

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

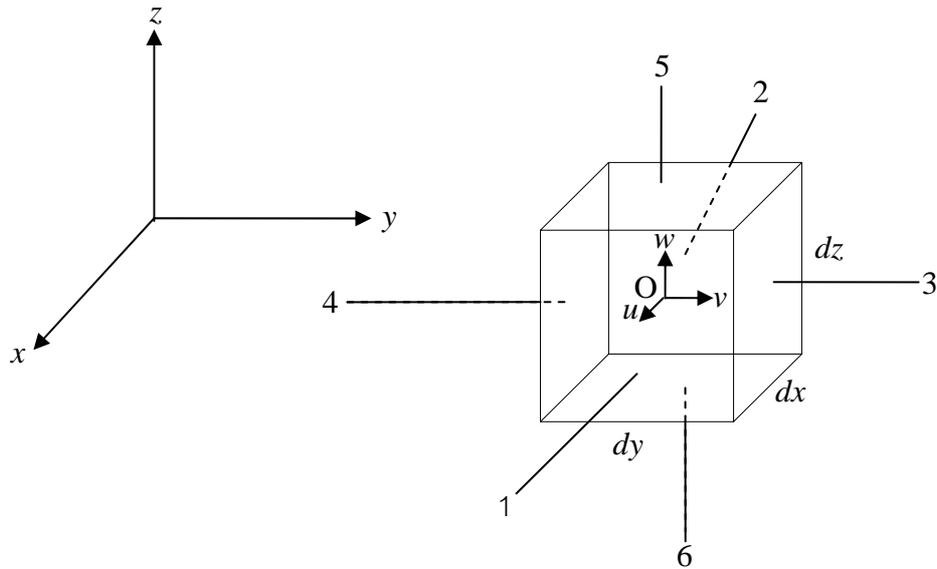
ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ที่ประกอบไปด้วยทฤษฎีและแนวคิดรวมทั้งงานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการ KdV โดยที่เนื้อหาหลักจะมุ่งประเด็นไปที่ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) ซึ่งทำโดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่ถูกนำมาใช้เพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีศึกษา และทำให้ได้ผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวเลข จากนั้นพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำในแม่น้ำจำลองที่ความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่เป็นผลเฉลยที่ได้นี้ ซึ่งทฤษฎีและแนวคิดที่อยู่ในบทนี้เป็นส่วนประกอบสำหรับงานวิจัยอย่างมาก

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 กฎทรงมวล (Conservation of Mass)

กฎทรงมวลกล่าวไว้ว่า “ผลรวมของอัตราการผ่านเข้าออกพื้นผิวของเอลิเมนต์เล็กๆ และอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในเอลิเมนต์เล็กๆมีค่าเท่ากับศูนย์” [3] หรือถ้าเขียนในรูปของสมการเชิงอินทิกรัลคือ
$$\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV = 0$$
 ในที่นี้จะหาอัตราการผ่านเข้าออกพื้นผิวของเอลิเมนต์เล็กๆ และอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลภายในเอลิเมนต์เล็กๆในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เอลิเมนต์ที่ใช้นี้จะใช้เป็นรูปแบบเอลิเมนต์ในระบบแกนตั้งฉาก $(X - Y - Z)$ ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ปัญหา สำหรับการวิเคราะห์จะทำการกำหนดคุณสมบัติที่ตำแหน่งกึ่งกลางเอลิเมนต์ จากนั้นก็หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติดังกล่าวบนแต่ละด้านของพื้นผิวเอลิเมนต์โดยใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุดศูนย์กลางเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถทำได้เพราะว่ากำหนดให้ของไหลเป็นสารที่มีความต่อเนื่องทำให้คุณสมบัติต่างๆของของไหลสามารถเขียนได้ในรูปของตำแหน่ง และเวลา สำหรับการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับกฎทรงมวลในระบบแกนตั้งฉากเป็นดังนี้

จะใช้เอลิเมนต์เล็กๆ รูปลูกบาศก์ที่มีขนาด $dx dy$ และ dz เพื่อใช้ในการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ที่แสดงได้ในรูปที่ 2.1 โดยกำหนดให้ความหนาแน่น และความเร็วของของไหลที่จุดศูนย์กลางของเอลิเมนต์ “O” มีค่าเท่ากับ ρ และ $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ ตามลำดับ



รูปที่ 2.1 แสดงเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ขนาด dx dy และ dz

การหาคุณสมบัติที่แต่ละด้านของพื้นผิวเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ ทำได้โดยการกระจายอนุกรมเทเลอร์ของคุณสมบัตินั้นๆ รอบจุดศูนย์กลางเอลิเมนต์ “O” ตัวอย่างเช่น ความหนาแน่นที่พื้นผิว (1) ทางด้านหน้าจะได้

$$\rho|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right) \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3}\right) \frac{1}{3!} \left(\frac{dx}{2}\right)^3 + \dots$$

เนื่องจากกำหนดให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กมาก ทำให้เทอมที่มีขนาดของเอลิเมนต์ยกกำลังสองขึ้นไปสามารถกำหนดให้มีค่าน้อยมาก และตัดทิ้งได้ ดังนั้นสมการข้างต้นจึงลดรูปเหลือ

$$\rho|_{x+\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ของความเร็วรอบจุดศูนย์กลางเพื่อหาความเร็วที่พื้นผิวด้านหน้าซึ่งหมายถึงความเร็วในทิศทางตามแนวแกน x ซึ่งก็คือ u นั้นเองจะได้

$$u|_{x+\frac{dx}{2}} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{dx}{2}$$

ขั้นตอนเช่นเดียวกันนี้สามารถนำไปใช้หาความหนาแน่น และความเร็วที่พื้นผิวด้านอื่นๆ
ที่เหลือ ในที่นี้จะสรุปได้ดังนี้
ที่พื้นผิวด้านหลัง (2)

$$\rho|_{x-\frac{dx}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \left(\frac{-dx}{2}\right)$$

$$u|_{x-\frac{dx}{2}} = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{-dx}{2}\right)$$

ที่พื้นผิวด้านขวามือ (3)

$$\rho|_{y+\frac{dy}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}$$

$$v|_{y+\frac{dy}{2}} = v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{dy}{2}$$

ที่พื้นผิวด้านซ้ายมือ (4)

$$\rho|_{y-\frac{dy}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) \left(\frac{-dy}{2}\right)$$

$$v|_{y-\frac{dy}{2}} = v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(\frac{-dy}{2}\right)$$

ที่พื้นผิวด้านบน (5)

$$\rho|_{z+\frac{dz}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}$$

$$w|_{z+\frac{dz}{2}} = w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{dz}{2}$$

ที่พื้นผิวด้านล่าง (6)

$$\rho|_{z-\frac{dz}{2}} = \rho + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\left(\frac{-dz}{2}\right)$$

$$w|_{z-\frac{dz}{2}} = w + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{-dz}{2}\right)$$

จากการพิจารณาความหนาแน่น และความเร็วที่แต่ละพื้นผิวของรูปลูกบาศก์ ทำให้สามารถหาอัตราการผ่านเข้าออกของมวลที่แต่ละพื้นผิวของรูปลูกบาศก์ได้ $\left(\int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}\right)$ และเมื่อนำมารวมกันจะทำให้ได้อัตราการเคลื่อนผ่านเข้าออกสุทธิของมวลของเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์นี้ โดยมีขั้นตอนต่างๆดังต่อไปนี้

อัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านหน้า (1) คือ

$$\begin{aligned} & \left[\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dydz \\ &= \rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydz + \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 dydz \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากเอลิเมนต์มีขนาดเล็ก ดังนั้นเทอมสุดท้ายที่มี $\left(\frac{dx}{2}\right)^2$ จึงมีค่าน้อยเพียงพอที่จะทำให้ตัดเทอมสุดท้ายทิ้งได้ ดังนั้นอัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านหน้าคือ

$$\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydz$$

อัตราการผ่านเข้าของมวลที่พื้นผิวด้านหลัง (2) คือ

$$\begin{aligned} & - \left[\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x} \left(\frac{-dx}{2} \right) \right] \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{-dx}{2} \right) \right] dydz \\ &= -\rho u dydz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dydz \end{aligned}$$

สาเหตุที่มีเครื่องหมายลบเนื่องจากทิศทางของความเร็ว และของพื้นที่บริเวณพื้นผิวด้านหลังมีทิศทางตรงกันข้าม

อัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านขวามือ (3) คือ

$$\left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] \left[v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz = \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz$$

อัตราการผ่านเข้าของมวลที่พื้นผิวด้านซ้ายมือ (4) คือ

$$-\left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{-dy}{2} \right) \right] \left[v + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{-dy}{2} \right) \right] dx dz = -\rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz$$

อัตราการผ่านออกของมวลที่พื้นผิวด้านบน (5) คือ

$$\left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] \left[w + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy = \rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

อัตราการผ่านเข้าของมวลที่พื้นผิวด้านล่าง (6) คือ

$$-\left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \left(\frac{-dz}{2} \right) \right] \left[w + \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{-dz}{2} \right) \right] dx dy = -\rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz$$

นำอัตราการผ่านเข้าออกของมวลที่แต่ละพื้นผิวดังแสดงข้างต้นมารวมกันจะได้อัตราการผ่านเข้าออกสุทธิของมวลของเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{cs} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} &= \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz - \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz \\ &+ \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz - \rho v dx dz + \frac{1}{2} \left[v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy dz \\ &+ \rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz - \rho w dx dz + \frac{1}{2} \left[w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \left[\left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

