

บทที่ 3

การแปลงเวฟเลต

การแปลงเวฟเลต (Wavelet transform) เป็นคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ลักษณะของสัญญาณซึ่งมีประโยชน์มากในงานทางด้านการประมวลผลสัญญาณ (Signal processing) ทฤษฎีเวฟเลตสามารถนำมาประยุกต์เพื่ออธิบายลักษณะของสิ่งต่าง ๆ หรือระบบใด ๆ ได้ เช่น อธิบายการแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียลที่จำลองระบบใดระบบหนึ่ง การเดินของหัวใจ การไหลเวียนของเลือดผ่านร่างกาย การหาขอบภาพ การลดขนาดข้อมูล (ภาพ สัญญาณ) และใช้แก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมการแพทย์

3.1 ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเลต

เมื่อใช้การแปลงฟูเรียร์ในการวิเคราะห์สัญญาณเฉพาะบางช่วงเวลาและความถี่เท่านั้นจะเสียเวลาในการคำนวณมากเพราะต้องคำนวณใหม่ตลอดย่าน ดังนั้นจึงได้มีการพัฒนาการแปลงที่สามารถวิเคราะห์สัญญาณได้เฉพาะช่วงเวลาและความถี่ที่สนใจเท่านั้นทำให้สามารถพิจารณาผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณเฉพาะช่วงได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว การแปลงที่พัฒนาขึ้นนี้เรียกว่า "การแปลงเวฟเลต"

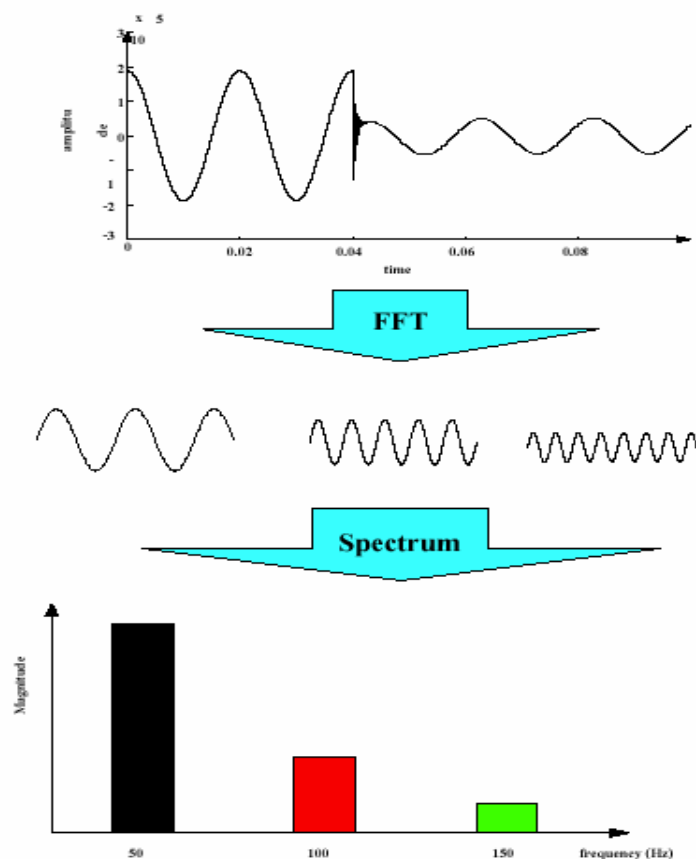
การแปลงเวฟเลตเป็นรูปแบบหนึ่งของกระบวนการประมวลผลสัญญาณที่ได้มีการพัฒนามาจากการแปลงสัญญาณพื้นฐานที่มีอยู่เดิม แต่ได้พิจารณารูปแบบให้มีความเหมาะสมกับการใช้งานเฉพาะทางมากยิ่งขึ้น ในหัวข้อนี้เป็นการอธิบายความหมายและความแตกต่างของการแปลงเวฟเลตกับการแปลงสัญญาณในแบบอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจและนำไปใช้งานต่อไป

3.1.1 การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform : FT)

การแปลงฟูเรียร์เป็นคณิตศาสตร์พื้นฐานในการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่ ในสาขาการประมวลผลสัญญาณจึงนิยมการแปลงฟูเรียร์มาใช้งานกันอย่างแพร่หลาย ทั้งนี้เพราะการแปลงฟูเรียร์จะมีสัญญาณไซน์และโคไซน์เป็นองค์ประกอบซึ่งโดยทั่วไปแล้วสัญญาณทั้งสองจะมีความสำคัญมากเพราะเป็นสัญญาณพื้นฐานสำหรับพิจารณาสัญญาณอื่น ๆ โดยจะทำการแปลงสัญญาณจากโดเมนเวลา (Time-domain) ไปเป็นโดเมนความถี่ (Frequency-domain) หรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่าเป็นการหาสเปกตรัม (Spectrum) ของสัญญาณนั่นเอง บางครั้งสามารถกล่าวได้ว่าเป็นการวิเคราะห์สัญญาณโดยอาศัยฟังก์ชันพื้นฐาน (basic function) ในรูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ผลการวิเคราะห์จะออกมาในรูปของการแตกองค์ประกอบของสัญญาณใด ๆ ให้อยู่ในรูป

ของฟังก์ชันโคไซน์และไซน์ที่มีขนาดและความถี่ที่แตกต่างกันตลอดย่านความถี่ $-\infty$ ถึง ∞ ดังแสดงในสมการที่ 3.1 [3]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$



รูปที่ 3.1 แสดงการแปลงฟูเรียร์ (FFT)

ซึ่งมีสมการในเทอมของการวิเคราะห์ข้อมูลแบบสุ่ม (sampling data) ที่เรียกว่า การแปลงฟูเรียร์แบบเร็ว (Fast Fourier Transform : FFT) ดังสมการที่ 3.2 [3]

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (3.2)$$

เมื่อ $n = 1, 2, \dots, N$

ผลการวิเคราะห์สัญญาณด้วยการแปลงฟูเรียร์ได้แสดงอยู่ในรูปที่ 3.4 ซึ่งการวิเคราะห์ด้วยการแปลงฟูเรียร์จะมีแม่นยำด้านความถี่ และเหมาะสมในการวิเคราะห์สัญญาณที่มีลักษณะเป็นคาบเวลาที่แน่นอน (Stationary signal) แต่ข้อจำกัดของการแปลงฟูเรียร์คือ ในกรณีที่สัญญาณมีการ

เปลี่ยนแปลงไม่คงที่ (Non - stationary signal) เช่น สัญญาณทรานเซียนต์รูปแบบต่าง ๆ การวิเคราะห์ด้วยการแปลงฟูเรียร์จะมีความผิดพลาดเกิดขึ้นรวมทั้งข้อมูลทางด้านเวลาที่ขาดหายไป ซึ่งข้อมูลทางด้านเวลาเป็นสิ่งที่สำคัญมากในการวิเคราะห์สัญญาณในลักษณะทรานเซียนต์

3.1.2 การแปลงกาบอร์ (Gabor Transform :GT)

เป็นการแปลงสัญญาณที่ได้พัฒนาขึ้นเป็นแบบแรกเพื่อแก้ปัญหของการแปลงฟูเรียร์ โดยทำการแปลงฟูเรียร์เฉพาะช่วงเวลาและช่วงความถี่ที่กำหนดผ่านฟังก์ชันหน้าต่าง (Windows function) ซึ่งจะเป็นลักษณะของฟังก์ชันแบบเกาส์เซียน (Gaussian function) ซึ่งแสดงอยู่ในสมการที่ 3.3 [4]

$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{t^2}{2a}} \quad (3.3)$$

ซึ่งมีสมการการแปลงกาบอร์ดังนี้ [4]

$$(G_b^a f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) g_a(t-b) dt \quad (3.4)$$

จากสมการที่ 3.4 เป็นสมการของการแปลงกาบอร์จะเห็นได้ว่าการแปลงในรูปแบบนี้สามารถเลือกตำแหน่งในการวิเคราะห์ได้โดยการกำหนดพารามิเตอร์ b ซึ่งจะให้ผลของข้อมูลทางเวลา และเลือกช่วงความถี่ด้วยพารามิเตอร์ a แต่เนื่องจากการแปลงกาบอร์ให้ฟังก์ชันหน้าต่างแบบเดียว จึงอาจจะไม่เหมาะสมกับการประยุกต์ใช้งานในการวิเคราะห์สัญญาณในทุกรูปแบบได้

3.1.3 การแปลงฟูเรียร์ช่วงเวลาสั้น (Short-Time Fourier Transform :STFT)

