

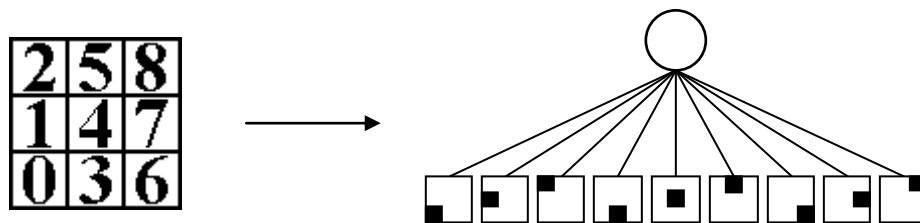
บทที่ 3

การบีบอัดรูปภาพด้วยอโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนัก โดยใช้การแบ่งแบบโนนาทรี

จากบทที่แล้วจะเห็นว่ารูปภาพที่จะทำการบีบอัดโดยส่วนมากแล้วจะมีขนาดเป็น $2^n \times 2^n$ แต่โดยความจริงแล้วอาจจะมีรูปขนาดอื่นๆ อยู่ด้วย ดังนั้นในบทนี้จะนำเสนอวิธีการแบ่งรูปแบบโนนาทรีเพื่อใช้ในการบีบอัดรูปภาพ

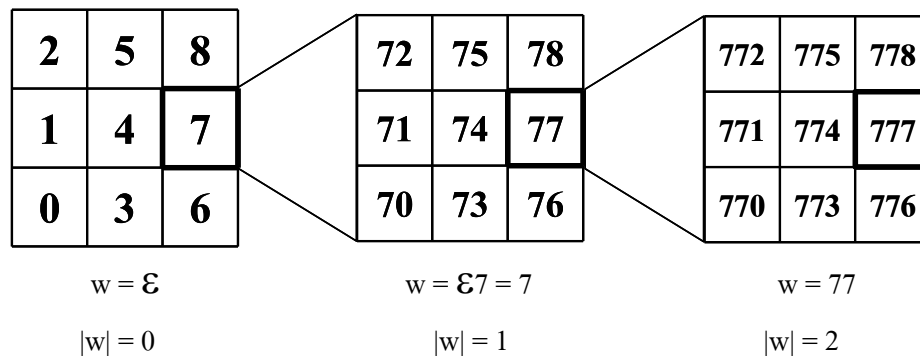
3.1 รูปภาพดิจิทัลและการแบ่งแบบโนนาทรี (Nona – Tree)

ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 รูปภาพดิจิทัลที่จะทำการบีบอัดจะต้องทำการแบ่งรูปภาพเป็นรูปย่อยๆ เสียก่อน โดยในบทนี้จะกำหนดให้ขนาดของรูปภาพเป็น $3^n \times 3^n$ พิกเซล กล่าวคือ จะกำหนด ขนาดของรูปภาพที่มีขนาดจำกัด (finite-resolution image) จะหมายถึง รูปภาพดิจิทัลที่เป็นรูปไล่ระดับสีเทา (gray-scale) ที่ประกอบด้วยจุดจำนวน $3^n \times 3^n$ พิกเซล ซึ่ง $5 \leq m \leq 8$ และ ขนาดของรูปภาพที่ไม่จำกัดขนาด (multiresolution image) จะหมายถึง รูปภาพดิจิทัลที่มีขนาด $3^n \times 3^n$ พิกเซล โดยที่ $n = 0, 1, 2, \dots$ โดยที่แต่ละพิกเซลจะมีชุดของตัวอักษร w ที่มีความยาว n เพื่อบ่งบอกถึงตำแหน่ง หรือแอดเดรส ของแต่ละพิกเซล ซึ่ง w จะประกอบด้วยตัวอักษรใน $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ซึ่งแต่ละตัวอักษรใน Σ จะแสดงถึงตำแหน่งของรูปย่อยที่ถูกแบ่งด้วยวิธีโนนาทรี ในส่วนของรูปภาพต้นฉบับจะกำหนดให้มีตำแหน่งเป็น ϵ ซึ่งเมื่อเขียนเป็นต้นไม้จะได้ว่า รูปภาพต้นฉบับเป็นราก (root) และจะได้ว่าแต่ละรูปย่อยซึ่งมีตัวอักษร w เป็นสมาชิกใน Σ จะเป็นลูกดังที่ได้แสดงดังรูป 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงถึงตำแหน่งของรูปย่อย

ทุกๆ $w \in \Sigma^*$ ที่มีความยาว k โดยที่แต่ละ w ที่เป็นแอดเดรสของโหนดจะมีเพียงหนึ่งเดียวของโนนาทรี ซึ่งจะมีความลึก (depth) k โดยที่ลูกๆ ของ w จะมีแอดเดรสเป็น $w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ ซึ่งจะมีความยาว $k+1$ ดังที่ได้แสดงดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงแอดเดรสของรูปย่อและความยาวของแอดเดรส

3.2 ออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนัก

ดังที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่แล้วว่าแต่ละพิกเซลจะมีตัวอักษรกำกับเพื่อบ่งบอกแอดเดรส จึงทำให้สามารถที่จะกำหนดได้รูปแบบฟังก์ชันของรูปภาพใดๆ ว่าเป็นฟังก์ชันจำนวนจริงบน Σ^* ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ w ซึ่งเป็นแอดเดรสของรูปย่อ และค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของรูปย่อนั้น ว่าเป็นฟังก์ชัน $f: \Sigma^* \rightarrow \mathcal{R}$ ซึ่งเรียกว่าเป็นเอเวอเรจพรีเซิร์ฟฟังก์ชัน (average preserving function) หรือเรียกย่อๆ ว่า เอพีฟังก์ชัน (ap-function)

โดยกำหนดว่า $f: \Sigma^* \rightarrow \mathcal{R}$ เป็นเอพีฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ

$$f(w) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{i=0}^3 w_i \quad (3.1)$$

สำหรับแต่ละ $w \in \Sigma^*$

เอพีฟังก์ชัน f จะถูกแทนค่าด้วยแอดเดรส w ของรูปภาพย่อ เมื่อรูปภาพต้นฉบับหรือรากจะถูกแทนค่าด้วย $f(\mathcal{E})$ ดังนั้นรูปภาพย่อจะเป็น $f(0), f(1), \dots, f(8)$ เมื่อ w มีค่า $k=1$ จะสังเกตได้ว่า $f(w)$ จะเป็นค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของรูปย่อ w เมื่อรูปที่กำหนดมาให้เป็นรูปที่อยู่ในลักษณะการไล่ระดับสีเทา (grey-tone)

กำหนดให้เซตของฟังก์ชัน $F: \Sigma^n \rightarrow \mathcal{R}$ มีนิยามการกระทำบนการบวกและการคูณกับจำนวนจริงดังนี้

$$(f_1 + f_2)(w) = f_1(w) + f_2(w)$$

สำหรับทุกๆ ฟังก์ชัน $f_1, f_2: \Sigma^* \rightarrow \mathcal{R}$ และ $w \in \Sigma^*$

$$(cf)(w) = cf(w)$$

สำหรับทุกๆ ฟังก์ชัน $f : \Sigma^* \rightarrow \mathcal{R}$ และ $c \in \mathcal{R}$

เซตของเอฟฟังก์ชัน f จะอยู่ในรูปของปริภูมิย่อยเชิงเส้น (linear subspace) เพราะทุกๆ ผลบวกเชิงเส้นของ เอฟฟังก์ชันเป็นเอเวอเรจพรีเซิร์ฟวิ่ง (average preserving) โดยที่ผลบวกจะหมายถึงการที่เกิดจากการรวมกันของความเข้มแสง และการคูณโดยจำนวนจริงจะเป็นการเพิ่มความเข้มแสงเป็นจำนวนทวีคูณ

