บทที่ 2

การประมาณซายน์กำลังสองพัลซ์

2.1 บทนำ

การออกแบบเน็ทเวิร์กฟังก์ชัน เพื่อให้ได้ผลตอบสนองต่อสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ สามารถประมาณผลตอบสนองได้ทั้งในขอบข่ายความถี่ และขอบข่ายเวลา สำหรับการประมาณฟังก์ชันในขอบข่ายความถี่นั้นมีความยุ่งยากมาก ในปริญญานิพนธ์นี้จึงได้เสนอการประมาณเน็ทเวิร์กฟังก์ชันในขอบข่ายเวลา ซึ่งการประมาณฟังก์ชันในขอบข่ายเวลานี้มีการวิจัยกันอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ได้ผลตอบสนองต่อสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ที่ดีที่สุด เช่น การประมาณฟังก์ชันด้วยวิธีการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization) ซึ่งวิธีการนี้ถ้าการออปติไมเซชันไม่เหมาะสม อาจทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก

สำหรับบทวิจัยนี้ได้เสนอวิธีการใหม่ในการประมาณเน็ทเวิร์กฟังก์ชัน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันของสมการเศษส่วน (Rational function) ให้มีตัวส่วนเป็น เบสเสลโพลิโนเมียล (Bessel Polynomial) ซึ่งมีเฟสเป็นเส้นตรง (Linear phase) จากนั้นทำการประมาณตัวเศษด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square) เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของตัวเศษที่เหมาะสม ดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

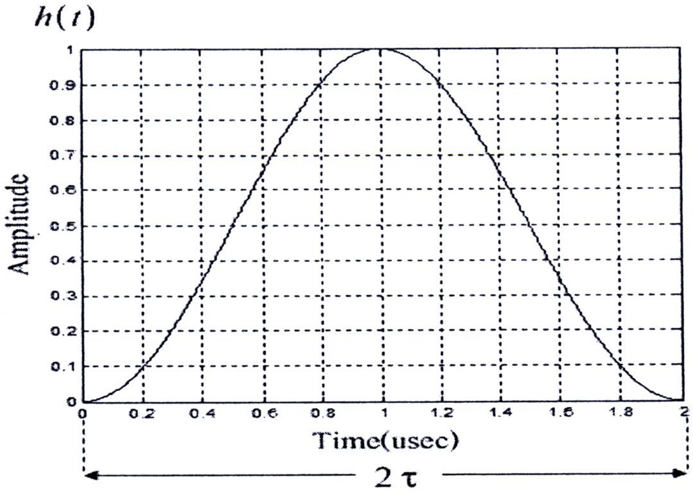
2.2 สัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ (Sine square pulse) ในอุดมคติ

สัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ เป็นสัญญาณที่นิยมใช้เป็นสัญญาณทดสอบในการส่งสัญญาณภาพในระบบโทรทัศน์ สำหรับงานวิจัยนี้เสนอแนวคิดใหม่โดยนำสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ ดังกล่าว มาเป็นสัญญาณทดสอบในระบบการส่งสัญญาณเสียง แต่เนื่องจากสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ในอุดมคติไม่สามารถสร้างเป็นวงจรจริงได้ จึงต้องทำการประมาณจากทรานสเฟอร์ฟังก์ชัน

สัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ ในอุดมคติแสดงโดยสมการ (2.1)

$$h(t) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) \quad ;0 \le t \le 2\tau \tag{2.1}$$

จากสมการ (2.1) สามารถพล็อตรูปสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 สัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ (Sine square pulse) ในอุดมคติ
โดยที่ 2τ เป็นแบนวิดท์ของสัญญาณเสียงความถี่ต่ำ

2.3 สมการเบสเสลโพลิโนเมียล (Bessel Polynamial)

ในทางคณิตศาสตร์ เบสเสลโพลิโนเมียลเป็นลำดับมุมฉากของสมการพหุนาม ซึ่งมีการให้ความหมายที่แตกต่างกันออกไปหลายแบบ แต่คำนิยามที่เป็นที่นิยมของนักวิทยาศาสตร์แสดงดังสมการ (2.2)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \tag{2.2}$$

