

บทที่ 2

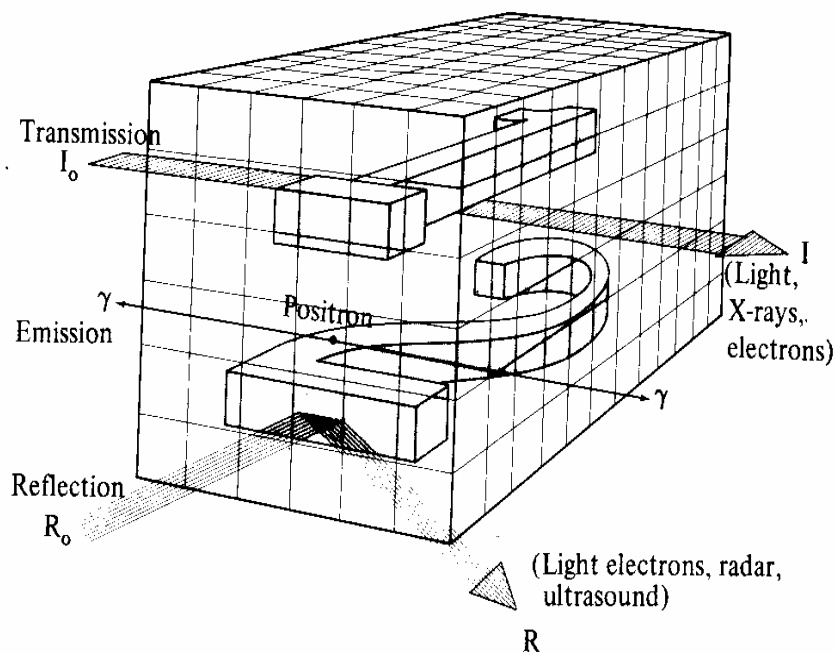
ภาพตัดขวางของวัตถุและคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างภาพตัดขวางด้วยวิธีการต่างๆ ภาพถ่ายเอ็กซเรย์ คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างภาพตัดขวาง ซึ่งจะแบ่งออกเป็น การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน การอินทิเกรตในแนวเส้นและการโปรเจกชัน และการแปลงเรดอน รวมถึงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณในการสร้างภาพตัดขวางและการสร้างภาพตัดขวางสำหรับทางเดินแสงแบบขนานด้วยอัลกอริทึมในรูปแบบต่างๆ

2.2 วิธีการสร้างภาพตัดขวาง

ปัญหาที่สำคัญอย่างหนึ่งในการประมวลผลเชิงภาพ (Image Processing) คือ การสร้างภาพตัดขวางของวัตถุโดยไม่ต้องทำลายวัตถุนั้นตัวอย่างเช่นในรูปที่ 2.1 พิจารณารูปสี่เหลี่ยมทรงลูกบาศก์ตัน ภายในประกอบด้วยเลขหนึ่งและสอง วิธีการที่ง่ายที่สุดเพื่อที่จะรู้ว่าภายในสี่เหลี่ยมตันนี้ประกอบด้วยอะไรบ้าง คือ การผ่าวัตถุตามแนวขวางให้ผ่านส่วนที่ต้องการดู อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติในกรณีต่างๆ เช่น การวินิจฉัยโรคทางการแพทย์ (Medical diagnosis), การสังเกตการณ์ทางดาราศาสตร์ (Astronomical observation), การทดสอบในทางอุตสาหกรรมโดยไม่ต้องทำลาย (Industrial nondestructive testing) เป็นต้น จะไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้



รูปที่ 2.1 หลักการสร้างภาพตัดขวางโดยวิธีการส่งผ่าน การแผ่ และการสะท้อน

วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยไม่ต้องทำลายวัตถุ แบ่งออกเป็นหลักใหญ่ๆ 3 วิธี คือ การส่งผ่าน(Transmission) การแผ่ (Emission) และการสะท้อน (Reflection) ในการส่งผ่านเราใช้รังสีเอกซ์ ลำอิเล็กตรอน ความร้อนหรือแสง หรือพลังงานใดๆก็ได้ที่ประพุดิตตามกฎของการดูดซึม (Absorption law) โดยพลังงานที่ผ่านเข้าไปในวัตถุถูกดูดซึมในส่วนต่างๆของวัตถุไม่เท่ากัน พลังงานส่วนที่ทะลุออกมา เรียกว่า โปรเจกชัน และภาพตัดขวางที่ได้จากวิธีการนี้ คือ ภาพตัดขวางจากเครื่องเอกซเรย์คอมพิวเตอร์ ในวิธีการแผ่จะใช้การฉีดสารที่มีกัมมันตภาพรังสีเป็นส่วนประกอบ เมื่อสารนี้ไปยังอวัยวะที่สนใจก็จะแผ่รังสีแกมมาในทิศทางที่แตกต่างกัน ความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการเดินทางของรังสีแกมมาที่ผ่านตำแหน่งเดียวกัน จะสามารถนำไปประมวลผลหาตำแหน่งของจุดนั้นได้ ภาพตัดขวางที่ได้จากวิธีนี้คือ ภาพตัดขวางจากเครื่องโพซิตรอนอิมิตชันโทโมกราฟี (Positron Emission Tomography หรือ P.E.T) และ เครื่องซิงเกิลโฟตอนอิมิตชันโทโมกราฟี (Single Photon Emission Computed Tomography หรือ S.P.E.C.T) ส่วนการสะท้อนจะใช้คุณสมบัติการสะท้อนของผิวหน้าของวัตถุมาตรวจสอบหาลักษณะของวัตถุได้ แหล่งพลังงานที่ใช้ เช่น แสง ลำอิเล็กตรอน เรดาร์ หรือ อัลตราโซนิก ภาพตัดขวางที่ได้จากวิธีนี้คือ ภาพตัดขวางจากเครื่องอัลตราซาวด์ (Ultrasonnd)

2.3 ภาพถ่ายเอกซเรย์

รังสีเอกซ์หรือที่เรียกกันทั่วไปอย่างแพร่หลายว่า เอกซเรย์ เป็นพลังงานรูปหนึ่งเช่นเดียวกับแสงสว่าง แต่เป็นชนิดที่เราไม่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า รังสีเอกซ์นี้ไม่ได้เกิดเองตามธรรมชาติ มนุษย์ต้องสร้างขึ้นโดยใช้เครื่องมือชนิดหนึ่ง เรียกว่า เครื่องเอกซเรย์

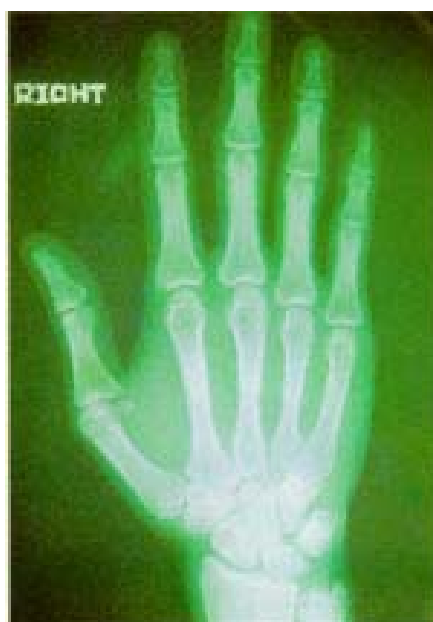
เมื่อเราป่วยไข้ เราได้ยินเสมอๆว่าแพทย์สั่งให้เราไปเอกซเรย์ เพื่อหาสาเหตุของการป่วย พนักงนรังสีวิทยา ก็จะพาเราเข้าห้องเอกซเรย์ ฉายรังสีเอกซ์ทะลุตัวเราไปถูกฟิล์มเอกซเรย์ ซึ่งเหมือนกับถ่ายรูปแต่แผ่นใหญ่กว่า แม้รังสีเอกซ์จะผ่านทะลุตัวเราแต่เราก็จะไม่รู้สึกอะไรเลย ต่อมาเจ้าหน้าที่ก็นำฟิล์มไปล้างตามกรรมวิธีในห้องมืด ไม่ช้าก็ได้ภาพที่มองเห็นเนื้อหนังกระดูก ดับ ไต ลำไส้ และอื่น ๆ ปรากฏอยู่บนฟิล์มเอกซเรย์ แพทย์รังสีซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญในการใช้รังสีเอกซ์ทางแพทย์ จะเป็นผู้อ่านฟิล์มเหล่านั้น เพื่อทำรายงานการวินิจฉัยว่า เรามีโรคหรือสิ่งผิดปกติใดๆอยู่ในร่างกายหรือไม่ เมื่อแพทย์ผู้รักษาได้อ่านรายงานของแพทย์รังสีแล้ว ก็จะรักษาโรคของเราได้ถูกต้องด้วยเหตุนี้ จึงนับได้ว่ารังสีวิทยามีประโยชน์มากมาย และจำเป็นอย่างยิ่งในการแพทย์แผนปัจจุบัน

2.3.1 ประวัติการค้นพบเอกซเรย์[1]

มีการค้นพบรังสีเอกซ์ เมื่อวันที่ 8 พฤศจิกายน พ.ศ. 2438 โดยศาสตราจารย์วิลเฮล์ม คอนราด เรินต์เกน(Wilhelm Konrad Roenigen, ค.ศ. 1845-1923 ชาวเยอรมัน) อาจารย์สอนวิชาฟิสิกส์ แห่งมหาวิทยาลัย วูร์ซบูร์ก (Wurzburg) ประเทศเยอรมนี ในเวลาใกล้เคียงกัน เบกเคอเรล (Antonic

Becquerel, ค.ศ. 1852-1908 ชาวฝรั่งเศส) ค้นพบว่า แร่ยูเรเนียมมีกัมมันตภาพรังสีและมาตามคูรี (Madame Marie Curie, ค.ศ. 1867-1934 ชาวฝรั่งเศส) ค้นพบแร่กัมมันตรังสี เรเดียม

รังสีที่เรินต์เกนค้นพบนี้เขาเรียกว่า รังสีเอ็กซ์ หรือ เอ็กซ์เรย์ (X-ray) หมายความว่า เป็นรังสีใหม่ที่ยังไม่มีใครรู้จัก ในภายหลังจึงมีผู้เรียกรังสีเอ็กซ์นี้ว่า รังสีเรินต์เกน เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ค้นพบ รังสีเรินต์เกนมีคุณสมบัติทางกายภาพหลายอย่างที่ทำให้มีลักษณะที่ทั้งเหมือนและแตกต่างจากรังสีอื่นๆ เรินต์เกนพบว่า รังสีเอ็กซ์สามารถฉายทะลุวัตถุทึบแสง เช่น ร่างกายมนุษย์ได้ เขาจึงลองเอารังสีเอ็กซ์มาใช้ประโยชน์ทางการแพทย์ โดยใช้รังสีเอ็กซ์ผ่านมือคน เนื้อ เอ็น และกระดูกในมือคน กัน รังสีเอาไว้บางส่วนปล่อยให้ผ่านไปบางส่วน ส่วนเนื้อและเอ็นกันรังสีได้น้อยมากก็มีรังสีออกมา มาก กระดูกกันรังสีได้มากก็มีรังสีผ่านออกมาน้อย รังสีทั้งหมดที่ผ่านมือออกมาจะมีความเข้มต่อพื้นที่ไม่เท่ากัน ทำให้เกิดเป็นรูปแบบ (pattern) ของความเข้มของรังสีในรูปมือขึ้น เมื่อเอารังสีที่มีรูปแบบแล้วนี้ไปกระทบกับวัตถุที่ไวต่อแสง เช่น ฟิล์มถ่ายรูปหรือกระดาษอัดรูป (photographic material) แล้วนำไปล้างด้วยน้ำยาล้างรูป ก็จะเกิดภาพของมือที่มีกระดูกซ่อนอยู่ในเนื้อ แพทย์จึงสามารถบอกได้ว่ากระดูกข้างในมือนั้นหักหรือไม่ โดยไม่จำเป็นต้องผ่าเอาเนื้อที่หุ้มกระดูกออกมาดู ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงภาพฟิล์มเอ็กซ์เรย์มือแบบที่เรินต์เกนค้นพบโดยบังเอิญ

2.3.2 การเกิดรังสีเอ็กซ์

รังสีเอ็กซ์มิได้เกิดขึ้นโดยธรรมชาติ แต่เป็นรังสีที่มนุษย์สร้างขึ้น โดยใช้ปรากฏการณ์อันหนึ่งที่ ภาษาเยอรมันเรียกว่า เบรมมส์ตราห์ลุง (bremmstrahlung) ซึ่งแปลว่า สกัดกันหรือทำให้ช้าลงหรือ ทำให้หยุด (breaking radiation) เพราะรังสีเอ็กซ์ส่วนใหญ่ เกิดขึ้นจากการที่อิเล็กตรอน ซึ่งเป็นวัตถุที่มีมวลและมีน้ำหนัก (อิเล็กตรอน 1 ตัวมีมวล 9.11×10^{-28} กรัม) วิ่งไปกระทบกับโลหะทั้งสตน

