บทที่ 2
การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการควบคุมดีซีมอเตอร์

ในบทนี้จะกล่าวถึงโครงสร้างโดยทั่วไปของพลานต์การควบคุม ที่ใช้ในการศึกษาวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ และวิธีการในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของพลานต์การควบคุมดีซีมอเตอร์ซึ่งจะใช้เป็นพื้นฐานส่วนหนึ่งในการออกแบบตัวควบคุมต่อไป

2.1 ดีซีเซอร์โวมอเตอร์

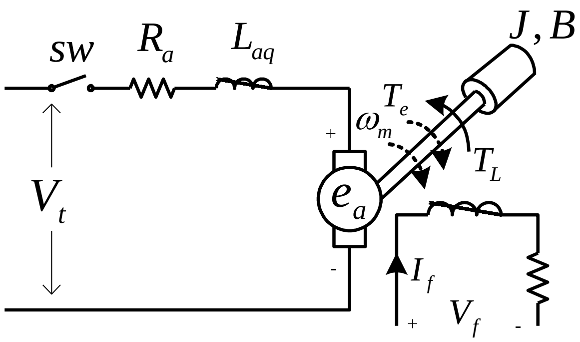
ในการประยุกต์ใช้ในการควบคุมในหลายๆ ประเภทนั้น ต้องการที่จะได้รับแรงบิด (Torque) ที่สูง และยิ่งไปกว่านั้นยังต้องการทั้งความถูกต้องของตำแหน่ง และความเร็วในสภาวะที่แรงบิดสูงๆ ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวที่ต้องการจะสามารถหาได้จากดีซีเซอร์โวมอเตอร์

คุณสมบัติของเซอร์โวมอเตอร์ที่แตกต่างจากมอเตอร์อุตสาหกรรมทั่ว ๆ ไปคือ

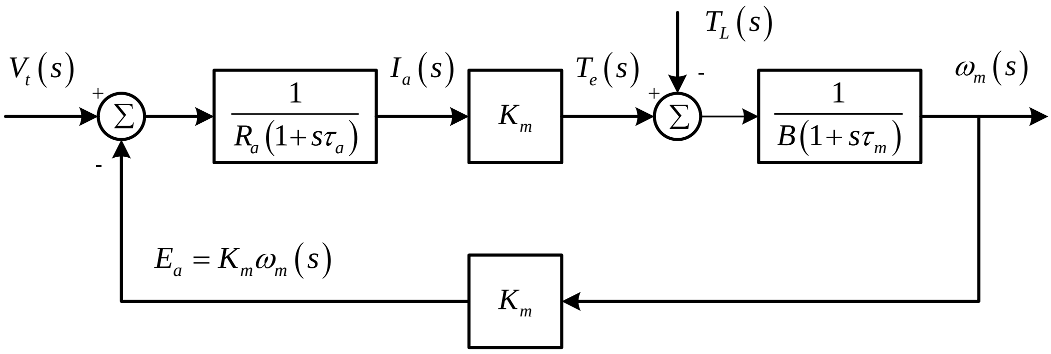
- จะให้แรงบิดที่สูงทุกค่าความเร็ว
- สามารถรักษาตำแหน่งเดิมไว้ได้
- ขณะที่เซอร์โวมอเตอร์อยู่ในสภาวะความเร็วต่ำ หรือหยุดหมุนจะไม่ส่งผลกระทบในเรื่องของความร้อน
- สามารถกลับทิศทางการหมุนได้อย่างรวดเร็ว
- สามารถไปถึงตำแหน่ง หรือความเร็วพิกัดได้อย่างรวดเร็ว อีกทั้งยังสามารถเพิ่มหรือลดขนาดของตำแหน่งและความเร็วได้อย่างรวดเร็ว
- เซอร์โวมอเตอร์จะหมุนกลับไปยังตำแหน่งที่ถูกกำหนดได้ครั้งแล้วครั้งเล่าโดยที่ไม่ขยับหรือเลื่อน

2.1.1 โครงสร้างของดีซีมอเตอร์

ดีซีมอเตอร์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างมาก เนื่องจากการควบคุมความเร็ว และแรงบิดสามารถควบคุมได้ในช่วงกว้าง โดยความเร็วสามารถควบคุมด้วยการปรับแรงดันที่ขั้ว ซึ่งจะศึกษาผลที่เกิดจากสภาวะทรานส์เซียนในวงจรอาร์เมเจอร์ และทรานส์เซียนทางกล รูปที่ 2.1 แสดงวงจรสมมูลของมอเตอร์ และรูปที่ 2.2 แสดงบล็อกไดอะแกรมของดีซีมอเตอร์