และอีกความหมายหนึ่ง ที่นิยมใช้ในทางวิศวกรรมไฟฟ้า ที่เรียกกันในชื่อเบสเสลโพลิเมียลแบบย้อนกลับ (Reverse Bessel polynomials) แสดงดังสมการ (2.3)

$$\theta_n(x) = x^n y_n\left(\frac{1}{x} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+k)!}{(n-k)!k!} \frac{x^k}{2^{n-k}} \tag{2.3}$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์ของสมการ (2.2) ที่หาได้จะเหมือนกับในสมการ (2.3) แต่เรียงอยู่หน้าสมการลำดับที่กลับกัน ตัวอย่าง สมการของเบสเสลโพลิโนเมียลจะอยู่ในรูปของสมการ (2.4)

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= x+1 \\
y_2(x) &= 3x^2+3x+1 \\
y_3(x) &= 15x^3+15x^2+6x+1 \\
y_4(x) &= 105x^4+105x^3+45x^2+10x+1 \\
y_5(x) &= 945x^5+945x^4+420x^3+105x^2+15x+1 \\
y_6(x) &= 10395x^6+10395x^5+4725x^4+1260x^3+210x^2+21x+1 \\
y_7(x) &= 135135x^7+135135x^6+62370x^5+17325x^4+3150x^3+378x^2+28x+1
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

ในขณะที่รูปสมการของเบสเสลโพลิเมียลแบบย้อนกลับอยู่ในรูปของสมการ (2.5)

$$
\begin{aligned}
\theta_1(x) &= x+1 \\
\theta_2(x) &= x^2+3x+3 \\
\theta_3(x) &= x^3+6x^2+15x+15 \\
\theta_4(x) &= x^4+10x^3+45x^2+105x+105 \\
\theta_5(x) &= x^5+15x^4+105x^3+420x^2+945x+945 \\
\theta_6(x) &= x^6+21x^5+210x^4+1260x^3+4725x^2+10395x+10395 \\
\theta_7(x) &= x^7+28x^6+378x^5+3150x^4+17325x^3+62370x^2+135135x+135135
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

โดยเบสเสลโพลิโนเมียลแบบย้อนกลับนี้จะนำไปใช้ในการออกแบบตัวกรองสัญญาณทางอิเล็กทรอนิกส์

ข้อดีของเบสเสลโพลิโนเมียล

- ค่าโพล (Pole) ที่ได้มาจากการใช้สมการเบสเสลโพลิโนเมียล จะอยู่ในครึ่งซ้ายของวงกลมหนึ่งหน่วยเสมอ ซึ่งจะสามารถบอกได้เลยว่า เมื่อนำสมการนี้ไปใช้ในระบบ ระบบจะมีความเสถียร

-สมการของเบสเสลโพลิโนเมียลจะให้สัญญาณที่มีเฟสเป็นเส้นตรง (Linear phase) ซึ่งคุณสมบัติของเฟสที่เป็นเส้นตรงนั้นจะให้ผลตอบสนองอิมพัลซ์ของระบบ (Impulse responce) ที่มีความสมมาตร เมื่อนำสมการนี้ไปสร้างสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ รูปสัญญาณที่ได้จะมีความสมมาตรตามไปด้วย

2.4 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method)

การหาสัมประสิทธิ์เทอมเศษนั้น เป็นการง่ายที่จะนำเอาวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมาเป็นเกณฑ์ในการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของเทอมต่างๆเพื่อประมาณผลตอบสนองอิมพัลซ์ของระบบและการประมาณค่าฟังก์ชันโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้ฟังก์ชันที่ดีที่สุดของข้อมูล เพราะเกิดจากการเฉลี่ยค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลให้เหลือน้อยที่สุด ซึ่งวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนั้นแสดงดังสมการ (3.6)

$$h^*(t) = \sum_{v=1}^{m}\left[2A_v \in^{-\infty_v t} \cos\beta_v t + 2B_v \in^{-\infty_v t} \sin\beta_v t\right] + \sum_{v=1}^{m} C_\mu \in^{-\infty_\mu t} \qquad (2.6)$$

แต่ละค่าของ V จะเป็นค่าโพลของคู่คอมเพล็คคอนจูเกท และแต่ละค่าของ μ จะเป็นค่าโพลที่เป็นจำนวนจริง

$$E_2 = \int_{t1}^{t2} [h(t) - h^*(t)]^2 \, \mathrm{d}t \qquad ; \quad t1 < t < t2 \qquad (2.7)$$