การกระทำทั้ง 2 นี้จะใช้สำหรับการคำนวณเพื่อการสร้างออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักโดยจะหาความสัมพันธ์กันระหว่างรูปย่อยซึ่งจะคิดจากค่าเฉลี่ยความเข้มแสง ความสัมพันธ์นี้จะหาได้จากการรวมเชิงเส้น (linear combination) และนำความสัมพันธ์ที่หาได้มาเขียนเป็นออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักโดยรายละเอียดของออโตมาตามีดังนี้

ส่วนประกอบของออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนัก A จะประกอบด้วยสมาชิก 5 ตัว คือ Q, Σ, W_a, I, F ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. Q เป็นเซตจำกัดของโหนด หรือจะเรียกว่าสถานะ (states) ซึ่งจะใช้เป็นตัวแทนของรูปย่อยแต่ละรูป โดยการเก็บค่าเฉลี่ยความเข้มแสงไว้
2. Σ เป็นเซตจำกัดของตัวอักษร, จะเป็นผลากของขอบ (edge) หรือของทางเดิน
3. $W_a : Q \times Q \rightarrow \mathcal{R}$ เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) ซึ่งเป็นการเปลี่ยนสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่งโดยที่มีผลาก $a \in \Sigma$ กำกับอยู่แต่ละทางเดินพร้อมกับค่าน้ำหนักที่จะได้จากการเปลี่ยนสถานะหรือโหนด
4. $I : Q \rightarrow (-\infty, \infty)$ เป็นการแจกแจงค่าเริ่มต้น (initial distribution) เพื่อบอกโหนดเริ่มต้นของออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนัก
5. $F : Q \rightarrow (-\infty, \infty)$ เป็นการแจกแจงค่าสิ้นสุด (final distribution) ซึ่งค่าที่ได้จะเป็นค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของแต่ละรูปย่อย

จะกล่าวว่า $(p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q$ เป็นทางเดินเพื่อที่จะเปลี่ยนสถานะ (transition) ของ A ซึ่งถ้า $W_a(p, q) \neq 0$ ซึ่งเป็นค่าถ่วงน้ำหนัก โดยที่ $a \in \Sigma$ และ $p, q \in Q$

สำหรับ $|Q| = n$ จะสามารถเขียนการเปลี่ยนสถานะให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ W_a ได้ซึ่งมีขนาดเป็น $n \times n$ ทุกๆ $a \in \Sigma$ และ I, F ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด n โดยที่เวกเตอร์ $I = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ เพื่อที่จะบ่งบอกว่าโหนดที่มีค่าการแจกแจงการเริ่มต้นเป็น 1 เป็นโหนดเริ่มต้น ดังนั้นโหนดอื่นๆ จึงมีค่าเป็น 0

เนื่องจากการกำหนดให้ WFA A เป็นรูปภาพดิจิทัล f_A จึงทำให้ได้ว่า

$$f_A(a_1 a_2 \dots a_k) = I W_{a_1} W_{a_2} \dots W_{a_k} F \quad (3.2)$$

สำหรับทุกๆ $k \geq 0$ และ $a_1 a_2 \dots a_k \in \Sigma^*$

3.2.1 วิธีการเข้ารหัสแบบโนนาทรี

ในการแบ่งแบบโนนาทรี หรือ แบ่งเก้าจะได้ว่า $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ และเนื่องจากรูปภาพดิจิทัลใดๆ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเอฟฟังก์ชันได้ ดังนั้นเราจะสามารถเขียนการเอฟฟังก์ชันเมื่อทำการแบ่งแบบโนนาทรีได้ดังนี้

$$f(w) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{i=0}^9 w_i \quad (3.3)$$

สำหรับแต่ละ $w \in \Sigma^*$

หรือถ้าหากทำการแจกแจงออกมาก็จะได้นี้

$$f(w) = \frac{1}{9} (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8) \quad (3.4)$$

โดยคุณสมบัตินี้ทำให้สามารถนำมาคำนวณความสัมพันธ์เพื่อสร้างออโตมาตาทรงน้ำหนักได้ดังนี้

กระบวนการการสร้างออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนัก (Inference Algorithm)

สำหรับรูปภาพใดๆ ที่กำหนดให้เป็นเอฟฟังก์ชัน $f: \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$ ดังนั้นจะสามารถสร้าง WFA M ได้ ซึ่งในการสร้างจะมีตัวแปรและกระบวนการสร้างดังต่อไปนี้

N	เป็นตัวชี้ไปยังสเตตสุดท้ายที่พึงสร้าง
i	เป็นตัวชี้ไปยังสเตตที่จะทำการสร้างขอบไปยังโนนดอื่นๆ
ϕ_p	เป็นรูปย่อยซึ่งถูกแทนด้วยโนนด p
$F(x)$	เป็นการแจกแจงค่าสิ้นสุดของรูปย่อยซึ่งจะมีแอดเครสเป็น x ซึ่งจะหาค่าได้จาก $f_{avg}(x) = f(x)$
$\gamma: Q \rightarrow \Sigma^*$	เป็นฟังก์ชันระหว่างสเตตและรูปย่อย

ค่านำเข้า : รูปภาพ M ซึ่งมีขนาด $2^k \times 2^k$

ค่าส่งออก : WFA M ที่เป็นการเข้ารหัสของรูปภาพ M

1. กำหนดให้ $N = 0, i = 0, F(q_0) = f(\varepsilon), \gamma(q_0) = \varepsilon$
2. พิจารณาโหนด q_i เมื่อ $w = \gamma(q_i)$ สำหรับทุกๆ แต่ละ

$$a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

2.1 ถ้าสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ $c_0, c_1, \dots, c_N$ โดยที่

$$f_{wa} = c_0 f_{\gamma(q_0)} + c_1 f_{\gamma(q_1)} + \dots + c_N f_{\gamma(q_N)}$$

แล้วจะกำหนดให้ $W_a(q_i, q_j) = c_j$ สำหรับ $j = 0, 1, \dots, N$

2.2 ถ้าไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ ให้กำหนด

$$\gamma(q_{N+1}) = wa, F(q_{N+1}) = f_{wa} \text{ และ } W_a(q_i, q_{N+1}) = 1, N = N + 1$$

3. กำหนดให้ $i = i + 1$, ถ้า $i \leq N$ ให้กลับไปทำยังข้อ 2.
4. กำหนด $I(q_0) = 1, I(q_i) = 0$ สำหรับ $j = 1, \dots, N$ เมื่อ I เป็นค่าการแจกแจงค่าเริ่มต้นของ M

ในกระบวนการสร้างนี้จะสังเกตเห็นได้ว่าจะมีการสร้างโหนดใหม่ขึ้นมาเมื่อไม่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ของแต่ละโหนดได้ ดังนั้นจะสามารถกล่าวได้ว่าทุกๆ โหนดนั้นเป็นอิสระต่อกัน (Independent) เช่น สำหรับโหนด ϕ_i ใดๆ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ จะไม่สามารถแสดงได้ด้วยผลรวมเชิงเส้นของโหนดอื่นๆ ดังสมการ

$$c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n = 0 \quad (3.5)$$

ซึ่งจะมีคำตอบของผลรวมเชิงเส้นคือ $[c_0, c_1, \dots, c_n] = [0, 0, \dots, 0]$ เพียงคำตอบเดียว ดังนั้นกระบวนการสร้างไฟไนต์ออโตมาต้าแบบถ่วงน้ำหนักนี้จึงสามารถสร้างไฟไนต์ออโตมาต้าแบบถ่วงน้ำหนักที่มีจำนวนโหนดน้อยที่สุดแล้ว