และถูกทั้งสแตนด์สตั๊ดกันไว้ จนวิ่งช้าลงหรือจนหยุด ทำให้อิเล็กตรอนคายพลังงานจลน์ (kinetic energy) ของมันออกมา ตามกฎที่ว่าพลังงานย่อมไม่สูญหาย กล่าวคือ เมื่ออิเล็กตรอนกำลังวิ่ง มีพลังงาน 2 รูป คือ พลังงานศักย์ (potential energy) และพลังงานจลน์พอถูกทั้งสแตนด์สตั๊ดกันให้หยุดจะเหลือแต่พลังงานศักย์ ส่วนพลังงานจลน์ไม่สูญหาย แต่เปลี่ยนรูปไปเป็น พลังงานใหม่อีก 2 รูป คือ ส่วนใหญ่ (มากกว่า 99%) เป็นความร้อน และ ส่วนน้อย (น้อยกว่า 1%) เป็นพลังงานในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เรียกว่า รังสีเอกซ์ รังสีเอกซ์ที่เกิดขึ้นนี้เป็นส่วนผสมของรังสีเอกซ์ที่มีความยาวคลื่นต่าง ๆ กัน ตั้งแต่ความยาวคลื่นสั้นที่สุดซึ่งมีพลังงานสูงสุดที่เกิดจากอิเล็กตรอนที่ถูกทำให้หยุด และความยาวคลื่นปานกลางขนาดต่าง ๆ ไปจนถึงความยาวคลื่นที่ยาวมาก ๆ ซึ่งเป็นรังสีเอกซ์ที่มีพลังงานต่ำ และยังมีพลังงานจลน์เหลืออยู่ ส่วนผสมของรังสีเอกซ์นี้เรียกว่า เอกซ์เรย์สเปกตรัม (X-ray spectrum) รังสีเอกซ์ที่มีคลื่นสั้นมีพลังงานสูง จึงมีอำนาจทะลุทะลวงสูงกว่ารังสีเอกซ์ที่มีความยาวคลื่นยาว

รังสีเอกซ์ยังเกิดขึ้นได้อีกวิธีหนึ่ง คือ เมื่ออิเล็กตรอนหลายวงที่วิ่งวนรอบนิวเคลียสของอะตอมกระโดดจากวงหนึ่งที่มีระดับพลังงานสูงกว่าไปสู่วงอื่นที่มีระดับพลังงานต่ำกว่า จะคายพลังงานออกมาในรูปของรังสีเอกซ์ ที่มีพลังงานเฉพาะและคงที่ แล้วแต่ลักษณะอะตอมของธาตุหนึ่ง ๆ รังสีเอกซ์ที่ได้มาด้วยวิธีนี้ จึงเรียกว่า รังสีลักษณะเฉพาะ (Characteristic radiation)

ในการเกิดรังสีเอกซ์นี้อาศัยองค์ประกอบสำคัญ 5 ประการ คือ

1. ทำให้เกิดอนุภาคอิเล็กตรอน หรือการแยกอิเล็กตรอนออกจากอะตอมของโลหะ

อิเล็กตรอนจะเกิดขึ้น หรือแยกจากอะตอมของโลหะที่ทำเป็นไส้หลอดเอกซ์เรย์ โดยการที่เราผ่านกระแสไฟฟ้า เข้าไปในไส้หลอด (Filament) จนกระทั่งไส้หลอดร้อนขึ้น ประมาณ 2000°C หรือมากกว่านั้น จะมีผลทำให้เกิดเทอร์มิออนิกอิมิชัน (Thermionic Emission) คือ อิเล็กตรอนหลุดออกจาก เซลล์หรือวงโคจรของมันเมื่อถูกความร้อน อิเล็กตรอนที่หลุดออกมา นี้ จะมาออกันอยู่รอบๆ ผิวหน้าของโลหะ จนกลายเป็นกลุ่ม (Cloud) เรียกว่า Space charge สาเหตุที่อิเล็กตรอนไม่สามารถหลุดพ้น ไปจากผิวหน้าโลหะ เพราะว่าแรงดึงดูดระหว่าง อิเล็กตรอนและอะตอม ของโลหะยังมีอยู่

2. การทำให้อนุภาคอิเล็กตรอนหลุด และเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วสูง

วิธีที่จะทำให้อนุภาคอิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมไปได้ คือ ต้องหาสิ่งที่มีพลังงาน หรือแรงดึงดูด มากกว่าแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับ อะตอมของโลหะ มาดึงดูดอิเล็กตรอน ดังนั้นก็คือ ไฟฟ้าแรงสูง (High voltage) ไฟฟ้าแรงสูงนี้ นอกจากจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากผิวหน้าของโลหะแล้ว ยังทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่หรือวิ่งไปด้วยความเร็วสูง กล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ ต้องทำให้ไฟฟ้าระหว่างขั้วบวกและขั้วลบให้ต่างกัน ความต่างศักย์นี้ ถ้ายังมีค่ามากขึ้นเท่าใด ก็ยิ่งทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากผิวหน้าของไส้หลอด ได้มาก และวิ่งไปด้วยความเร็วสูงขึ้น ความต่างศักย์ 100 กิโลโวลต์ จะทำให้อิเล็กตรอนมีความเร็วประมาณ 165 กิโลเมตรต่อวินาที

3. การทำให้เส้นทางที่อิเล็กตรอนวิ่งผ่านไป ต้องไม่มีสิ่งกีดขวาง

จึงจะทำให้อิเล็กตรอนวิ่งไปด้วยความเร็วสูง ดังนั้นภายในหลอดเอ็กซ์เรย์ จึงเป็นสุญญากาศ เพราะถ้ามีอากาศ หรือก๊าซอยู่ภายในหลอด แม้เพียงเล็กน้อยก็ตาม ความเร็วของอิเล็กตรอนจะลดลง เนื่องจากเกิดไอออนไนเซชัน (Ionization)

4. การทำให้อิเล็กตรอนมีความเข้มข้น (Concentration of electron)

จะต้องมีวิธีการที่จะให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในแนวทิศทางเดียวกัน คือ พุ่งไปหาจุดโฟกัสของเป้าด้วยปริมาณ (ความเข้มข้น) ที่มากพอสมควร ซึ่งทำให้ได้โดยการใช้เครื่องมือที่เรียกว่า “Electron focusing device” คอยควบคุม ให้อิเล็กตรอนส่วนใหญ่ ไปตกในบริเวณจุดโฟกัสของเป้า

5. การทำให้อิเล็กตรอนหยุดวิ่งในทันทีทันใด

การที่จะให้อิเล็กตรอนที่วิ่งมาด้วยความเร็วสูงนี้หยุดวิ่งในทันทีทันใด ทำได้โดยหาวัตถุมารับ หรือขวางอิเล็กตรอนวัตถุนั้นก็คือ เป้า (Target) ผลที่เกิดขึ้น คือ เกิดการชน หรือ กระแทกกันระหว่างอิเล็กตรอนกับเป้าอย่างแรง อิเล็กตรอนดังกล่าว จะไปชนอิเล็กตรอนที่อยู่ในวงโคจร ของอะตอมของเป้านั้น ให้อิเล็กตรอนกระเด็นออกนอกวงโคจร และจะมีอิเล็กตรอนจากวงโคจรอื่นๆ ที่อยู่ถัดไป วิ่งเข้ามาแทน แต่เนื่องจาก พลังงาน ของอิเล็กตรอนในแต่ละวงโคจร จะไม่เท่ากัน ดังนั้นจึงมีการคายพลังงานส่วนเกินออกมา ในรูปของเอ็กซ์เรย์และความร้อน (ส่วนใหญ่จะเป็นความร้อนมากกว่า) กล่าวคือ จากพลังงานของอิเล็กตรอนทั้งหมด ที่วิ่งไปสู่เป้านั้น 99.8% จะเปลี่ยนเป็นความร้อน และ 0.2 % เป็นเอ็กซ์เรย์

2.3.3 ประโยชน์ของรังสีเอ็กซ์เรย์ทางการแพทย์ [1]

รังสีเอ็กซ์ เมื่อฉายทะลุอวัยวะที่ต้องการตรวจแล้ว จะเกิดเป็นรูปแบบขึ้นบนฟิล์มเอ็กซ์เรย์ เมื่อนำฟิล์มเอ็กซ์เรย์ไปล้างตามกรรมวิธี จะได้ภาพทั้งภายนอกและภายในของอวัยวะ เช่น กระดูกที่ฝังอยู่ในเนื้อ หรือ แผลวันโรคที่อยู่ในเนื้อปอด ทำให้วินิจฉัยโรคได้โดยไม่ต้องผ่าอวัยวะนั้นเข้าไปดูภายใน ถ้าฉายรังสีที่มีรูปแบบแล้วนี้ไปถูกกระจกที่ฉาบด้วยแบเรียมแพลติโนไซอะไนด์ หรือ แคลเซียมทั้งสเทดในห้องมืด ก็จะเห็นภาพของอวัยวะภายในได้ทันที แต่ภาพนี้ไม่ค่อยจะชัดเจน เพราะแสงเรืองที่เกิดขึ้นนั้นอ่อนมาก จึงต้องดูในห้องมืด และรังสีแพทย์ผู้ตรวจต้องปิดตาหรืออยู่ในห้องมืดเสียก่อนราว 20 นาที จนตาคุ้นกับความมืด จึงจะดูเห็น การตรวจด้วยวิธีนี้เรียกว่า ฟลูออโรสโคปี (fluoroscopy) ซึ่งในปัจจุบันนี้ มีผู้นำภาพจากแสงเรืองๆในห้องมืดนี้มาฉายผ่านเครื่องปรับความเข้มของแสงที่เรียกว่า อิมเมจอินเทนซิไฟเออร์ (image intensifier) แล้วนำสัญญาณภาพไปฉายออกทางจอโทรทัศน์ ทำให้รังสีแพทย์ทำการตรวจอวัยวะภายในโดยการทำฟลูออโรสโคปีในห้องที่มีแสงสว่างธรรมดาได้ และชัดเจนกว่าการทำในห้องมืด การตรวจด้วยวิธีนี้ แพทย์รังสีจะเห็นการเคลื่อนไหวของอวัยวะภายในได้สะดวก ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจน คือ การตรวจกระเพาะอาหาร ลำไส้ และถุงน้ำดี รูปที่ 2.3 แสดงถึงเครื่องทำฟลูออโรสโคปีชนิดที่ใช้เครื่องปรับความเข้มของแสงและโทรทัศน์วงจรปิด

อวัยวะบางอย่างที่ตรวจพบได้ไม่ชัดเจน แพทย์อาจทำให้เห็นชัดเจนขึ้นได้โดยใช้สารทึบแสงบางอย่างสารเหล่านี้พอจะจำแนกได้ ดังนี้

1. สารทึบแสงที่ทึบน้อยกว่าเนื้อ ได้แก่ ก๊าซต่างๆ เช่น อากาศ คาร์บอนไดออกไซด์ และไนตรัสออกไซด์
2. สารทึบแสงที่ทึบมากกว่าเนื้อ ได้แก่ สารประกอบไอโอดีน และแบเรียมซัลเฟต (barium sulphate)



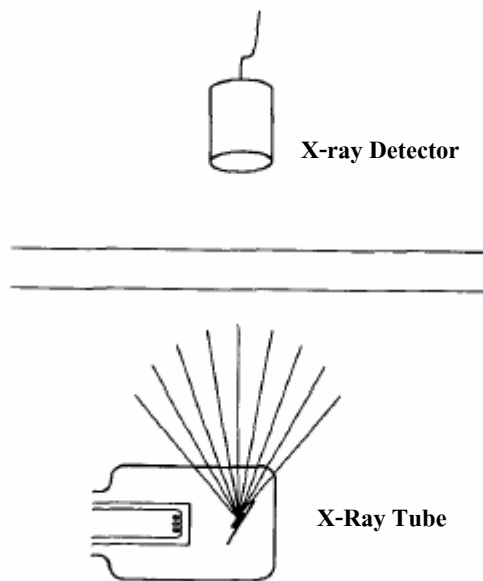
รูปที่ 2.3 เครื่องทำฟลูออโรสโคปีชนิดที่ใช้เครื่องปรับความเข้มของแสงและโทรทัศน์วงจรปิด

2.4 คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง

2.4.1 การหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน

จุดมุ่งหมายของคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง คือ การแมปค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนของการฉายรังสีเอกซ์ไปยังวัตถุ ซึ่งเราจะฉายรังสีเอกซ์ไปยังวัตถุ และตรวจจับรังสีเอกซ์ที่ถูกดูดกลืน ซึ่งค่าของรังสีเอกซ์ที่ถูกดูดกลืน จะเรียกว่า ข้อมูลโปรเจกชัน ซึ่งการหาค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน แบ่งออกเป็น 3 กรณี คือ

2.4.1.1 กรณีที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน 1 ค่า และการฉายแสงไปยังวัตถุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด



รูปที่ 2.4 ลำรังสีเอ็กซ์ที่ฉายไปยังวัตถุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด

พิจารณารูปที่ 2.4 ถ้าเราทำการฉายรังสีเอ็กซ์ไปยังวัตถุ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $N, \Delta N, \Delta x$ และ μ ดังสมการที่ 2.1

$$\frac{\Delta N}{N} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\mu \quad (2.1)$$

ซึ่ง N คือ จำนวนโฟตอนที่ออกจากวัตถุ

N_0 คือ จำนวนโฟตอนที่ฉายเข้าไปในวัตถุ

μ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน

x คือ ความหนาของวัตถุ

จากนั้น จึงหาลิมิต โดยให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้ดังสมการที่ 2.2

$$\frac{1}{N} dN = -\mu dx \quad (2.2)$$

อินทิเกรตทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\mu \int_0^x dx \quad (2.3)$$