โดยกำหนดให้

$$\frac{\partial E_2}{\partial A_v} = 0 \ , \ \frac{\partial E_2}{\partial B_v} = 0 \ , \ \frac{\partial E_2}{\partial C_v} = 0$$

จะได้ 2M+N สมการ :

$$\int_{t1}^{t2} [h(t) - h^*(t)] \in^{-\infty_v t} \cos\beta_v t \quad dt = 0 \qquad (2.8)$$

$$\int_{t1}^{t2} [h(t) - h^*(t)] \in^{-\infty_v t} \sin\beta_v t \quad dt = 0 \qquad (2.9)$$

$$\int_{t1}^{t2} [h(t) - h^*(t)] \in^{-\sigma_v t} dt = 0 \qquad v = 1,2,\ldots,M, \quad \mu = 1,2,\ldots,N \qquad (2.10)$$

ตั้งแต่ค่าของ A_v B_v และ C_v ที่ประกอบอยู่ในสมการที่ (2.15) เรายังไม่ทราบค่า เราสามารถหาได้โดยง่ายด้วยการอินทิเกรท ในกลุ่มของสมการ 2M+N ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นค่าคงที่ก็จะได้มาจากการอินทิเกรทของแต่ละรูปแบบตามสมการข้างล่างนี้

$$\int_{t1}^{t2} h(t) \in^{-\infty_v t} \cos\beta_v t \quad dt = 0 \qquad (2.11)$$

$$\int_{t1}^{t2} h(t) \in^{-\infty_v t} \sin \beta_v t \quad dt = 0 \tag{2.12}$$

$$\int_{t1}^{t2} h(t) \in^{-\sigma_v t} dt = 0 \tag{2.13}$$

2.5 การประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ในเชิงเวลา (Time Domain)

จากทฤษฎีพื้นฐาน โดยกำหนดค่าเน็ทเวิร์กฟังก์ชันเป็นทรานสเฟอร์ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปสมการโพลิ โนเมียล เพื่อสะดวกในการนำไปสร้างวงจรจริง รูปแบบของสมการแสดงดังสมการ (2.14)

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{2.14}$$

เมื่อ P(s) เป็นฟังก์ชันตัวเศษ

Q(s) เป็นฟังก์ชันตัวส่วน

การประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลซ์ในที่นี้เลือกใช้วิธีการของเบสเสลโพลิโนเมียลในการหาค่า Q(s) ส่วนการหาค่า P(s) ใช้วิธีการวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

2.6 ขั้นตอนการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์ (Approximate of Sine square pulse)

2.6.1 การประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่สาม

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{(s^2 + 3s + 3)(s+1)} \tag{2.15}$$

ดังนั้น

$$h^*(t) = 2Ae^{-1.5t}\cos(0.866t) + 2Be^{-1.5t}\sin(0.866t) + Ce^{-t} \tag{2.16}$$

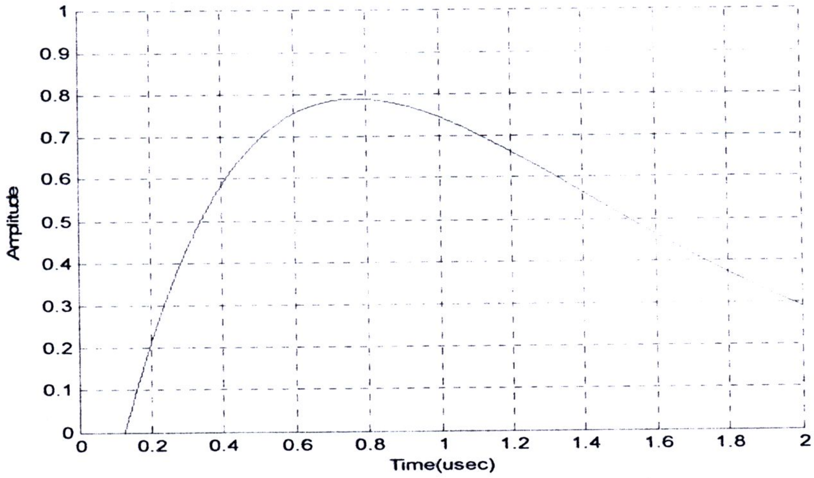
หาสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