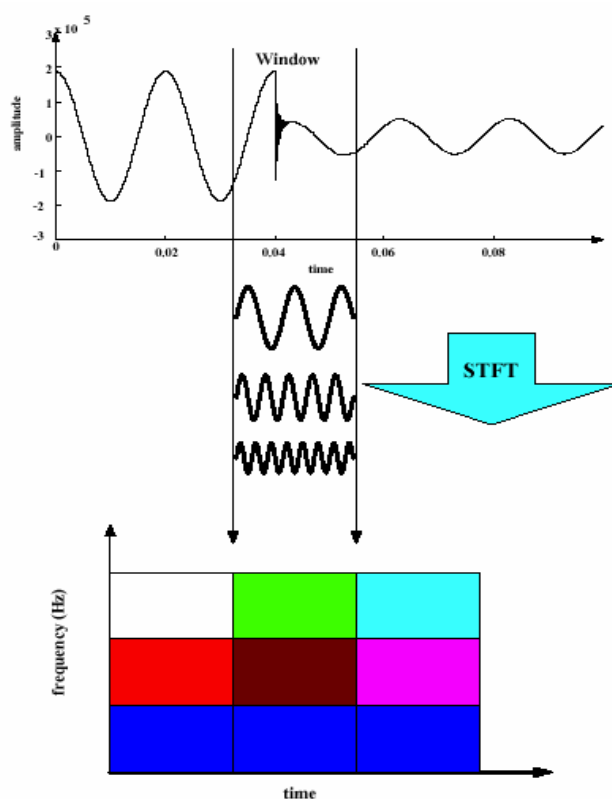
จากข้อจำกัดของการแปลงฟูเรียร์และการแปลงกาบอร์ จึงมีการพัฒนารูปแบบการวิเคราะห์สัญญาณมาสู่การแปลงฟูเรียร์ช่วงเวลาสั้น ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ที่ใช้ฟังก์ชันหน้าต่างเหมือนการแปลงกาบอร์ แต่สามารถเลือกฟังก์ชันหน้าต่างที่ใช้ได้จึงทำให้มีความยืดหยุ่นในการวิเคราะห์สัญญาณมากยิ่งขึ้น สมการการแปลงฟูเรียร์ช่วงเวลาสั้นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ 3.5 [5]

$$STFT(f, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.5)$$

เมื่อ

$w(t-\tau)$ = Window function ที่ใช้ในการวิเคราะห์

โดยที่ตำแหน่งเวลาในการวิเคราะห์ถูกกำหนดโดยค่า τ และช่วงความถี่การวิเคราะห์กำหนดด้วยความถี่หรือความกว้างของฟังก์ชันหน้าต่างนั้น ๆ ผลการวิเคราะห์จะอยู่ในรูปของการแตกองค์ประกอบสัญญาณในลักษณะการแปลงฟูเรียร์ในช่วงเวลาที่ทำกรวิเคราะห์ดังแสดงในรูปที่ 3.2

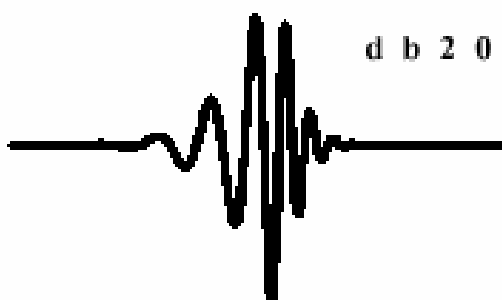


รูปที่ 3.2 แสดงการแปลงฟูเรียร์ช่วงเวลาด้าน (STFT)

สังเกตได้ว่าการแปลงกานอร์และการแปลงฟูเรียร์ช่วงเวลาด้าน มีลักษณะของช่วงเวลาการวิเคราะห์ที่คงที่ (Fixed resolution transform) ดังนั้นการใช้ช่วงการวิเคราะห์สัญญาณที่คงที่ในการวิเคราะห์สัญญาณทุก ๆ ช่วงความถี่จึงอาจไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เนื่องจากสัญญาณที่มีความถี่สูงจะมีการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วกว่าจึงควรจะใช้ช่วงเวลาที่แคบในการวิเคราะห์ ในขณะที่มีความถี่ต่ำกว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงที่ช้าจึงควรใช้ช่วงเวลาที่กว้างกว่าในการวิเคราะห์ จากเหตุผลนี้จึงได้มีการพัฒนารูปแบบการวิเคราะห์สัญญาณที่มีการปรับระดับความละเอียดในการวิเคราะห์ซึ่งเรียกว่า "การแปลงเวฟเลต" ซึ่งความหมายและรูปแบบทางทฤษฎีของเวฟเลตนั้นได้แสดงอยู่ในหัวข้อถัดไป

3.2 การแปลงเวฟเลต (Wavelet Transform : WT) [6]

การแปลงเวฟเลตจะใช้อธิบายโครงสร้างของระบบสัญญาณที่ประกอบด้วยกลุ่มของสัญญาณเฉพาะมารวมกันเป็นสัญญาณหรือระบบนั้น ๆ โดยสัญญาณเฉพาะนี้จะเป็นคลื่นเล็ก ๆ ที่เรียกว่า "เวฟเลต" ลักษณะของเวฟเลตจะเป็นคลื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง (Oscillatory) และขนาดของคลื่นจะลดลงสู่ศูนย์อย่างรวดเร็วทั้งสองด้าน ดังรูปที่ 3.3 ซึ่งเป็นเวฟเลตชนิดหนึ่งที่เรียกว่าเวฟเลตแบบ Daubechies20

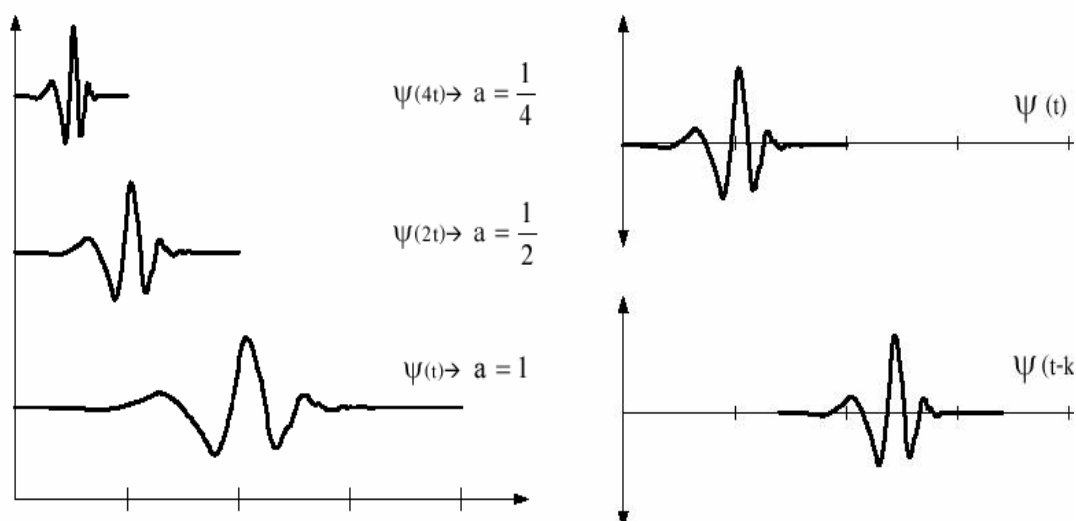


รูปที่ 3.3 ลักษณะของเวฟเลตแม่ชนิด Daubechies20

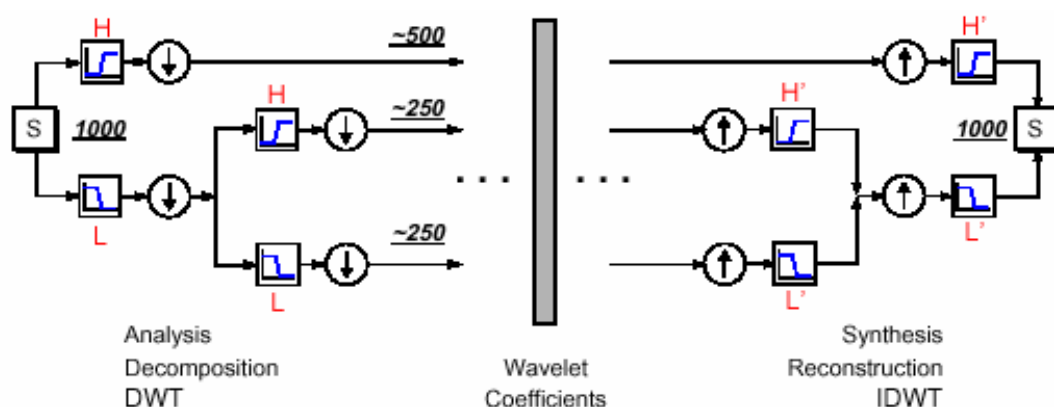
การนำเวฟเลตหลาย ๆ อันมารวมกันเป็นกลุ่มเพื่อใช้อธิบายโครงสร้างของสัญญาณใด ๆ โดยที่คลื่นเวฟเลตแต่ละตัวจะมีโครงสร้างมาจากฟังก์ชันเดียวกันซึ่งฟังก์ชันนี้จะเป็นเวฟเลตต้นกำเนิดที่เรียกว่า "เวฟเลตแม่" (Mother Wavelets) คลื่นเวฟเลตแต่ละอันจะอยู่ในเซตของเวฟเลตนี้โดยแต่ละคลื่นจะเกิดจากการสเกล (Scaling : "a") และการเลื่อนตำแหน่ง (Translation : "b") ดังนั้นถ้าให้ $\psi(t)$ เป็นฟังก์ชันเวฟเลตแม่ สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปของเวฟเลตที่ตำแหน่ง "a", "b" ใด ๆ ที่สัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.6)$$

$\psi(t)$ จะเป็นฟังก์ชันเวฟเลตแม่ที่ถูกเลื่อนตำแหน่งและถูกสเกลโดยพารามิเตอร์ "a" และ "b" ตามลำดับ โดยที่ช่วงเวลาและความถี่ในการแปลงจะสัมพันธ์กันและเพื่อให้เวฟเลตที่ถูกสเกลไปแล้วมีพลังงานเท่ากับเวฟเลตแม่จึงต้องทำการนอร์มัลไลซ์ด้วย $1/\sqrt{a}$ เสมอ