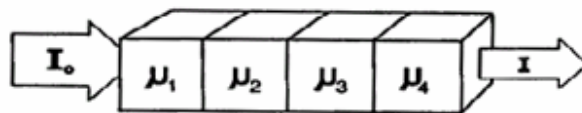
จัดรูปสมการใหม่ โดยการเอาลอการิทึมคูณทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\ln N - \ln N_0 = -\mu x \quad (2.4)$$

จัดสมการใหม่ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโฟตอนที่หายไปยังวัตถุ กับโฟตอนที่ออกจากวัตถุ ดังสมการที่ 2.5

$$N = N_0 e^{-\mu x} \quad (2.5)$$

2.4.1.2 กรณีที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่า แต่มีการฉายแสงไปยังวัตถุเพียง 1 ครั้ง



รูปที่ 2.5 ฉายรังสีไปยังวัตถุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่า

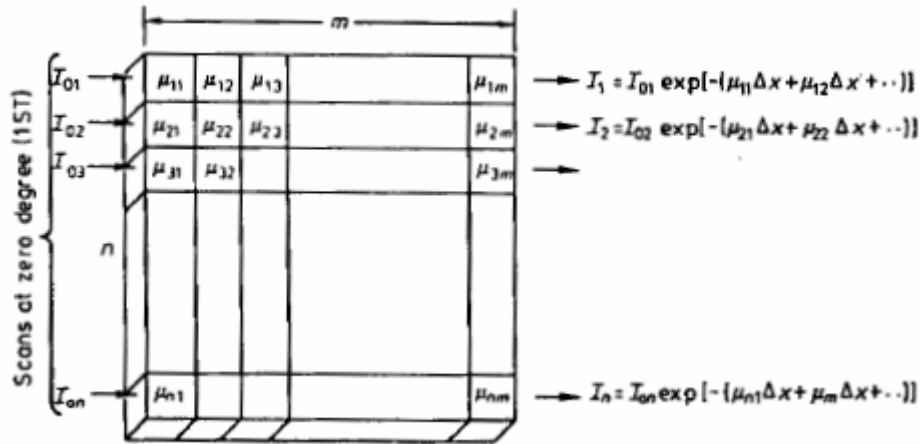
พิจารณารูปที่ 2.5 เป็นการฉายรังสีเอกซ์ผ่านชิ้นส่วนของเนื้อเยื่อซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน 4 ค่า คือ μ_1 , μ_2 , μ_3 และ μ_4 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง I กับ I_0 ดังสมการที่ 2.8

$$I = I_0 \exp[-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)x] \quad (2.6)$$

ซึ่ง x คือ ระยะทางของลำอิเล็กตรอน จากนั้นจึงใช้ลอการิทึม คูณทั้งสองข้าง จะได้

$$p(x) = \sum_{i=1}^4 \mu_i \quad (2.7)$$

2.4.1.3 กรณีที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่า และมีการฉายรังสีหลายทิศทาง



รูปที่ 2.6 ฉายรังสีไปยังวัตถุที่มีค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนหลายค่าและมีการฉายรังสีหลายทิศทาง

พิจารณารูปที่ 2.6 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโฟตอนที่ฉายไปยังวัตถุกับโฟตอนที่ออกจากวัตถุ ดังสมการที่ 2.8

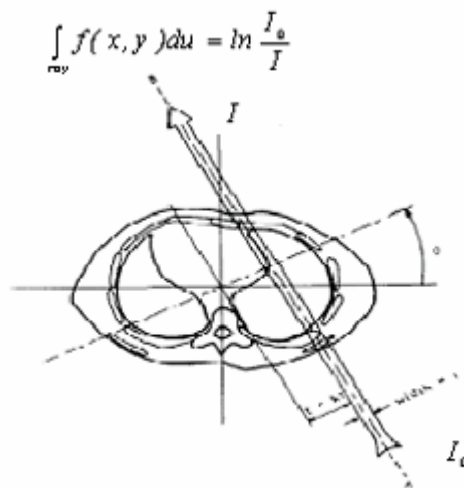
$$\begin{aligned} I_1 &= I_{01} \exp[-(\mu_{11}\Delta x + \mu_{12}\Delta x + \mu_{13}\Delta x + \dots + \mu_{1m}\Delta x)] \\ I_2 &= I_{02} \exp[-(\mu_{21}\Delta x + \mu_{22}\Delta x + \mu_{23}\Delta x + \dots + \mu_{2m}\Delta x)] \\ &\vdots \\ I_n &= I_{0n} \exp[-(\mu_{n1}\Delta x + \mu_{n2}\Delta x + \mu_{n3}\Delta x + \dots + \mu_{nm}\Delta x)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$p_i(x) = \mu_{i1} + \mu_{i2} + \mu_{i3} + \dots + \mu_{im} \quad (2.9)$$

ต่อมาพิจารณารูปที่ 2.7 เป็นภาพตัดขวางของร่างกายมนุษย์ ซึ่งจะถือว่าเป็นวัตถุที่มีสารหลายชนิดประกอบกัน จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง I_0 กับ I ดังสมการที่ 2.10

$$I = I_0 \exp \left[- \int_{ray} f(x, y) du \right] \quad (2.10)$$



รูปที่ 2.7 แสดงภาพตัดขวางของร่างกายมนุษย์

จากนั้น จึงจัดรูปสมการใหม่ จะได้ดังสมการที่ 2.11

$$\int_{ray} f(x,y) du = \ln \frac{I_0}{I} \quad (2.11)$$

ซึ่ง I_0 คือ จำนวนโฟตอนที่ฉายเข้าไปในวัตถุจากด้าน A

I คือ จำนวนโฟตอนที่ออกจากวัตถุทางด้าน B

du คือ ระยะทางตลอดความยาวของรังสี

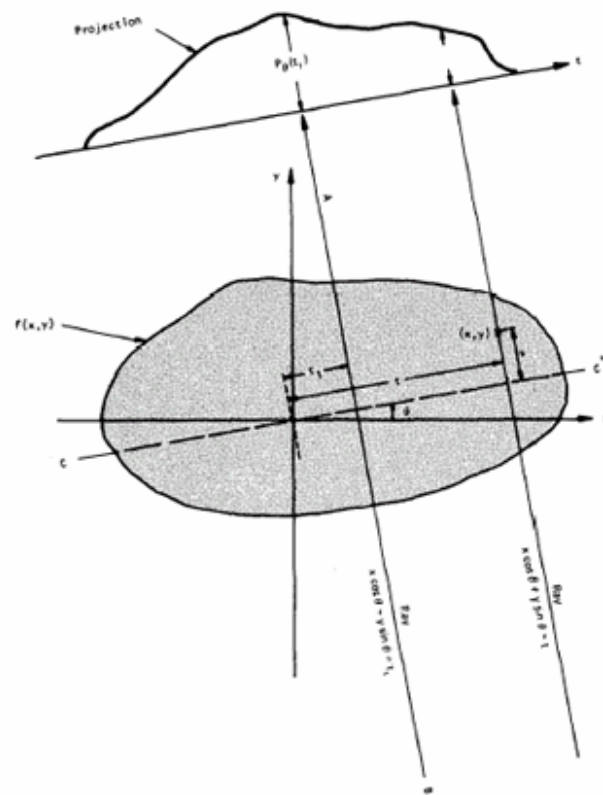
$f(x,y)$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน

อย่างไรก็ตาม ในคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวางนั้น การส่งค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน $f(x,y)$ นั้น เราจะต้องทำการฉายรังสีไปยังวัตถุมากกว่า 1 มุม จากการที่หมุนแหล่งกำเนิดรังสี เอ็กซเรย์และตัวตรวจจับนั้น จะได้ข้อมูลโปรเจกชันที่มุมแตกต่างกัน ซึ่งข้อมูลโปรเจกชันนี้เราจะนำไปใช้ในการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุ

2.4.2 การอินทิเกรตในแนวเส้น (Line Integrals) และการโปรเจกชัน (Projections)

การอินทิเกรตในแนวเส้น เป็นการแสดงถึงการอินทิเกรตของตัวแปรของวัตถุตลอดแนวเส้น จากรูปที่ 2.8 แสดงถึงใช้ระบบพิกัด (Coordinate system) อธิบายการอินทิเกรตในแนวเส้นและการโปรเจกชัน จากภาพ สมมติให้ $f(x,y)$ คือวัตถุรูปร่าง 2 มิติ และสมการของเส้น AB คือ

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t \quad (2.12)$$



รูปที่ 2.8 โปรเจกชันของวัตถุ $f(x, y)$ ที่มุม θ

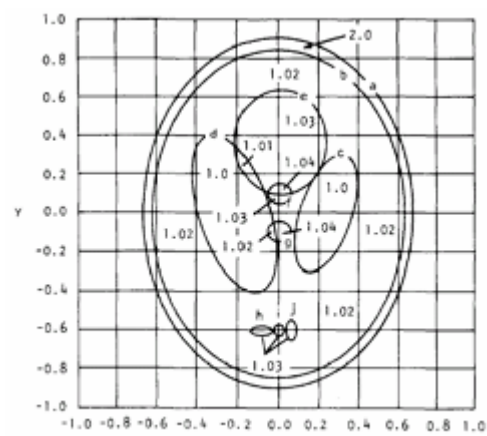
จากความสัมพันธ์ใน (2.12) จะได้นิยามของการอินทิเกรตในแนวเส้น คือ

$$P_\theta(t) = \int_{(\theta, t) \text{ line}} f(x, y) ds \quad (2.13)$$

ใช้เคลด้า ฟังก์ชัน เขียนใหม่ได้เป็น

$$P_\theta(t) = \int_{-\alpha-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha-\alpha}^{\alpha} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (2.14)$$

การจำลองการโปรเจกชันในคอมพิวเตอร์จะใช้รูปภาพดังในรูปที่ 2.9 เรียกว่า Shepp and Logan หรือแฟนทอมรูปศีรษะ (head phantom) ซึ่งจะนำไปใช้ในการทดสอบอัลกอริทึมในการสร้างภาพกลับจากภาพตัดขวาง จากรูปที่ 2.9 (a) จะเห็นว่ารูปแฟนทอมนี้ประกอบด้วยวงรีจำนวน 10 รูป ตำแหน่งและส่วนประกอบอื่นๆของวงรีทั้งหมดได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.9 (b) และตารางที่ 2.5 [14]



(b)

รูปที่ 2.9 แผนทอมรูปตรีเษของ Spepp และ Logan

ตารางที่ 2.1 ส่วนประกอบและพิกัดของวงรีในแผนทอมรูปสี่รียะ

Center Coordinate	Major Axis	Min Axis	Rotation Angle	Reflective Index
(0,0)	0.92	0.69	90	2.0
(0, -0.0184)	0.874	0.6624	90	-0.98
(0.22,0)	0.31	0.11	72	-0.02
(-0.22,0)	0.41	0.16	108	0.01
(0,0.35)	0.25	0.21	90	0.01
(0,0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(0, -0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(-0.08, -0.605)	0.046	0.023	0	0.01
(0, -0.605)	0.023	0.023	0	0.01
(0.06, -0.605)	0.046	0.023	90	0.01

2.4.3 การแปลงเรดอน (Radon Transform)

การแปลงเรดอนของฟังก์ชัน $f(x, y)$ เขียนแทนด้วย $g(s, \theta)$ ซึ่งนิยามคือการอินทิเกรตในแนวเส้นตลอดเส้น ที่มุม θ และระยะ s จากจุดกำเนิด ดังแสดงในรูปที่ 2.10 สามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ คือ

$$g(s, \theta) = Rf = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy, \quad (2.15)$$

$$-\infty < s < \infty, 0 \leq \theta < \pi$$

สัญลักษณ์ R คือ ตัวกระทำการแปลงเรดอน (Radon transform operator) การแปลงเรดอนของฟังก์ชัน $f(x, y)$ หรือ $g(s, \theta)$ สามารถเขียนสมการใหม่ให้อยู่ในระบบพิกัดการหมุน (s, u) (Rotating coordinate system) ซึ่ง

$$\begin{aligned} s &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ u &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

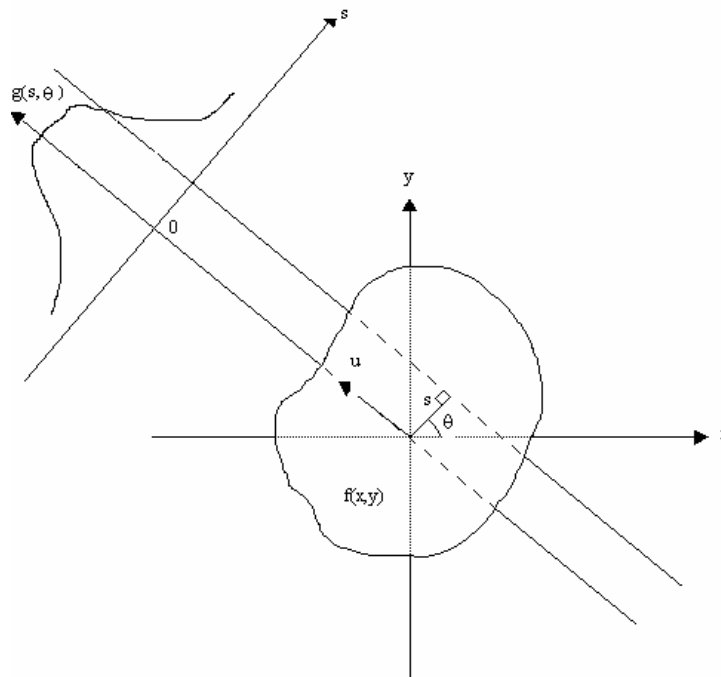
หรือ

$$\begin{aligned} x &= s \cos \theta - u \sin \theta \\ y &= s \sin \theta + u \cos \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