ในกระบวนการขั้นตอนในข้อที่ 2. ซึ่งจะต้องแก้สมการเพื่อที่จะหาค่าสัมประสิทธิ์คงที่ $[c_0, c_1, \dots, c_N]$ จากสมการ

$$f_{wa} = c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \dots + c_N \phi_N \quad (3.6)$$

ในส่วนนี้จะนำรูปย่อยของรูป w มาสร้างเป็นระบบสมการผลรวมเชิงเส้นของรูปภาพซึ่งถูกแทนที่ด้วยโหนดที่ได้ถูกสร้างขึ้นมาแล้ว ซึ่งในการบวนการสร้างระบบสมการเชิงเส้นนี้ จะอาศัย

คุณสมบัติที่ว่ารูปภาพ M ที่จะทำให้การเข้ารหัสนี้จะมีคุณสมบัติของเอพียังก์ชัน และ ϕ_j เมื่อ $j = 0, 1, \dots, N$ เป็นตัวแปรที่เก็บค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของแต่ละโหนดซึ่งเป็นตัวแทนของรูปย่อยแต่ละรูปที่ถูกนำมาสร้างเป็นโหนดใหม่เมื่อไม่สามารถแก้สมการค่าสัมประสิทธิ์ได้ดังนั้น

$$\phi_i = \frac{1}{9}[\phi_i(0) + \phi_i(1) + \phi_i(2) + \phi_i(3) + \phi_i(4) + \phi_i(5) + \phi_i(6) + \phi_i(7) + \phi_i(8) + \phi_i(9)] \quad (3.7)$$

จากสมการ (3.7) และสมการที่ (3.6) ก็จะสามารถสร้างระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f_{wa} &= c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_N\phi_N \\ &\Downarrow \\ f_{wa}(0) &= c_0\phi_0(0) + c_1\phi_1(0) + \dots + c_N\phi_N(0) \\ f_{wa}(1) &= c_0\phi_0(1) + c_1\phi_1(1) + \dots + c_N\phi_N(1) \\ f_{wa}(2) &= c_0\phi_0(2) + c_1\phi_1(2) + \dots + c_N\phi_N(2) \\ f_{wa}(3) &= c_0\phi_0(3) + c_1\phi_1(3) + \dots + c_N\phi_N(3) \\ f_{wa}(4) &= c_0\phi_0(4) + c_1\phi_1(4) + \dots + c_N\phi_N(4) \\ f_{wa}(5) &= c_0\phi_0(5) + c_1\phi_1(5) + \dots + c_N\phi_N(5) \\ f_{wa}(6) &= c_0\phi_0(6) + c_1\phi_1(6) + \dots + c_N\phi_N(6) \\ f_{wa}(7) &= c_0\phi_0(7) + c_1\phi_1(7) + \dots + c_N\phi_N(7) \\ f_{wa}(8) &= c_0\phi_0(8) + c_1\phi_1(8) + \dots + c_N\phi_N(8) \end{aligned} \quad (3.8)$$

หรือจะกล่าวได้ว่า ถ้ากำหนดให้ขนาดของรูปย่อยที่กำลังถูกพิจารณามีขนาดเป็น $2^k \times 2^k$ แล้ว จะสามารถสร้างสมการให้อยู่ในรูปต่อไปนี้ได้

$$f_{wa, 2^k \times 2^k} = c_0\phi_{0, 2^k \times 2^k} + c_1\phi_{1, 2^k \times 2^k} + \dots + c_N\phi_{N, 2^k \times 2^k} \quad (3.9)$$

เมื่อ $\phi_{i, 2^k \times 2^k}$ หมายถึงรูปที่มีขนาด $2^k \times 2^k$ ที่ถูกแทนด้วยโหนดที่ q_i และ $f_{wa, 2^k \times 2^k}$ หมายถึงรูปย่อยที่กำลังถูกพิจารณาซึ่งมีขนาด $2^k \times 2^k$ ซึ่งจะมีตำแหน่งแอดเดรสเป็น wa

ดังนั้นจึงจะสามารถสร้างระบบสมการผลรวมเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
f_{wa}(1,1) &= c_0\phi_0(1,1) + c_1\phi_1(1,1) + \dots + c_N\phi_N(1,1) \\
f_{wa}(1,2) &= c_0\phi_0(1,2) + c_1\phi_1(1,2) + \dots + c_N\phi_N(1,2) \\
&\dots \\
f_{wa}(1,2^k) &= c_0\phi_0(1,2^k) + c_1\phi_1(1,2^k) + \dots + c_N\phi_N(1,2^k) \\
f_{wa}(2,1) &= c_0\phi_0(2,1) + c_1\phi_1(2,1) + \dots + c_N\phi_N(2,1) \\
&\dots \\
f_{wa}(2,2^k) &= c_0\phi_0(2,2^k) + c_1\phi_1(2,2^k) + \dots + c_N\phi_N(2,2^k) \\
&\dots \\
f_{wa}(2^k,2^k) &= c_0\phi_0(2^k,2^k) + c_1\phi_1(2^k,2^k) + \dots + c_N\phi_N(2^k,2^k) \int
\end{aligned} \tag{3.10}$$

เมื่อสามารถสร้างระบบสมการผลรวมเชิงเส้นได้แล้ว จะสามารถสร้างให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[A][C] = [B] \tag{3.11}$$

- เมื่อ [A] เป็นเมตริกซ์ขนาด $4^k \times (n+1)$ ซึ่งในแนวกอถัมภ์จะมีสมาชิกตั้งแต่ (1,1) (1,2)...(1,2^k) (2,1)...(2,2^k)...(2^k,1)...(2^k,2^k) เป็นค่าความเข้มแสงของพิกเซลของ $\phi_i(x, y)$ ที่มีจำนวนทั้งหมด $2^k \times 2^k$ พิกเซล
- [C] เป็นเมตริกซ์ขนาด $(n+1) \times 1$ ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่จะต้องการหา
- [B] เป็นเมตริกซ์ขนาด $4^k \times 1$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นค่าความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลของรูป f_{wa}

เมื่อได้ระบบสมการผลรวมเส้นแล้วก็จะทำการหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ ซึ่งกระบวนการวิธีที่จะใช้แก้ปัญหของสมการนี้ก็มิได้หลายอย่าง เช่น Gaussian Elimination, Row Echelon, LU-Decomposition แต่ในการแก้สมการเหล่านี้ในแต่ละครั้งจำเป็นที่จะต้องให้จำนวนของสมการมากกว่าตัวแปร

3.2.2 วิธีการถอดรหัส

เมื่อสามารถหา WFA M ได้แล้วโดยปกติเมื่อจะทำการหาค่าของ $f_M(w)$ สำหรับ $w \in \Sigma^n$, เมื่อกำหนดให้ $n \geq 0$ จะต้องหาทางเดินทุกๆ เส้นทางที่มีความยาว n ที่อยู่ใน WFA M โดยการหาผลคูณของน้ำหนักของขอบที่ผ่าน และกำหนดค่าลงในพิกเซลของรูปที่สอดคล้องกัน แต่เนื่องจากวิธีนี้จะมีกรณีที่ย่ำที่สุดเมื่อทุกๆ โหนดมีเส้นทางเชื่อมหากันครบทุกผลากจะทำให้ทางเดิน

มีมาก หลังจากนั้นจึงนำผลรวมของน้ำหนักของขอบคูณกับค่าแจกแจงการสิ้นสุด มาหาค่าของ พิกเซล

เมื่อกำหนดค่า W_a ; $a \in \Sigma$ พร้อมทั้ง I และ F ก็จะสามารถคำนวณหาหาค่า $f_M(w)$ สำหรับ $w \in \Sigma^n$, เมื่อกำหนดให้ $n \geq 0$