รูปที่ 3.4 แสดงลักษณะของเวฟเลตแม่ที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่งไปที่ค่า a, b ต่าง ๆ กัน



รูปที่ 3.5 ลักษณะของการแตกกระจายสัญญาณและการรวมกลับสัญญาณของเวฟเลต

ทฤษฎีเวฟเลตจะใช้ธิบายสิ่งใดสิ่งหนึ่งเหมือนการแตกสิ่งนั้นออกเป็นส่วนประกอบเล็ก ๆ ที่สัมพันธ์กันโดยที่ชิ้นส่วนเหล่านี้จะอยู่ในรูปของเวฟเลตที่ถูกสเกลและเลื่อนตำแหน่ง ดังนั้นจึงเปรียบเสมือนว่าสัญญาณใด ๆ สามารถสร้างขึ้นมาได้โดยมีฟังก์ชันพื้นฐาน (Basis function) การแตกกระจายเวฟเลต (Wavelet Decomposition) ก็คือการทำการแปลงเวฟเลต (Wavelet Transform: WT) นั่นเอง ในทำนองเดียวกันการรวมกลับเวฟเลต (Wavelet Reconstruction) จะเป็นการแปลงกลับเวฟเลต (Inverse Wavelet Transform: IWT) ซึ่งเป็นการนำส่วนประกอบย่อย ๆ เหล่านี้มารวมกันเพื่อประกอบเป็นสัญญาณเดิม ดังในรูปที่ 3.5

3.3 การแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง (Continuous Wavelet Transform : CWT)

รูปแบบของการแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่องนั้นมีลักษณะการวิเคราะห์สัญญาณโดยอาศัยการปรับเปลี่ยนคุณสมบัติของเวฟเลตแม่ที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ ช่วงเวลาในการวิเคราะห์ที่แคบในการวิเคราะห์องค์ประกอบความถี่สูง และช่วงในการวิเคราะห์ที่กว้างในการวิเคราะห์องค์ประกอบความถี่ต่ำ ซึ่งก็เป็นการปรับระดับความละเอียดในการวิเคราะห์อย่างต่อเนื่องให้เหมาะสมกับความถี่ที่ทำการวิเคราะห์ซึ่งสามารถแสดงสมการสำหรับการวิเคราะห์ได้ดังต่อไปนี้[7]

$$CWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.7)$$

เมื่อ

$f(t)$ = สัญญาณที่ทำการแปลง

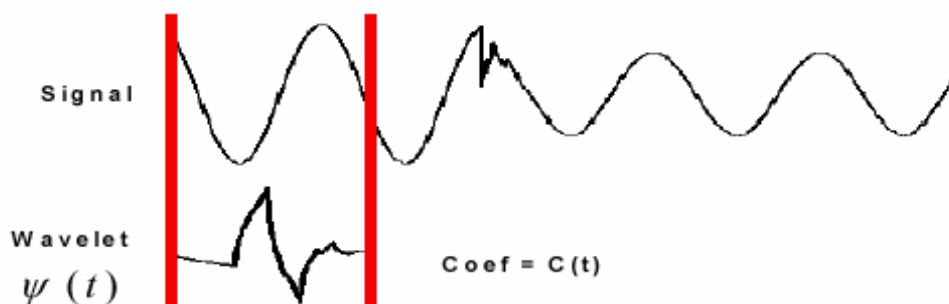
$\psi(t)$ = เวฟเลตแม่

a = แฟกเตอร์สเกล (scale)

b = แฟกเตอร์การเลื่อนตำแหน่ง (shifting)

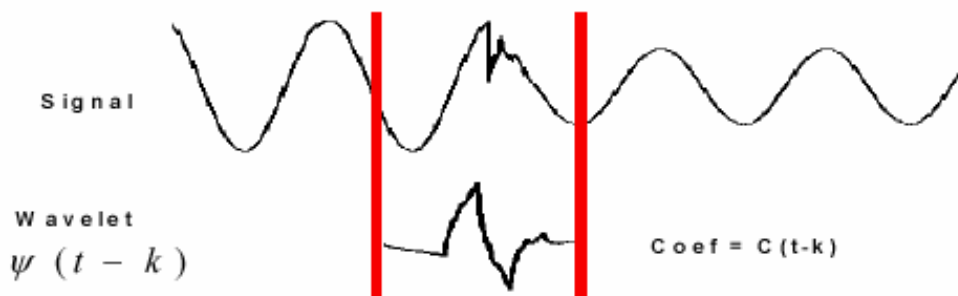
จากสมการที่ 3.7 เมื่อพิจารณาเทอมของ $\psi(t)$ ซึ่งเป็นเทอมของเวฟเลตแม่ที่เทียบได้กับเทอมของฟังก์ชันหน้าต่างในการแปลงฟูเรียร์ช่วงเวลานั้นเอง แต่เมื่อพิจารณาเทอมของ $\psi(t)$ จะมีการเปลี่ยนคุณสมบัติไปตามพารามิเตอร์ a และ b ซึ่งสามารถแสดงลักษณะในการวิเคราะห์ได้ดังนี้ [8]

1. นำเวฟเลตแม่มาเปรียบเทียบกับส่วนแรกซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของสัญญาณในสเกลแรก
2. คำนวณสัมประสิทธิ์ (C) ซึ่งผลการวิเคราะห์จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวฟเลตแม่ในสเกลแรกกับสัญญาณในส่วนแรก ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์นี้ขึ้นอยู่กับทางเลือกใช้รูปร่างของเวฟเลตแม่ด้วย



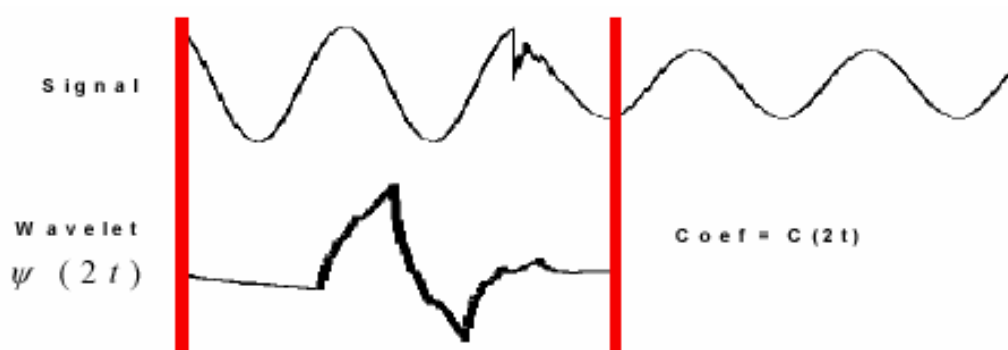
รูปที่ 3.6 แสดงขั้นตอนที่ 1 และ 2 ของการแปลงเวฟเลต

3. เลื่อนตำแหน่งการวิเคราะห์ไปทางขวาและทำซ้ำในขั้นตอนที่ 1 และ 2 จนกระทั่งครอบคลุมช่วงสัญญาณทั้งหมด ซึ่งจากขั้นตอนที่ 1 – 3 นี้เป็นการแปลงเวฟเลตตลอดช่วงสัญญาณในสเกลแรก



รูปที่ 3.7 แสดงขั้นตอนที่ 3 ของการแปลงเวฟเลต

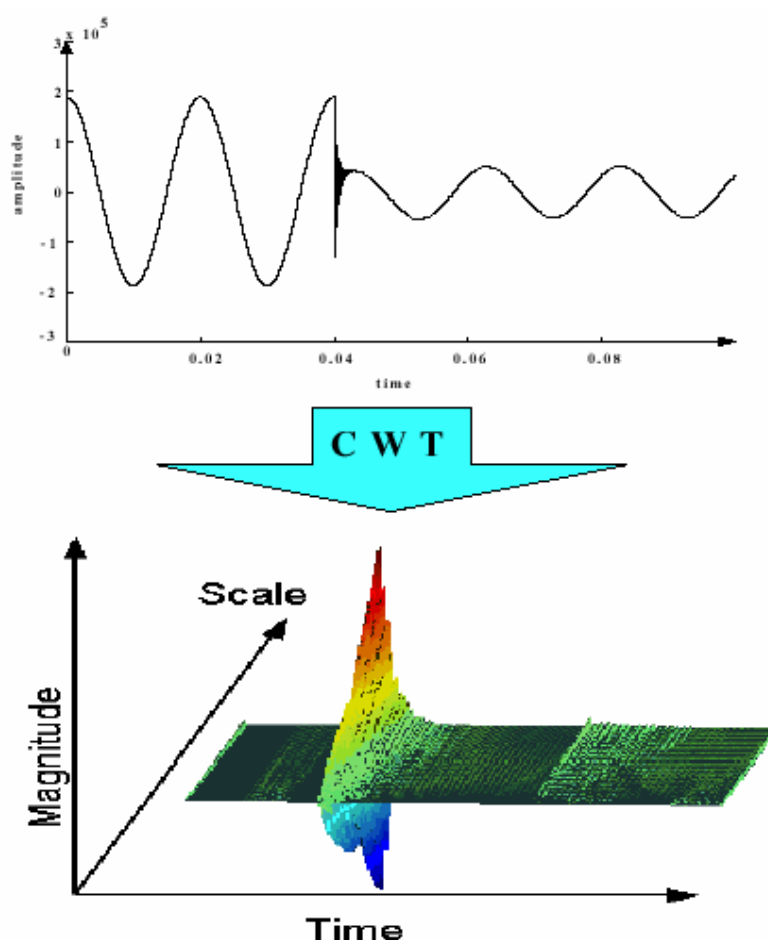
4. เปลี่ยนสเกลในการวิเคราะห์โดยการขยายสเกลและทำตามขั้นตอนที่ 1 – 3 ใหม่