จากสมการที่ (2.15) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (2.17)$$

$$-\infty < s < \infty, 0 \leq \theta < \pi$$



รูปที่ 2.10 เรขาคณิตของการแปลงเรดอน

2.5 อัลกอริธึมของการสร้างภาพตัดขวาง

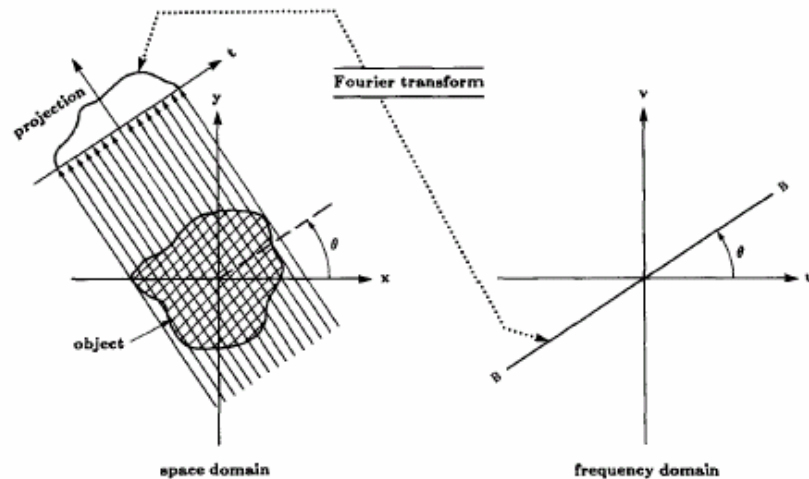
จากที่กล่าวมาข้างต้นได้ทราบถึงประวัติความเป็นมา ส่วนประกอบและการทำงานของคอมพิวเตอร์ถ่ายภาพตัดขวาง และคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องการสร้างภาพตัดขวางไปแล้ว ต่อไปจะกล่าวถึงอัลกอริธึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวาง ในวิธีการสร้างภาพตัดขวางนั้นจะสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆได้เป็น การสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบขนาน (Parallel-Beam) และ การสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบรูปกรวย (Cone-Beam)

2.6 การสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบขนาน

อัลกอริธึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบขนานนั้นประกอบด้วยหลายวิธี ได้แก่ วิธีการแปลงฟูเรียร์, วิธีแบคโปรเจกชัน และวิธีฟิวเตอร์แบคโปรเจกชัน

2.6.1 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์

เป็นวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้นิยามจากทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ (The Fourier Slice Theorem) ซึ่งระบุไว้ว่า เมื่อเราทำการหาโปรเจกชันของภาพ $f(x,y)$ ที่มุมต่าง $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ แล้วทำการแปลงฟูเรียร์โปรเจกชันเหล่านั้น จะมีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์สองมิติของภาพตามแนวเส้นที่ทำมุม $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ เช่นกัน ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการแปลงฟูเรียร์ของโปรเจกชันกับการแปลงฟูเรียร์ของภาพ[14]

เราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ได้โดยเริ่มต้นจากการนิยามของการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติของภาพ $f(x,y)$ จะได้

$$F(u,v) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.18)$$

และให้ $S_{\theta}(w)$ คือการแปลงฟูเรียร์ของข้อมูลโปรเจกชันที่มุม θ (P_{θ})

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt \quad (2.19)$$

พิจารณาการแปลงฟูเรียร์ของวัตถุตลอดเส้นในโดเมนความถี่ โดยให้ $v = 0$ จะได้

$$F(u,0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x,y) e^{-j2\pi ux} dx dy \quad (2.20)$$

แต่เนื่องจากตัวประกอบเฟส (Phase factor) จะไม่ขึ้นอยู่กับ y เราสามารถแบ่งการอินทิเกรตออกเป็น 2 ส่วนคือ

$$F(u,0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x,y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx \quad (2.21)$$

จะเห็นว่าเทอมที่อยู่ในวงเล็บเหมือนกับสมการของโปรเจกชันตลอดแนวนอนที่ค่า x คงที่ซึ่งก็คือการโปรเจกชันภาพ $f(x,y)$ ที่มุม $\theta = 0$

$$P_{\theta=0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad (2.22)$$

เอา (3.5) แทนไปใน (3.4) จะได้

$$F(u,0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (2.23)$$

ทางด้านขวามือ แสดงถึงการแปลงฟูเรียร์ 1 มิติ ของโปรเจกชัน $P_{\theta=0}$ ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโปรเจกชันในแนวตั้งกับการแปลง 2 มิติ ของ ฟังก์ชันวัตถุ คือ

$$F(u,0) = S_{\theta=0}(u) \quad (2.24)$$

จะเห็นว่าเป็นรูปแบบอย่างง่ายของทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ ผลที่ได้นี้จะไม่ขึ้นอยู่กับการหมุนระหว่างวัตถุกับระบบพิกัด เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ที่มุมอื่นได้โดยให้ $f(t,s)$ คือฟังก์ชัน $f(x,y)$ ในระบบพิกัดหมุน (Rotated Coordinate System) ดังในรูป 2.11 พิกัด (t,s) สัมพันธ์กับพิกัด (x,y) โดยความสัมพันธ์

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ซึ่งในระบบพิกัด (t,s) เราจะสามารถเขียนโปรเจกชันตลอดแนวเส้นของค่าคงที่ t ได้เป็น

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds \quad (2.26)$$

จากสมการที่ (2.19) การแปลงฟูเรียร์

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) e^{-j 2 \pi w t} dt \quad (2.19)$$

เอานิยามของโปรเจกชันไปแทนในสมการที่ (2.19) จะได้

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t, s) ds] e^{-j 2 \pi w t} dt \quad (2.27)$$

จากนั้นเอาผลที่ได้มาแปลงให้อยู่ในระบบพิกัด (x, y) โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (2.25) จะได้

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j 2 \pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (2.28)$$

ทางด้านขวาของสมการ คือการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติ ที่ความถี่ $u = w \cos \theta, v = w \sin \theta$

$$S_{\theta}(w) = F(w, \theta) = F(w \cos \theta, w \sin \theta) \quad (2.29)$$

จากทั้งหมดที่ผ่านมาแสดงให้เห็นถึงโปรเจกชันของฟังก์ชันวัตถุที่มุม $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ และการแปลงฟูเรียร์ของแต่ละโปรเจกชันนั้น เราสามารถหาค่าของ $F(u, v)$ ได้ถ้าจำนวนโปรเจกชันมีค่าเป็นอนันต์ ดังนั้นควรจะรู้ค่า $F(u, v)$ ในทุกๆจุดในระนาบ uv จากนั้นจึงทำการแปลงกลับฟูเรียร์เพื่อที่จะหาค่าฟังก์ชันวัตถุ $f(x, y)$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j 2 \pi (ux + vy)} du dv \quad (2.30)$$

ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ มีขอบเขต คือ $-\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}$ และ $-\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2}$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (2.30) ใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_m \sum_n F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{j2\pi((m/A)x + (n/A)y)}, \quad (2.31)$$

$$-\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}, -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2}$$

ในทางปฏิบัติ เราจะรู้ว่าส่วนประกอบของฟูเรียร์มีจำนวนจำกัด สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

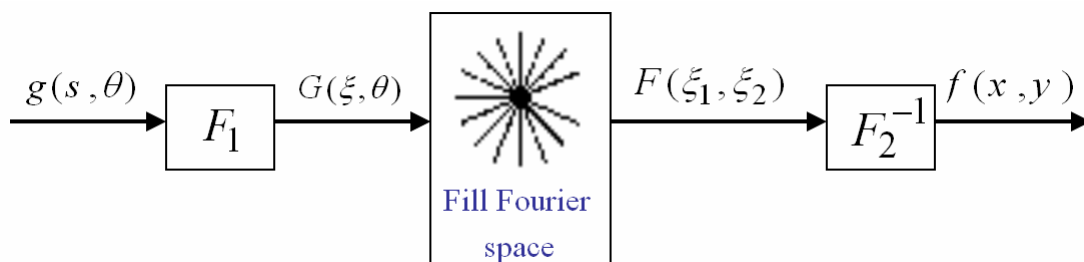
$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{j2\pi((m/A)x + (n/A)y)}, \quad (2.32)$$

$$-\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}, -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2}$$

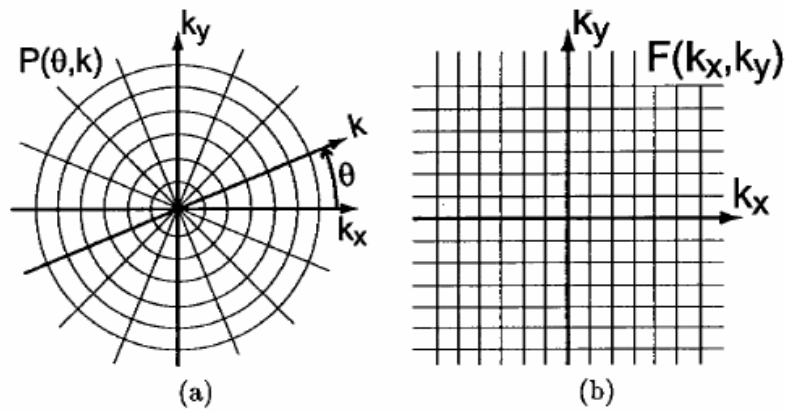
โดยสมมติว่า N เป็นจำนวนเต็มคู่ เราจะเห็นว่ารายละเอียด(Resolution)ของภาพที่สร้างได้จะ ถูกกำหนดโดย N สมการ (2.32) สามารถถูกคำนวณได้แบบเร็วโดยใช้อัลกอริทึมการแปลงฟูเรียร์ เร็ว (FFT) ถ้าเรารู้สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์จำนวน N^2 ของ $F(m/A, n/A)$

จากทฤษฎีข้างต้นนี้เราสามารถแบ่งขั้นตอนวิธีการสร้างภาพกลับด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์ ออกเป็น 3 ขั้นตอน คือ

- 1) นำข้อมูลโปรเจกชันไปแปลงฟูเรียร์ 1 มิติ จะได้ $F_1\{p_\theta(r)\} = P_\theta(k)$
- 2) วาง $P_\theta(k)$ ในราสเตอร์เชิงขั้ว(polar raster) จะได้ $P(k, \theta)$ จากนั้นจึงประมาณค่าให้อยู่ ในราสเตอร์มุมฉาก (rectangular raster) ดังรูปที่ 2.13
- 3) ทำการแปลงกลับฟูเรียร์ 2 มิติของ $F(k_x, k_y)$ จะได้ $f(x, y)$

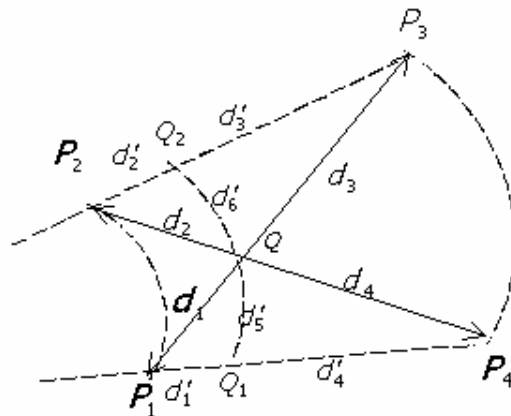


รูปที่ 2.12 Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์



รูปที่ 2.13 (a) รัสเตอร์เชิงขั้ว (b) รัสเตอร์เชิงขั้วมุมฉาก

การประมาณค่าในช่วงจากรัสเตอร์เชิงขั้วไปยังรัสเตอร์มุมฉาก สามารถทำได้หลายวิธี จากรูปที่ 2.14 จะทำการหาจุด Q จาก P_1, P_2, P_3, P_4 ด้วยวิธีดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.14 การประมาณค่าจุด Q

1) การหาจุดที่ใกล้ที่สุด

$$F(Q) = F(P_k) \quad k : \min_i \{d_i\} = d_k \quad (2.33)$$

2) การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น

$$F(Q) = \frac{\sum_{k=1}^4 F(P_k) / d_k}{\sum_{k=1}^4 \frac{1}{d_k}} \quad (2.34)$$