หรือ
$$= \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (2.1)$$

ต่อไปจะหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลภายในเอลิเมนต์รูปลูกบาศก์ซึ่ง $\frac{\partial m}{\partial t}$ จะพบว่า มีค่าเท่ากับ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

เมื่อ
$$m = \rho dA = \rho dx dy dz \quad (2.2)$$

จากสมการที่ (2.1) และ (2.2) เมื่อแทนค่าลงในสมการของกฎทรงมวลทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับกฎทรงมวลบนระบบแกนตั้งฉากคือ

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

หรือเขียนสั้นๆ โดยใช้ตัวดำเนินการทางเวกเตอร์ "∇" จะได้ดังนี้

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

เมื่อ
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

สมการของกฎทรงมวลสำหรับแกนตั้งฉากดังแสดงในสมการ (2.3) สามารถนำมาพิจารณารูปแบบการไหลได้หลายรูปแบบ เช่น เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับการไหลของของไหลที่อัดตัวไม่ได้หรือ ρ มีค่าคงที่ จะได้ผลลัพธ์ คือ

จาก
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

เนื่องจาก ρ มีค่าคงที่จะได้

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

หรือ
$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

หรือ
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

จากสมการ (2.4) จะเห็นว่ากฎทรงมวลในระบบแกนตั้งฉากเมื่อ ρ มีค่าคงที่จะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของความเร็วของการไหลเท่านั้น หากนำสมการ (2.3) มาประยุกต์ใช้กับการไหลแบบคงตัวซึ่งหมายถึงคุณสมบัติต่างๆ ของการไหลไม่ขึ้นกับเวลา จะได้ดังนี้

จาก
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

เนื่องจาก $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

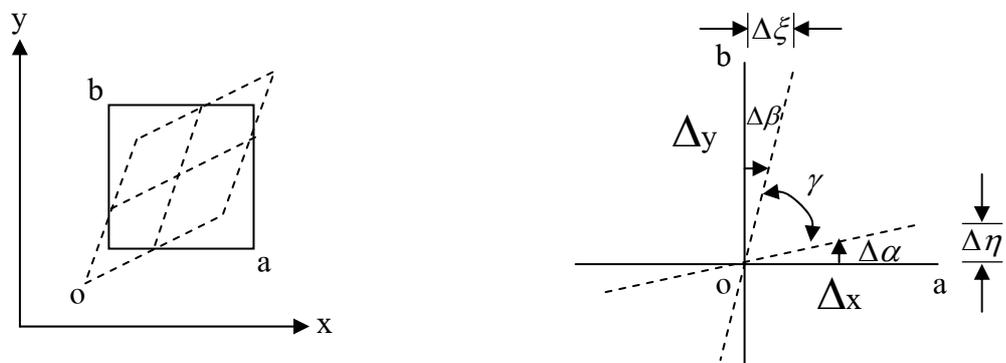
หรือ
$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

2.1.2 การเสียรูปของของไหล

เป็นรูปแบบการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ การเสียรูปเชิงมุมและการเสียรูปเชิงเส้น [3] ซึ่งสามารถพิจารณาการเสียรูปแต่ละแบบดังต่อไปนี้

2.1.2.1 การเสียรูปเชิงมุม (Angular Deformation)

การเสียรูปเชิงมุมของเอลิเมนต์เล็กๆ ของของไหลคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงมุมระหว่างเส้นตรง 2 เส้นที่เริ่มแรกตั้งฉากกัน



รูปที่ 2.2 แสดงการเสียรูปเชิงมุมของของไหล

พิจารณาจากรูปที่ 2.2 จะเห็นว่าอัตราการเสียรูปเชิงมุมเทียบกับเวลาคือ อัตราการลดลงของมุมระหว่างเส้นตรง oa และ ob ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

สาเหตุที่ต้องมีเครื่องหมาย (-) เนื่องจากมุมที่เปลี่ยนแปลงไปมีลักษณะลดลง แต่ค่าของ $\frac{d\alpha}{dt}$ และ $\frac{d\beta}{dt}$ ที่หานั้นเป็นการหาขนาดเท่านั้น ดังนั้นเพื่อแสดงให้เห็นว่ามุมที่เปลี่ยนแปลงมีลักษณะลดลงจึงต้องใส่เครื่องหมาย (-)

จากการหมุนของของไหลจะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงมุมของเส้นตรง oa และ ob เป็นดังนี้

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

หมายเหตุ $\frac{d\beta}{dt}$ ไม่มีเครื่องหมาย (-) เพราะทิศทางการเคลื่อนที่ของจุด b อยู่ในทิศทางแกน $x +$

จากที่ว่าการเคลื่อนที่มีความสัมพันธ์กับอัตราการเสียรูปเชิงมุมผ่านทางค่าความหนืด (μ) ซึ่งในกรณีของไหลที่มีความหนืดเป็นไปไม่ได้เลยที่ค่า $\frac{\partial v}{\partial x}$ จะมีค่าเท่ากับ $\frac{\partial u}{\partial y}$ แล้วมีเครื่องหมายตรงกันข้ามเพื่อให้รวมแล้วมีอัตราการเสียรูปเชิงมุมเท่ากับศูนย์ แสดงว่าย่อมต้องเกิดการเสียรูปเชิงมุมแน่นอน เมื่อเกิดการเสียรูปก็หมายถึงต้องมีความเค้นเฉือนมากระทำด้วยเช่นกัน ความเค้นเฉือนนี้ก็จะทำให้ของไหลเกิดการหมุนสามารถสรุปได้ว่า การที่มีแรงหนืดแสดงว่าให้เห็นว่าเป็นการไหลที่มีการหมุน (Rotational Flow)

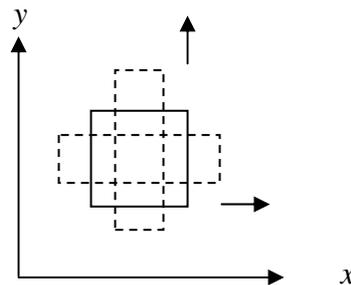
2.1.2.2 การเสียรูปเชิงเส้น (Linear Deformation)

การเสียรูปเชิงเส้นของอนุภาคของไหล อธิบายด้วยมุมที่จุดตัดกันของเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งจะต้องไม่เปลี่ยนแปลงกล่าวคือ ก่อนเกิดการเสียรูปเชิงเส้นหากมุมระหว่างเส้น 2 เส้นนี้เป็นมุมฉาก เมื่อเกิดการเสียรูปเชิงเส้นจะทำให้เอลิเมนต์ของไหลเกิดการยืดหรือหดโดยไม่เกิดการเปลี่ยนมุม (ดูรูปที่ 2.3) กล่าวคือ เอลิเมนต์ของของไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลงความยาวตามแกน x ไปเท่ากับ $\frac{\partial u}{\partial x}$ หรือเกิดการเปลี่ยนแปลงความยาวตามแกน y ไปเท่ากับ $\frac{\partial v}{\partial y}$ ส่วนการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกน z ก็จะเท่ากับ $\frac{\partial w}{\partial z}$ การเปลี่ยนแปลงเหล่านี้คือ ความเครียดตามยาว

(Longitudinal Strain) ซึ่งมีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของเอลิเมนต์ได้ จึงให้นิยามของ อัตราการเปลี่ยนปริมาตร (Volume Dilation Rate) ดังนี้

$$\text{อัตราการเปลี่ยนปริมาตร} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$$

โดยที่หากเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ จะพบว่า ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตร (หรือ การเสีรูปเชิงเส้น) จะมีค่าเท่ากับศูนย์



รูปที่ 2.3 แสดงการเสีรูปเชิงเส้นของของไหล

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหล โดยคำนึงถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ซึ่งหมายถึงแรงลัพธ์ โดยจะทำการสร้างกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน หรือ สมการโมเมนตัม ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยพิจารณาแรงลัพธ์ที่เป็นผลรวมของแรงพื้นผิวที่เกิดจากความเค้นตึงจาก และความเค้นเฉือน กับแรงวัตถุ(เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก) และใช้ค่าความเร่งของของไหลซึ่งได้มาจากการศึกษาเรื่องจลศาสตร์สำหรับของของไหล โดยขั้นตอนเป็นดังนี้ จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันเป็น

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{หรือ} \quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_{system}$$

เมื่อ \vec{P} คือ โมเมนตัมเชิงเส้น และ $\vec{P}_{system} = \int_{mass} \vec{V} dm$

หากพิจารณาระบบเป็นเอลิเมนต์ของไหลเล็กๆ ที่มีมวล dm จะเขียนกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{system}$$

