได้

$$X = \varepsilon\chi \quad , \quad \xi = \chi - \tau$$

ลักษณะเฉพาะดั้งเดิมสำหรับความลึกคงที่ ที่มีความสัมพันธ์กับการค่อยๆ เปลี่ยนของแต่ละสเกลตามลำดับ

และสามารถคาดหวังได้ว่าการแผ่ขยายจะทำให้เกิดองค์ประกอบของการสะท้อน ซึ่งเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม ในปัญหาเหล่านี้จะเคลื่อนที่ไปทางซ้าย และเคลื่อนที่อย่างช้าๆ ซึ่งเกี่ยวกับลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางซ้าย ดังนั้นในขณะนี้สเกลของการเปลี่ยนความลึกที่ใช้ [9] เป็น

$$\zeta = \int_0^Y R_-(y)dy + T \tag{3.44}$$

โดยที่ $$T = \varepsilon\sigma\tau$$

ลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่ทางซ้ายจะมีรูปแบบที่เหมือนกับลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนทางขวา นอกจากจะเกิดขึ้นบนสเกลร์ที่เปลี่ยนอย่างช้าๆ และตัวแปรที่เป็นความลึกจะมีขนาดเป็น $\dfrac{dD}{dx}$ นั่นคือ $\varepsilon\sigma$ $\times$ สเกลของลักษณะเฉพาะทางขวา

ผลเฉลยสำหรับคลื่นพื้นผิวจะอยู่ในเทอมของตัวแปร (ξ, ζ, X, Y) และพารามิเตอร์ (ε, σ)

3.8 สมการต่างๆ

เมื่อ Background State ที่อธิบายในส่วนที่ 3.3 ถูกรบกวน โดยพื้นผิวที่มีการรบกวนของ $O(\varepsilon)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$u \to U(z, Y; \varepsilon) + \varepsilon u; \qquad w \to \alpha W(z, Y; \varepsilon) + \varepsilon w;$$

$$p \to P(z, Y; \varepsilon) + \varepsilon p; \qquad h = 1 + H(Y; \varepsilon) + \varepsilon \eta$$

เทอมที่รบกวน (ทางด้านขวา) เป็นฟังก์ชันของตัวแปร u, w, p และ η ในส่วนที่ 3.7 ซึ่งทำให้สมการ (3.13)-(3.17) เปลี่ยนแปลง ดังนั้นจะเขียนอนุพันธ์เทียบกับ χ และ τ ได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \equiv R\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon\sigma R\frac{\partial}{\partial \zeta} + \varepsilon S\frac{\partial}{\partial X} + \varepsilon\sigma\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \equiv \varepsilon\sigma\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi}$$

ผลที่ได้จะขึ้นอยู่กับความลึกเฉพาะที่ของน้ำ และเพื่อความสะดวกจะกำหนดฟังก์ชันที่ใช้อธิบายเพื่อให้ชัดเจน ซึ่งแสดงได้เป็น

$$D(Y) = 1 + H(Y) - B(Y) \qquad (> 0)$$

โดยที่ $B(Y)$ จะอธิบายลักษณะทางภูมิศาสตร์ของเงื่อนไขค่าท้องน้ำ ดังนั้นสมการ (3.13)-(3.17) กลายเป็น

$$(RU-1)u_\xi+\varepsilon\sigma(RU+1)u_\zeta+\varepsilon SUu_X+\varepsilon\sigma(uU)_Y$$

$$+\varepsilon u\left\{R(u_\xi+\varepsilon\sigma u_\zeta)+\varepsilon Su_X+\varepsilon\sigma u_Y\right\}$$

$$+w(U_z+\varepsilon u_z)+\varepsilon\sigma Wu_z+R(p_\xi+\varepsilon\sigma p_\zeta)$$

$$+\varepsilon Sp_X+\varepsilon\sigma p_Y=0 \tag{3.45}$$

$$\varepsilon\{(RU-1)w_\xi+\varepsilon\sigma(RU+1)w_\zeta+\varepsilon SUw_X+\varepsilon\sigma Uw_Y$$

$$+(\varepsilon\sigma)^2uW_Y+\varepsilon u[R(w_\xi+\varepsilon\sigma w_\zeta)+\varepsilon Sw_X+\varepsilon\sigma w_Y]$$

$$+\varepsilon\sigma(Ww)_z+\varepsilon ww_z\}+p_z=0 \tag{3.46}$$

$$R(u_\xi+\varepsilon\sigma u_\zeta)+\varepsilon Su_X+\varepsilon\sigma u_Y+w_z=0 \tag{3.47}$$