3) การประมาณค่าในช่วงแบบไม่เชิงเส้น

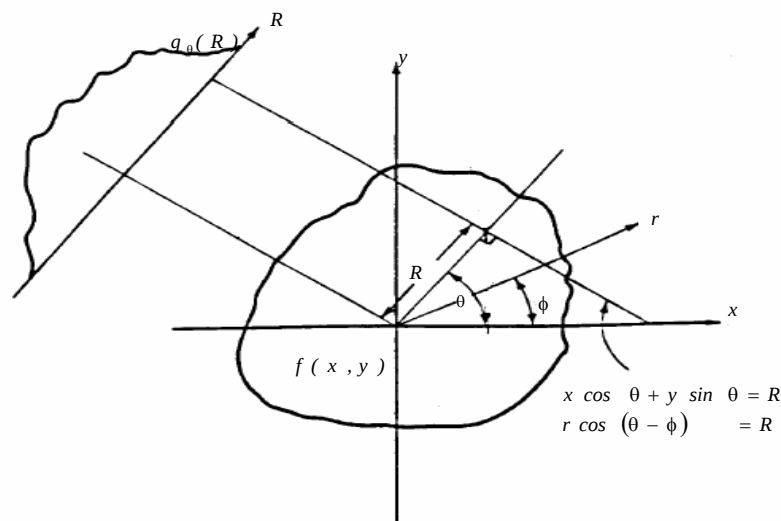
$$\begin{aligned} F(Q) &= \frac{F(Q_1)/d'_5 + F(Q_2)/d'_6}{(1/d'_5) + (1/d'_6)} \\ &= \frac{F(Q_1)/d'_6 + F(Q_2)/d'_5}{d'_5 + d'_6} \end{aligned} \quad (2.35)$$

ซึ่ง

$$F(Q_1) = \frac{F(P_1)/d'_4 + F(P_4)/d'_1}{d'_1 + d'_4}, \quad F(Q_2) = \frac{F(P_2)/d'_3 + F(P_3)/d'_2}{d'_2 + d'_3} \quad (2.36)$$

2.6.2 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีแบคโปรเจกชัน

การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีแบคโปรเจกชันนั้นเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด ความยุ่งยากทางคณิตศาสตร์มีน้อย โดยมีคูห์ล(Kuhl) และเอดเวิร์ดส์(Edwards) [11,12] เป็นสองคนแรกที่น่าวิธีนี้ไปสร้างภาพตัดขวางของผู้ป่วยได้สำเร็จ



รูปที่ 2.15 โปรเจกชันของฟังก์ชัน 2 มิติ

จากรูปที่ 2.15 และนิยามของโปรเจกชันที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 จะได้นิยามของแบคโปรเจกชันของโปรเจกชันที่มุม θ คือ

$$b_{\theta}(x, y) = \int_0^{\pi} g_{\theta}(R) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dR \quad (2.37)$$

$b_{\theta}(x, y)$ คือ ตัวกระทำแบคโปรเจกชัน (Backprojection operator) ของโปรเจกชัน $g_{\theta}(R)$ ที่มุม θ ดังนั้น การสร้างภาพกลับ (Reconstruction) จากวิธีแบคโปรเจกชัน คือ ผลรวมของแบคโปรเจกชันในทุกๆมุม จะได้

$$\begin{aligned} f_b(x, y) &= \int_0^{\pi} b_{\theta}(x, y) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_{\theta}(R) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dR d\theta \\ &= \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\alpha}^{\alpha} g_{\theta}(R) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dR \end{aligned} \quad (2.38)$$

$f_b(x, y)$ คือ ภาพที่ได้จากการสร้างภาพกลับ ซึ่งการสร้างภาพกลับแบบนี้มักจะเรียกว่า ภาพถ่ายเอ็กซเรย์ของชั้นของเนื้อเยื่อตามความลึกที่เลือกไว้ (Laminogram) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีแบคโปรเจกชัน ($f_b(x, y)$) นี้ จะไม่ใช่วัตถุต้นฉบับที่นำมาสร้างภาพกลับ ($f(x, y)$) ซึ่งจะอธิบายได้ดังนี้

เริ่มต้น พิจารณาคุณสมบัติของเดลต้าฟังก์ชัน คือ

$$\delta(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } r = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.39)$$

สมมติให้เดลต้าฟังก์ชันที่จุดกำเนิดคือฟังก์ชันรูปภาพต้นฉบับ $f(x, y)$ จะได้

$$f(x, y) = \delta(x) \delta(y) \rightarrow \frac{\delta(r)}{\pi r} \quad (2.40)$$

จากพิกัดเชิงมุมจาก $x \cos \theta + y \sin \theta = R$ และพิกัดเชิงขั้ว $r \cos(\theta - \phi) = R$ จะสามารถเขียนโปรเจกชัน $g_{\theta}(R)$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
g_{\theta}(R) &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dx dy \\
&= \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(r, \phi) \delta(r \cos(\theta - \phi) - R) r dr d\phi
\end{aligned} \tag{2.41}$$

นำสมการที่ (2.40) ไปแทนลงในสมการ (2.42) จะได้

$$g_{\theta}(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\delta(r)}{\pi r} \delta(r \cos(\theta - \phi) - R) r dr d\phi \tag{2.42}$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$g_{\theta}(R) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(r)}{\pi} \delta[r \cos(\theta - \phi) - R] dr d\phi \tag{2.43}$$

จาก $\int_0^{\alpha} dr \delta(r) f(r) = f(0)$ จะได้

$$g_{\theta}(R) = \int_0^{\pi} d\phi \frac{\delta[R]}{\pi} = \delta(R) \tag{2.44}$$

แสดงว่าโปรเจกชันของเคลด้าฟังก์ชันก็คือ เคลด้าฟังก์ชันเช่นกัน ถ้าเคลด้าฟังก์ชันเหล่านี้ถูกแบคโปรเจก จะได้ผลตอบสนองอิมพัลส์ คือ

$$\begin{aligned}
h_b(r) &= \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta(R) \delta(r \cos(\theta - \phi) - R) dR \\
&= \int_0^{\pi} \delta(r \cos(\theta - \phi)) d\theta
\end{aligned} \tag{2.45}$$

จากเคลด้าฟังก์ชันของฟังก์ชันของตัวแปร

$$\delta[f(x)] = \sum \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} \tag{2.46}$$

ซึ่ง x_n คือ รากของ $f(x)$ จะได้

$$f(\phi) = r \cos(\theta - \phi), \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$f'(\phi) = r \sin(\theta - \phi) \Big|_{\phi_1 = \frac{\pi}{2} + \theta} = r \quad (2.47)$$

ดังนั้น

$$h_b(r) = \int_0^\pi \frac{\delta\left(\phi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)}{r} = \frac{1}{r} \quad (2.48)$$

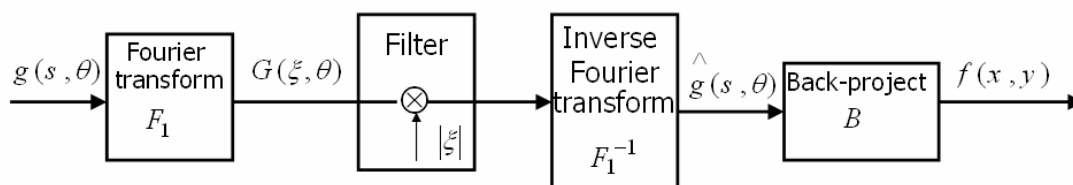
จะได้ การสร้างภาพกลับด้วยวิธีแบคโปรเจกชัน คือ

$$f_b(x, y) = f(x, y) * * \frac{1}{r} \quad (2.49)$$

** คือ คอนโวลูชัน 2 มิติ และภาพที่ได้จากวิธีนี้จะเบลอ สามารถแก้ปัญหานี้ได้ด้วยการใช้วิธีฟิลเตอร์ก่อนที่แบคโปรเจกชัน ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

2.6.3 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน (FBP)

วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันนี้เป็นวิธีที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการสร้างภาพตัดขวาง ทั้งนี้เนื่องจากเป็นวิธีที่ได้รับการปรับปรุงจากวิธีแบคโปรเจกชันในการลดผลของ $\frac{1}{r}$ ซึ่งวิธีนี้จะใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ช่วยในการพิสูจน์



รูปที่ 2.16 Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน

จากทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ ภาพ $f(x, y)$ จะสามารถหามาได้จากการแปลงฟูเรียร์ย้อนกลับ

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.50)$$

ถ้าให้ (w, θ) เป็นระบบพิกัดแบบโพลาร์ (Polar Coordinate) ในระนาบ uv เราสามารถเขียนสมการ (2.50) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(w, \theta) e^{j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \\ f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty F(w, \theta) e^{j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^\infty F(w, \theta + \pi) e^{j2\pi w(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))} w dw d\theta \end{aligned} \quad (2.51)$$

จากนั้นใช้คุณสมบัติ

$$F(w, \theta + \pi) = F(-w, \theta) \quad (2.52)$$

สมการ (2.51) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty F(w, \theta) |w| e^{j2\pi w t} dw \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \right] d\theta \end{aligned} \quad (2.53)$$

โดยที่

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.54)$$

และเราสามารถเขียนสมการ(2.53)ใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (2.55)$$

โดยที่

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \quad (2.56)$$

จากสมการข้างบนจะเห็นว่า ในการสร้างภาพตัดขวางเราสามารถทำได้โดยการนำข้อมูลแต่ละโปรเจกชัน $P_\theta(t)$ มาทำการฟิลเตอร์ ที่มีผลตอบสนองทางความถี่(Frequency Response) เท่ากับ

$|w|$ ดังสมการ (2.56) จากนั้นจึงนำค่าที่ได้มาทำการแบคโปรเจกชันดังสมการ (2.55) โดยที่ฟิลเตอร์ในสมการ (2.56) เรียกว่า Ram-Lak Filter

พารามิเตอร์ w เป็นตัวแปรความถี่ โดยหลักการแล้วอินทิกรัลในสมการ(2.56) ต้องทำซ้ำตลอดทุกย่านความถี่ ในทางปฏิบัติพลังงานที่อยู่ในส่วนประกอบ (Components) การแปลงฟูเรียร์เหนือความถี่ค่าหนึ่งจะมีค่าน้อย ดังนั้นการโปรเจกชันจึงถูกทำในแถบความถี่ที่จำกัด (Bandlimited) โดยให้ W แทนค่าความถี่ซึ่งถ้าเกินจากนี้พลังงานสำหรับการโปรเจกชันจะมีค่าน้อยมาก

เราสมมติว่าข้อมูลโปรเจกชันถูกสุ่มด้วยช่วงของการสุ่มเท่ากับ τ ชม. เราสมมติว่าไม่มีปัญหาเรื่อง Aliasing ซึ่งกล่าวเป็นนัยว่าในโดเมนของการแปลง (Transform Domain) โปรเจกชันไม่มีพลังงานนอกย่านความถี่ $(-W, W)$ โดยที่

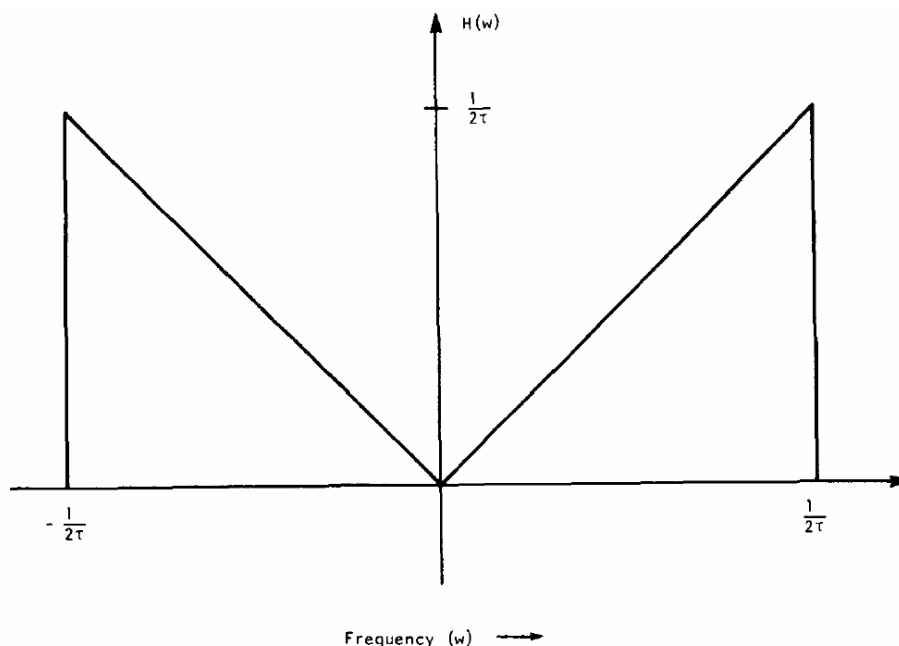
$$W = \frac{1}{2\tau} \quad \text{ไซเคิลต่อชม.} \quad (2.57)$$

เราสามารถเขียนสมการ Ram-Lak Filter ได้เป็น

$$H(w) = |w| b_w(w) \quad (2.58)$$

โดยที่

$$b_w(w) = 1 \quad |w| \leq \frac{1}{2\tau} \\ = 0, \quad \text{Otherwise} \quad (2.59)$$