โดยกำหนดให้ $\psi_p(w)$ สำหรับ $p \in Q$ เป็นรูปภาพของ โหนด p

กระบวนการถอดรหัส

ค่านำเข้า : WFA M , I และ F และจำนวนเต็มบวก n

ผลลัพธ์ : ค่าของ $f_A(w)$ สำหรับทุกๆ $w \in \Sigma^*$

1. กำหนด $\psi_p(\epsilon) = F(p)$ สำหรับทุกๆ $p \in Q$
2. ทำตามข้อ 3. สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$
3. สำหรับทุกๆ $p \in Q$, $w \in \Sigma^{i-1}$ และ $a \in \Sigma$

$$\psi_p(aw) = \sum_{q \in Q} W_a(p, q) \psi_q(w)$$

4. สำหรับแต่ละ $w \in \Sigma^n$ คำนวณ $f_M(w) = \sum_{q \in Q} I(q) \psi_q(w)$

สำหรับการวิเคราะห์การซับซ้อนของเวลา กำหนดให้ m เป็นจำนวนโหนด ค่าความซับซ้อนในข้อที่ 1, 3 และ 4 คือ $O(m)$, $O(m \cdot m \cdot |\Sigma|^{i-1} \cdot |\Sigma|) = O(m^2 \cdot |\Sigma|^i)$ และ $O(m \cdot |\Sigma|^n)$ แต่จะเห็นว่าในข้อ 3 ยังต้องวนลูปตามข้อ 2 อีก ดังนั้นค่าความซับซ้อนของเวลาในข้อ 2,3 คือ $O(m(|\Sigma| + |\Sigma|^2 + |\Sigma|^3 + \dots + |\Sigma|^n)) = O(m^2 \cdot |\Sigma|^n)$ ดังนั้นจึงสามารถสรุปค่าการซับซ้อนของเวลาในกระบวนการนี้ได้คือ $O(m + m^2 \cdot |\Sigma|^n + m \cdot |\Sigma|^n) = O(m^2 \cdot |\Sigma|^n)$

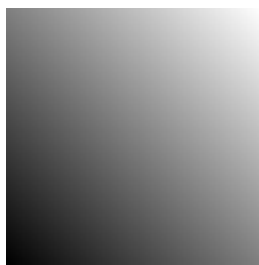
3.2.3 ตัวอย่างในการการเข้ารหัสและถอดรหัส

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นการเข้ารหัสและถอดรหัสที่ทำการแบ่งแบบไบนารี โดยจะใช้รูปภาพที่มีในลักษณะที่ต่างๆ กัน เพื่อแสดงให้เห็นถึงกระบวนการในการเข้ารหัสและถอดรหัส

ตัวอย่างที่ 1 การถอดรหัสและเข้ารหัสรูปภาพ

การเข้ารหัส

ในตัวอย่างนี้จะใช้รูปที่ 3.3 เป็นตัวอย่างทำการบีบอัดซึ่งแต่ละพิกเซลจะมีค่าความเข้มแสงดังรูปที่ 3.4 ซึ่งจะมีขนาดของรูปเท่ากับ 27x27



รูปที่ 3.3 ตัวอย่างรูปที่จะทำการปั๊มอัด

27	28	29		51	52	53
26	27	28		50	51	52
25	26	27		49	50	51
.....						
3	4	5		27	28	29
2	3	4		26	27	28
1	2	3		25	26	27

รูปที่ 3.4 แสดงค่าความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลของรูปที่ 3.3

ในขั้นตอนแรกจะกำหนดให้รูปที่ต้องการจะทำการเข้ารหัสจะเป็นโหนดที่หนึ่ง โดยที่โหนดนั้นจะเก็บค่าความเข้มแสงเฉลี่ยของรูปนั้นไว้ ดังนั้นจึงได้โหนดที่หนึ่งของอโตะมาดาแบบถ่วงน้ำหนักของรูปที่ 3.10 ซึ่งมีค่าความเข้มแสงเฉลี่ยเท่ากับ 27 จากนั้นจึงทำการแบ่งรูปภาพออกเป็นเก้าส่วนซึ่งจะได้ส่วนที่หนึ่งหรือ แอดเดรส 0 คือ รูปที่ 3.5

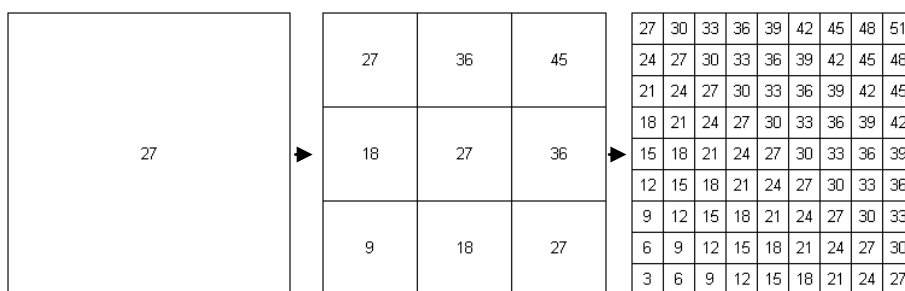
9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9

รูปที่ 3.5 แสดงค่าความเข้มแสงในส่วนที่หนึ่ง หรือ มีแอดเดรสเป็น 0

ซึ่งจะนำค่าสีในส่วนที่มีแอดเดรสเป็น 0 มาเปรียบเทียบกับค่ากับโหนดที่หนึ่งหรือรูปที่จะทำการปั๊มอัด ดังนั้นจะเขียนสมการได้เป็น

$$f_0 = c_0 \psi_0 \quad (3.12)$$

แต่เนื่องจากรูปที่ถูกแทนที่ด้วยโหนดที่หนึ่งนั้นมีขนาด 27×27 แต่รูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 0 นั้นมีขนาดเป็น 9×9 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการลดขนาดของรูปด้วยคุณสมบัติของเอฟิฟังก์ชัน หรือ ทำการแบ่งส่วนรูปภาพแค่ 2 ครั้ง โดยเมื่อแบ่งครั้งที่ 2 เสร็จแล้วจะได้รูปย่อยที่มีขนาด 3×3 พิกเซล ก็ทำการหาค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของทุกๆ รูปย่อย ซึ่งก็จะได้รูปที่มีขนาด 9×9 ซึ่งเป็นรูปของโหนดที่หนึ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.6 โดยตัวเลขที่แสดงอยู่ในแต่ละช่องคือค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของแต่ละรูปย่อย



รูปที่ 3.6 แสดงการแบ่งหรือ การย่อขนาดของรูปที่แทนด้วยโหนดที่หนึ่ง

จากนั้นจึงจำค่าสี่แต่ละค่ามาสร้างเป็นสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 9 &= c_0 27 \\
 10 &= c_0 30 \\
 11 &= c_0 33 \\
 12 &= c_0 36 \\
 13 &= c_0 39 \\
 &\dots \\
 6 &= c_0 18 \\
 7 &= c_0 21 \\
 8 &= c_0 24 \\
 9 &= c_0 27
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

เมื่อทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ c_0 ในทุกสมการแล้วจะได้ค่าเท่ากับ $1/3$ ดังนั้นจึงสามารถสร้างเส้นทางจากโหนดที่หนึ่งไปยังโหนดที่หนึ่งได้ โดยที่มีฉลากเป็น 0 และมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น $1/3$ ซึ่งอาจจะเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$f_0 = \frac{1}{3} \psi_0 \quad (3.14)$$

จากนั้นจึงทำการพิจารณาในส่วนที่มีแอดเครส 1 ซึ่งได้แสดงในรูปที่ 3.7

18	19	20	21	22	23	24	25	26
17	18	19	20	21	22	23	24	25
16	17	18	19	20	21	22	23	24
15	16	17	18	19	20	21	22	23
14	15	16	17	18	19	20	21	22
13	14	15	16	17	18	19	20	21
12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18