รูปที่ 3.8 แสดงขั้นตอนที่ 4 จนกระทั่งครบทุกสเกล

5. ทำตามขั้นตอนที่ 1 – 4 จนกระทั่งครบทุกสเกล

จากขั้นตอนทั้งหมดผลการวิเคราะห์จะออกมาในรูปแบบสัณฐานภาพที่ได้การวิเคราะห์ของแต่ละสเกลในแต่ละส่วนของสัญญาณ และเนื่องจากการแปลงเป็นไปในลักษณะที่มีการเปลี่ยนแปลงสเกลและการเลื่อนตำแหน่งในการวิเคราะห์อย่างต่อเนื่อง เมื่อนำผลการวิเคราะห์ทั้งหมดมาแสดงรูปแบบความสัมพันธ์ของเวลาและความถี่ (Time - Scale) ได้ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 แสดงการแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่อง (CWT)

จากรูปที่ 3.9 แสดงให้เห็นว่าผลการวิเคราะห์เมื่อนำมาเขียนเป็นกราฟจะออกมาในรูปของพื้นผิวที่ต่อเนื่องกันซึ่งการปรับเปลี่ยนสเกลในการวิเคราะห์ที่ต่อเนื่อง ซึ่งจะทำให้ความแม่นยำทางด้านเวลาและความถี่ที่ดีแต่จะมีข้อเสียคือ ในการนำไปใช้งานที่ต้องการความรวดเร็วในการวิเคราะห์การแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่องอาจไม่เหมาะสม เนื่องจากต้องใช้เวลาในการวิเคราะห์ที่ค่อนข้างมากและบางครั้งให้ข้อมูลที่ซ้ำซ้อนมากเกินไปจนเกิดความจำเป็น

3.4 การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย (Discrete Wavelet Transform : DWT) [6]

จากข้อจำกัดของการแปลงเวฟเลตแบบต่อเนื่องจึงมีการพัฒนารูปแบบการแปลงเวฟเลตมาสู่การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย ที่มีลักษณะการวิเคราะห์โดยเปลี่ยนสเกลและการเลื่อนตำแหน่งในลักษณะเป็นช่วง ๆ ไม่ต่อเนื่องกัน และก่อนที่จะกล่าวถึงรายละเอียดของการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยจำเป็นต้องกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการอธิบายก่อน

3.4.1 การวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด (Multi-Resolution Analysis : MRA)

การวิเคราะห์สัญญาณแบบหลายระดับความละเอียด (Multiresolution Analysis : MRA) จะเป็นการวิเคราะห์สัญญาณที่สามารถเลือกระดับความละเอียด a ซึ่งมี b หลาย ๆ ตำแหน่งมารวมกันเกิดเป็นสัญญาณที่ระดับความละเอียดที่เลือกไว้และเมื่อนำสัญญาณที่ทุกระดับความละเอียดมารวมกันจะเกิดเป็นสัญญาณอินพุตจริง

ก่อนที่จะศึกษาถึงการวิเคราะห์สัญญาณแบบ MRA จะขออธิบายถึงทฤษฎีพื้นฐานของสเปซเวกเตอร์ (Vector space) ก่อนเนื่องจากมีความเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แบบ MRA

สเปซของเวกเตอร์ในการวิเคราะห์สัญญาณคือ สเปซหรือปริภูมิของสัญญาณใด ๆ ที่เกิดจากการรวมกันของสัญญาณพื้นฐานย่อย ๆ ที่เรียกว่า "ฟังก์ชันพื้นฐาน" Basis function (b.f) ถ้ากำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $\hat{i}, \hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสเปซเวกเตอร์ V เสมอ ดังนั้นถ้าเวกเตอร์ใดประกอบขึ้นจากหลายเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจะได้ว่าเวกเตอร์นั้นยังคงอยู่ในสเปซเวกเตอร์นี้ ดังนั้น $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} + \dots \in V$ โดยที่เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}, \hat{j}$ จะเป็นลักษณะเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) ซึ่งกันและกัน ถ้าพิจารณาในลักษณะของสัญญาณอาจมองได้ว่า $\hat{i}, \hat{j}$ คือฟังก์ชันพื้นฐานที่เป็นสัญญาณเล็ก ๆ ที่นำมาประกอบกันเป็นสัญญาณใด ๆ

สมมุติให้ V^j เป็นสเปซเวกเตอร์ที่มี j แสดงถึงระดับความละเอียดและจำนวนของฟังก์ชันพื้นฐานที่ประกอบขึ้นเป็นฟังก์ชันนั้น ถ้า j มีค่าสูงขึ้นก็แสดงว่าที่ระดับความละเอียดสูงขึ้นจะมีจำนวนฟังก์ชันพื้นฐานมากขึ้นทำให้สัญญาณที่เกิดจากการประกอบกันจากฟังก์ชันพื้นฐานมีความละเอียดมากขึ้นด้วย ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า j เป็นค่าแสดงถึงระดับความละเอียดของสัญญาณนั่นเอง จากข้อกำหนดเหล่านี้สามารถสรุปเป็นลักษณะสมบัติของการวิเคราะห์สัญญาณที่ระดับความละเอียดต่าง ๆ ได้ดังนี้

- 1) $V^{-\infty} \dots \subset V^{-1} \subset V^1 \dots \subset V^{\infty}$
- 2) $\text{Close}_{L^2} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j \right) = L^2(\mathbb{R})$; $\mathbb{R}$ = เซตของจำนวนจริง
- 3) $\left(\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j \right) = \{0\}$
- 4) $V^j + W^j = V^{j+1}$; $j \in \mathbb{Z}; \mathbb{Z} :=$ เซตของจำนวนเต็ม
- 5) $f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1}$; $j \in \mathbb{Z}$

จากการที่ฟังก์ชันพื้นฐานประกอบกันเป็นสัญญาณการประมาณที่ระดับความละเอียด j ภายในสเปซ V^j จะเรียก ฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านี้ว่า ฟังก์ชันสเกลลิ่ง (Scaling function : $\phi(t)$) สัญญาณเหล่านี้จะเกิดที่ตำแหน่งเวลาต่าง ๆ กันของสเปซและมีความถี่เท่ากันภายในสเปซเดียวกัน

ฟังก์ชันสเกลลิงที่ระดับสเปซสูง (ระดับความละเอียดสูง) จะมีความถี่สูงและที่ระดับต่ำกว่าจะมีความถี่ต่ำกว่า ดังนั้นความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันสเกลลิงของแต่ละสเปซจะเป็นดังนี้

$$f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1} \quad ; j \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

จากสมการที่ 3.8 ทำให้สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสเกลลิงภายในสเปซใด ๆ ได้ดังนี้

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad ; j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

จากสมการที่ 3.9 จะพบว่าระดับความละเอียดต่ำลงมาหนึ่งระดับ ฟังก์ชันพื้นฐานจะมีความถี่ลดลงมาครึ่งละสองเท่า อาศัยลักษณะคุณสมบัติ MRA จะทำให้สามารถทำการประมาณสัญญาณ $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ไปอยู่ในสเปซที่ระดับความละเอียด j ใดๆ ก็ได้ดังนี้

$$f_j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) \quad (3.10)$$

โดยที่ c_k^j เป็นสัมประสิทธิ์หรือนำหนักที่คูณกับฟังก์ชันสเกลลิงที่ตำแหน่ง k ใดๆ แล้วประกอบขึ้นเป็น $f(t)$ ที่ระดับความละเอียด j นั้นๆ

จากคุณสมบัติข้อ 4 ของ MRA การวิเคราะห์สัญญาณที่ระดับความละเอียดต่ำลงมาจะทำให้พลังงานหรือสัญญาณบางส่วนหายไปอยู่ในสเปซอีกอันหนึ่งซึ่งจะเรียกว่า "สเปซของเวกเตอร์เวฟเลต" (Wavelet vector space : W^j) สเปซชนิดนี้จะคล้ายกับสเปซของเวกเตอร์ ดังนั้นสัญญาณภายใน W^j จะประกอบด้วย ฟังก์ชันพื้นฐานเช่นเดียวกันจะเรียกว่า "ฟังก์ชันเวฟเลต" (Wavelet function : $\psi(t)$) ดังนั้นสามารถเขียนสมการฟังก์ชันเวฟเลตที่ระดับความละเอียดใด ๆ ได้ดังนี้

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad ; j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

จากสมการที่ 3.6 ซึ่งมีลักษณะเป็นสัญญาณที่มีการเลื่อนตำแหน่งและเปลี่ยนความถี่อย่างต่อเนื่องจะเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันเวฟเลต $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ ที่มีการเลื่อนตำแหน่งและเปลี่ยนความถี่แบบเต็มหน่วยโดยที่ $a = 2^{-j}, b = 2^{-j} k$