รูปที่ 2.17 ภาพแสดงผลตอบสนองทางความถี่ของ Ram-Lak Filter

2.7 ทฤษฎีพื้นฐานของอัลกอริธึมแบบพีชคณิต

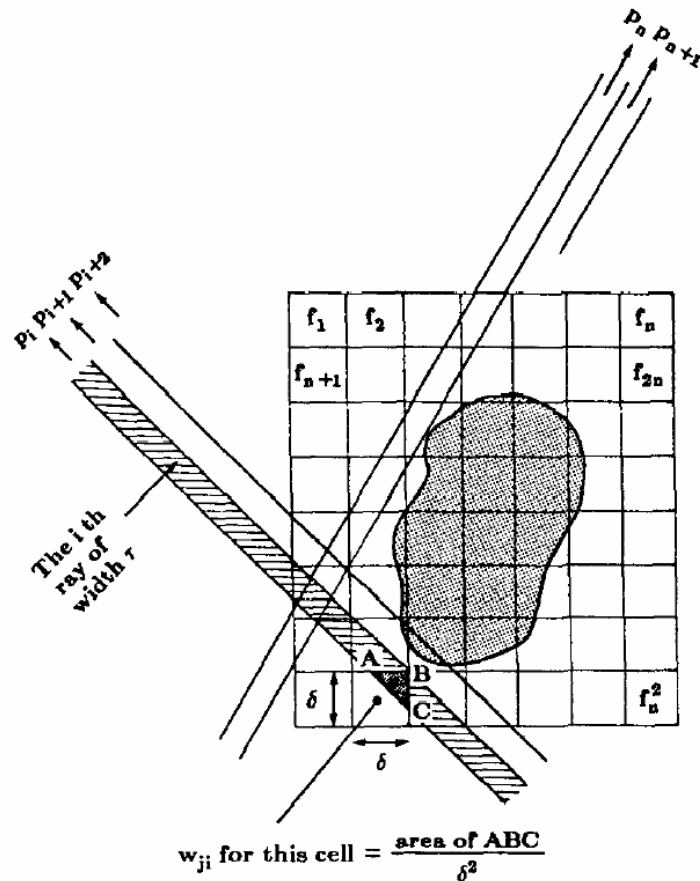
ในการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริธึมแบบพีชคณิตนั้นจะสมมติให้วัตถุที่ต้องการสร้างกลับ(ภาพตัดขวางใน 2 มิติ หรือ ปริมาตรใน 3 มิติ) เป็นเมตริกของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า และจากนั้นทำการแก้สมการทางพีชคณิตเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจากค่าโปรเจกชันที่วัดได้

ในที่นี้เราจะพิจารณาการสร้างกลับของข้อมูลใน 2 มิติก่อน โดยที่เราจะสมมติให้ภาพประกอบด้วยเซตของเซลล์ $f(x,y)$ โดยที่ในแต่ละเซลล์ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นค่าคงที่ กำหนดให้ f_j เป็นค่าคงที่ที่เซลล์ที่ j^{th} และให้ N เป็นจำนวนทั้งหมดของเซลล์ ให้ p_i ค่าแทนโปรเจกชันของรังสีเส้นที่ i^{th}

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.60)$$

โดยที่ M คือจำนวนรังสีทั้งหมด (ในทุกโปรเจกชัน) และ w_{ij} คือค่าแฟกเตอร์น้ำหนักที่แทนผลของเซลล์ที่ j^{th} ที่มีต่อรังสีเส้นที่ i^{th} โดยแฟกเตอร์ w_{ij} มีค่าเท่ากับสัดส่วนของพื้นที่ของเซลล์ที่ j^{th} ที่ตัดกับรังสี i^{th} ดังแสดงให้ดูหนึ่งเซลล์ในรูปที่ 2.18

ถ้า N และจำนวนของรังสีทั้งหมดมีค่าน้อย เราสามารถใช้ทฤษฎีเมทริกซ์ทั่วไปในการแปลงกลับ(Invert)ระบบสมการใน(2.60) อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ N อาจจะมีค่ามาก (ในกรณีของภาพขนาด $256 \times 256 = 65536$) และโดยมากที่จำนวนรังสีทั้งหมด(M)จะมีขนาดใหญ่พอๆกัน ถ้า M และ N มีค่าดังกล่าว ขนาดของเมทริกซ์ $[w_{ij}]$ ใน (4.1) คือ 65536×65536 ซึ่งไม่สามารถใช้การแปลงกลับเมทริกซ์ได้เลย



รูปที่ 2.18 รูปแบบการฉายแสงและการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก

สำหรับ M และ N มีค่ามาก มีเทคนิคการทำซ้ำหรือIterative ที่น่าสนใจที่ใช้ในการแก้สมการ (2.60) เทคนิคนี้เสนอโดย Kaczmarz [2] และได้อธิบายโดยละเอียดภายหลังโดย Tanabe เพื่อที่จะอธิบายขั้นตอนการคำนวณที่ยุ่งยากในเทคนิคนี้ ขั้นแรกเราจะเขียนสมการ (2.60) ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบที่ขยายออกดังนี้

$$\begin{aligned} w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + \cdots + w_{1N}f_N &= p_1 \\ w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + \cdots + w_{2N}f_N &= p_2 \\ &\vdots \\ w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + \cdots + w_{MN}f_N &= p_M \end{aligned} \tag{2.61}$$

ภาพที่ถูกแทนด้วย $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ จะถูกพิจารณาว่าเป็นจุดในสเปซ(Space) N มิติ ในสเปซดังกล่าวแต่ละสมการจะแทน Hyperplane เมื่อระบบสมการสามารถหาผลเฉลยที่เป็นหนึ่งเดียว (Unique Solution) จุดตัดของHyperplane ทั้งหมดจะเป็นจุดจุดเดียวและเป็นค่าผลเฉลยของสมการ (Solution)

ในวิธีของ Kaczmarz เราต้องทำการเดาค่าเริ่มต้น กำหนดให้ค่าเริ่มต้นเป็น $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ และสามารถเขียนแทนแบบเวกเตอร์ได้เป็น $\vec{f}^{(0)}$ ในสเปซ (Space) N มิติ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้กำหนดให้ค่าเริ่มต้นมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด โดยค่าเริ่มต้นนี้จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ซึ่งก็คือสมการแรกใน(2.61)ได้เป็น $\vec{f}^{(1)}$ จากนั้น $\vec{f}^{(1)}$ จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ที่แทนด้วยสมการที่สองใน(2.61)จะได้เป็น $\vec{f}^{(2)}$ และทำต่อไปเรื่อยๆ โดยที่ $\vec{f}^{(i-1)}$ จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ที่แทนด้วยสมการที่ i^{th} ใน (2.61) จะได้เป็น $\vec{f}^{(i)}$ ซึ่งขบวนการนี้เราสามารถเขียนแทนในรูปของสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\vec{f}^{(i)} = \vec{f}^{(i-1)} - \frac{(\vec{w}_i \cdot \vec{f}^{(i-1)} - p_i)}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (2.62)$$

โดยที่ $\vec{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN})$ และ $\vec{w}_j \cdot \vec{w}_j$ เป็นผลคูณเวกเตอร์(Dot product) ของ $\vec{w}_j$ กับตัวเอง ในการประยุกต์ใช้งานจริงจำเป็นต้องมีจำนวนของโปรเจกชันจำนวนมากและภาพที่ต้องการสร้างกลับคืนมีขนาดใหญ่ทำให้เกิดความยุ่งยากที่จะใช้สมการ(2.62) ในการคำนวณเนื่องมาจากปัญหาในเรื่องการคำนวณ เนื้อที่หน่วยความจำและการที่จะเรียกสัมประสิทธิ์น้ำหนัก w_{ij} พิจารณากรณีที่เราจะสร้างภาพขนาด 128×128 จากข้อมูล 150 โปรเจกชันโดยแต่ละโปรเจกชันมี 150 รังสี(Ray) จำนวนของสัมประสิทธิ์น้ำหนัก w_{ij} ทั้งหมดที่ใช้คือ $128 \times 128 \times 150 \times 150$ ($\approx 2.7 \times 10^8$) ซึ่งเป็นจำนวนมหาศาล

เพื่อที่จะแก้ปัญหความยุ่งยากในการคำนวณ(2.62) วิธีทางพีชคณิตอื่นๆได้ถูกนำเสนอ ส่วนใหญ่จะเป็นการประมาณของสมการ (2.62) เพื่อที่จะวิเคราะห์การประมาณที่สามารถคำนวณได้ง่าย เราจะจัด (2.62) ใหม่ในรูปแบบที่ต่างไปคือ

$$f_m^{(j)} = f_m^{(j-1)} + \left[(p_j - q_j) / \sum_{k=1}^N w_{jk}^2 \right] w_{jm} \quad (2.63)$$

โดยที่

$$q_j = \vec{f}^{(j-1)} \cdot \vec{w}_j = \sum_{k=1}^N f_k^{(j-1)} w_{jk} \quad (2.64)$$

สมการเหล่านี้กล่าวว่าเมื่อเราโปรเจกคำตอบที่ $(j-1)^{th}$ ไปบน Hyperplane ที่ j^{th} (สมการที่ j^{th} ใน(2)) การเปลี่ยนแปลง $\Delta f_m^{(j)}$ ในค่าของเซลล์ที่ m^{th} คือ

$$\Delta f_m^{(j)} = f_m^{(j)} - f_m^{(j-1)} = \left[(p_j - q_j) / \sum_{k=1}^N w_{jk}^2 \right] w_{jm} \quad (2.65)$$

ในขณะที่ p_j คือผลบวกเรย์ (Ray Sum) ที่วัดได้ตามแนวรังสีที่ j^{th} q_j คือผลบวกเรย์ (Ray Sum) ที่คำนวณได้ตามแนวรังสีเดียวกันที่ใช้คำตอบ (Solution) ที่ $(j-1)^{th}$ สำหรับระดับเทาของภาพค่าที่แก้ไข (Correction) Δf_i สำหรับเซลล์ที่ i^{th} สามารถได้จากการคำนวณผลต่างระหว่างผลบวกเรย์ (Ray Sum) ที่วัดได้และผลบวกเรย์ที่คำนวณได้ ถ้าความแตกต่างจะถูกนอร์มอลไลซ์ด้วย $\sum_{k=1}^N w_{jk}^2$ และถูกกำหนด (Assigned) ให้กับเซลล์ทุกเซลล์ตามแนวรังสี j^{th} ค่าที่กำหนดให้แต่ละเซลล์จะถูกสเกลด้วยค่า w_{ij} ที่สอดคล้องกัน

2.7.1 ชนิดของอัลกอริธึมแบบพีชคณิต

อัลกอริธึมแบบพีชคณิตสามารถแบ่งออกเป็น 3 ชนิดด้วยกันคือ ART (Algebraic Reconstruction Techniques), SIRT (Simultaneous Iterative Reconstructive Technique) และ SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques)

2.7.1.1 ART (Algebraic Reconstruction Techniques)

วิธี ART นี้ได้ถูกนำเสนอสำหรับงานด้านการเอกซเรย์คอมพิวเตอร์ (CT) โดย Gordon [17] ในวิธีนี้ค่าที่แก้ไข (Correction) จะถูกใช้ปรับปรุงกับทุกๆ เซลล์ที่รังสีที่ i^{th} ผ่านก่อนที่จะค่าที่แก้ไขในรังสีถัดไป ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการค่าโปรเจกชันของผลเฉลยได้เป็น

$$\hat{P}_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} f_j \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.66)$$

โดยที่ M เป็นจำนวนของรังสีทั้งหมด และ N เป็นจำนวนของเซลล์

ขั้นตอนของการคำนวณมีดังนี้

- สำหรับอิตเทอเรชันที่ k^{th}

1. สำหรับรังสีที่ i^{th} สามารถคำนวณค่าที่แก้ไข (Correction) ได้จาก $\Delta p_i = p_i - \hat{p}_i$
2. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ค่าที่แก้ไขจาก $\alpha_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}^2$
3. ทำการปรับปรุงค่าของผลเฉลยในแต่ละเซลล์ที่ j^{th} จาก

$$\hat{f}_j^{new} = \hat{f}_j^{old} + \lambda \frac{w_{ij} \Delta p_i}{\alpha_i} \quad (2.67)$$

โดยที่ค่า λ เป็นค่า Relaxation factor

4. ทำซ้ำตั้งแต่ข้อที่ 1-3 จนครบทุกๆ รังสี เป็นการเสร็จการคำนวณอิตเทอเรชันที่ k^{th}

2.7.1.2 SIRT (Simultaneous iterative Reconstruction Techniques)

Gilbert ได้เป็นผู้ที่นำเสนอวิธีนี้ โดยในวิธี SIRT ค่าในแต่ละเซลล์ของผลเฉลยจะถูกปรับปรุงหลังจากการคำนวณค่าที่แก้ไข ในแต่ละเส้นรังสีเสร็จเรียบร้อยแล้ว ซึ่งในอัลกอริทึมนี้จะมีลักษณะคล้ายกับวิธีART แต่จะค่าที่แก้ไขจะถูกใช้ในการปรับปรุงที่หลัง

ขั้นตอนของการคำนวณมีดังนี้

- สำหรับอิตเทอเรชันที่ k^{th}

1. สำหรับรังสีที่ i^{th} สามารถคำนวณค่าที่แก้ไข (Correction) ได้จาก $\Delta p_i = p_i - \hat{p}_i$

2. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ค่าที่แก้ไขจาก $\alpha_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}^2$

3. ทำการซ้ำในข้อที่1และ2จนครบทุกเส้นรังสี

- กำหนดให้ N_{c_j} เป็นจำนวนเส้นรังสีที่ผ่านเซลล์ที่ j^{th} และตรงกันกับ w_{ij} และ Δp_i
- สำหรับแต่ละเซลล์ที่ j^{th} จะทำการปรับปรุงค่าของผลเฉลยด้วยผลรวมเฉลี่ยของค่าที่แก้ไขดังสมการ

$$\hat{f}_j^{new} = \hat{f}_j^{old} + \lambda \frac{\sum_{i=1}^{N_{c_j}} \frac{w_{ij} \Delta p_i}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^{N_{c_j}} w_{ij}} \quad (2.68)$$