$$E_2 = \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h^*(t)]^2 \, dt$$

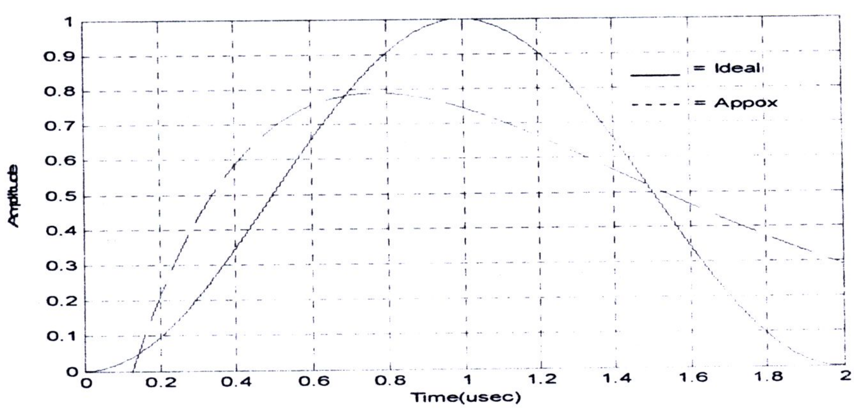
$$\frac{\partial}{\partial A} E_2 = 0, \ \frac{\partial}{\partial B} E_2 = 0, \ \frac{\partial}{\partial C} E_2 = 0$$

$$A = -0.572 \ , B = 1.962 \ , C = 0.664$$

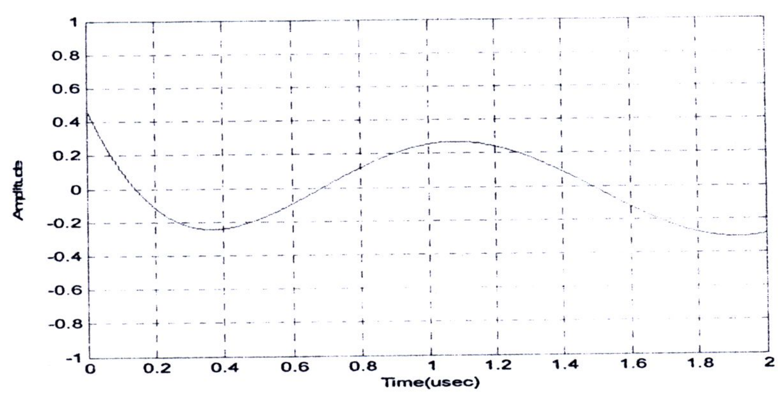
จากนั้นนำค่า A ,B ,C ที่หาได้แทนในสมการที่ (2.16) นำมาพล็อตในเชิงเวลา แสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ผลการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม ตามสมการที่ (2.16)



รูปที่ 2.3 ผลการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม ตามสมการที่ (2.16)เทียบกับสัญญาณซายน์ในอุดมคติ ตามสมการที่ (2.1)