ถ้ากำหนดให้ $g_j(t)$ เป็นสัญญาณที่เกิดจากฟังก์ชันพื้นฐานและ $\psi_{j,k}(t)$ ภายในสเปซเดียวกันมารวมกันเป็นสัญญาณใด ๆ จะได้ว่า

$$g_j(t) = \sum_k d_k^j \psi_{j,k}(t) \quad (3.12)$$

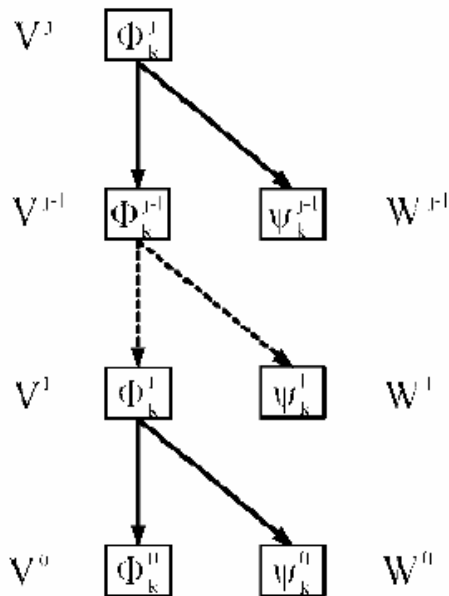
โดยที่ d_k^j เป็นสัมประสิทธิ์หรือค่าน้ำหนักที่คูณกับฟังก์ชันเวฟเล็ดที่ตำแหน่งนั้นๆ เพื่อเกิดเป็นสัญญาณ $g_j(t)$ ดังนั้นจากความสัมพันธ์ $V^j + W^j = V^{j+1}$ และจากสมการที่ 3.10 และ 3.11 จะได้ว่า

$$f_{j+1} = f_j + g_j \quad (3.13)$$

สมมติให้ $f(t) \in V^{j+1}$ จะสามารถแตกกระจายให้ $f(t)$ ให้มีความละเอียดน้อยลงได้จากสมการ $V^j + W^j = V^{j+1}$ ซึ่งในขณะเดียวกัน V^j สามารถแตกต่อไปได้เรื่อยๆ จนกระทั่ง $j = 0$ ดังนั้นจะได้เป็นความสัมพันธ์ว่า

$$V^{j+1} = V^0 + W^0 + W^1 + \dots + W^j \quad (3.14)$$

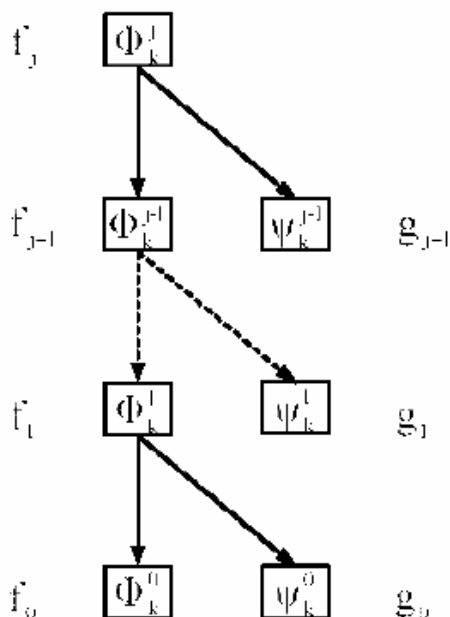
ในทำนองเดียวกัน f_{j+1} ก็สามารถแตกกระจายเป็น f_j และ g_j ซึ่งสามารถแสดงเป็นภาพการแตกกระจายสเปซและสัญญาณได้ดังรูปที่ 3.10 และ 3.11



รูปที่ 3.10 ลักษณะการกระจาย (Decomposition) ของสเปซของเวกเตอร์

f และ g ที่ลดระดับความละเอียดลงมาจะมีความถี่ของฟังก์ชันพื้นฐานลดลงครึ่งละสองเท่าเสมอและเราสามารถแจกแจงสัญญาณ $f(t)$ ที่อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันสเกลลิงและฟังก์ชันเวฟเลตได้ดังนี้

$$f(t) = f_j + g_j + g_{j+1} + g_{j+2} + \dots + g_\infty \quad (3.15)$$



รูปที่ 3.11 ลักษณะการกระจาย (Decomposition) สัญญาณไปยังระดับความละเอียดต่าง ๆ

รูปแบบการแตกกระจายสัญญาณ $f(t)$ ใดๆ ในสเปซ V^0 ไปจนถึงระดับความละเอียดที่ j ในรูปของสัมประสิทธิ์ $c_j(m)$ และ $d_j(m)$ นี้เรียกว่า "การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย (Discrete Wavelet Transform : DWT)" โดยมีสมการที่ใช้อธิบายดังต่อไปนี้ [9]

$$DWT(m, n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) dt \quad (3.16)$$

โดยที่ a^m คือ การสเกล

$nb_0 a_0^m$ คือ การเลื่อนตำแหน่ง

m, n คือ เลขจำนวนเต็ม

และในทางปฏิบัติการนำมาใช้งานจริง สัญญาณที่เข้ามาจะอยู่ในรูปของการสุ่ม (sample) ดังนั้นสมการที่ (3.15) จึงพัฒนามาสู่สมการที่ (3.16) [9]

$$DWT(m, n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \sum_k f(k) \psi\left[\frac{n - kb_0 a_0^m}{a_0^m}\right] \quad (3.17)$$

เมื่อ m, n, k เป็นเลขจำนวนเต็มโดยที่

n คือ จำนวนข้อมูล

m คือ เลขแสดงการเปลี่ยนแปลงของสเกล

k คือ เลขแสดงการเลื่อนตำแหน่ง

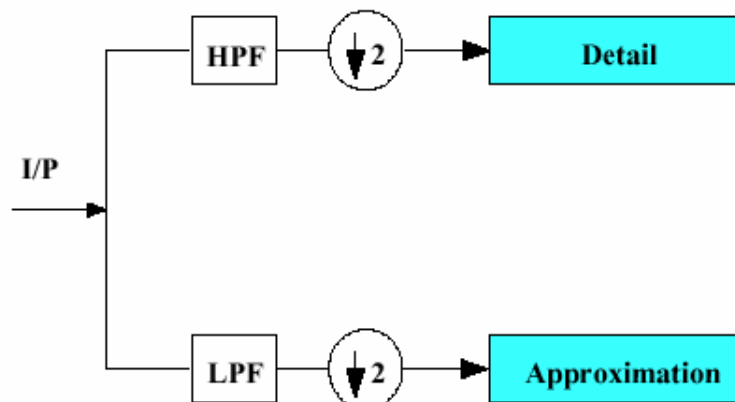
เมื่อพิจารณาในรูปแบบของการวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดแล้วโดยมีการเปลี่ยนแปลงสเกลในการวิเคราะห์ให้ลดลงครึ่งละ 2 เท่า ($a_0 = 2; b_0 = 1$) แล้วจะได้รูปแบบการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย ซึ่งมีชื่อเรียกเฉพาะว่า dyadic wavelet transform ดังสมการต่อไปนี้ [10]

$$DWT(m, n) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_k f(k) \psi\left[\frac{n - k2^m}{2^m}\right] \quad (3.18)$$

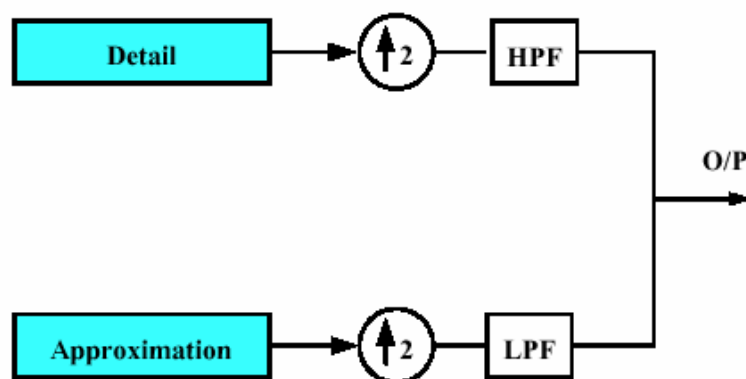
ซึ่งสามารถอธิบายหลักการทำงานได้โดยอาศัยหลักการวิเคราะห์ของฟิลเตอร์แบงก์ดังนี้

3.4.2 การวิเคราะห์ด้วยตัวกรองสัญญาณ (Filter Bank Analysis)

ขบวนการแปลงเวฟเลตจะมีลักษณะคล้ายกับขบวนการออกเทพฟิลเตอร์แบงก์ (Octave filter banks) เนื่องจากการพิจารณาสัญญาณผ่านฟังก์ชันหน้าต่าง (window function) ที่สามารถแปลงความถี่ในอัตราครึ่งละสองเท่าซึ่งเปรียบเสมือนกับการนำสัญญาณอินพุตผ่านวงจรกรองความถี่ที่มีแบนวิธที่มีอัตราการลดลงสองเท่าเหมือนกับแบนวิธของฟังก์ชันหน้าต่างในขณะนั้นนั่นเอง ดังนั้นจะสามารถนำเอาหลักการของฟิลเตอร์แบงก์มาใช้ในการสร้างการแปลงเวฟเลตในทางปฏิบัติได้ ก่อนที่จะอธิบายการสร้างการแปลงเวฟเลตในลักษณะฟิลเตอร์แบงก์จะขออธิบายหลักการพื้นฐานของฟิลเตอร์แบงก์ก่อน