รูปที่ 3.7 แสดงค่าความเข้มแสงของรูปย่อยที่มีแอดเครสเป็น 1

ดังนั้นจะสามารถสร้างสมการได้เป็น

$$\begin{aligned}
 18 &= c_0 27 \\
 19 &= c_0 30 \\
 20 &= c_0 33 \\
 21 &= c_0 36 \\
 22 &= c_0 39 \\
 &\dots \\
 15 &= c_0 18 \\
 16 &= c_0 21 \\
 17 &= c_0 24 \\
 18 &= c_0 27
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่หามาได้แต่ละค่าจะมีค่าไม่เท่ากัน หรืออาจจะกล่าวได้ว่าโหนดที่หนึ่งไม่มีความสัมพันธ์กับรูปย่อยที่มีแอดเครส 1 ดังนั้นจึงจำเป็นต้องสร้างโหนดใหม่ซึ่งเป็นตัวแทนของรูปย่อยที่มีแอดเครสเป็น 1 และสร้างเส้นทางจากโหนดที่หนึ่งไปยังโหนดที่สอง โดยที่มีผลากเป็น 1 และมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1 และในโหนดที่สองนี้จะเก็บค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของรูปย่อยที่มีแอดเครสเป็น 1 ไว้ด้วย เพราะฉะนั้นจึงได้โหนดที่สองของอโตมาตาของรูปที่ 3.10

จากนั้นจึงพิจารณารูปย่อยที่มีแอดเครสเป็น 2 ซึ่งจะสามารถแก้สมการได้ค่าคงที่ดังนี้

$$f_2 = -\frac{1}{3}\psi_0 + 2\psi_1 \tag{3.16}$$

ดังนั้นจะได้ว่าค่าคงที่ $c_0 = -\frac{1}{3}$ และ $c_1 = 2$ ซึ่งจะสามารถสร้างเส้นทางที่มีฉลาก 2 จาก โหนดหนึ่งไปยังโหนดหนึ่งและโหนดหนึ่งไปยังโหนดสอง ที่มีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น $-\frac{1}{3}$ และ 2 ตามลำดับ จากนั้นจึงคำนวณรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 3, 4, 5, 6, 7, 8 ซึ่งจะแก้สมการได้ค่าคงที่ดังนี้

$$\begin{aligned} f_3 &= 0\psi_0 + 1\psi_1 \\ f_4 &= -\frac{1}{3}\psi_0 + 2\psi_1 \\ f_5 &= -\frac{2}{3}\psi_0 + 3\psi_1 \\ f_6 &= -\frac{1}{3}\psi_0 + 3\psi_1 \\ f_7 &= -\frac{2}{3}\psi_0 + 3\psi_1 \\ f_8 &= -1\psi_0 + 4\psi_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ซึ่งจะสามารถสร้างเส้นทางที่มีฉลากเป็น 3, 4, 5, 6, 7, 8 ซึ่งจะออกจากโหนดหนึ่งไปยัง โหนดหนึ่ง มีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น $0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ และ -1 ตามลำดับ และจากโหนดหนึ่งไปยัง โหนดสองจะมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1, 2, 3, 3, 3 และ 4 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณารูปย่อยในโหนดที่หนึ่งครบหมดแล้วจึงพิจารณาแต่รูปย่อยของรูปที่ถูกแทน ด้วยโหนดที่สอง ก็คือ รูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 1 ดังรูปที่ 3.7 ดังนั้นรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 0 ของ โหนดที่สอง หรือรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 10 จะแสดงได้ดังรูปที่ 3.8

12	13	14
11	12	13
10	11	12

รูปที่ 3.8 แสดงรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 0 ของโหนดที่สอง

หรือ รูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 10

เนื่องจากรูปที่แทนด้วยโหนดที่หนึ่งจะมีขนาดเป็น 27×27 ดังนั้นจึงจะต้องย่อขนาดของ รูปให้เท่ากับรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 10 ซึ่งจะย่อรูปได้ดังรูปที่ 3.9 ก. และ รูปที่แทนด้วยโหนดที่สองจะมีขนาดเป็น 9×9 ดังนั้นจะต้องย่อขนาดของรูปให้เท่ากับรูปย่อยด้วย จึงได้ค่าสี่แต่ละฟิกเซล ดังรูปที่ 3.9 ข.

	3	
27	6	45
	2	
18	7	36
	1	
9	8	27

ก.

		2
18	21	4
		2
15	18	1
		1
12	15	8

ข.

รูปที่ 3.9 แสดงผลลัพธ์การย่อขนาดของรูป
ที่ถูกแทนด้วยโหนดที่หนึ่งและโหนดที่สอง

จากนั้นจึงนำค่าความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลมาสร้างสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 12 &= c_0 37 + c_1 18 \\
 13 &= c_0 36 + c_1 21 \\
 14 &= c_0 45 + c_1 24 \\
 11 &= c_0 18 + c_1 15 \\
 12 &= c_0 27 + c_1 18 \\
 13 &= c_0 36 + c_1 21 \\
 10 &= c_0 9 + c_1 12 \\
 11 &= c_0 18 + c_1 15 \\
 12 &= c_0 27 + c_1 18
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

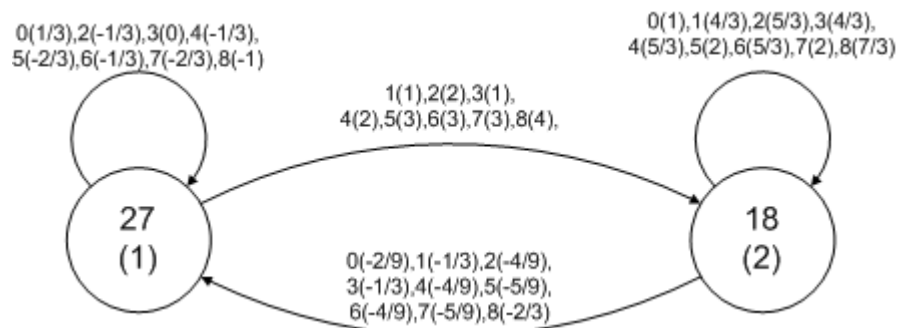
ซึ่งเมื่อแก้สมการแล้วจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์และเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$f_{10} = -\frac{2}{9}\psi_0 + 1\psi_1 \tag{3.15}$$

เมื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ c_0 และ c_1 ได้แล้วจึงนำไปสร้างเส้นทางสำหรับโหนดที่สองซึ่งมีผลากเป็น 0 ได้ดังนี้ เส้นทางที่ออกจากโหนดที่สองไปยังโหนดที่หนึ่งจะมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น $-\frac{2}{9}$ และเส้นทางที่ออกจากโหนดที่สองไปยังโหนดที่สอง หรือเส้นทางที่วนเข้าหาตัวเองจะมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1 ในกรณีเดียวกันสำหรับรูปย่ออื่นๆ ของโหนดที่สองก็จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
f_{11} &= -\frac{1}{3}\psi_0 + \frac{4}{3}\psi_1 \\
f_{12} &= -\frac{4}{9}\psi_0 + \frac{5}{3}\psi_1 \\
f_{13} &= -\frac{1}{3}\psi_0 + \frac{4}{3}\psi_1 \\
f_{14} &= -\frac{4}{9}\psi_0 + \frac{5}{3}\psi_1 \\
f_{15} &= -\frac{5}{9}\psi_0 + 2\psi_1 \\
f_{16} &= -\frac{4}{9}\psi_0 + \frac{5}{3}\psi_1 \\
f_{17} &= -\frac{5}{9}\psi_0 + 2\psi_1 \\
f_{18} &= -\frac{2}{3}\psi_0 + \frac{7}{3}\psi_1
\end{aligned} \tag{3.16}$$