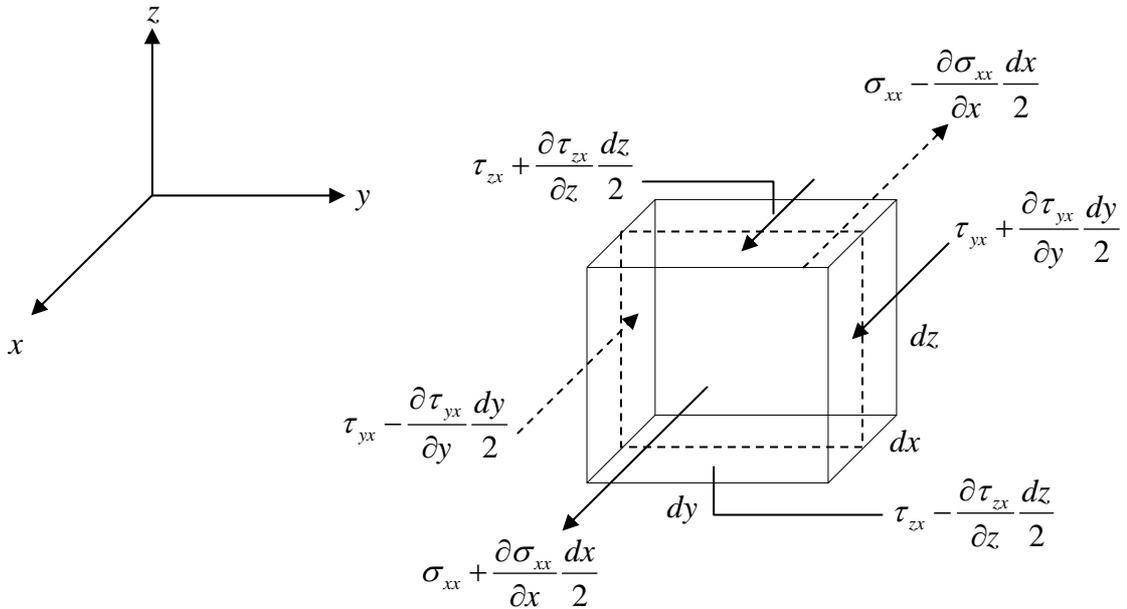
จากการศึกษาจลศาสตร์ของของไหลจะได้

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_{system} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

เมื่อแทนความเร็วลงไปในการสมการของนิวตันจะได้

$$d\vec{F} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \tag{2.5}$$

แรงลัพธ์ที่ทำต่อของไหลคือ



รูปที่ 2.4 แสดงความเค้นต่างๆที่พื้นผิวในทิศทาง x

แรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหลสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ 1) แรงพื้นผิว 2) แรงวัตถุ ในที่นี้จะพิจารณาแรงพื้นผิวจากทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน

พิจารณารูปที่ 2.4 ซึ่งแสดงความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่กระทำต่อเอลิเมนต์ของไหลเฉพาะในทิศทาง x โดยกำหนดให้ที่จุดกึ่งกลางเอลิเมนต์มีความเค้นเท่ากับ σ_{xx} , τ_{yx} และ τ_{zx} จากนั้นสามารถหาความเค้นบนพื้นผิวของเอลิเมนต์ได้จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์รอบจุดกึ่งกลาง "o" ดังนั้นแรงพื้นผิวทั้งหมดที่กระทำต่อเอลิเมนต์ของไหลในทิศทาง x คือ

$$d\vec{F}_{sx} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\
& + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy
\end{aligned}$$

หรือ

$$d\vec{F}_{S_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

เมื่อหาแรงพื้นผิวที่กระทำต่อเอลิเมนต์ในทิศทาง x และแรงวัตถุจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อเอลิเมนต์เป็นดังนี้

$$d\vec{F}_{B_x} = (\rho g_x) dx dy dz$$

จากแรงพื้นผิว และแรงวัตถุที่ได้ทำให้สามารถหาแรงลัพธ์ที่กระทำต่อเอลิเมนต์ในทิศทาง x ได้เป็น

$$d\vec{F}_x = d\vec{F}_{S_x} + d\vec{F}_{B_x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

สำหรับแรงลัพธ์ที่กระทำต่อเอลิเมนต์นี้ในทิศทางอื่นๆ คือในทิศทาง y และในทิศทาง z ในทำนองเดียวกันสามารถหาได้เช่นเดียวกับในแกน x ดังนั้นจะได้

$$d\vec{F}_y = d\vec{F}_{S_y} + d\vec{F}_{B_y} = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$d\vec{F}_z = d\vec{F}_{S_z} + d\vec{F}_{B_z} = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

นำแรงลัพธ์ที่ได้แทนลงในสมการ (2.5) เพื่อหาค่า $d\vec{F}$ และจะทำการพิจารณาตามแกนต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

$$\text{แกน } x : \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\text{แกน } y : \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\text{แกน } z : \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

สมการข้างต้นเป็นสมการในรูปอนุพันธ์สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหล ที่สอดคล้องกับสมมติฐานของสารต่อเนื่อง แต่ถ้าหากนำเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเร็วของการไหลไปแทนในสมการข้างต้น (แกน x , แกน y , แกน z) นี้จะทำให้ง่ายขึ้น สำหรับของไหลแบบนิวโตเนียน จะเห็นว่าค่าความเค้นเฉือนจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการเสียรูปเชิงมุมด้วยค่าความหนืด (μ) ซึ่งทำให้ความเค้นเหล่านี้สามารถเขียนได้ในรูปของความเร็วของการไหลดังนี้

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ; \sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) ; \sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ; \sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

เมื่อ p คือ ความดันเทอร์โมไดนามิกส์ (Thermodynamics Pressure)

นำความเค้นต่างๆ ในรูปของความเร็ว และความดันของการไหลแทนลงในสมการสำหรับกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง แล้วทำการจัดรูปจะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right]$$

เรียกสมการเหล่านี้ว่า “สมการนาเวียร์-สโตค (Navier-Stokes Equation)” [3] ซึ่งหากพิจารณาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ หรือ ρ คงที่ และกำหนดให้ μ คงที่จะทำให้สมการลดรูปลงเหลือ

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

นอกจากนี้หากพิจารณาในกรณีการไหลแบบไม่มีความเสียดทาน (ไม่มีความหนืด หรือไม่มีความเค้นเฉือน) ดังนั้น $\mu = 0$ จึงทำให้มีเฉพาะความเค้นตั้งฉากที่มีค่า $-p$ ที่กระทำต่ออนุภาคของไหลเท่านั้น เพราะฉะนั้นสมการจะลดรูปได้สมการเหลือเป็น “สมการออยเลอร์ (Euler’s Equation)” [3] ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

หรือ

$$-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

กำหนดให้แกน z อยู่ในแนวตั้ง ดังนั้น

$$\nabla z = \hat{k} \Rightarrow \rho \vec{g} = -\rho g \hat{k} = -\rho g \nabla z$$

แทนเทอมข้างต้นลงในสมการออยเลอร์จะได้

$$-g\rho\nabla z - \nabla p = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

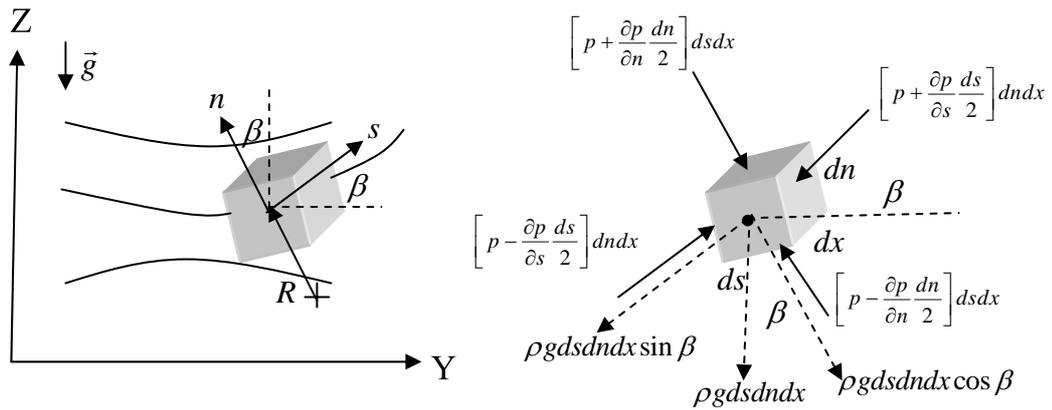
$$-g\nabla z - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

จากสมการความเร่งที่ว่า $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$ ดังนั้น

$$-g\nabla z - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$$

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ และไม่มีความหนืดต้องใช้สมการออยเลอร์หรือสมการนาเวียร์-สโตรค ที่กำหนดให้ ρ มีค่าคงที่ และ $\mu=0$ ที่ได้แสดงรูปแบบบนระบบแกนตั้งฉาก เนื่องจากความเร่งในสมการออยเลอร์เกิดจากการหาอนุพันธ์ของความเร็ว \vec{V} ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ 4 ตัวแปร คือฟังก์ชันของ x, y, z และ t ดังนั้นถ้าเลือกระบบแกนที่เหมาะสม และมีผลทำให้ความเร็วของการไหลเป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่น้อยลงจะทำให้สะดวกต่อการหาความเร่งในสมการออยเลอร์ จากนิยามของเส้นสายธารที่ว่า เป็นเส้นที่ลากสัมผัสกับความเร็วจึงในกรณีที่เป็นของไหลแบบคงตัวเส้นสายธารจะเป็นเส้นเดียวกับเส้นวิถี (Pathline) บนเส้นสายธารนี้ความเร็วเป็นตัวแปรของฟังก์ชัน s (ตามแนวเส้นสายธาร) และ t เท่านั้น ดังนั้นจึงเหมาะสมที่จะสร้างสมการออยเลอร์บนระบบแกนของเส้นสายธาร