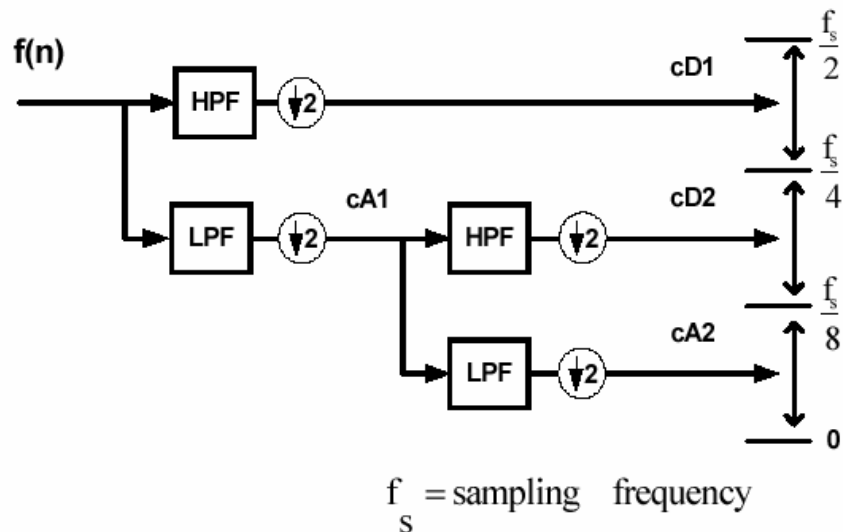


รูปที่ 3.12 แสดงการแปลงแยกสัญญาณด้วยฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณ



รูปที่ 3.13 แสดงการแปลงกลับสัญญาณด้วยฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณ

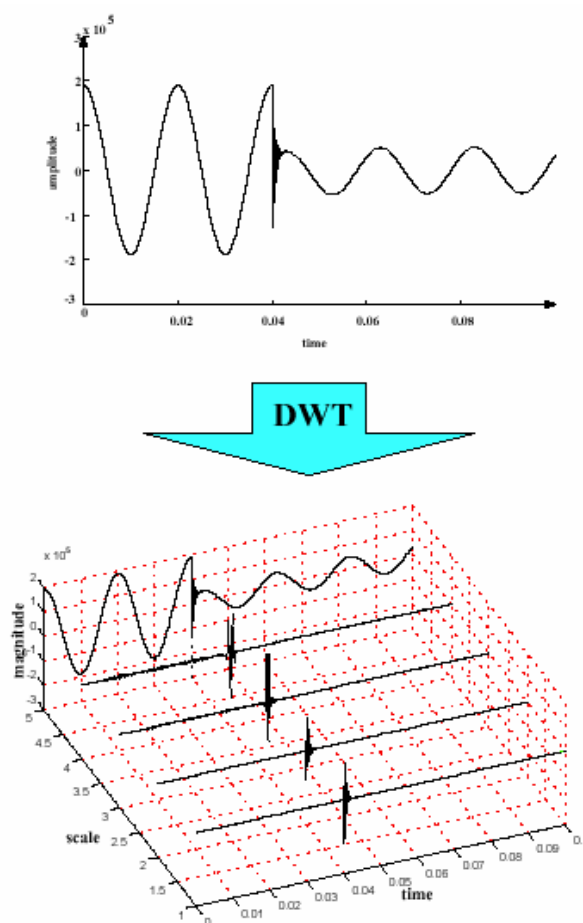
ฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณ (two channel filter banks) เป็นการแยกสัญญาณอินพุตออกเป็นสองส่วนโดยแบ่งเป็นส่วนของความถี่ต่ำและส่วนของความถี่สูง ดังนั้นฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณจึงประกอบด้วยส่วนที่เป็น ตัวกรองความถี่ต่ำ (low pass filter : L) และ ตัวกรองความถี่สูง (high pass filter : H) ดังรูปที่ 3.12 ซึ่งเป็นลักษณะของการวิเคราะห์ ฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณ (two – channel analysis filter banks) และเป็นโครงสร้างที่กลับกันกับการสังเคราะห์การสร้างกลับฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณ (reconstruction two – channel synthesis filter banks) ดังรูปที่ 3.13 โดยที่ตัวกรองการกระจาย (Decomposition) ความถี่ต่ำและความถี่สูง คือ L และ H กับตัวกรองการสร้างกลับ (Reconstruction) ความถี่ต่ำและความถี่สูงคือ L', H' มีความสัมพันธ์กันในลักษณะที่เรียกว่า "Quadrature mirror filters"



รูปที่ 3.14 แสดงลักษณะการแปลงเวฟเลตโดยใช้หลักการวิเคราะห์แบบออกเทฟฟิลเตอร์แบงก์ [10]

ลักษณะของการวิเคราะห์ออกเทฟฟิลเตอร์แบงก์ (Octave analysis filter banks) จะเป็นโครงสร้างแบบต้นไม้ (Tree Structure) ซึ่งเป็นการสร้างเอาฟิลเตอร์แบงก์แบบสองช่องสัญญาณมาต่อเรียงกัน โดยใช้สัญญาณเอาต์พุตในส่วนที่เป็นความถี่ต่ำมาทำการแยกแบนด์ความถี่ออกอีกครั้งหนึ่ง ในกรณีที่ทำการแปลงเวฟเลตซ้ำในแนวของส่วนความถี่ต่ำจะเป็นลักษณะของ Dyadic tree structure ดังรูปที่ 3.14 ซึ่งโครงสร้างในรูปนี้จะเป็นการแปลงแบบเต็มหน่วย (Discrete Wavelet Transform : DWT)

จากรูปที่ 3.14 ซึ่งเป็นลักษณะของการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยในลักษณะของ dyadic tree structure โดยมีสัญญาณอินพุตซึ่งเป็นสัญญาณที่ถูกสุ่มด้วยความถี่การสุ่ม $= f_s$ (sampling rate) จะถูกวิเคราะห์ด้วยฟิลเตอร์ 2 ช่องสัญญาณในสเกลที่ 1 (2^1) ซึ่งสัญญาณจะถูกแยกออกเป็น 2 ช่วงความถี่ คือ ส่วนความถี่สูงหรือ detail 1 มีความถี่อยู่ในช่วง $\frac{f_s}{2} - \frac{f_s}{4}$ Hz และความถี่ต่ำ หรือ Approximation 1 มีความถี่ในช่วง $\frac{f_s}{4} - 0$ Hz และในการวิเคราะห์ในสเกลที่ 2 (2^2) ก็ทำได้โดยการนำเอาสัญญาณที่ได้มาวิเคราะห์ต่อจาก Approximation 1 ซึ่งผลการวิเคราะห์จะออกมาเป็นส่วนความถี่สูงสเกลที่ 2 หรือ detail 2 ซึ่งมีความถี่ในช่วง $\frac{f_s}{4} - \frac{f_s}{8}$ Hz และส่วนความถี่ต่ำสเกลที่ 2 หรือ Approximation 2 มีความถี่ในช่วง $\frac{f_s}{8} - 0$ Hz ถ้าทำการวิเคราะห์ต่อในสเกลที่ 3 ก็สามารถทำซ้ำในลักษณะเดิม ในทางกลับกันก็สามารถที่จะรวมสัญญาณที่ทำการกระจายในหลายๆ ช่วงความถี่ให้กลับมาเป็นสัญญาณเดิมได้ ซึ่งผลการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วยได้แสดงอยู่ในรูปที่ 3.15



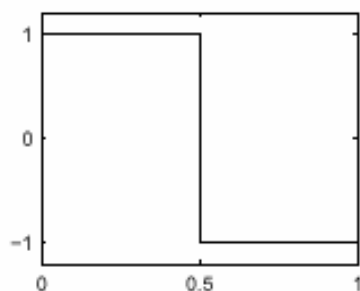
รูปที่ 3.15 แสดงการแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย (DWT) ในสเกลที่ 1-4

3.5 เวฟเลตแม่ (Mother wavelet) [8]

ในการวิเคราะห์สัญญาณใด ๆ ก็ตามนอกจากการเลือกรูปแบบในการวิเคราะห์ที่เหมาะสมแล้วยังมีความจำเป็นที่ต้องเลือกลักษณะของตัวกรองนั้น ๆ ให้เหมาะสมด้วย สำหรับการแปลงเวฟเลตนั้นตัวกรองสัญญาณที่ใช้คือเวฟเลตแม่นั้นเอง ซึ่งจะมีอยู่ด้วยกันหลายรูปแบบและแต่ละแบบยังมีขนาดย่อย ๆ ลงไปอีก และเนื่องจากรูปแบบของเวฟเลตแม่ที่หลากหลายนี้เองจึงทำให้การแปลงเวฟเลตมีความยืดหยุ่นและสามารถนำไปประยุกต์ใช้งาน โดยเลือกเวฟเลตแม่ให้เหมาะสมกับสัญญาณที่ทำการวิเคราะห์ ซึ่งจะแสดงเวฟเลตแม่ดังต่อไปนี้