ภายใต้เงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\left.\begin{aligned}&p=\eta;\\&w=(UR-1)\eta_\xi-\sigma(W-UH_Y)+\varepsilon\sigma\eta_\zeta\\&\quad+\varepsilon\left\{US\eta_X+u[R(\eta_\xi+\varepsilon\sigma\eta_\zeta)+\varepsilon S\eta_X+\varepsilon\sigma\eta_Y]\right\}\\&\quad+\varepsilon\sigma U(R\eta_\zeta+\eta_Y)+\varepsilon\sigma uH_Y\end{aligned}\right\}\text{ บน } z=1+H+\varepsilon\eta \tag{3.48}$$

และ

$$w=\varepsilon\sigma uB'(Y) \qquad \text{บน } z=B \tag{3.49}$$

จากนั้นหาผลเฉลยของระบบสมการเหล่านี้ โดยต้องการผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) [9] ซึ่งสามารถเขียนตัวแปรที่ไม่อิสระทั้งหมดในรูปแบบ

$$Q \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{n}\sigma^{m}Q_{nm}, \quad \varepsilon \to 0\,, \sigma \to 0$$

โดยที่ Q แทนแต่ละตัวของ u, w, p และ η

เงื่อนไขค่าขอบเขตของพื้นผิวอิสระ ต้องหาค่าบน $z = 1 + H + \varepsilon\eta$ ซึ่งไม่เหมาะที่จะใช้วิธีดังกล่าวเป็นหลักในการแก้ปัญหานี้ ถ้าใช้การกระจายเทเลอร์ (Taylor Expansion) แล้วจะสามารถหาค่าของพื้นผิวอิสระบน $z = 1 + H$ (และตรงกันกับรูปแบบที่ถูกสมมุติไว้ของการกระจายเชิงเส้นกำกับ) ดังนั้นเงื่อนไขค่าขอบเขตบนกลายเป็น

$$p + \varepsilon\eta p_z + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 p_{zz\ldots}\Big|_{z=1+H} = \eta \tag{3.50}$$

และ

$$\sigma\Big[(W + \varepsilon\eta W_z\ldots)\Big|_{z=1+H} - H_Y\Big(\big(U + \varepsilon\eta U_z\ldots\big)\Big|_{z=1+H}\Big)\Big] + (w + \varepsilon\eta w_z + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta)^2 w_{zz}\ldots)\Big|_{z=1+H}$$

$$= \Big[R\big(U + \varepsilon\eta U_z\ldots\big)\Big|_{z=1+H} - 1\Big]\eta_\xi + \varepsilon\sigma\eta_\zeta + \varepsilon\Big\{\Big[(U + \varepsilon\eta U_z\ldots)\Big|_{z=1+H}\Big]S\eta_X$$

$$+ u\Big[R(\eta_\xi + \varepsilon\sigma\eta_\zeta) + \varepsilon S\eta_X + \varepsilon\sigma\eta_Y\Big]\Big\} + \varepsilon\sigma\Big[\big(U + \varepsilon\eta U_z\ldots\big)\Big|_{z=1+H}\Big][R\eta_\zeta + \eta_Y] + \varepsilon\sigma u H_Y \tag{3.51}$$

ทั้งสองเป็นการหาค่าบน $z = 1 + H$ จากนั้นนำสมการ (3.45)-(3.47) , สมการ (3.50)-(3.51) และสมการ (3.49) ไปหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) และพิจารณาที่ $O(1)$ และ $O(\varepsilon)$ เท่านั้น