เมื่อได้พิจารณารูปย่อยของแต่ละภาพที่ถูกแทนที่ด้วยโหนดเสร็จแล้ว ก็จะได้ไฟไนต์ออโตมาต้าแบบถ่วงน้ำหนักดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 แสดงออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักที่แทนรูปที่ 3.3

การถอดรหัส

ในการถอดรหัสของไฟไนต์ออโตมาต้าถ่วงน้ำหนักจะใช้วิธีการหาค่าความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลออกมา โดยที่จะมีการกำหนดขนาดของรูปไว้ก่อนแล้วจะหาความยาวของแอดเดรสของพิกเซลเพื่อที่จะนำแอดเดรสนี้มาคำนวณหาค่าความเข้มแสง เช่น ขนาดของรูปเป็น 3×3 จะได้ความยาวของแต่ละแอดเดรสเป็น 1, $3^2 \times 3^2$ ก็จะได้ความยาวของแอดเดรสเป็น 2 เป็นต้น ส่วนการหาความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลจะหาได้จากผลบวกของผลคูณค่าเริ่มต้นกับค่าถ่วงน้ำหนักแต่ละเส้นทางที่ผ่านกับค่าสิ้นสุดของโหนดสุดท้ายของทุกๆ เส้นทาง โดยจะสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$f(a_1 a_2 \dots a_n) = I(j_0) W_{a_1}(j_0, j_1) W_{a_2}(j_1, j_2) \dots W_{a_n}(j_{n-1}, j_n) F(j_n) \tag{3.17}$$

เมื่อ $I(a_i)$ = เป็นค่าการแจกแจงค่าเริ่มต้นของโหนดเริ่มต้น

$F(a_n)$ = เป็นค่าการแจกแจงค่าสิ้นสุดของโหนดสุดท้าย

$W_{ai}(ij)$ = เป็นค่าน้ำหนักที่ฉลากที่ a_i จากโหนด i ไปยังโหนด j โดยที่โหนด i จะได้มาจากโหนด j ของฉลากตัวข้างหน้าซึ่งจะได้มาพร้อมกับค่าถ่วงน้ำหนัก

เนื่องจากค่าการแจกแจงค่าเริ่มต้นของโหนดอื่นๆ ที่ไม่ใช่โหนดที่ 0 จะมีค่าเป็น 0 ดังนั้นค่าเฉลี่ยของความเข้มแสงที่เริ่มต้นจากโหนดอื่นๆ จะมีค่าเป็น 0 เสมอ

ถ้าหากกำหนดให้ขนาดของรูปเป็น $3^3 \times 3^3$ ซึ่งจะได้ว่าค่าความยาวของแอดเดรสเป็น 2 ดังนั้นจำนวนแอดเดรสของพิกเซลจะเท่ากับ $9 \times 9 = 81$ แอดเดรส ก็ได้แก่ 00, 01, 02, ..., 08, 20, 21, ..., 28, ..., 80, 81, ..., 88 ดังนั้นจากอโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักในรูปที่ 3.10 จะหาค่าเฉลี่ยความเข้มแสงได้ดังนี้

แอดเดรส 00 : จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(00) &= I(0)W_0(0, j_1)W_0(j_1, j_2)F(j_2) \\ &= 1 \times 1/3 \times W_0(0, j_2)F(j_2) \\ &= 1 \times 1/3 \times 1/3 \times F(0) \\ &= 1 \times 1/3 \times 1/3 \times 27 \\ &= 3 \end{aligned}$$

แอดเดรส 01 : จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(01) &= I(0)W_0(0, j_1)W_1(j_1, j_2)F(j_2) \\ &= 1 \times 1/3 \times W_1(0, j_2)F(j_2) \\ &= 1 \times 1/3 \times 1 \times F(1) \\ &= 1 \times 1/3 \times 1 \times 18 \\ &= 6 \end{aligned}$$

แอดเดรส 02 : จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(02) &= I(0)W_0(0, j_1)W_2(j_1, j_2)F(j_2) \\ &= 1 \times 1/3 \times W_2(0, j_2)F(j_2) \end{aligned}$$

จะสังเกตเห็นว่า $W_2(0, j_2)$ มีโหนดปลายทาง 2 โหนดคือ โหนด 0 และ โหนด 1 ดังนั้นจึงต้องหาผลคูณของทั้งสองเส้นทางแล้วนำมาบวกกัน คือ

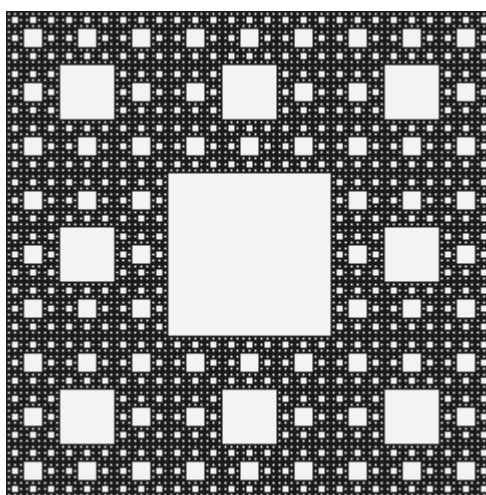
$$\begin{aligned} f(02) &= 1 \times 1/3 \times W_2(0, 0)F(0) + 1 \times 1/3 \times W_2(0, 1)F(1) \\ &= 1 \times 1/3 \times (-1/3) \times 27 + 1 \times 1/3 \times 2 \times 18 \\ &= -3 + 12 = 9 \end{aligned}$$

จากนั้นจึงหาให้ครบทุกพิกเซล จะได้รูปที่มีค่าความเข้มแสงดังรูปที่ 3.11

27	30	33	36	39	42	45	48	51
24	27	30	33	36	39	42	45	48
21	24	27	30	33	36	39	42	45
18	21	24	27	30	33	36	39	42
15	18	21	24	27	30	33	36	39
12	15	18	21	24	27	30	33	36
9	12	15	18	21	24	27	30	33
6	9	12	15	18	21	24	27	30
3	6	9	12	15	18	21	24	27

รูปที่ 3.11 แสดงความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลของรูปที่มีขนาด $3^2 \times 3^2$ พิกเซล

จะสังเกตเห็นว่าค่าความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลของรูปที่ทำการถอดรหัสแล้วจะไม่เท่ากับค่าความเข้มแสงของรูปที่ทำการบีบอัด เนื่องจากรูปที่ทำการบีบอัดมีขนาดเท่ากับ $3^3 \times 3^3$ พิกเซล แต่รูปที่ทำการบีบอัดมีขนาด $3^2 \times 3^2$ พิกเซล แต่จะสังเกตเห็นได้อีกว่ารูปที่ถอดรหัสจะมีค่าเฉลี่ยความเข้มแสงแต่ละพิกเซลเท่ากับ รูปที่ 3.6 ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยความเข้มแสงของรูปที่ทำการลดขนาดด้วยคุณสมบัติของเอพี-ฟังก์ชัน



รูปที่ 3.12 รูปสำหรับตัวอย่างที่ 2 เพื่อการบีบอัด

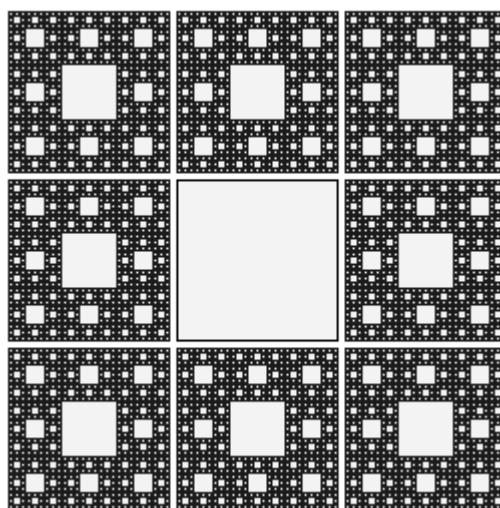
ตัวอย่างที่ 2 การถอดรหัสและเข้ารหัสรูปภาพ