บนระบบแกนของเส้นสายธาร กำหนดให้พิกัด s แทนระยะตามแนวเส้นสัมผัสกับเส้นสายธาร และพิกัด n แทนระยะในแนวตั้งฉากกับเส้นสายธาร จากนั้นจะสร้างสมการสำหรับกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันบนแนวแกนทั้งสอง โดยพิจารณาตัวอย่างของการไหลในระนาบ $Y-Z$ ดังรูปที่ 2.5 เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันกับเอลิเมนต์เล็กๆขนาดของ $ds \, dn \, dx$ ซึ่งมีความเร็วในแนวสัมผัสเท่ากับ $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$ เมื่อพิจารณาตามแนวแกน s โดยไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานหรือแรงหนืด และมีคุณสมบัติต่างๆ ที่พื้นผิวของเอลิเมนต์เล็กๆ นี้สามารถหาได้จากการกระจายอนุกรมเทเลอร์ของคุณสมบัติต่างๆ รอบจุดกึ่งกลางเอลิเมนต์



รูปที่ 2.5 แสดงอนุภาคของไหลบนเส้นสายธาร

จาก $\sum F = ma$

เมื่อพิจารณาเฉพาะแรงตามแนวแกน s จะได้ว่า

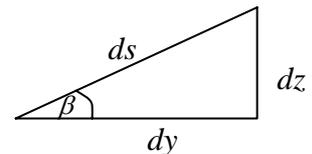
$$\left[p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right] dndx - \left[p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right] dndx - \rho g \sin \beta dsdndx = \rho adndsdx$$

เมื่อ β คือมุมระหว่างเส้นสัมผัสเส้นสายธารกับเส้นระดับ

a คือความเร่งของอนุภาคของไหลที่เคลื่อนที่ไปตามเส้นสายธาร

จากสมการข้างบนจัดรูปใหม่จะได้

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \beta = \rho a$$



จากรูปทางขวามือจะเห็นว่า $\sin \beta = \frac{\partial z}{\partial s}$ เมื่อนำไปแทนจะได้

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = a$$

เนื่องจากบนแนวเส้นสายธาร พบว่าค่าความเร็วจะเป็นฟังก์ชันของ s และ t เท่านั้นหรือ $\vec{V} = \vec{V}(s, t)$ ทำให้สามารถเขียนสมการความเร่งของอนุภาคของไหลด้วยวิธีออยเลอร์ได้ดังนี้

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad \text{หรือ} \quad a = \frac{D\vec{V}}{Dt} = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

โดยปกติแล้วบนระบบแกน $s-n$ นี้ความเร็วของการไหลจะอยู่ในแนว s เท่านั้นเพราะเส้นสายธารเป็นเส้นที่ลากสัมผัสกับความเร็วดังนั้นตามแนว n จึงมีความเร็วเท่ากับศูนย์ ดังนั้นสามารถเขียนสมการออยเลอร์ที่สร้างบนแนวแกน s ของระบบแกนของเส้นสายธารได้ดังนี้

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

สำหรับกรณีที่เป็นกรไหลแบบคงตัว และไม่พิจารณาผลจากแรงวัตถุ ซึ่งหมายถึงกำหนดให้ $\vec{g} = 0$ ดังนั้นสมการออยเลอร์ข้างต้นจะลดรูปเป็น

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -V \frac{\partial V}{\partial s}$$

จากสมการนี้มีความหมายว่าสำหรับกรไหลตามแนวเส้นสายธารนั้น ถ้าความเร็วของการไหลลดลง ความดันของของไหลจะเพิ่มขึ้นหรือถ้าความเร็วของการไหลเพิ่มขึ้น ความดันของไหลจะลดลง

การสร้างสมการเบอร์นูลลีสามารถสร้างได้จากการพิจารณาสมการออยเลอร์บนระบบแกนตั้งฉาก $(X-Y-Z)$ โดยเราสามารถนำมาอินทิเกรตตามเส้นสายธารเพื่อสร้างสมการเบอร์นูลลี สำหรับในที่นี้จะแสดงกรณีการไหลแบบคงตัว เพื่อความสะดวกจึงจะใช้สัญลักษณ์ทางเวกเตอร์ซึ่งสมการออยเลอร์บนระบบแกนตั้งฉากสำหรับการไหลแบบคงตัวคือ

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{D\vec{V}}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

เนื่องจาก

$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (2.6)$$

สำหรับการไหลแบบคงตัวสนามความเร็วจะอยู่ในรูป $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ ซึ่งเส้นสายธารจะเป็นเส้นที่ลากสัมผัสกับความเร็วดังนั้นในกรณีการไหลแบบคงตัวเส้นสายธาร และเส้นวิถีเป็นเส้นเดียวกัน ดังนั้นอนุภาคของไหลจึงเคลื่อนที่ไปตามสมการ (2.6) ด้วย ซึ่งในเวลา

ผ่านไป dt อนุภาคของไหลจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะตามแนว $d\vec{s}$ ตามแนวเส้นสายธาร หากคูณสมการ (2.6) ด้วยผลคูณแบบสเกลาร์กับระยะ $d\vec{s}$ ตามแนวเส้นสายธารจะได้

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} - g\nabla z \cdot d\vec{s} = (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (2.7)$$

เมื่อพิจารณาเทอมทั้งสามในสมการข้างต้นดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{เทอมที่ 1 : } -\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\vec{s} &= -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}] \\ &= -\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right] \\ &= -\frac{1}{\rho}dp \end{aligned} \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

$$\begin{aligned} \text{เทอมที่ 2 : } -g\nabla z \cdot d\vec{s} &= -g\hat{k} \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}] \\ &= -g dz \end{aligned} \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

$$\begin{aligned} \text{เทอมที่ 3 : } (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} &= \left[\frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})\right] \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} - [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

เนื่องจากความเร็ว \vec{V} และระยะ $d\vec{s}$ มีทิศทางขนานกันจึงทำให้ $[\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{2}\nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{s} - 0 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^2}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V^2}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V^2}{\partial z}\hat{k}\right] \cdot [dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V^2}{\partial x}dx + \frac{\partial V^2}{\partial y}dy + \frac{\partial V^2}{\partial z}dz\right] \\ &= \frac{1}{2}d(V^2) \end{aligned} \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

แทนเทอมทั้งสามลงในสมการ (2.7) จะได้

$$\frac{dp}{\rho} + g dz + \frac{1}{2} d(V^2) = 0 \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

อินทิเกรตสมการข้างต้นสำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{ค่าคงที่} \quad \text{ตามแนวเส้นสายธาร}$$

ผลที่ตามมาคือ สมการเบอร์นูลลีในกรณีการไหลแบบคงตัว อัดตัวไม่ได้ และไม่มีควมหนืด ซึ่งค่าคงที่ที่เกิดจากการอินทิเกรตจะมีค่าแตกต่างกันสำหรับแต่ละเส้นสายธาร จึงทำให้การประยุกต์ใช้สมการเบอร์นูลลีระหว่าง 2 จุดใดๆ ต้องเป็นจุดบนเส้นสายธารเดียวกัน แต่หากสมมติให้การไหลนั้นเป็นการไหลแบบไม่มีการหมุน (Irrotational Flow) สมการเบอร์นูลลีที่ได้จะสามารถใช้ระหว่าง 2 จุดใดๆ ในสนามการไหลโดยไม่จำเป็นต้องอยู่บนสายธารเดียวกัน ทั้งนี้เนื่องจากค่าคงที่จากการอินทิเกรตสำหรับทุกเส้นสายธารมีค่าเท่ากัน

สำหรับการไหลแบบไม่มีการหมุน หมายถึง $\vec{\omega} = 0$ หรือ $\nabla \times \vec{V} = 0$ ซึ่งความหมายทางคณิตศาสตร์นี้จะนำไปใช้ในการสร้างสมการเบอร์นูลลีสำหรับการไหลที่ไม่มีการหมุน โดยที่จะเริ่มต้นจากการพิจารณาสมการออยเลอร์บนแกนตั้งฉาก $X - Y - Z$ ดังนี้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

จากเอกลักษณ์ทางเวกเตอร์

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})]$$

แทนเอกลักษณ์ทางเวกเตอร์ลงในสมการออยเลอร์จะได้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})]$$

จากที่ผ่านมามีจำเป็นต้องคูณสมการออยเลอร์ในระบบแกนตั้งฉากแบบสเกลาร์ด้วยระยะ $d\vec{s}$ ตามแนวเส้นสายธารเพื่อให้ค่า $[\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยใช้เหตุผลที่ว่า

ความเร็ว \vec{V} และ $d\vec{s}$ มีทิศทางขนานกัน แต่สำหรับการไหลแบบไม่มีการหมุนจะเห็นว่า $\nabla \times \vec{V}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเทอม $\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$ จึงมีค่าเท่ากับศูนย์โดยไม่จำเป็นต้องคูณแบบสเกลาร์ด้วยระยะ $d\vec{s}$ ตามเส้นสายธาร ดังนั้นสำหรับการไหลที่ไม่มีการหมุนสมการออยเลอร์ลดรูปเป็น

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z = \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V})$$

สมการออยเลอร์ที่ลดรูปนี้ ไม่มีความจำเป็นต้องคูณสมการทั้งหมดแบบสเกลาร์ด้วยระยะ $d\vec{s}$ ตามแนวเส้นสายธารอีกต่อไป ดังนั้นกำหนดให้ $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ เป็นระยะระหว่าง 2 จุดใดๆ ในสนามการไหลที่ไม่จำเป็นต้องอยู่บนเส้นสายธารเดียวกัน และนำไปคูณแบบสเกลาร์กับสมการข้างต้นจะได้

