บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

เนื่องจากน้ำเป็นทรัพยากรทางธรรมชาติที่มีความสำคัญต่อการดำรงชีวิตของคน ดังนั้น ในอดีตและปัจจุบันคนส่วนใหญ่จึงนิยมที่จะปลูกบ้านเรือนริมแม่น้ำหรือริมคลอง แต่ต่อมาเกิดปัญหาการกัดเซาะอันเนื่องมาจากคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลอง จนทำให้ตลิ่งพังและเกิดความเสียหายต่อบ้านเรือนที่อาศัยอยู่บริเวณนั้น เพราะฉะนั้นการศึกษาครั้งนี้จึงมีแนวความคิดที่จะศึกษาถึงพารามิเตอร์ที่ทำให้ความสูงของคลื่นลดน้อยลง เพื่อลดการกัดเซาะ โดยพิจารณาจากความลึกประกอบกับลักษณะทางภูมิศาสตร์ของแม่น้ำลำคลองสายนั้น สำหรับการศึกษาครั้งนี้ทำการพิจารณาคลื่นน้ำที่มีรูปแบบเป็นสมการ KdV โดยอันดับแรกกล่าวถึงรูปแบบสมการ KdV ในรูปแบบต่างๆ ดังนี้

สมการเคอทิเวจ ดี วิส (Korteweg-de Vries) หรือ เคดีวี (KdV) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ [1] มีรูปแบบดังนี้

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

โดยที่ $u(x,t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา (t) และระยะพิกัดที่มีความสัมพันธ์กับทิศทาง (x) สมการ KdV จะถูกกำหนดลักษณะเฉพาะที่ได้มาจากชุดคำตอบของคลื่นโซลิทอรี (Solitary)

$$u = a\,\mathrm{sech}^2(\gamma(x - Vt)) \quad \text{โดยที่} \quad V = 2a = 4\gamma^2 \tag{1.2}$$

สมการ (1.2) ถูกกำหนดลักษณะเฉพาะโดยเลขคลื่น(Wavenumber) คือ γ , ความเร็ว V ที่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแอมพลิจูด (Amplitude) ของคลื่น (a) และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับเลขคลื่นยกกำลังสอง (γ^2)

สมการ KdV (1.1) เป็นผลงานของเคอทิเวจ (Korteweg) และดี วิส (De Vries) ตีพิมพ์ในปีค.ศ. 1895 โดยแสดงคลื่นยาว (Long Waves) ที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ บนพื้นผิวอิสระของน้ำโดยใช้สมการ

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3c}{2h}\zeta\zeta_x + \frac{ch^2}{6}\delta\zeta_{xxx} = 0 \tag{1.3}$$

กำหนดให้ $\zeta(x,t)$ คือความสูงของพื้นผิวอิสระที่มีความสัมพันธ์กับความลึก h , $c=(gh)^{1/2}$ คือ ความเร็วของคลื่นยาวเชิงเส้น และ $\delta = 1-3B$ ซึ่ง $B=\sigma / gh^2$ คือการวัดผลของความตึงผิวเชิงตัวเลขบอน (Bond Number) โดยที่ $\rho\sigma$ เป็นสัมประสิทธิ์ของความตึงผิว และ ρ เป็นความหนาแน่นของน้ำ การแปลงที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการเคลื่อนที่ ที่มีความเร็ว c โดยที่ (x,t) เป็นการแทนที่ด้วย $(x-ct,t)$ ผลที่ตามมาสามารถกำหนดมาตราส่วนอีกครั้ง (Rescaling) ได้ ซึ่งจะเท่ากับ (1.1) และ (1.3) ในปี ค.ศ.1877 โบสสิเนส (Boussinesq) ค้นพบสมการ (1.1) ที่มีชื่อเรียกว่าสมการ KdV เป็นครั้งแรก ต่อมา Korteweg และ De Vries ได้หาคำตอบคลื่นโซลิทอรี (1.2) และที่สำคัญยังแสดงว่าคำตอบเป็นองค์ประกอบของพารามิเตอร์ 2 ตัว ที่เป็นชุดคำตอบของคลื่นสัญจร (Travelling Wave) สามารถอธิบายได้โดยฟังก์ชันเอลลิฟทิค (Elliptic Functions) และโดยทั่วไปเรียกว่าคลื่นคอยดอล (Cnoidal Wave)

$$u = b + acn^2(\gamma(x-Vt)|m) \text{ โดยที่ } V = 6b + 4(2m-1)\gamma^2, a = 2m\gamma^2 \qquad (1.4)$$