เป็นการเสร็จการคำนวณอิตเทอเรชันที่ k^{th}

2.7.1.3 SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Techniques)

Anderson และ Kak ได้เป็นผู้ที่นำเสนอวิธีนี้ขึ้น ซึ่งเป็นการรวมกันระหว่างวิธี ART และ วิธี SIRT โดยพบว่าให้ประสิทธิภาพที่ดีกว่าทั้งสองวิธีที่กล่าวมาแล้ว ในวิธี SART นี้จะมีการปรับปรุงค่าของผลเฉลยจากค่าที่แก้ไขค่า คล้ายกับวิธีการART แต่จะมีโครงสร้างคล้ายกับวิธี SIRT

ขั้นตอนของการคำนวณมีดังนี้

- สำหรับมุมของการฉายรังสีที่ θ

1. สำหรับรังสีที่ i_{θ}^{th} สามารถคำนวณค่าที่แก้ไข (Correction) ได้จาก $\Delta p_{i\theta} = p_{i\theta} - \hat{p}_{i\theta}$

2. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ค่าที่แก้ไขจาก $\alpha_{i\theta} = \sum_{j=1}^N w_{ij\theta}^2$

3. ทำการซ้ำในข้อที่1และ2จนครบทุกเส้นรังสีที่อยู่ในมุมของการฉายรังสีที่ θ

- กำหนดให้ N_{c_j} เป็นจำนวนเส้นรังสีที่ผ่านเซลล์ที่ j^{th} และตรงกันกับ $w_{ij\theta}$ และ $\Delta p_{i\theta}$
- สำหรับแต่ละเซลล์ที่ j^{th} จะทำการปรับปรุงค่าของผลเฉลยด้วยผลรวมเฉลี่ยของค่าที่แก้ไขดังสมการ

$$\hat{f}_j^{new} = \hat{f}_j^{old} + \lambda \frac{\sum_{i=1}^{N_{c_j}} \frac{w_{ij\theta} \Delta p_{i\theta}}{\alpha_{i\theta}}}{\sum_{i=1}^{N_{c_j}} w_{ij\theta}} \quad (2.69)$$

- ทำซ้ำในขั้นตอนข้างต้นจนครบทุกมุมของการฉายรังสี เป็นการเสร็จการคำนวณอิทธิพลเรชั่นที่ k^{th}

2.7.2 ทฤษฎีของคาร์แมค (Kaczmarz Method)

ทฤษฎีของคาร์แมค(Kaczmarz Method) เป็นทฤษฎีที่ใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีรูปแบบดังสมการ (2.70)

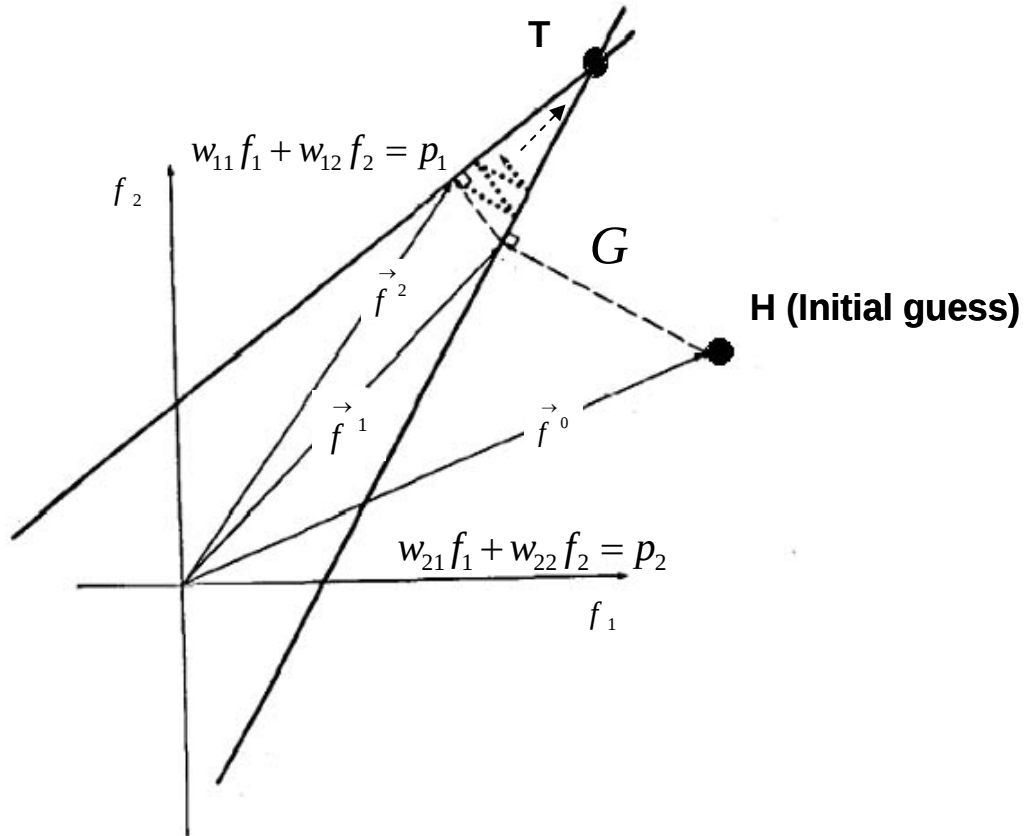
$$\begin{aligned} w_{11} f_1 + w_{12} f_2 + \dots + w_{1N} f_N &= p_1 \\ w_{21} f_1 + w_{22} f_2 + \dots + w_{2N} f_N &= p_2 \\ &\vdots \\ w_{M1} f_1 + w_{M2} f_2 + \dots + w_{MN} f_N &= p_M \end{aligned} \quad (2.70)$$

โดยผลเฉลยที่ถูกแทนด้วย $(f_1, f_2, \dots, f_N)$ จะถูกพิจารณาว่าเป็นจุดในสเปซ(Space) N มิติ ในสเปซดังกล่าวแต่ละสมการจะแทน Hyperplane เมื่อระบบสมการสามารถหาผลเฉลยที่เป็นหนึ่งเดียว (Unique Solution) จุดตัดของHyperplane ทั้งหมดจะเป็นจุดจุดเดียวและเป็นค่าผลเฉลยของสมการ (Solution) เพื่อที่จะให้เห็นชัดถึงแนวคิดดังกล่าวเราได้แสดงให้เห็นในภาพ 4.2 ซึ่งเป็นกรณีที่เรามีตัวแปรแค่สองตัว f_1 และ f_2 และมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} w_{11} f_1 + w_{12} f_2 &= p_1 \\ w_{21} f_1 + w_{22} f_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

ในวิธีของ Kaczmarz เราต้องทำการเดาคำตอบเบื้องต้น ให้การเดานี้คือ $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ การเดาสามารถเขียนแทนแบบเวกเตอร์ได้เป็น $\vec{f}^{(0)}$ ในในสเปซ (Space) N มิติ การเดาเบื้องต้นนี้จะถูกโปรเจกไปบน Hyperplane ซึ่งก็คือสมการแรกใน (2.71) ได้เป็น $\vec{f}^{(1)}$ ดังแสดงในรูป 2.19 สำหรับกรณีสองมิติ การคำนวณในขั้นตอนแรกนี้จะทำโดยใช้สูตร

$$\vec{f}^{(1)} = \vec{f}^{(0)} - \frac{(\vec{w}_1 \cdot \vec{f}^{(0)} - p_1)}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 \quad (2.72)$$



รูปที่ 2.19 ภาพแสดงการใช้ทฤษฎีของคาร์แมคในการแก้ระบบสมการ 2 ตัวแปร

โดยที่ $\vec{w}_1 = (w_{11}, w_{12})$ คือสัมประสิทธิ์ของสมการแรกใน (2.71) การพิสูจน์ (2.72) ทำได้โดยการเขียน (2.71) ใหม่ดังนี้

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{f} = p_1 \quad (2.73)$$

โดย Hyperplane ของสมการนี้ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{w}_1$ ดังแสดงในรูป 2.20 สมการนี้กล่าวว่าโปรเจกชันของเวกเตอร์ $\vec{OC}$ (สำหรับจุดใดๆใน Hyperplane) บนเวกเตอร์ $\vec{w}_1$ ที่มีความยาวคงที่เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{OU}$ บน $\vec{w}_1$ คือ

$$\vec{OU} = \frac{\vec{w}_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}} \quad (2.74)$$

แทนค่า (2.74) และ (2.74) ลงใน (2.77) เราได้

$$|\vec{HG}| = \frac{\vec{f}^{(0)} \cdot \vec{w}_1 - p_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}} \quad (2.78)$$

เนื่องจากทิศทางของ $\vec{GH}$ เหมือนกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{OU}$ เราสามารถเขียน

$$\vec{HG} = |\vec{HG}| \vec{OU} = \frac{\vec{f}^{(0)} \cdot \vec{w}_1 - p_1}{\sqrt{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}} \quad (2.79)$$

แทนค่า (2.79) ลงใน (2.76) เราจะได้ (2.72)

หลังจากได้ $\vec{f}^{(1)}$ เราทำการโปรเจก $\vec{f}^{(1)}$ บน Hyperplane ซึ่งคือสมการที่สองของ (2.70) ซึ่งจะได้เป็น $\vec{f}^{(2)}$ ดังแสดงในรูป 2.19 ขบวนการ Process ที่ทำซ้ำสำหรับ Hyperplane ต่อๆ ไป การโปรเจกบน Hyperplane ที่ j^{th} สามารถได้จากการโปรเจกชันบน Hyperplane ที่ $(j-1)^{th}$ ดังนี้

$$\vec{f}^{(j)} = \vec{f}^{(j-1)} - \frac{(\vec{w}_j \cdot \vec{f}^{(j-1)} - p_j)}{\vec{w}_j \cdot \vec{w}_j} \vec{w}_j \quad (2.80)$$

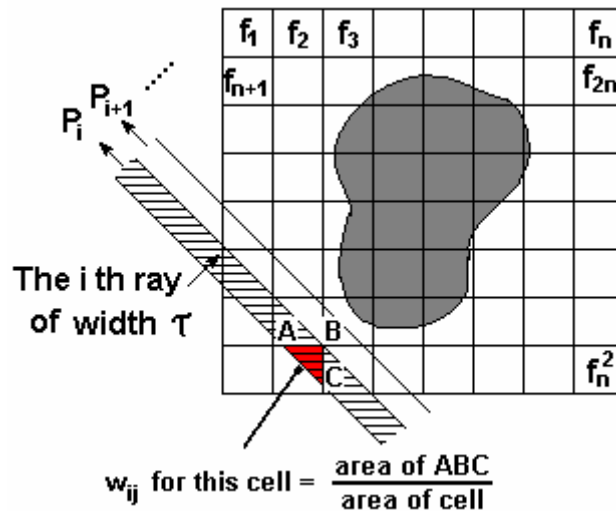
โดยที่ $\vec{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, \dots, w_{jN})$

ขบวนการ (Process) ของการทำโปรเจกชันบน Hyperplane ต่างกันจะดำเนินต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเราได้ $\vec{f}^{(M)}$ ซึ่งคือการโปรเจกชันของสมการสุดท้ายของ (2.70) จากนั้นก็จะทำการวนซ้ำโดยการโปรเจกชัน $\vec{f}^{(M)}$ ไปบน Hyperplane อันแรก ตัวอย่างของสองมิติแสดงในรูป 2.19 การโปรเจก $\vec{f}^{(2)}$ บน Hyperplane อันแรกได้เป็น $\vec{f}^{(3)}$ กระบวนการ (Process) จะดำเนินต่อไปจนกระทั่งทั้งหมดของ M Hyperplane ได้มีการวนผ่าน (Cycled) เพื่อได้เป็น $\vec{f}^{(2M)}$ การทำซ้ำครั้งที่สองก็เกิดขึ้นจากการโปรเจก $\vec{f}^{(2M)}$ ไปบน Hyperplane อันแรก เป็นเช่นนี้เรื่อยๆ ไป Tanabe [16] ได้แสดงว่าถ้าค่าของสมการที่เป็นหนึ่งเดียว (Unique Solution) $\vec{f}_s$ ของระบบใน (2.70) สามารถหาได้แล้ว

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}^{(kM)} = \vec{f}_s \quad (2.81)$$

2.7.3 การคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก(Weigthing factor)

ในการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริทึมแบบพิกเซลนั้น การคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนักมีความสำคัญเป็นอย่างมาก ซึ่งในการสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงแบบขนานกับการสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินแสงรูปกรวยนั้นก็มีส่วนที่ต่างกันเฉพาะการหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก ส่วนการคำนวณในช่วงของการอิทธิพลจะเหมือนกัน ในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงเฉพาะการคำนวณค่าแฟกเตอร์น้ำหนักที่ใช้กับทางเดินแสงแบบขนาน