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{r} - g \nabla z \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \nabla (V^2) \cdot d\vec{r}$$

หรือ

$$-\frac{dp}{\rho} - g dz = \frac{1}{2} d(V^2)$$

เมื่ออินทิเกรตจะได้

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{ค่าคงที่}$$

สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ หรือ ρ มีค่าคงที่จะได้

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = \text{ค่าคงที่}$$

สมการเบอร์นูลลีที่ได้ไม่ได้เกิดจากการคูณสมการออยเลอร์แบบสเกลาร์ด้วยระยะ $d\vec{s}$ ตามเส้นสายธาร แต่เกิดจากการคูณด้วย $d\vec{r}$ ซึ่งเป็นระยะระหว่าง 2 จุดใดๆ ในสนามการไหลจึงทำให้สมการเบอร์นูลลีสำหรับการไหลแบบไม่มีการหมุนนี้สามารถใช้กับจุด 2 จุดใดๆ ที่ไม่จำเป็นต้องอยู่บนเส้นสายธารเดียวกันหรือกล่าวได้ว่า ค่าคงที่จากการอินทิเกรตสำหรับแต่ละเส้นสายธารในการไหลแบบไม่มีการหมุนมีค่าเท่ากัน

2.1.3 สมการต่างๆ ของการเคลื่อนที่

การสมมุติขั้นพื้นฐานที่อธิบายแบบจำลอง จะใช้สมการออยเลอร์ (Euler's Equation) ร่วมกับสมการของกฎทรงมวล [4] จุดประสงค์ของการศึกษาครั้งนี้จะพิจารณาคลื่นที่มีการแผ่ขยายใน 2 มิติ แนวระนาบ (x', z') ดังรูปที่ 2.6 และกำหนด $P'(x', t', z')$ แทนความดันของของไหล, ρ' แทนความหนาแน่นคงที่, $g \equiv (0, -g)$ แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก, $u' \equiv (u', w')$ แทนเวกเตอร์ที่เป็นความเร็ว ดังนั้นจะได้

$$\frac{Du'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial x'}$$

$$\frac{Dw'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial z'} - g$$

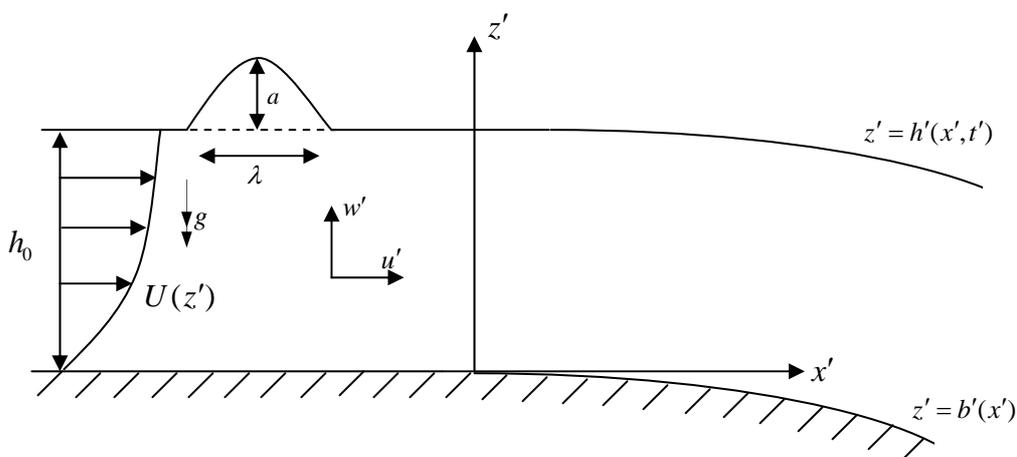
โดยที่

$$\frac{D}{Dt'} = \frac{\partial}{\partial t'} + u' \frac{\partial}{\partial x'} + w' \frac{\partial}{\partial z'}$$

เป็นอนุพันธ์ที่มีความสำคัญ และสมการของกฎทรงมวล คือ

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0$$

เมื่อนำสมการต่างๆ ที่กำหนดมารวมกับเงื่อนไขค่าขอบเขต เงื่อนไขค่าเริ่มต้น และสเกลที่เหมาะสม เหล่านี้จะเป็นหลักของการทำงาน



รูปที่ 2.6 แสดงสถานะที่ไม่ถูกรบกวน และคลื่นพื้นผิว

2.1.4 เงื่อนไขค่าขอบเขต (The Boundary Conditions)

พิจารณาเงื่อนไขค่าขอบเขตบนพื้นผิว (พื้นผิวอิสระ) และที่ท้องน้ำ (Bottom) [4] อธิบายได้ดังนี้

2.1.4.1 เงื่อนไขพื้นผิวอิสระ (The Free Surface Conditions)

โดยปกติแล้วพื้นผิวจะเรียกว่าพื้นผิวอิสระเพราะว่าพื้นผิวไม่ได้ถูกกำหนดโดยเงื่อนไขของความเร็ว (Velocity Conditions) พื้นผิวแทนด้วย $z' = h'(x', t')$ [4] เมื่อพื้นผิวนี้เคลื่อนที่จะอธิบายโดยใช้เงื่อนไขจลนศาสตร์ (Kinematic Condition)

เมื่อพื้นผิวมีความเค้นเนื่องจากความดันเพียงอย่างเดียว (คือไม่มีความหนืด, ไม่มีแรงตึงผิว) ผลที่ตามมาคือเงื่อนไขพื้นผิวถูกเรียกว่าเงื่อนไขพลศาสตร์ (Dynamic Condition) รายละเอียดของเงื่อนไขค่าขอบเขตทั้งสอง อธิบายได้ดังนี้

2.1.4.1.1 เงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์ (The Kinematic Condition)

พื้นผิวหนึ่ง $F'(x', t') =$ ค่าคงที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล ซึ่งจะได้

$$\frac{DF'}{Dt'} = 0$$

ดังนั้นที่พื้นผิวอิสระสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ $z' - h'(x', t') = 0$ ผลที่ตามมาคือ

$$\frac{D}{Dt'} \{z' - h'(x', t')\} = 0$$

และมีผลลัพธ์เป็น

$$w' - \frac{\partial h'}{\partial t'} - u' \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$w' = h'_t + u'h'_x \quad \text{บน } z' = h'(x', t') \quad (2.8)$$

เงื่อนไขขอบเขตนี้เป็นเงื่อนไขอันดับแรกบนพื้นผิวอิสระที่อธิบายถึงความเร็วในแนวตั้งของของไหลที่พื้นผิวซึ่งเป็นผลรวมของการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของพื้นผิว (h'_t) และที่เป็นองค์ประกอบในแนวตั้งที่เหมาะสมของของไหลที่เคลื่อนที่ในแนว x' ที่ความชัน ($u'h'_x$) ของพื้นผิวไม่เท่ากับศูนย์ สำหรับบางส่วนที่มีการเคลื่อนที่ในพื้นผิว เวกเตอร์ความเร็วต้องเป็น

แทนเจนต์ ดังนั้นถ้าองค์ประกอบของความเร็วที่พื้นผิวเป็น u' (แนวราบ) และ w' (แนวตั้ง) จะได้

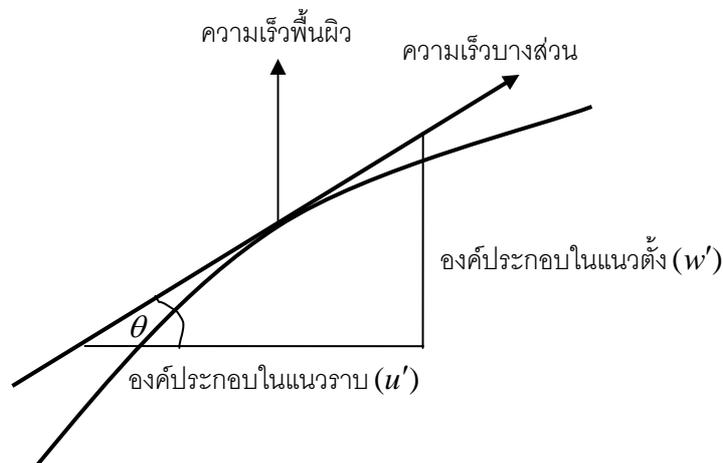
$$\frac{w'}{u'} = \tan \theta$$

โดยที่ θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ความเร็วนั้นทำกับแนวราบ (ดูรูปที่ 2.7) แต่ $\tan \theta$ เป็นความชันของพื้นผิวด้วยเหมือนกัน ดังนั้น

$$\frac{w'}{u'} = \tan \theta = \frac{\partial h'}{\partial x'}$$

และดังนั้นการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของบางส่วนของที่เหมาะสมเป็น

$$w' = u' \frac{\partial h'}{\partial x'}$$



รูปที่ 2.7 แสดงเงื่อนไขพลังงานจลนศาสตร์

2.1.4.1.2 เงื่อนไขพลศาสตร์ (The Dynamic Condition)

สำหรับปัญหาที่ศึกษาส่วนใหญ่ในทฤษฎีของคลื่นน้ำ (รวมทั้งที่กำลังศึกษา) จะกำหนดให้ $P' = P_a =$ ค่าคงที่ ซึ่งเป็นความดันของบรรยากาศ เนื่องจากการอธิบายการไหลแบบไม่มีความหนืด และไม่คิดผลของแรงตึงผิวด้วย ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตพลศาสตร์ที่พื้นผิวกลายเป็น

$$P' = P_a = \text{ค่าคงที่ บน } z' = h'(x', t') \quad (2.9)$$

2.1.4.2 เงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (The Bottom Boundary Condition)