การเข้ารหัส

ในการเข้ารหัสในตัวอย่างที่ 2 จะใช้รูปภาพที่ 3.12 เป็นตัวอย่างในการบีบอัดซึ่งจะแสดงให้เห็นได้ในกรณีที่รูปที่พิจารณาเป็นรูปเดียวกัน จะสามารถสร้างทางเดินวนเข้าหารูปนั้นได้ทันที

โดยในขั้นตอนแรกของการบีบอัดจะต้องกำหนดให้รูปที่ต้นฉบับซึ่งมีแอดเดรสเป็น ε เป็นโหนดแรกของออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนัก

จากรูปที่ 3.12 เมื่อทำการแบ่งเป็น 9 ส่วนแล้วจะได้ดังรูปที่ 3.13

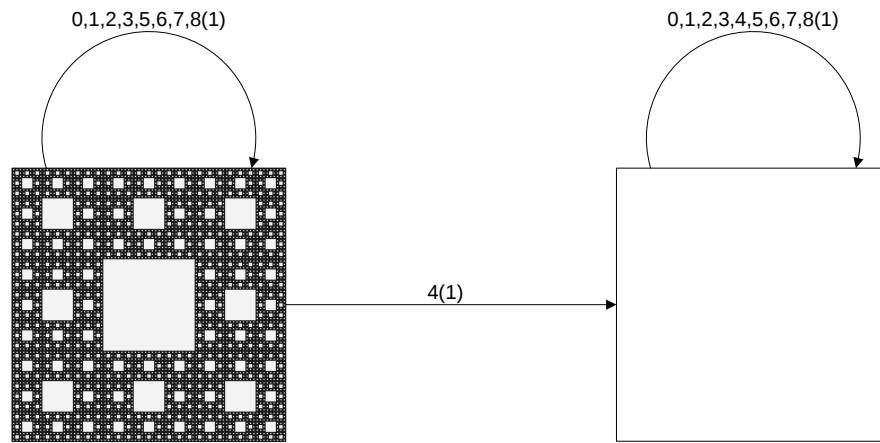


รูปที่ 3.13 แสดงการแบ่งออกเป็น 9 ส่วนของรูปที่ 3.12

เมื่อพิจารณารูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 0 แล้วจะสังเกตเห็นว่าเหมือนรูปต้นฉบับที่ต้องการทำการบีบอัดดังนั้นในจะหาค่าคงที่ของสมการที่ 3.6 ได้เท่ากับ 1 ดังนั้นจึงจะได้เส้นทางของรูปย่อยแอดเดรส 0 ได้จากโหนดที่หนึ่งไปยังโหนดที่หนึ่ง ซึ่งหาพิจารณาดีๆ แล้ว จะเห็นว่ารูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 2, 3, 4, 6, 7 และ 8 ก็มีลักษณะเดียวกันดังนั้นจึงสามารถสร้างทางเดิน จากโหนดที่หนึ่งไปยังโหนดที่หนึ่งได้โดยที่มีผลากเป็น 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 และ 8 ซึ่งมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1 ดังรูปที่ 3.13

ส่วนรูปย่อยที่ 4 นั้นไม่เหมือนรูปโหนดที่หนึ่งดังนั้นจึงต้องสร้างโหนดใหม่โดยให้เป็นโหนดที่สองและมีผลากเป็น 4 พร้อมทั้งค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1 ก็จะเสร็จสิ้นการพิจารณารูปที่แทนด้วยโหนดที่หนึ่ง

ในโหนดที่สอง จะเห็นว่าทุกๆ รูปย่อยเป็นสีขาวเหมือนกับโหนดที่สอง ดังนั้นจึงสร้างทางเดินจากโหนดที่สองไปยังโหนดที่สองโดยที่มีผลากเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 พร้อมทั้งค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1 ดังนั้นจึงจะได้ออโตมาตาที่แทนด้วยรูปของรูปที่ 3.12 ได้ดังรูป 3.13



รูปที่ 3.14 แสดงออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักที่แทนรูปที่ 3.12

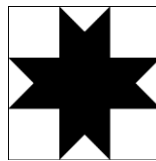
การถอดรหัส

ในการถอดรหัสออโตมาตาในรูปที่ 3.13 จะได้รูปที่มีลักษณะของรูปย่อยที่ 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 และ 9 จะมีลักษณะเหมือนโหนดที่หนึ่ง และรูปย่อยที่ 4 จะเป็นสีขาวเสมอ หรือจะกล่าวได้ว่า ทุกๆ รูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น $w4$ เมื่อ $w \in \Sigma^*$ จะมีค่าความเข้มแสงเป็นสีขาว

ตัวอย่างที่ 3 การเข้ารหัสและถอดรหัสรูปภาพ

การเข้ารหัส

ในตัวอย่างนี้จะแสดงการสร้างออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักสำหรับรูปปรับที่แสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 รูปปรับสำหรับการเข้ารหัส

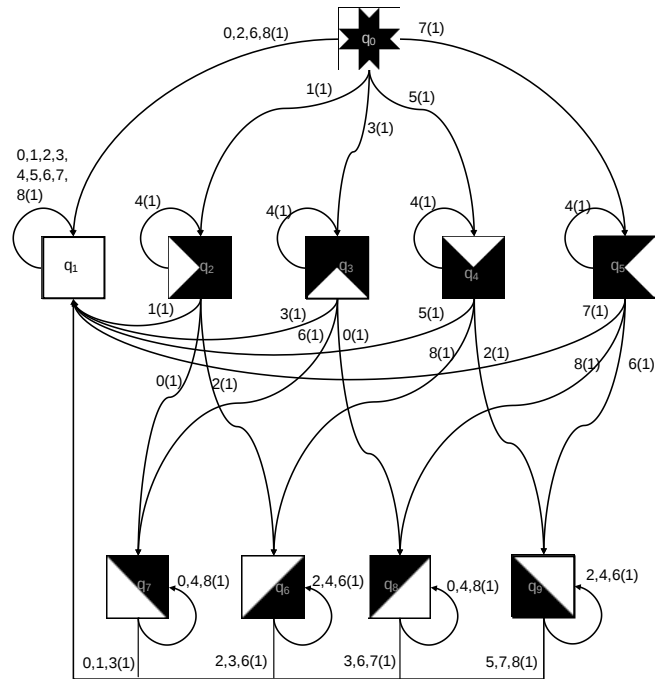
รูปปรับนี้มีขนาด 243×243 พิกเซล ในขั้นแรกจะกำหนดให้รูปปรับเป็น q_0 และ $F(q_0) = 1275/9$ แล้วจึงพิจารณารูปย่อยต่างๆ ของ q_0 ตั้งแต่ 0 ถึง 8 ซึ่งแต่ละรูปจะมีความยาวของแอดเดรสเป็น 1 โดยจะสังเกตเห็นว่ารูปย่อย f_0 และ f_1 ไม่สามารถแสดงอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของ f_c ได้ เมื่อกำหนดให้ f_w เป็นค่าความเข้มแสงของรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น w จากนั้นจึงทำขั้นตอนที่ 2.2 ของอัลกอริทึมในการเข้ารหัส คือกำหนด $W_0(q_0, q_1) = 1$ และ $F(q_1) = 255$; $W_0(q_0, q_2) = 1$ และ $F(q_2) = 576/9$ ในส่วนของรูปย่อยที่ 2 นั้นจะเหมือนกับโหนด q_1 ซึ่งมันจะสามารถแสดงอยู่ในรูปของ $f_2 = 1 \cdot f_1$ ได้ ดังนั้นจึงกำหนดให้ $W_2(q_0, q_1) = 1$ แล้วพิจารณารูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 3 จะไม่สามารถ