3.5.1 Haar Wavelet

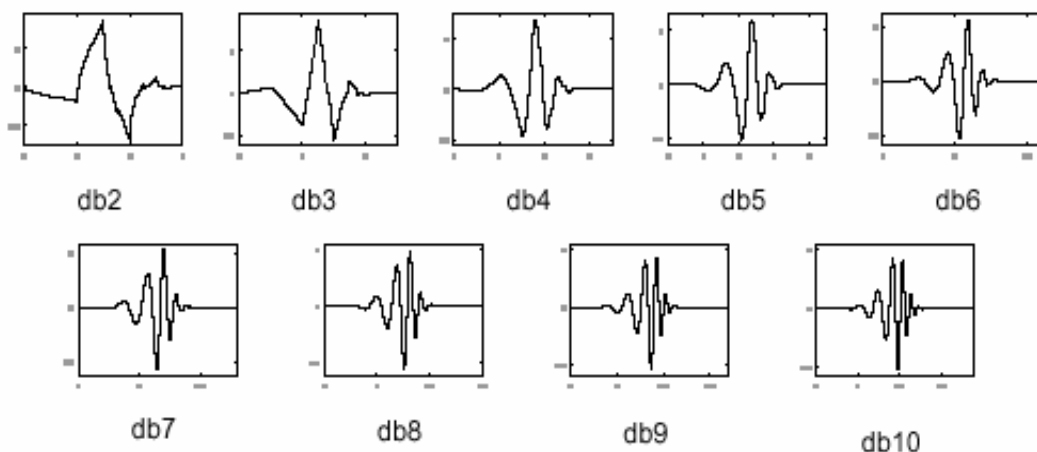
เวฟเลต Haar เป็นเวฟเลตเป็นเวฟเลตชนิดแรกๆ ที่เริ่มต้นใช้กันและง่ายที่สุด เวฟเลตชนิดนี้เป็นชนิดที่ไม่ต่อเนื่องกันและมีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชันขั้นบันได ดังแสดงในรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 แสดงลักษณะของ Haar Wavelet

3.5.2 Daubechies Wavelet

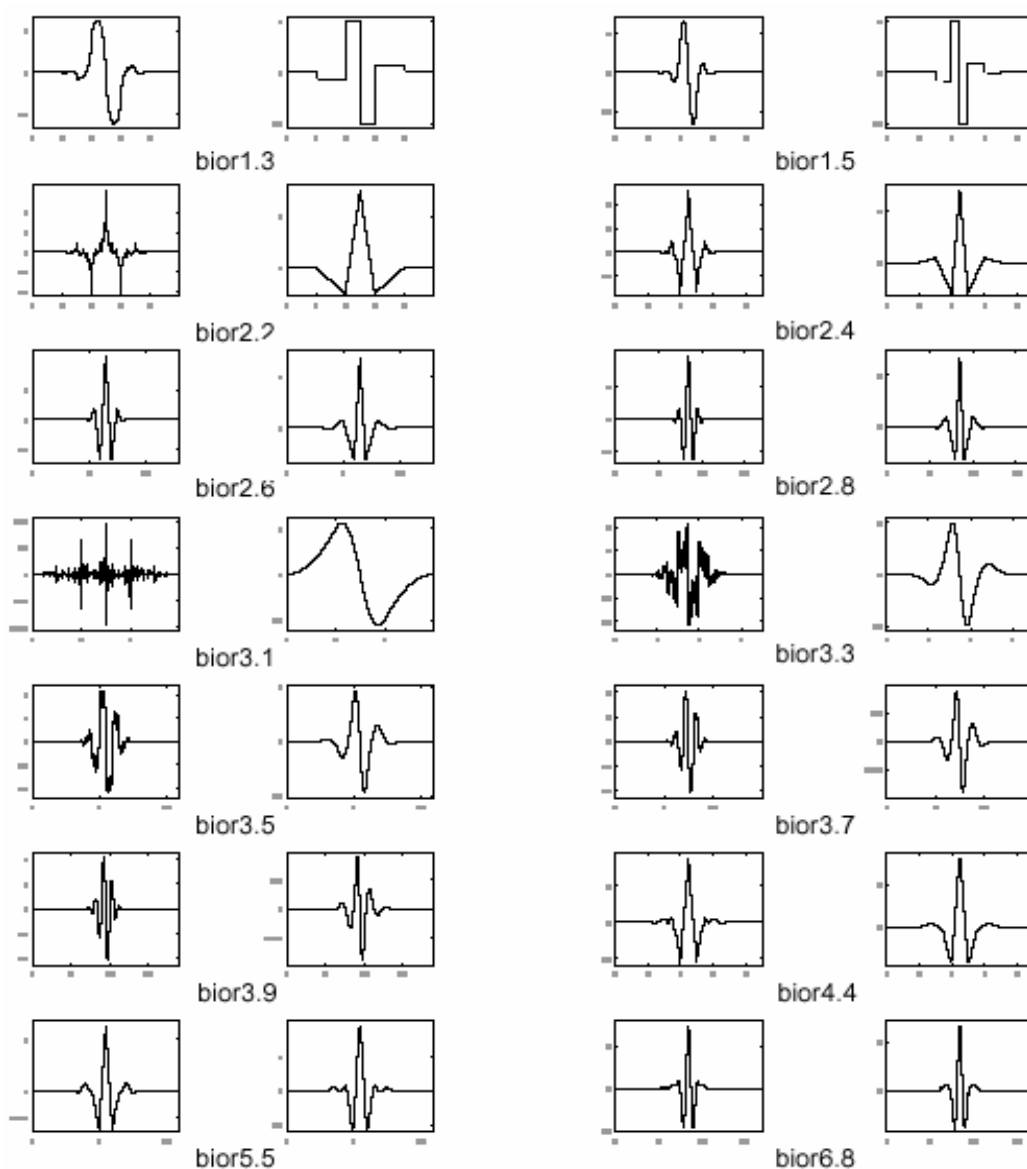
Ingrid Daubechies เป็นนักวิจัยทางด้านเวฟเลตหนึ่งคนสำคัญของโลกที่ได้ค้นพบสิ่งที่เรียกว่า "ขอบเขตที่แน่นอนของเวฟเลตเชิงเส้นตั้งฉากปกติ" (compactly-supported orthonormal wavelet) เป็นการสร้างขึ้นเพื่อวิเคราะห์เวฟเลตที่ไม่ต่อเนื่องในทางปฏิบัติ โดยใช้ชื่อเวฟเลตตระกูลนี้ว่า "Daubechies" ซึ่งเขียนในรูป dbN โดยที่ N คือ การแสดงถึงลำดับ (order) หรือค่าสัมประสิทธิ์ตัวกรองนั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 แสดงลักษณะของ Daubechies Wavelet

3.5.3 Biorthogonal Wavelet

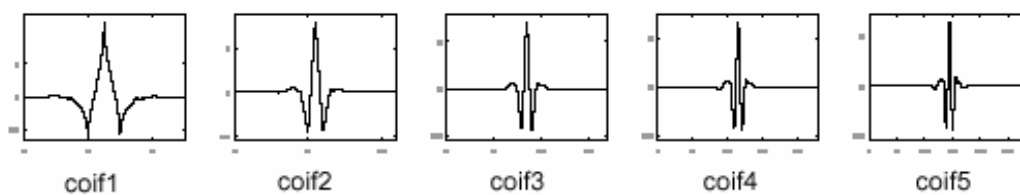
เวฟเลตตระกูลนี้แสดงคุณสมบัติของเฟสเชิงเส้น ซึ่งใช้ในการฟื้นฟูสัญญาณและภาพ โดยใช้เวฟเลต 2 ตัว ตัวหนึ่งสำหรับแยกตัวประกอบ และอีกตัวหนึ่งสำหรับการสร้างใหม่แทนที่อีกตัวหนึ่งที่เหมือนกัน ที่ได้รับความสนใจในคุณสมบัติ ดังแสดงในรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 แสดงลักษณะของ Biorthogonal Wavelet

3.5.4 Coiflets Wavelet

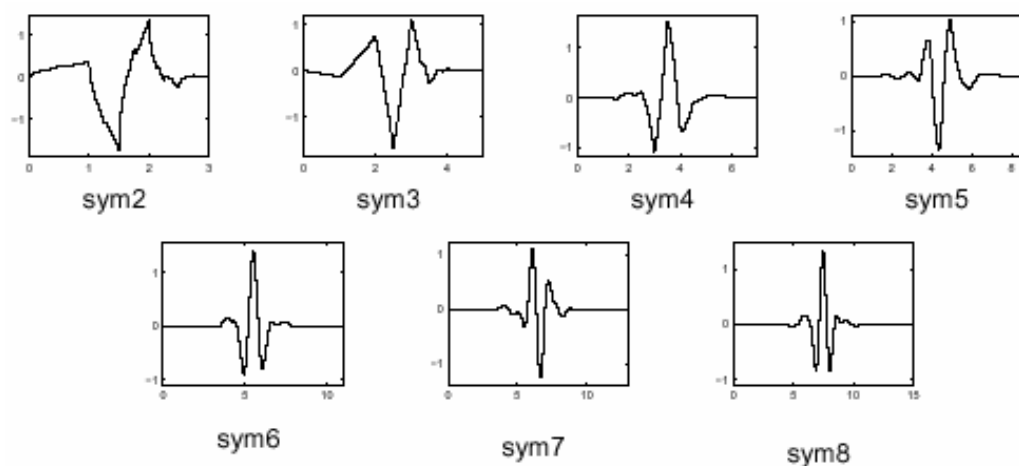
เวฟเลตชนิดนี้ถูกสร้างขึ้นโดย I. Daubechies โดยความต้องการของ R. Coifman เวฟเลตชนิดนี้จะมีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะเกือบไม่สมมาตร (Nearly Asymmetric) ดังแสดงในรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 แสดงลักษณะของ Coiflets Wavelet