สำหรับของไหลแบบไม่มีความหนืดของไหลเป็นการทำให้เกิดรูปแบบอย่างง่ายของเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ ค่าขอบเขตท้องน้ำซึ่งของไหลไม่สามารถซึมผ่านได้ [4] ดังนั้นกำหนดให้

$$\frac{D}{Dt}(z' - b'(x', t')) = 0$$

สำหรับรูปแบบท้องน้ำทั่วไปจะถูกกำหนดโดย $z' = b'(x', t')$ ดังนั้นจะได้เงื่อนไข

$$w' = b'_t + u'b'_x \quad \text{บน } z' = b'(x', t') \quad (2.10)$$

แต่จะพิจารณาขอบเขตค่าท้องน้ำที่มีการกำหนดว่า $z' = b'(x')$ (ดูรูปที่ 2.6) ซึ่งไม่รวมถึงภูเขาไฟระเบิดที่เกิดขึ้นได้น้ำ แล้วสมการ (2.10) จะถูกลดรูปเป็น

$$w' = u' \frac{db'}{dx'} \quad \text{บน } z' = b'(x') \quad (2.11)$$

จากสมการออยเลอร์ร่วมกับสมการของกฎทรงมวล (ส่วนที่ 2.1.3) ภายใต้เงื่อนไขพื้นผิวอิสระ (ส่วนที่ 2.1.4.1) และเงื่อนไขค่าขอบเขตท้องน้ำ (ส่วนที่ 2.1.4.2) คือสมการที่สามารถใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำที่แอมพลิจูดมีค่าน้อยๆ สำหรับการหาผลเฉลยโดยวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) จะกล่าวในบทต่อไป

2.1.5 การไร้มิติ (Nondimensionalisation)

การไร้มิติของตัวแปรต่างๆ จะสร้างขึ้นมาจากสเกลของระยะทาง และสเกลของเวลา[4] โดยกำหนดให้สเกลของระยะทางเป็นดังนี้ h_0 แทนความลึก, λ แทนความยาวคลื่น และ b แทนพื้นผิวท้องน้ำ และตัวแปรอื่นๆ ที่นอกเหนือจากที่กล่าวถึงสามารถดูได้จากรูปที่ 2.6 สำหรับในส่วนที่เป็นสเกลของเวลา จะเป็นตัวกำหนดสเกลของความเร็วที่เหมาะสม ซึ่งประมาณได้เป็น $\sqrt{gh_0}$, g แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง โดยที่สเกลของความเร็ว และความยาวคลื่น (λ) จะถูกใช้อธิบายเวลาที่มีความเกี่ยวข้องกับการแผ่ขยายของคลื่นในแนวราบได้เป็น $\frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}}$ และสามารถใช่ $\sqrt{gh_0}$ เป็นตัวอธิบายสเกลขององค์ประกอบของความเร็วในแนวราบได้ แต่สำหรับ

องค์ประกอบของความเร็วในแนวตั้งนั้นจะเป็น $\frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda}$ และมีการกำหนดพื้นผิว $z' = (x', t')$ ดังนั้นสามารถเขียนตัวแปรต่างๆ ที่ไร้มิติได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x' &\rightarrow \lambda x, & z' &\rightarrow h_0 z, & t' &\rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t, \\ u' &\rightarrow \sqrt{gh_0} u, & w' &\rightarrow \frac{h_0\sqrt{gh_0}}{\lambda} w, & b &\rightarrow h_0 b \end{aligned}$$

ร่วมกับ $h = h_0 + a\eta$

โดยที่ “ \rightarrow ” หมายความว่า “แทนที่ด้วย” a เป็นแอมพลิจูด, ฟังก์ชัน η เป็นแบบไร้มิติ และความดันคือ

$$P' = P_a + \rho g(h_0 - z') + \rho gh_0 p$$

โดยที่ P_a เป็นความดันของบรรยากาศที่มีค่าคงที่, $\rho g(h_0 - z')$ เป็นความดันเนื่องจากการแพร่กระจาย และ ρgh_0 เป็นสเกลของความดันที่ความลึก $z' = h_0$ สำหรับตัวแปรของความดัน p จะถูกเปลี่ยนให้ไร้มิติ

สมการออยเลอร์ และสมการของกฏทรงมวลสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \delta^2 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

โดยที่

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

และ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ซึ่งสมการเหล่านี้สามารถเขียนในเทอมของตัวแปรที่ไร้มิติ โดยกำหนดให้ $\delta = \frac{h_0}{\lambda}$ เป็นพารามิเตอร์ของความยาวของคลื่นยาว หรือ คลื่นน้ำตื้น

2.1.6 วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)

การกระจายเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Expansion) คือ การวิเคราะห์คุณสมบัติในเรอื่งลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อฟังก์ชันเป็น $y = (x, \varepsilon)$ มีพารามิเตอร์ ε ซึ่งมีค่าน้อยๆ และคำตอบจะหาได้เมื่อ $\varepsilon = 0$ ซึ่งคำตอบเป็นแบบแม่นยำตรง สำหรับการหาคำตอบเมื่อ ε ที่มีค่าน้อยๆ จะใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชัน (Perturbation Method) ถ้า ε คู่กับเทอมของสมการของฟังก์ชัน ซึ่งคำตอบที่ได้หาโดยอนุกรมกำลัง (Power Series) ที่มีรูปแบบเป็น

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.12)$$

ผลที่ได้คืออนุกรมที่ลู่ออกสำหรับค่า ε ใดๆ อย่างไรก็ตามผลที่ได้ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการประมาณค่าฟังก์ชัน $y = (x, \varepsilon)$ เมื่อ ε มีค่าน้อยๆ ได้ [5-8] ในงานวิจัยนี้ได้ใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ซึ่งลักษณะของการกระจายนี้จะเป็นเช่นเดียวกับการกระจายเชิงเส้นกำกับ โดยที่การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ที่มีรูปแบบเป็น [9]

$$Q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma^m Q_{nm}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$$

ต่อไปจะกล่าวถึงกระจายเชิงเส้นกำกับสำหรับการพิจารณาในแบบต่างๆ ดังนี้

2.1.6.1 ความคิดพื้นฐานบางอย่าง

สำหรับเรื่องความคิดพื้นฐานบางอย่างในการใช้อนุกรมเชิงเส้นกำกับ จะขออธิบายเกี่ยวกับสัญลักษณ์ 2 สัญลักษณ์ทั่วไปที่ใช้กับฟังก์ชัน $f(\varepsilon)$ ในลิมิตที่มี $\varepsilon \rightarrow 0$ สัญลักษณ์เหล่านั้นเป็น “ O ” และ “ o ” และเป็นเทอมโอใหญ่ และเทอมโอเล็ก ตามลำดับ ถ้าฟังก์ชันที่แตกต่างกันของ ε เป็น $f(\varepsilon)$ และ $g(\varepsilon)$ จะได้ว่า

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} < \infty \quad (2.13)$$

ผลที่ตามมาคือ $f(\varepsilon)$ เป็นอันดับของ $g(\varepsilon)$ ถ้าลิมิตเท่ากับศูนย์แล้วสัญลักษณ์ o ที่ใช้จะเป็น

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \quad \text{ถ้า} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0 \quad (2.14)$$

ฟังก์ชัน $g(\varepsilon)$ ข้างบนเป็นเทอมของ “ฟังก์ชันเกาส์ (Gauge Function)” เซตของฟังก์ชันเกาส์เป็นเซตของกำลังของ ε ($1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots$) กำลังเหล่านี้สามารถใช้อธิบายคุณสมบัติของฟังก์ชันอื่นๆ บางฟังก์ชันของ ε ได้ ตัวอย่างเช่น

$$\sin \varepsilon \sim \varepsilon \quad (2.15)$$

อ่านว่าซายน์เอปซิลอน (Sine Epsilon) เป็นการประมาณให้เท่ากับ ε นอกจากนี้ก็สามารถบอกได้ว่า

$$\tan \varepsilon \sim \varepsilon \quad (2.16)$$

ดังนั้นจะเห็นว่าฟังก์ชันที่แตกต่างกันสามารถแสดงด้วยเชิงเส้นกำกับได้เหมือนกัน

2.1.6.2 อนุกรมกำลัง

จัดเป็นประเภทหนึ่งของอนุกรมเชิงเส้นกำกับ โดยทั่วไปอนุกรมเชิงเส้นกำกับสำหรับฟังก์ชัน $y(x, \varepsilon)$ มีรูปแบบเป็น

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^N f_n(\varepsilon) y_n(x) \quad (2.17)$$

ถ้าผลที่ได้จากอนุกรมเป็นแบบลู่ออก ดังนั้นสำหรับฟังก์ชัน $f_n(\varepsilon)$ จะเป็นไปตาม

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)} = 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