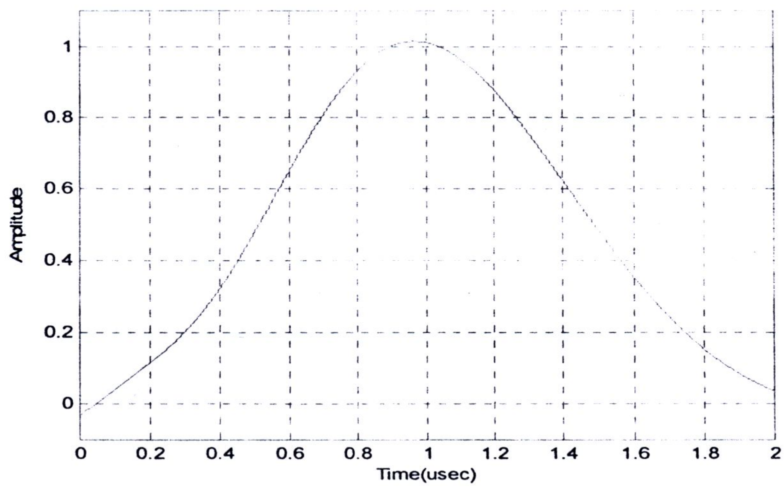


รูปที่ 2.4 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่สาม

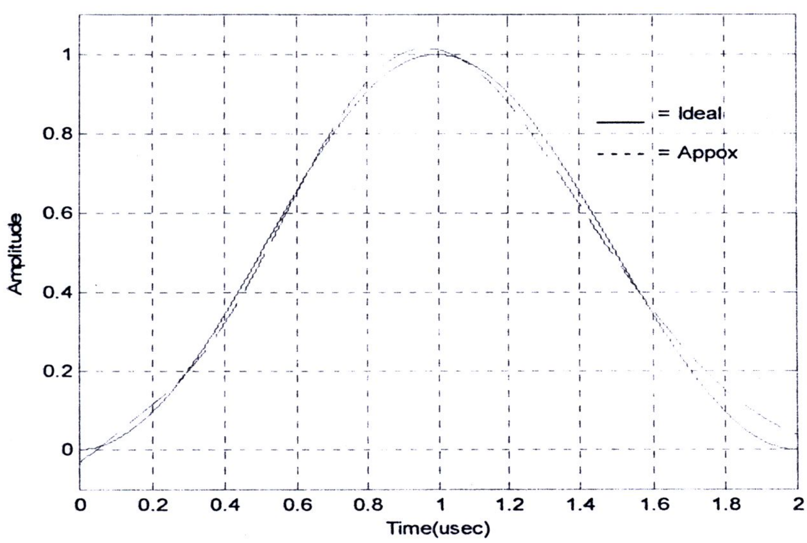
2.6.2 การประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่ห้า

$$H(s) = \frac{s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^5 + 15\,s^4 + 105\,s^3 + 420\,s^2 + 945\,s + 945} \tag{2.17}$$

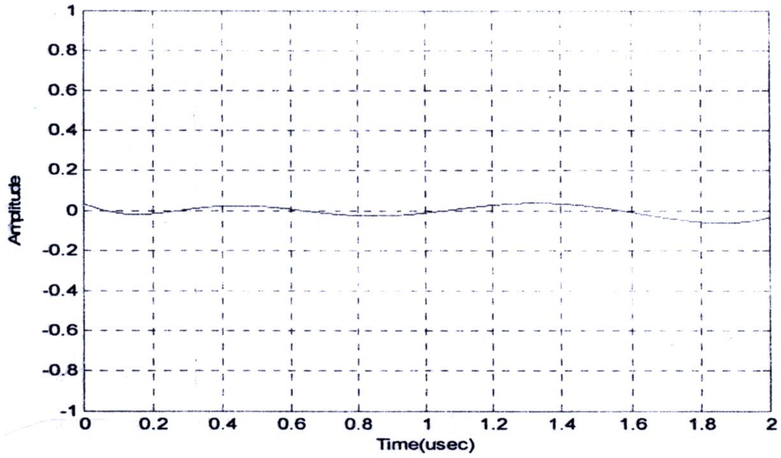
ในทำนองเดียวกันกับวิธีข้างต้น จากสมการ 2.17 สามรถพล็อตกราฟของผลตอบสนองในเชิงเวลา แสดงดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ผลการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้า



รูปที่ 2.6 ผลการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้า เทียบกับสัญญาณซายน์ในอุดมคติ ตามสมการที่ (2.1)



รูปที่ 2.7 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่ห้า

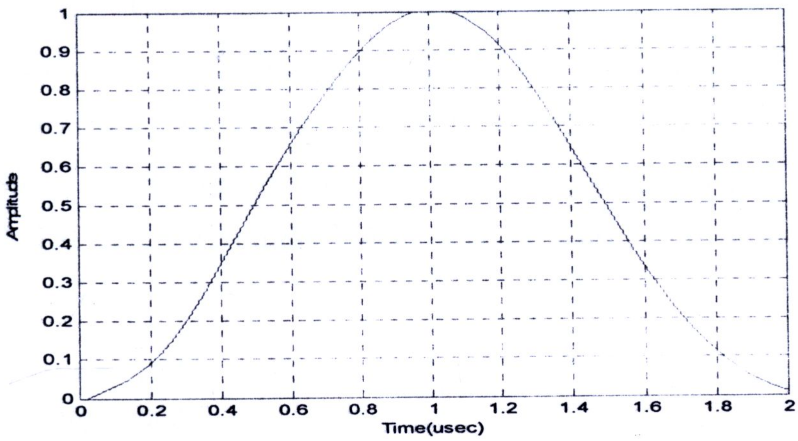
2.6.3 การประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับที่เจ็ด

$$H(s) = \frac{s^7 + \alpha_6 s^6 + s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^7 + 28 s^6 + 378 s^5 + 3150 s^4 + 17325 s^3 + 62370 s^2 + 135135 s + 135135} \quad (2.17)$$