แสดงเป็นผลรวมเชิงเส้นของทุกๆ โหนดได้ ดังนั้นจึงให้รูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 3 เป็นโหนดใหม่ ซึ่ง $W_3(q_0, q_3) = 1$ และ $F(q_3) = 576/9$ ค่าความเข้มแสงของรูปย่อย f_4 เป็น 0 ซึ่งจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ได้เป็น 0 ดังนั้นจึงไม่ต้องสร้างทางเดินสำหรับรูปย่อยนี้ สำหรับรูปย่อย f_5 นี้ก็ไม่สามารถที่จะแสดงอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นกับโหนดอื่นๆ ได้ ดังนั้นต้องสร้างโหนดใหม่ โดยให้รูปย่อย f_5 นี้เป็นโหนดใหม่ พร้อมทั้งกำหนด $W_5(q_0, q_4) = 1$ และ $F(q_4) = 576/9$ รูปย่อย f_6 นี้จะเหมือนกับรูปย่อย f_0 ดังนั้นกำหนดให้ $W_6(q_0, q_1) = 1$ รูปย่อย f_7 ก็ไม่สามารถแสดงอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นได้อีกเช่นกัน ดังนั้นจึงสร้างโหนดใหม่ขึ้นมา โดยใช้รูปย่อย f_7 พร้อมทั้งกำหนด $W_7(q_0, q_5) = 1$ และ $F(q_5) = 576/9$

ขั้นตอนต่อไป พิจารณารูปย่อยที่มีความยาวของที่อยู่เป็น 2 พิจารณาโหนด q_1 ทุกๆ รูปย่อยจะเหมือนกับโหนด q_1 ดังนั้นจึงสร้างทางเดิน 8 ทางเดินสำหรับ q_1 ไปยัง q_1 ซึ่งมีค่าเป็น 0, 1, ..., 8 ซึ่งมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 1 โหนดต่อไปที่จะพิจารณาคือโหนด q_2 เมื่อพิจารณาแต่ละรูปย่อยของโหนด q_2 แล้วจะพบว่า รูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 0 ไม่สามารถแสดงเป็นผลรวมเชิงเส้นได้ จึงต้องสร้างโหนดใหม่ซึ่งมีทางเดินเป็น $W_0(q_2, q_6) = 1$ และ $F(q_6) = 128$ แต่ในรูปย่อยที่ 1 จะสามารถแสดงอยู่ในรูปของ $f_{11} = f_0$ ได้ จึงสามารถสร้างทางเดินจาก $W_1(q_2, q_1) = 1$ ในส่วนของรูปย่อยที่ 2 ของโหนด q_2 ก็ไม่สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นกับโหนดใดๆ ได้ จึงกำหนดให้ $W_2(q_2, q_7) = 1$ และ $F(q_7) = 128$ รูปย่อยที่ 4 ของโหนด q_2 เหมือนกับโหนด q_2 จึงกำหนดให้ $W_4(q_2, q_2) = 1$ ส่วนรูปย่อยที่ 3 และรูปย่อยที่เหลือทั้งหมดของโหนด q_2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมสีดำมีความเข้มแสงเป็น 0 ซึ่งสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของผลรวมเชิงเส้นได้เป็น 0 ในกรณีนี้จึงไม่จำเป็นต้องสร้างทางเดิน สำหรับโหนด q_3, q_4 และ q_5 ก็เช่นเดียวกันกับโหนด q_2 คือพิจารณาแต่ละรูปย่อยของแต่ละโหนด ถ้าไม่สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นได้ ก็ให้สร้างโหนดใหม่

สำหรับขั้นตอนต่อไปทุกๆ โหนดจะมีความลึกเท่ากับ 3 หรือความยาวของแอดเดรสเป็น 3 สำหรับโหนดแรกของขั้นตอนนี้ก็คือ โหนด q_6 จะสังเกตเห็นว่ารูปย่อยที่ 0, 4 และ 8 ของโหนด q_6 จะเหมือนกับโหนด q_6 เอง จึงสร้างทางเดิน $W_0(q_6, q_6)=1$, $W_4(q_6, q_6)=1$ และ $W_8(q_6, q_6)=1$ ส่วนรูปย่อยที่ 1, 2 และ 5 เหมือนกับโหนด q_1 จึงกำหนดให้ $W_1(q_6, q_1)=1$, $W_2(q_6, q_1)=1$ และ $W_5(q_6, q_1)=1$ ส่วนรูปย่อยอื่นๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมสีดำซึ่งหาค่าสัมประสิทธิ์ได้เป็น 0 จึงไม่ต้องสร้างทางเดินไปยังโหนดใดๆ สำหรับโหนด q_7, q_8 และ q_9 ก็เช่นเดียวกันกับโหนด q_6 รูปย่อยที่เหมือนกับตัวเองก็ให้สร้างทางเดินเข้าหาตัวเอง ส่วนรูปย่อยที่มีสีขาวก็ให้สร้างทางเดินไปยังโหนด q_1

สุดท้ายกำหนดค่าของการแจกแจงค่าเริ่มต้นให้แต่ละโหนด โดยที่โหนด $I(q_0) = 1$ ส่วนโหนดอื่นๆ เท่ากับ 0 จะได้โอโตมาตาถ่วงน้ำหนักที่แทนรูปที่ 3.14 ได้ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 รูปออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักที่แทนรูปปริบับ

การถอดรหัส

ในส่วนนี้จะแสดงวิธีการถอดรหัสออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักในรูปที่ 3.15 ไปยังรูปต้นฉบับ โดยที่ในรูปที่ 3.15 จะแสดงให้เห็นถึงทางเดินจากโหนด i ไปยังโหนด j ซึ่งมีฉลากเป็น a ก็ต่อเมื่อ $W_a(q_i, q_j) = r; r \neq 0$

ค่าความเข้มแสงของแต่ละพิกเซลจะหาได้จากออโตมาตาแบบถ่วงน้ำหนักดังนี้ : สำหรับแอดเดรสของแต่ละพิกเซลแล้ว ให้ใช้แอดเดรสของพิกเซลนั้นเป็นทางเดิน และนำค่าถ่วงน้ำหนักของแต่ละทางเดินที่เดินผ่านคูณกับค่าเริ่มต้นของโหนดแรกและคูณกับค่าสิ้นสุดของโหนดสุดท้าย ดังนั้น $f_A(w)$ เป็นเป็นผลรวมของของค่าถ่วงน้ำหนักของทุกทางเดินที่คูณกับค่าเริ่มต้นของโหนดแรกกับค่าสิ้นสุดของโหนดสุดท้ายของ w

เช่น ค่าความเข้มแสงของรูปย่อยที่มีแอดเดรสเป็น 142 ซึ่งจะแทนด้วย $f(142)$ ซึ่งจะสามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} f(142) &= I(q_0) \cdot W_1(q_0, q_2) \cdot W_4(q_2, q_2) \cdot W_2(q_2, q_7) \cdot F(q_7) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 128 \\ &= 128 \end{aligned}$$

ถ้าในโหนดใดไม่มีทางเดินไปยังโหนดอื่น จะกำหนดให้โหนดนั้นมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็น 0 ซึ่งจะทำให้ผลคูณทั้งหมดเป็นศูนย์ไปด้วย เช่น $f(50) = 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$