แต่ละวิธีเป็นองค์ประกอบของเซตของฟังก์ชันที่เข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $\varepsilon \rightarrow 0$ จะเรียกเซตของฟังก์ชัน $\{f_n(\varepsilon)\}$ ว่าลำดับเชิงเส้นกำกับ ถ้าเงื่อนไขในสมการ (2.18) มีองค์ประกอบที่เหมาะสม ซึ่งเซตของกำลังของ ε เป็นลำดับเชิงเส้นกำกับ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน $y_j(x)$ จะเป็นลักษณะเฉพาะจากคุณสมบัติขององค์ประกอบของลำดับเชิงเส้นกำกับ ชั้นแรกหารทั้งสองข้างของสมการ (2.17) ด้วย $f_0(\varepsilon)$ และใส่ลิมิตที่ $\varepsilon \rightarrow 0$ ผลที่ตามมาเป็นสัมประสิทธิ์อันดับนำ (Leading Order Coefficient) $y_0(x)$

$$y_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x, \varepsilon)}{f_0(\varepsilon)} \quad (2.19)$$

ต่อไปนำ $f_0(\varepsilon)y_0(x)$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ (2.17) แล้วหารด้วย $f_1(\varepsilon)$ และใส่ลิมิตที่ $\varepsilon \rightarrow 0$ ผลที่ได้เป็น

$$y_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x, \varepsilon) - f_0(\varepsilon)y_0(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} \quad (2.20)$$

ขั้นตอนดังกล่าวใช้เป็นขั้นตอนโดยตรงที่แสดงถึงสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน $y_j(x)$ ในอนุกรมเชิงเส้นกำกับสามารถเขียนเป็น

$$y_j(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{j-1} f_n(\varepsilon)y_n(\varepsilon)}{f_j(\varepsilon)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

สัมประสิทธิ์ในอนุกรมเชิงเส้นกำกับสำหรับฟังก์ชันที่กำหนดให้ขึ้นอยู่กับทางเลือกของลำดับ ซึ่งแต่เดิมลำดับจะกำหนดมาให้ สัมประสิทธิ์ลักษณะเฉพาะมาจากโดยสมการ (2.20) และ (2.21) ในปัญหาที่กำหนดให้ปกติมักไม่ทราบว่า $y(x, \varepsilon)$ ไม่เป็นอิสระบน ε ดังนั้นผลในสมการเหล่านี้ควรพิจารณาโดยใช้แก่นนิยมทั่วไปของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันเท่านั้น

2.1.6.3 การหาปฏิยานุพันธ์

พิจารณาปฏิยานุพันธ์ $I(\varepsilon)$ ที่มีรูปแบบเป็น

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + \varepsilon t} dt \quad (2.22)$$

ใช้วิธีแยกส่วน (By Part) เพื่อหาปฏิยานุพันธ์ ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \left[\frac{1}{1 + \varepsilon t} \{e^{-t}\} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \{e^{-t}\} \left\{ \frac{-\varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^2} \right\} dt \\ &= 1 - \varepsilon \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1 + \varepsilon t)^2} dt = 1 - \varepsilon \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon t)^2} \{-e^{-t}\} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \{-e^{-t}\} \left\{ -\frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^3} \right\} dt \\ &= 1 - (1!) \varepsilon + (2!) \varepsilon^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{(1 + \varepsilon t)^3} dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

ใช้วิธีแยกส่วนใหม่อีกครั้งได้เป็น

$$I(\varepsilon) = 1 - (1!) \varepsilon + (2!) \varepsilon^2 - \dots + (-1)^{n-1} ([n-1]!) \varepsilon^{n-1} + (-1)^n (n!) \varepsilon^n \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(1+\varepsilon t)^{n+1}} dt \quad (2.24)$$

ซึ่งรูปแบบที่ได้นี้จะสามารถเขียนเป็นอนุกรมอนันต์ได้คือ

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n!) \varepsilon^n \quad (2.25)$$

ซึ่งจะดูออกสำหรับทุกๆ ค่าของ ε แต่สำหรับ ε ที่มีค่าน้อยๆ อนุกรมในสมการ (2.25) จะทำการตัดเทอมที่มีค่าน้อยๆ โดยใช้การประมาณที่เหมาะสมของการหาปฏิยานุพันธ์

2.1.6.4 สมการเชิงอนุพันธ์

$$\text{พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์} \quad y' + \varepsilon y = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้นคือ} \quad y(0) = 1 \quad (2.27)$$

$$\text{และคำตอบเป็น} \quad y = e^{-\varepsilon x} \quad (2.28)$$

ซึ่งเกิดการกระจายเชิงเส้นกำกับที่ทำให้ $y(x, \varepsilon)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x) \quad (2.29)$$

แทนการกระจายนี้ในสมการ (2.26) ได้ผลเป็น

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k' + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k+1} y_k = 0 \quad (2.30)$$

จัดรูปสมการใหม่ ดังนี้

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (y_k' + y_{k-1}) = 0 \quad (2.31)$$

$$\text{โดย } y_{k-1} = 0 \text{ และใส่ } \lim \varepsilon \rightarrow 0 \text{ จะได้ } y'_0 = 0 \quad (2.32)$$

โดยทั่วไปแล้วผลที่ได้ของสมการ (2.32) นี้ เมื่อหารทั้งสองข้างโดย ε และใส่ $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ อีกครั้ง จะได้

$$y'_1 = -y_0 \quad (2.33)$$

$$\text{ทำวิธีการเหล่านี้ซ้ำ จะได้ } y'_k = -y_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

สามารถเขียนสมการ (2.34) ให้เป็นแบบแผน โดยการกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของ ε^k เป็นศูนย์ในสมการ (2.31) สำหรับแต่ละค่าของ k โดยการใส่เพิ่มในเงื่อนไขเริ่มต้นของการกระจายเชิงเส้นกำกับในสมการ (2.29) ได้เป็น

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon^k y_k(0) = 1 \quad (2.35)$$

และผลที่ได้เป็น

$$y_k(0) = \delta_{k_0} \quad (2.36)$$

โดยที่ $\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$ และในกรณีอื่นๆจะมีค่าเป็น 0 จะเรียกว่าครอนเนกเกอ เดลตา (Kronecker Delta) คำตอบของ $y'_0 = 0$ เป็น $y_0 = 1$ เมื่อ $y_0(0) = 1$ นำคำตอบที่ได้ไปใช้เพื่อหาคำตอบของสมการสำหรับ y_1 ซึ่งเป็น $y'_1 = -y_0 = -1$ เมื่อ $y_1(0) = 0$ ทำจนกระทั่งได้ผลเป็น $y_1 = -x$ โดยทำวิธีการนี้อย่างต่อเนื่องเพื่อหา $y_2(x) = x^2/2!$, $y_3 = -x^3/3!$ และทำต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้คำตอบสำหรับ $y(x, \varepsilon)$ เป็น

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\varepsilon x)^k}{k!} \quad (2.37)$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) สำหรับฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล (Exponential Function) $y = e^{-\varepsilon x}$ อนุกรมนี้เกิดขึ้นเมื่อผู้เข้าสำหรับทุกๆ ค่าของ ε และของ x ในตัวอย่างนี้พยายามจะหาการกระจายอนุกรมกำลังใน ε ทำให้เกิดอนุกรมที่ผู้เข้า อย่างไรก็ตามจะไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้กับปัญหาทุกปัญหา

2.1.6.5 ข้อสรุปและข้อคิดเห็น

ถ้าโดเมนของฟังก์ชันเป็นแบบไม่จำกัดเช่นเดียวกับที่ปรากฏในปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นจินตนาการ (Idealized Mathematical Problem) ปัญหาเหล่านี้จะทำให้ได้ผลสำเร็จโดยใช้เทคนิคเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปีค.ศ. 1972 R.S. Johnson [10] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg-de Vries Equation (with application to solitary wave development on a shelf).” งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยบางตัวที่เป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ Korteweg-de Vries (KdV) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรซึ่งเป็นสมการลักษณะเฉพาะ ผลเฉลยที่หาได้มาจากการอธิบายการพัฒนาของคลื่นโซลิตอนที่มีการเคลื่อนไปบนชั้นของคลื่นเท่านั้น การสร้างโซลิตอนบนชั้นถูกทำนาย และสามารถยืนยันได้ ผลที่ได้้นำกลับมาพิจารณาสอง และสามโซลิตอนใหม่ และพิจารณาความลึกของชั้น ต่อมาในปีค.ศ. 1973 R.S. Johnson [11] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “On an asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equation with slowly varying coefficients” ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ที่มีรูปแบบของสมการเป็น

$$H_x + \frac{3}{2}d^{-4}HH_\xi + \frac{1}{6}kd^2H_{\xi\xi\xi} = 0$$

โดยที่ $d = d(\varepsilon, X)$ เป็นการพิจารณารูปร่างเริ่มต้นของคลื่นโซลิตอนี ผลเฉลยเชิงเส้นกำกับที่หาได้โดยตรงจากการสร้างของคลื่นโซลิตอนี และแสดงถึงความแตกต่างกันของด้านหน้า และด้านหลังของคลื่นโซลิตอนี โดยด้านหน้าเป็นการปรับปรุงให้ดีขึ้นโดยการเข้าคู่กันอย่างเหมาะสมในรูปแบบของพหุนาม (Exponential Form) และพิจารณาความสัมพันธ์ของสมการกับกฎทรงมวล (Conservation Laws) ส่วนผลเฉลยด้านหลังของคลื่นโซลิตอนีโดยทั่วไป ทำให้ได้ผลเฉลยในการแกว่งของทางเกี่ยวกับการเข้าคู่อีกครั้ง