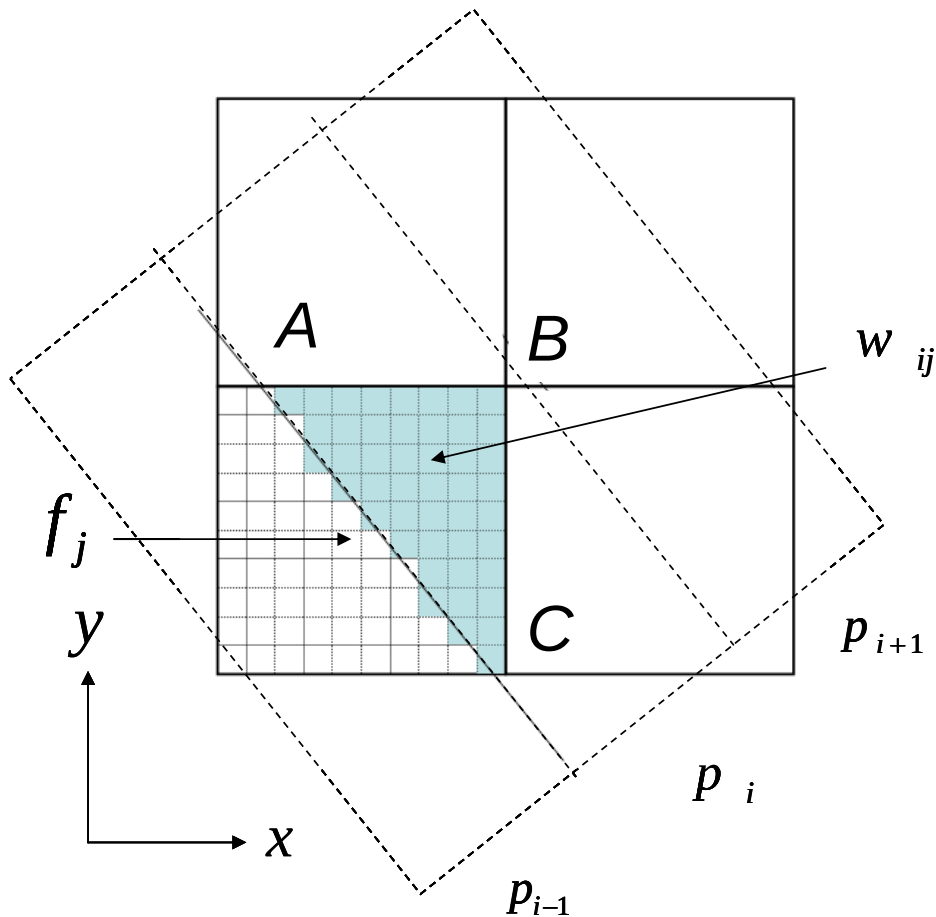
รูปที่ 2.21 ภาพแสดงการคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก

จากรูปที่ 4.21 จะเห็นว่าค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก(w_{ij}) จะเป็นอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของเซลล์ที่ j ที่แสงเส้นที่ i ผ่านกับพื้นที่ของเซลล์ที่ j ดังสมการ

$$W_{ij} = \frac{\text{area of } ABC}{\text{area of cell}} \quad (2.82)$$

ซึ่งจะเห็นว่าการที่จะคำนวณหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมABC ของแต่ละเซลล์ที่แสงผ่านนั้นเป็นการคำนวณที่ยุ่ยากในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ทำการคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนักโดยทำการแบ่งเซลล์แต่ละเซลล์ออกเป็นเซลล์ย่อยๆ แล้วทำการคำนวณหาว่าเซลล์ย่อยแต่ละเซลล์อยู่ในเส้นทางที่แสงผ่านหรือไม่

$$W_{ij} = \frac{\text{จำนวนของเซลล์ย่อยที่อยู่ในเส้นทางเดินแสง}}{\text{จำนวนของเซลล์ย่อยทั้งหมด}} \quad (2.83)$$



รูปที่ 2.22 ภาพแสดงตัวอย่างการคำนวณหาค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก

จากรูปที่ 2.22 จะเห็นว่าเซลจะถูกแบ่งเป็น 100 เซลย่อย โดยจะมี 48 เซลย่อยที่อยู่ในเส้นทางเดินแสง ดังนั้นเซลนี้มีค่าแฟกเตอร์น้ำหนักมีค่าเท่ากับ $(48/100) = 0.48$

นอกจากนี้ค่าแฟกเตอร์น้ำหนักยังสามารถที่จะคำนวณค่าไว้ล่วงหน้าแล้วเก็บเป็นไฟล์ไว้เพื่อใช้ในการสร้างภาพตัดขวางได้โดยไม่ต้องคำนวณใหม่ทุกครั้ง ซึ่งจะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงได้

2.8 ทำไมอัลกอริธึมแบบพีชคณิตจึงต้องการจำนวนโปรเจกชันน้อยกว่าวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน

คำถามนี้ได้รับการตอบโดย Guan และ Gordon [18] สำหรับกรณีของการสร้างภาพกลับแบบ 2 มิติโดยใช้ลำแสงแบบขนาน และได้มีการอธิบายถึงในกรณีของการสร้างภาพกลับแบบ 3 มิติโดย Mueller ใน [19]

การสร้างภาพกลับของภาพที่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $n \times n$ ดังนั้นจำนวนเซลทั้งหมดของภาพจะเป็น $N = n^2$ โดยทั่วไปเราจะสมมติให้ขอบเขตของการสร้างภาพกลับเป็นวงกลม โดยพื้นที่นอกวงกลมถือว่าไม่มีข้อมูล ในกรณีนี้เราจะมี $(1/4)\pi n^2$ เซลที่ไม่ทราบค่าและข้อมูลโปรเจกชัน n ค่าต่อโปรเจกชันหนึ่งมุม จากสมการ (2.62) ในการจะหาผลเฉลยของสมการ จำนวนโปรเจกชันของภาพ M_{ART} ต้องการเป็น

$$M_{ART} = \frac{(1/4)\pi n^2}{n} = \frac{\pi n}{4} = 0.785 \cdot n \quad (2.84)$$

จากนั้นมาดูจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน (FBP) ค่าระยะห่างของการสุ่มข้อมูลในโดเมนความถี่ (Fourier space) ที่น้อยที่สุดเป็น $\Delta\omega = 1/nT_g$ และค่าความถี่สูงสุดเป็น $\omega_{\max} = 1/(2T_g)$ แต่เนื่องจากการสุ่มในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar sampling) ในโดเมนความถี่จึงทำให้ความหนาแน่นในการสุ่มข้อมูลลดลงเมื่อออกห่างจากแกน จากอัตราการสุ่มข้อมูลที่น้อยที่สุด $\Delta\omega$ จะเป็นตัวกำหนดขอบเขตในการคำนวณค่ามุมระหว่างโปรเจกชันที่น้อยที่สุดที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน ดังสมการ

$$\Delta\phi_p = \frac{\Delta\omega}{\omega_{\max}} = \frac{2T_g}{nT_g} = \frac{2}{n} \quad (2.85)$$

ดังนั้นจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันเป็น

$$M_{FBP} = \frac{\pi}{\Delta\phi_p} = \frac{\pi n}{2} = 1.57 \cdot n \quad (2.86)$$

จะเห็นว่าจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันเป็นเป็นสองเท่าของจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการสำหรับวิธีART

ในการสร้างภาพกลับแบบสามมิติ ปริมาตรที่ต้องการสร้างกลับสี่เหลี่ยมลูกบาศก์มีขนาด $n \times n \times n$ ดังนั้นจำนวนของเซลล์ทั้งหมดของปริมาตรจะเป็น $N = n^3$ เช่นเดียวกันโดยทั่วไปแล้วจะสมมติให้ขอบเขตของการสร้างภาพกลับเป็นทรงกลม เราจะมีเซลล์ที่ไม่ทราบค่า $(1/6)\pi n^3$ เซลล์และข้อมูลโปรเจกชันจำนวน $(1/4)\pi n^2$ ต่อโปรเจกชันหนึ่งมุม ดังนั้นจำนวนโปรเจกชันที่ต้องการ M_{ART3D} เป็น

$$M_{ART3D} = \frac{(1/6)\pi n^3}{(1/4)\pi n^2} = 0.67n \quad (2.87)$$

2.9 โปรเจกชันและแบ็คโปรเจกชันใน SART

ในหัวข้อนี้กล่าวถึง ขั้นตอนการโปรเจกชันและแบ็คโปรเจกชันของกระบวนการเชิงพีชคณิต SART มีขั้นตอนการหาค่าผิดพลาดจากโปรเจกชันที่คำนวณได้กับโปรเจกชันต้นฉบับของเส้นแสงในโปรเจกชันมุมเท่ากับ θ จากนั้นนำค่าผิดพลาดดังกล่าวไปปรับปรุงให้กับภาพสำหรับมุม θ จนครบทุกมุมโปรเจกชัน แล้วจึงคำนวณค่าความผิดพลาดดังกล่าวไปปรับปรุงให้กับภาพ MSE^k สำหรับอิตเทอเรชันที่ k กระบวนการก็จะวนซ้ำซ้ำทั้งหมดจนกว่าผลต่างของค่าผิดพลาดเฉลี่ย MSE^k กับ MSE^{k-1} จะมีค่าต่ำกว่าค่า pre-specified stopping criteria(per) ที่กำหนดไว้

$$f_j^k(\theta) = f_j^{k-1}(\theta) + \lambda \frac{p_{i\theta} - \sum_{s=0}^l f^{k-1}(s, i, \theta)}{l} \quad (2.88)$$

2.9.1 SART โปรเจกชัน

การโปรเจกชันสามารถทำได้โดยนำค่าของวัตถุหรือภาพของแสงเส้นที่ i^{th} ผ่านมารวมกัน แต่เนื่องจากข้อมูลของวัตถุหรือภาพนั้นเป็นข้อมูลแบบสุมที่อยู่ในระบบพิกัดฉาก (Cartesian-coordinate) ทำให้ตำแหน่งการสุมของเส้นแสงไม่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน จึงต้องใช้การประมาณค่าให้กับตำแหน่งดังกล่าว จากรูปที่ 2.23(ก) เป็นการประมาณค่าแบบเชิงเส้น (Linear-Interpolation) จากข้อมูลภาพ $f_{x,y}$ ให้กับแสงเส้นที่ i^{th} โดยนำค่าข้อมูลภาพรอบ ๆ $f_{x,y}$ คือ f_{x_0,y_0} , f_{x_1,y_0} , f_{x_0,y_1} และ f_{x_1,y_1} มาเฉลี่ยตามแกนนอนให้ที่จุด A สมการที่ (2.89) และจุด B สมการที่ (2.90) แล้วจึงนำไปเฉลี่ยตามแกนตั้งคือ $f_{x,y}$ ตามสมการที่ (2.91)

$$A = (f_{x_1,y_0} - f_{x_0,y_0}) \cdot (x - x_0) + f_{x_0,y_0} \quad (2.89)$$

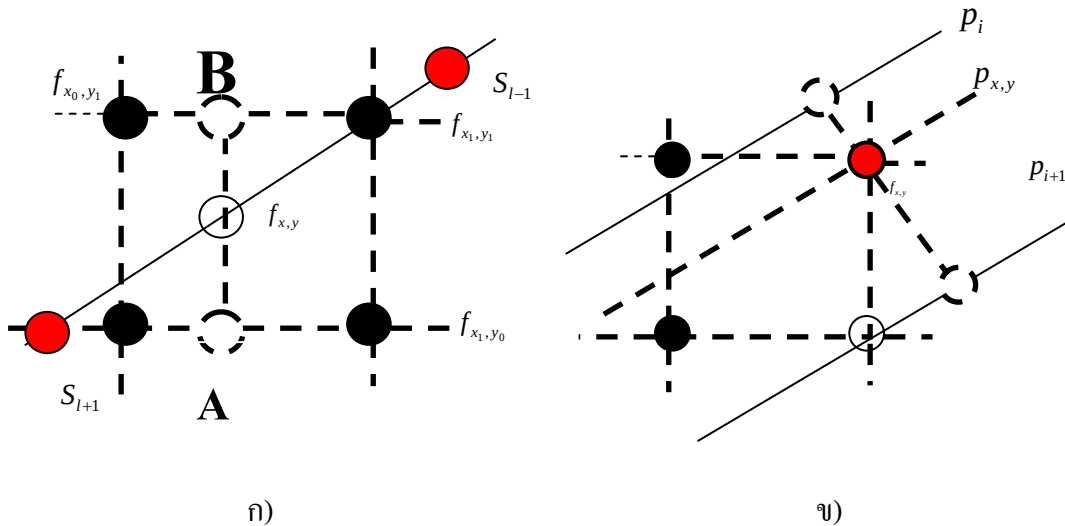
$$B = (f_{x_1,y_1} - f_{x_0,y_1}) \cdot (x - x_0) + f_{x_0,y_1} \quad (2.90)$$

$$f_{x,y} = (B - A) \cdot (y - y_0) + A \quad (2.91)$$

2.9.2 SART แบ็คโปรเจกชัน

แบ็คโปรเจกชันเป็นการนำข้อมูลจากเส้นแสง $p_{x,y}$ ไปใส่ให้ที่ภาพ $f_{x,y}$ พิจารณารูปที่ 2.23(ข) หาได้จากการเฉลี่ยค่าจากเส้นแสง p_i กับ p_{i+1} ดังสมการที่ 2.91

$$p_{x,y} = (p_{i+1} - p_i) \cdot (x \cos \theta + y \sin \theta - i) + p_i \quad (2.92)$$



รูปที่ 2.23 การประมาณค่าแบบเชิงเส้น

ก) จากภาพสู่เส้นทาง

ข) จากเส้นแสงสู่ภาพ