กำหนด $cn(x|m)$ เป็นฟังก์ชันจาโคเบียน เอลลิฟทิค (Jacobian Elliptic Function) ของโมดูลัส (Modulus) $m(0<m<1)$ โดย $m\to 1, cn(x|m)\to \sec h(x)$ จากที่กำหนดทำให้คลื่นคอยดอล (1.4) กลายเป็นคลื่นโซลิทอรี (1.2) บนพื้นฐานหนึ่งในระดับ b สำหรับกรณีอื่นๆ เช่น $m\to 0$, $cn(x|m)\to \cos 2x$ แล้วคลื่นคอยดอล (1.4) กลายเป็นคลื่นไซนูซอยดอล (Sinusoidal Wave) แบบเชิงเส้น โดย limit $a\to 0$

การหาคำตอบคลื่นโซลิทอรีโดย Korteweg และ De Vries หาได้โดยตรงจากสมการที่ไม่มีความตึงผิวจาก Boussinesq ในปีค.ศ. 1871 , 1877 และเรรี (Rayleigh) ในปีค.ศ. 1876 ซึ่งใช้แนวทางในการศึกษาของรัสเซล (Russell) ในปีค.ศ.1844 ทำให้ได้สมการ KdV แบบไม่สมบูรณ์ถ้ากำหนดความตึงผิว และ $0<B<1/3$

ภายหลังจาก Korteweg และ De Vries ได้ค้นพบคลื่นน้ำโซลิทอรีและสมการ KdV ความสนใจเกี่ยวกับโซลิทอรีและสมการ KdV เริ่มลดน้อยลง จนกระทั่งในปีค.ศ. 1965 ซาบัสกี (Zabusky) และครัสเคา (Kruskal) ได้ค้นพบคลื่นโซลิทอรี (1.2) และเงื่อนไขเริ่มต้นทั่วไป โดยการหาปฏิยานุพันธ์เชิงตัวเลขของสมการ KdV ซึ่งจะนำไปสู่การสร้างโซลิตอน (Soliton) การค้นพบครั้งนี้ทำให้โซลิทอรีและสมการ KdV กลับมาเป็นที่สนใจอีกครั้ง ต่อมาในปี ค.ศ.1967 ได้มีทฤษฎีของกราดเนอ (Gardner) , กรีนี (Greene) , ครัสเคา (Kruskal) และมูวรา (Miura) ที่แสดงว่าสมการ KdV สามารถหาปฏิยานุพันธ์ได้โดยวิธีการแปลงอินเวอร์ส สเคดเดอริง (Inverse Scattering Transform) ซึ่งทฤษฎีนี้ทำให้ได้ทฤษฎีของโซลิตอน

สมการ KdV (1.1) มีความเกี่ยวข้องกับคลื่นน้ำ โดยที่เกิดขึ้นจากการลดรูปมาตราส่วนการคูณเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Multi-Scale) จากสมการคลื่นยาวเชิงเส้น ผลลัพธ์ที่ได้เป็น

$$A_t + cA_x + \mu AA_x + \lambda A_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

โดยที่ c เป็นความเร็วของคลื่นยาวเชิงเส้นที่มีแอมพลิจูดเป็น $A(x,t)$, μ และ λ เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจายเทอมที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น และแบบเชิงเส้นตามลำดับ การแปลงที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการเคลื่อนที่ ที่มีความเร็ว c ผลที่ตามมาสมการ (1.5) สามารถแปลงเป็นรูปแบบ (1.1) ได้

จากสมการ (1.5) ทำให้สมบูรณ์โดยเทอมที่เป็นอันดับสูงกว่าเดิมของคิวบิกแบบไม่เชิงเส้น (Higher-Order Cubic Nonlinear Term) ที่มีรูปแบบเป็น $\nu A^2 A_x$ จากการแปลงนี้สามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็นสมการกราดเนอ (Gardner Equation)

$$u_t + 6uu_x + 6\delta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.6}$$

สมการกราดเนอ สามารถหาปฏิยานุพันธ์ได้โดยวิธีการแปลงอินเวอร์ส สเคดเดอริง (Inverse Scattering Transform) กำหนดให้สัมประสิทธิ์ δ เป็นบวก หรือ เป็นลบก็ได้ การแผ่ขยายคลื่นโซลิทอรีโดยมีสัมประสิทธิ์ c,μ และ λ ในสมการ (1.5) เป็นฟังก์ชันของ x ที่มีการเพิ่มเทอม $c(\sigma_x / 2\sigma)A$ โดย $\sigma(x)$ แทนการแผ่ขยาย จากการแปลงตัวแปรใหม่ได้เป็น $\theta = (\int^x dx/c) - t, x$ กับ $U = \sigma^{1/2}u$ สมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้ มีรูปแบบดังนี้

$$U_x + \alpha(x)UU_\theta + \beta(x)U_{\theta\theta\theta} = 0\,; \alpha = \mu / c\sigma^{1/2}, \beta = \lambda / c^3 \tag{1.7}$$