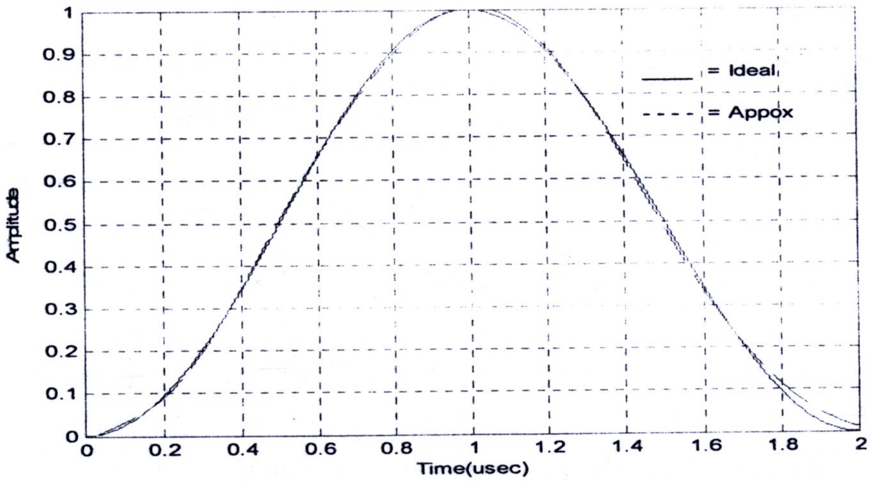
ดังนั้น

$$\begin{aligned} h^*(t) = {} & 2Ae^{-2.6857t}\cos(5.4207t) + 2Be^{-2.6857t}\sin(5.4207t) \\ & + 2Ce^{-4.0701t}\cos(3.5172t) + 2De^{-4.0701t}\sin(3.5172t) \\ & + 2Ee^{-4.7583t}\cos(1.7393t) + 2Fe^{-4.7583t}\sin(1.7393t) \\ & + Ge^{-4.9718t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

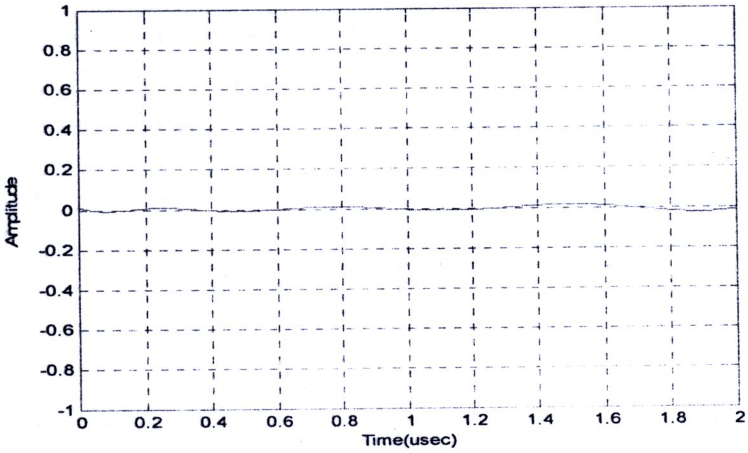
หาสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ได้ค่า A,B,C,D,E,F และ G ที่หาได้แทนลงในสมการที่ (2.18) นำมาพล็อตในเชิงเวลา แสดงได้ตามรูป 2.8



รูปที่ 2.8 ผลการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด ตามสมการที่ (2.18)



รูปที่ 2.9 ผลการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด ตามสมการที่ (2.18) เทียบกับสัญญาณซายน์ในอุดมคติ ตามสมการที่ (2.1)



รูปที่ 2.10 ค่าความผิดพลาดของสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์สมการลำดับที่เจ็ด

จากการประมาณสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์โดยใช้สมการลำดับต่างๆ จะเห็นได้ว่าเมื่อจำนวนลำดับสมการเพิ่มมากขึ้นรูปสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์ที่สร้างขึ้น ก็ยิ่งใกล้เคียงกับสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์ในอุดมคติ แต่ในทางตรงกันข้ามเมื่อสมการลำดับยิ่งสูงวงจรของสัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์จะมีขนาดวงจรที่ใหญ่ขึ้น ใช้อุปกรณ์มากขึ้น และการต่อวงจรก็จะยากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกใช้สัญญาณซายน์กำลังสองพัลส์ลำดับที่เจ็ด ดังนั้นจะหาค่าสัมประสิทธิ์ α ได้จาก

$$A = -1.611$$
$$B = 1.868$$
$$C = 27.851$$
$$D = -17.542$$
$$E = -110.333$$
$$F = 30.974$$
$$G = 168.175$$

$$A = 0.00002\alpha_0 + 0.00018\alpha_1 - 0.00166\alpha_2 + 0.0022\alpha_3 + 0.04893\alpha_4 - 0.3435\alpha_5 + 0.005442\alpha_6 + 12.27867 \tag{3.31}$$

$$B = 0.00028\alpha_0 - 0.00068\alpha_1 - 0.0067\alpha_2 + 0.0608\alpha_3 - 0.0807\alpha_4 - 1.7906\alpha_5 + 12.5321\alpha_6 - 1.9921 \tag{3.32}$$

$$C = 0.00012\alpha_0 - 0.0017\alpha_1 + 0.0103\alpha_2 - 0.0347\alpha_3 - 0.0165\alpha_4 + 1.1375\alpha_5 - 8.7813\alpha_6 + 38.5677 \tag{3.33}$$

$$D = -0.00072\alpha_0 - 0.0035\alpha_1 + 0.0492\alpha_2 - 0.2989\alpha_3 + 1.0031\alpha_4 + 0.4780\alpha_5 - 32.9139\alpha_6 + 254.0997 \tag{3.34}$$

$$E = -0.00086\alpha_0 + 0.00507\alpha_1 - 0.02630\alpha_2 + 0.12017\alpha_3 - 0.46850\alpha_4 + 1.37415\alpha_5 - 1.05249\alpha_6 - 25.2535 \tag{3.35}$$

$$F = -0.0031\alpha_0 + 0.02135\alpha_1 - 0.13012\alpha_2 + 0.67511\alpha_3 - 3.08437\alpha_4 + 12.02474\alpha_5 - 35.26960\alpha_6 + 27.01366 \tag{3.36}$$

$$G = 0.00071\alpha_0 - 0.0035\alpha_1 + 0.01764\alpha_2 - 0.08771\alpha_3 + 0.43608\alpha_4 - 2.1681\alpha_5 + 10.77939\alpha_6 - 53.59295 \tag{3.37}$$

จะได้ค่า α ดังนี้

$\alpha_0 = 3002153.472$

$\alpha_1 = 2017652.450$

$\alpha_2 = 678612.257$

$\alpha_3 = 137392.437$

$\alpha_4 = 17613.116$

$\alpha_5 = 1390.305$

$\alpha_6 = 51.702$

ฉะนั้นจะได้สมการเป็น ดังสมการต่อไปนี้

$$H(s) = \frac{s^7 + 51.702s^6 + 1390.305s^5 + 17613.116s^4 + 137392.437s^3}{s^7 + 28s^6 + 378s^5 + 3150s^4}$$

$$\frac{+678612.257s^2 + 2017652.45s + 3002153.472}{+17325s^3 + 62370s^2 + 135135s + 135135} \qquad (2.19)$$

จัดรูปใหม่

$$H(s) = \frac{\left[s^2 + 5.5254s + 36.4608\right]\left[s^2 + 6.9012s + 24.5674\right]}{\left[s^2 + 5.3714s + 36.597\right]\left[s^2 + 9.5166s + 25.6666\right]}$$

$$\frac{\left[s^2 + 33.8696s + 619.9923\right]\left[s + 5.4058\right]}{\left[s^2 + 8.1402s + 28.9364\right]\left[s + 4.9718\right]} \qquad (2.20)$$