3.5.5 Symlets Wavelet

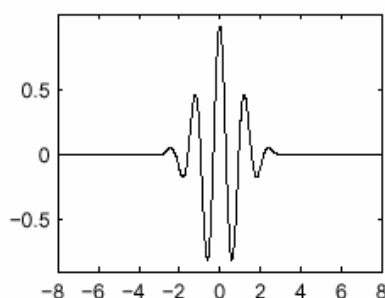
เวฟเลตชนิด Symlets จะมีสัดส่วนที่สมมาตรเกือบทั้งหมด ซึ่งเวฟเลตนี้ถูกนำเสนอโดย I.Daubechies ได้ปรับปรุงมาจากเวฟเลตตระกูล db ซึ่งคุณสมบัติของเวฟเลตทั้งสองตระกูลนี้มีความคล้ายคลึงกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.20



รูปที่ 3.20 แสดงลักษณะของ Symlets Wavelet

3.5.6 Morlet Wavelet

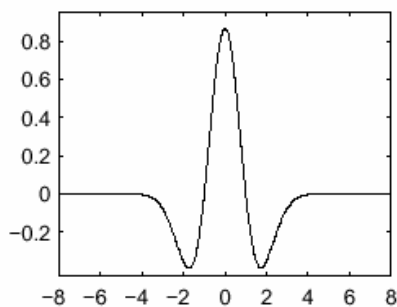
เวฟเลตชนิดนี้จะไม่ฟังก์ชันการสเกลลิง (scaling function) แต่จะมีความแน่นอน ดังแสดงในรูปที่ 3.21



รูปที่ 3.21 แสดงลักษณะของ Morlet Wavelet

3.5.7 Mexican Hat Wavelet

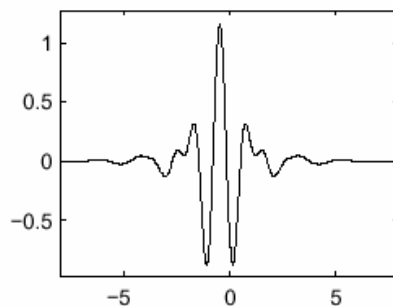
เวฟเลตนี้ไม่มีฟังก์ชันการสเกลลิง (scaling function) และมีที่มาจากฟังก์ชันอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเกาส์เซียน (the second derivative function of the Gaussian probability density function) ดังแสดงในรูปที่ 3.22



รูปที่ 3.22 แสดงลักษณะของ Mexican Hat Wavelet

3.5.8 Meyer Wavelet

เวฟเลตชนิด Meyer และฟังก์ชันการสเกลลิ่งถูกกำหนดด้วยโดเมนความถี่ ดังแสดงในรูปที่ 3.23



รูปที่ 3.23 แสดงลักษณะของ Meyer Wavelet

จากรูปที่ 3.17 ค่า N เป็นเลขจำนวนเต็มแสดงถึงลำดับ (Order) ของเวฟเลตแม่ ในบางครั้งได้มีความจำกัดความว่า N เป็นตัวเลขที่ใช้แสดงจำนวนของสัมประสิทธิ์ตัวกรอง (Filter) ของเวฟเลตแม่นั้น ๆ และแสดงความราบเรียบ (Smooth) ของเวฟเลตแม่นั้น ๆ อีกด้วย เช่น db4 หมายถึงเวฟเลตแม่แบบ daubechies ที่มีสัมประสิทธิ์การกรอง 4 ตัว, db20 หมายถึงเวฟเลตแม่แบบ daubechies ที่มีสัมประสิทธิ์การกรอง 20 ตัว โดยที่ db20 จะมีรูปร่างที่ราบเรียบกว่า db4 ซึ่งค่าของสัมประสิทธิ์ได้แสดงในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวกรองสัญญาณของเวฟเลตตระกูล Daubechies ที่ N มีค่า
เป็น 4,6,8,10,12,14,16 และ 20 [11]

Order	n	Filter coefficients	Order	n	Filter coefficients	Order	n	Filter coefficients
N=4	0	0.4829629131	N=14	0	0.0778520541	N=18	0	0.0380779474
	1	0.8365163037		1	0.3965393195		1	0.2438346746
	2	0.2241438680		2	0.7291320908		2	0.6048231237
	3	-0.1294095226		3	0.4697822874		3	0.6572880781
N=6	0	0.3326705530		4	-0.1439060039		4	0.1331973858
	1	0.8068915093		5	-0.2240361850		5	-0.2932737833
	2	0.4598775021		6	0.0713092193		6	-0.0968407832
	3	-0.1350110200		7	0.0806126092		7	0.1485407493
	4	-0.0854412739		8	-0.0380299369		8	0.0307256815
	5	0.0352262919		9	-0.0165745416		9	-0.0676328291
N=8	0	0.2303778133		10	0.0125509986		10	0.0002509471
	1	0.7148465706		11	0.0004295780		11	0.0223616621
	2	0.6308807679		12	-0.0018016407		12	-0.0047232048
	3	-0.0279837694		13	0.0003537138		13	-0.0042815037
	4	-0.1870348117	N=16	0	0.0544158422		14	0.0018476469
	5	0.0308413818		1	0.3128715909		15	0.0002303858
	6	0.0328830117		2	0.6756307363		16	-0.0002519632
	7	-0.0105974018		3	0.5853546837		17	0.0000393473
N=10	0	0.1601023980		4	-0.0158291053	N=20	0	0.0266700579
	1	0.6038292698		5	-0.2840155430		1	0.1881768001
	2	0.7243085284		6	0.0004724846		2	0.5272011889
	3	0.1384281459		7	0.1287474266		3	0.6884590395
	4	-0.2422948871		8	-0.0173693010		4	0.2811723437
	5	-0.0322448696		9	-0.0440882539		5	-0.2498464243
	6	0.0775714938		10	0.0139810279		6	-0.1959462744
	7	-0.0062414902		11	0.0087460940		7	0.1273693403
	8	-0.0125807520		12	-0.0048703530		8	0.0930573646
	9	0.0033357253		13	-0.0003917404		9	-0.0713941472
N=12	0	0.1115407434		14	0.0006754494		10	-0.0294575368
	1	0.4946238904		15	-0.0001174768		11	0.0332126741
	2	0.7511339080					12	0.0036065536
	3	0.3152503517					13	-0.0107331755
	4	-0.2262646940					14	0.0013953517
	5	-0.1297668676					15	0.0019924053
	6	0.0975016056					16	-0.0006858567
	7	0.0275228655					17	-0.0001164669
	8	-0.0315820393					18	0.0000935887
	9	0.0005538422					19	-0.0000132642
	10	0.0047772575						
	11	-0.0010773011						

ตารางที่ 3.2 แสดงคุณสมบัติของเวฟเล็ตแม่แต่ละชนิด [8]

Property	morl	mexh	meyr	haar	dbN	symN	coifN	biorNr,Nd
Crude	●	●						
Infinitely regular	●	●	●					
Arbitrary regularity					●	●	●	●
Compactly supported orthogonal				●	●	●	●	●
Compactly supported biorthogonal								●
Symmetry	●	●	●	●				●
Asymmetry					●			
Near symmetry						●	●	
Arbitrary number of vanishing moments					●	●	●	●
Ortogonal analysis			●	●	●	●	●	
Biotdogonal analysis			●	●	●	●	●	●
Exact reconstruction		●	●	●	●	●	●	●
FIR filters				●	●	●	●	●
Continuous transform				●	●	●	●	●
Discrete transform	●	●	●	●	●	●	●	●
Fast algorithm			●	●	●	●	●	●

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยมาใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณพอลต์ที่เกิดขึ้นบนสายส่ง ซึ่งทำการแยกองค์ประกอบความถี่สูงออกมาหลายช่วงความถี่ (สเกล) แล้วพิจารณาข้อมูลที่ได้จากสัมประสิทธิ์เพื่อนำไปวิเคราะห์ สำหรับการเลือกเวฟเล็ตนั้นได้เลือกใช้เป็นแบบ daubechies 4 (db4) เนื่องจากมีความเหมาะสมในการวิเคราะห์สัญญาณในลักษณะทรานเซียนต์ เช่น พอลต์ และให้ความแม่นยำทางเวลาที่ดี [12] เนื่องจากมีสัมประสิทธิ์ที่น้อยเพียง 4 ตัว โดยแบ่งการนำการแปลงเวฟเล็ตมาใช้วิเคราะห์สัญญาณพอลต์ออกเป็น 2 ขั้นตอนด้วยกันคือ

1) การแยกองค์ประกอบของสัญญาณ (Wavelet decomposition)

ในขั้นตอนนี้จะเป็นการแยกองค์ประกอบความถี่สูงของสัญญาณกระแสและแรงดันออกมาในสเกลที่ 1 – 5 ซึ่งในที่นี้เราจะเลือกพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบความถี่สูง (detail) เท่านั้น

2) การรวมกลับสัญญาณ (Wavelet Reconstruction)

เพื่อทำการเปรียบเทียบข้อมูลให้มีขนาดเดียวกันหรืออยู่บนฐานเวลาเดียวกันจึงต้องทำการรวมกลับสัญญาณในแต่ละสเกลให้มีจำนวนสัมประสิทธิ์เท่ากับสัญญาณต้นแบบที่ทำการวิเคราะห์ และนอกจากนี้เพื่อให้การพิจารณาเห็นความแตกต่างมากขึ้นจึงยกกำลังสองสัมประสิทธิ์ในแต่ละสเกล ซึ่งสัมประสิทธิ์ทั้งหมดก็จะอยู่ในด้านบวก [13] โดยที่รายละเอียดทั้งหมดจะได้กล่าวอยู่ในบทที่ 5