ในปีค.ศ. 1999 Woopyo Hong and Young-Dae Jung [12] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “Auto-Bäcklund transformation and analytic solutions for general variable-coefficient KdV equation.” สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับสมการ KdV ทั่วไป ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่มีรูปแบบเป็น

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$$

ซึ่งจะใช้การประยุกต์การกระจายแบบตัดของเพนแล (Painleve) และการประยุกต์การคำนวณแบบสัญลักษณ์ (Symbolic Computation) เพื่อจะหาการแปลงแบบอโตบัคคัน (Auto-Bäcklund) และผลเฉลยบางตัวของ $f(t)$ และ $g(t)$ ด้วย

ในปีพ.ศ. 2542 ศุภชัย ราชอาจ [13] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “การประมาณค่าผลเฉลยของสมการ KdV สำหรับโซลิตอนเชิงเดี่ยวโดยใช้ผลต่างสี่บเนื่องข้างหน้า” ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยแม่นยำโดยอาศัยผลเฉลยทางตัวเลข ในงานวิจัยนี้สนใจในการประมาณค่าเฉลยของสมการคลื่นไม่เชิงเส้นที่เรียกว่า สมการโซลิตอน โดยใช้กระบวนการทางตัวเลขที่ไม่ยุ่งยากมาก เพื่อประมาณค่าของผลเฉลยของสมการคลื่นไม่เชิงเส้นที่เป็นที่รู้จักกันคือสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ เพื่อศึกษาค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากกระบวนการผลต่างสี่บเนื่องข้างหน้า โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยตรง และกราฟของผลเฉลยได้จากกระบวนการของ Nikrad Toomarian และ Jacob Barhen

ในปีค.ศ. 2000 S.M. Killen and R.S. Johnson [9] ได้เขียนเรื่อง “Propagation of Axisymmetric Nonlinear Shallow Water Waves over Slowly Varying Depth” ที่เกี่ยวกับการอธิบายถึงการแผ่ขยายของคลื่นน้ำบนพื้นผิว โดยกำหนดให้ของไหล (น้ำ) ไม่มีความหนืด และเป็นของไหลที่ไม่มีการไหล (หยุดนิ่งไม่เคลื่อนที่) โดยคลื่นพื้นผิวขึ้นต้นเป็นการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ของคลื่นทรงกระบอกแบบไม่เชิงเส้น (Nolinear Cylindrical wave) ในขณะที่ความลึกสมมุติให้ค่อยๆ เปลี่ยนตามทิศทางของเรเดียนทั้งหมด (Radial Direction) และพิจารณารูปแบบ $\sec h^2$ ที่เรเดียนเริ่มต้น (ภายหลังจากการเปลี่ยนสเกลร์ให้ใหญ่พอสมควร) อธิบายการแผ่ขยายภายนอกเขตเรเดียน รูปแบบเริ่มต้นนี้ถูกเลือกเพราะสามารถเปลี่ยนแปลงเหนือความลึกที่คงที่ โดยเป็นที่เข้าใจทั้งเชิงวิเคราะห์ และเชิงตัวเลข แม้ว่าจะไม่มีผลเฉลยที่เป็นคลื่นโซลิตอนรีแบบแม่นยำของสมการ KdV ที่เป็นทรงกระบอก (Cylindrical KdV Equation) เกิดขึ้นก็ตาม นอกจากนี้จะอธิบายการแผ่ขยายที่กำหนดการสะท้อนกลับ (Reflected) และ re-reflected ซึ่งปกติแล้วการสะท้อนกลับจะถูกกำหนดโดยกฎทรงมวล สำหรับผลที่ได้จากการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีรูปแบบเป็น $Q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^n \sigma^m Q_{nm}$, $\Delta \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$ จะอธิบายการเปลี่ยนแปลงของคลื่นขึ้นต้น (Primary Wave) ที่มีรูปแบบเป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร $2\sqrt{DS}H_{00x} + \frac{3}{D}H_{00}H_{00\xi} + \frac{D}{3}H_{00\xi\xi\xi} = 0$ โดยที่ $D(Y) = 1 - B(Y)$ เป็นความลึกเฉพาะที่ และเพื่อความสะดวกจะกำหนดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน $B(Y)$ ในกรณีของภายนอกเขตที่มีขึ้น และภายในเขต (สะท้อนกลับ) ที่มีขึ้น โดยผลที่ได้เป็นรูปแบบสำหรับที่มีการค่อยๆ เปลี่ยนความลึกเฉพาะที่

ในปีค.ศ. 2003 R.S. Johnson [14] ได้เขียนงานวิจัยเรื่อง “The Camassa-Holm equation for water waves moving over a shear flow” โดยที่งานวิจัยชิ้นนี้จะอธิบายบทบาทของสมการคามัสซา-ฮอล์ม (Camassa – Halm, CH) ซึ่งรูปแบบสมการคือ

$$u_t + 2ku_x + 3uu_x - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

โดยที่ $u = u(x, t)$ และ k เป็นพารามิเตอร์ สำหรับสมการนี้จะอยู่ในปัญหาคลื่นน้ำแบบดั้งเดิม (Classical Water – Wave Problem) ซึ่งรวมถึงการไหลพื้นฐานที่อยู่บริเวณใต้คลื่นน้ำเหนือการไหลร่วมกับกระแสน้ำวนที่ไม่เป็นศูนย์ สมการสำหรับคลื่นจากแรงโน้มถ่วงของโลก และจะกำหนดพารามิเตอร์ 2 ตัว ได้แก่ ε แทนแอมพลิจูด, δ แทนคลื่นยาว วิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการนี้จะอยู่ในรูปแบบของการกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีรูปแบบเป็น $q \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^n \delta^{2m} q_{nm}$ สำหรับ $\varepsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ โดยจะพิจารณาเฉพาะเทอม $O(1), O(\varepsilon), O(\delta^2)$ และ $O(\varepsilon\delta^2)$ เท่านั้น ซึ่งได้รับการพัฒนาโดยเริ่มต้นจะกำหนดสำหรับการไหลแบบเฉือนพื้นฐาน และบางเทอมในการกระจายเชิงเส้นกำกับจะแสดงสำหรับกรณีทั่วไป อย่างไรก็ตามเป็นที่น่าสนใจว่าความซับซ้อนที่เกิดขึ้นจะชัดเจนขึ้นโดยไปสู่ขอบเขตการบรรยายที่สมบูรณ์สำหรับการไหลใดๆ ดังนั้นการคำนวณถูกทำให้สมบูรณ์สำหรับกรณีแบบเฉือนเชิงเส้น นั่นคือการไหลพื้นฐานมีกระแสน้ำวนเป็นค่าคงที่ สมการ CH ถูกแสดงว่าสามารถใช้ได้ (ที่อันดับนี้) สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้นเชิงเดียว (Simple Nonlinear Function) ขององค์ประกอบของสนามความเร็วในแนวราบที่การไหลถูกรบกวน และความลึกคงที่ ผลลัพธ์ที่จะได้จะเป็นทำนองเดียวกันกับที่หาได้ก่อนหน้านี้ สำหรับกรณีที่ไม่มีแบบเฉือน ดังนั้นสมการ CH เป็นที่ถูกต้องสำหรับองค์ประกอบของความเร็ว นอกจากนี้การแสดงผลการไหลพื้นฐานยังมีความสำคัญ และทำให้ได้ผลใหม่ๆ ถึงแม้ว่าคลื่นที่ทุกครั้งเป็นการแผ่ขยายตามกระแสน้ำ (Downstream) จะมีความสัมพันธ์กับสมการ CH ที่ความลึกต่ำกว่าพื้นผิว (และเหนือก้นน้ำ) แต่จะไม่จริงสำหรับการแผ่ขยายทวนกระแสน้ำ (Upstream) ขณะที่ความแตกต่างระหว่างความเร็วที่ด้านบน และท้องน้ำของการไหลพื้นฐานเพิ่มขึ้น (นั่นคือกระแสน้ำวนที่คงที่เพิ่มขึ้น) ดังนั้นความลึกที่สมการ CH นี้อธิบายได้สำหรับการเคลื่อนที่ของคลื่นลงข้างล่างที่ค่าวิกฤต (Critical Value) ของความแตกต่างนี้ ซึ่งสมการ CH สามารถใช้ได้บนท้องน้ำ และหลังจากนั้นจะเคลื่อนที่ภายนอกสนามการไหลเชิงกายภาพ (Physical Flow) การเปลี่ยนแปลงของความลึกสำหรับแต่ละทิศทางของการแผ่ขยายที่เป็นลักษณะเดียวกันกับการค่อยๆ เปลี่ยนของแบบเฉือนเชิงเส้นซึ่งจะถูกนำเสนอในรูปแบบของผลลัพธ์ของสมการ CH

จากการค้นคว้าในส่วนนี้ทำให้ทราบว่าสมการ KdV มีผู้ให้ความสนใจอย่างมาก ทั้งในเชิงวิเคราะห์ และเชิงตัวเลข ในรูปแบบที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ และสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ซึ่งผู้ศึกษาเหล่านั้นพยายามที่จะพัฒนาให้สมการสามารถมองเห็นได้ชัดเจนขึ้น และสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้มากขึ้นด้วย จากการค้นคว้าทำให้เกิดแนวทางในการที่จะนำไปสู่การศึกษา KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยมีสัมประสิทธิ์เฉพาะ ที่ได้จากวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) โดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) และสามารถพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่มีความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้รับจากการศึกษาครั้งนี้ด้วย