เนื่องจากสมการ KdV เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นที่มีความสำคัญ และได้มีการประยุกต์ใช้สมการ KdV นี้อย่างมาก ทั้งในทางวิทยาศาสตร์และทางวิศวกรรมศาสตร์ แต่อย่างไรก็ตามในทางกายภาพนั้น สมการ KdV ยังคงเป็นนามธรรมอยู่ เนื่องจากเรื่องของข้อกำหนดของสัมประสิทธิ์แบบคงที่ เช่น ในเรื่องของการแผ่ขยายของคลื่นพื้นผิวที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ ในของเหลวที่มีความลึกคงที่ เป็นต้น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร เพราะจะได้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง และเป็นรูปธรรมที่สุด ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีที่ศึกษาที่ความลึกระดับต่างๆ ของคลื่นน้ำในแม่น้ำลำคลอง พร้อมทั้งพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ระดับความลึกต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่ได้จากการศึกษาครั้งนี้

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อศึกษาที่มาของสมการ KdV
2. เพื่อศึกษาวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)
3. เพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีที่ศึกษาของความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความลึกระดับต่างๆ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation)
4. เพื่อหาผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV สำหรับความลึกระดับต่างๆ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1. รูปแบบของสมการ KdV ที่ศึกษาเป็นแบบที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
2. ในการหาสัมประสิทธิ์ของคลื่นน้ำในสมการ KdV และหาผลเฉลยสำหรับความลึกระดับต่างๆ จะกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้ [2-3]

   2.1 ของไหล (น้ำ) ที่มีค่าความหนืดเป็นศูนย์

   2.2 ของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้ (Incompressible)

   2.3 แรงภายในเป็นแรงโน้มถ่วงของโลกเพียงอย่างเดียว

   2.3 ของไหลมีการเคลื่อนที่เป็นการไหลที่เป็นแบบไม่คงที่ (Unsteady Flow)

   2.4 ของไหลมีการเคลื่อนที่เป็นการไหลที่ไม่มีการหมุน (Irrotational Flow)

   2.5 ไม่คิดความตึงผิว (Surface Tension)

   2.6 แอมพลิจูดของคลื่นมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวคลื่น

   2.7 คลื่นจะต้องเคลื่อนที่ในทิศทางเดียว

   2.8 แรงดันที่พื้นผิวคลื่นเป็นศูนย์ (Pressure On Free Surface In Zero)
3. ศึกษาตามวิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) เพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะ และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความลึกระดับต่างๆ ในสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรที่เป็นผลเฉลยในครั้งนี้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1. ทำให้ได้ตัวอย่างสำหรับการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น
2. ทราบถึงสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับความลึกระดับต่างๆ ของคลื่นน้ำในสมการ KdV แล้วถ้ามีผู้ที่สนใจในส่วนนี้จะได้นำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

1.5 วิธีการวิจัย

ในการศึกษาเพื่อหาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีที่ศึกษา และผลเฉลยที่เป็นสมการ KdV ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร จากนั้นพิจารณาการแผ่ขยายที่ความลึกระดับต่างๆ ในแม่น้ำลำคลอง วิธีการที่ใช้ในการหาสัมประสิทธิ์เฉพาะนั้น จะใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐาน (Singular Perturbation) โดยใช้การกระจายเชิงเส้นกำกับแบบคู่ (Double Asymptotic Expansion) ที่มีการกำหนดพารามิเตอร์ที่มีค่าน้อยๆ 2 ตัว ได้แก่ ε เป็นขนาดแอมพลิจูดของคลื่น , σ เป็นการค่อยๆ เปลี่ยนความลึก และพิจารณาเฉพาะเทอม $O(1)$ และ $O(\varepsilon)$ เท่านั้น

1.6 ขั้นตอนของงานวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสาร และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาเอกสาร และข้อมูลที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 3 ทำการศึกษาโดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันแบบเอกฐานในสมการ KdV ใน 2 มิติ

ขั้นตอนที่ 4 หาสัมประสิทธิ์เฉพาะสำหรับกรณีที่ศึกษาในสมการ KdV โดยใช้วิธีการตามขั้นตอนที่ 3

ขั้นตอนที่ 5 เขียนกราฟของสมการ KdV จากสัมประสิทธิ์เฉพาะที่หามาได้ และพิจารณาการแผ่ขยายของคลื่นน้ำที่ความลึกระดับต่างๆ

ขั้นตอนที่ 6 สรุป และเขียนวิทยานิพนธ์

1.7 ตารางเวลาและแผนการดำเนินงาน

แผนการดำเนินงาน	เดือน											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ขั้นตอนที่ 1												
ขั้นตอนที่ 2												
ขั้นตอนที่ 3												
ขั้นตอนที่ 4												
ขั้นตอนที่ 5												
ขั้นตอนที่ 6												