รูปที่ 2.1 แสดงวงจรสมมูลของดีซีมอเตอร์



รูปที่ 2.2 บล็อกไดอะแกรมของดีซีมอเตอร์

พลานต์ดีซีมอเตอร์ดังรูปที่ 2.1 มีสมการพื้นฐานดังนี้คือ

$$e_a = K_f i_f \omega_m = K_f \omega_m \tag{2.1}$$

$$T_e = K_f i_f i_a = K_m i_a \tag{2.2}$$

เมื่อ $K_m = K_f i_f$ คือค่าคงที่ ซึ่งเท่ากับอัตราส่วน $\frac{e_a}{\omega_m}$ แรงดันอาร์เมเจอร์ e_a จะสัมพันธ์กับกระแสในขดลวดสนาม i_f ที่ความเร็ว ω_m ทำการแปลงลาปลาซของสมการ (2.1) และ (2.2)

$$E_a = K_m \omega_m(s) \tag{2.3}$$

$$T\left(s\right)=K_m I_a\left(s\right) \tag{2.4}$$

ในรูปที่ 2.1 เมื่อสวิทซ์ปิดที่เวลา $t=0$ จะได้สมการแรงดันที่ขั้วตามกฎของ KVL (Kirchhoff's Voltage Law) ดังสมการ

$$V_t = K_m\omega_m + R_a i_a + L_{aq}\frac{di_a}{dt} \tag{2.5}$$

ทำการแปลงลาปลาซของสมการ (2.5) จากเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์จะได้

$$V_t\left(s\right)=K_m\omega_m\left(s\right)+I_a\left(s\right)R_a\left(1+s\tau_a\right) \tag{2.6}$$

เมื่อ $\tau_a = \dfrac{L_{aq}}{R_a}$ คือค่าเวลาคงตัวของมอเตอร์

สำหรับสมการทางพลวัตรของพลานต์ทางกลกำหนดได้ดังนี้

$$T = K_m i_a = J\frac{d\omega_m}{dt}+B\omega_m+T_L \tag{2.7}$$

ทำการแปลงลาปลาซของสมการ (2.7)

$$T\left(s\right)=K_m I_a\left(s\right)=Js\omega_m\left(s\right)+B\omega_m\left(s\right)+T_L\left(s\right) \tag{2.8}$$

จากสมการ (2.8) และ (2.1) จะได้สมการของความเร็วดีซีมอเตอร์กำหนดได้ดังนี้

$$\omega_m = \frac{T\left(s\right)-T_L\left(s\right)}{B\left(1+sJ/B\right)s\omega_m\left(s\right)}=\frac{K_m I_a - T_L\left(s\right)}{B\left(1+s\tau_m\right)} \tag{2.9}$$

เมื่อ $\tau_m = \dfrac{J}{B}$ คือ ค่าเวลาคงตัวทางกลของพลานต์

และจากค่าของแรงบิดของโหลดจะเป็นสัดส่วนกับความเร็วดีซีมอเตอร์จะได้ว่า

$$T_L = B_L \omega_m \tag{2.10}$$

และกำหนดให้ J คือผลรวมของความเฉื่อยทั้งพลานต์

$$J = J_{motor} + J_{load} \tag{2.11}$$

และจากสมการที่ (2.8) จะได้สมการทางพลวัตรใหม่ดังนี้

$$K_m I_a\left(s\right) = Js\omega_m\left(s\right) + B_m\omega_m\left(s\right) + B_L\omega_m\left(s\right) \tag{2.12}$$

และเมื่อกำหนดให้ $B = \left(B_m + B_L\right)$ จากสมการที่ (2.12) จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$K_m I_a\left(s\right) = Js\omega_m\left(s\right) + B\omega_m\left(s\right) \tag{2.13}$$

เมื่อทำการใส่โหลดให้กับพลานต์ จะทำให้แรงเสียดทานเนื่องจากความฝืดของพลานต์ทางกลเพิ่มขึ้นและจากสมการ (2.6) และ (2.13) จะได้สมการแรงดันใหม่ดังนี้

$$V_t\left(s\right) = K_m\omega\left(s\right) + \frac{BR_a}{K_m}\left(1+s\tau_m\right)\left(1+s\tau_a\right)\omega_m\left(s\right) \tag{2.14}$$

ดังนั้นอัตราส่วนของความเร็วดีซีมอเตอร์ต่อแรงดันที่ขั้วจะหาได้ตามสมการ ดังนี้

$$\frac{\omega_m\left(s\right)}{V_t\left(s\right)} = \frac{1}{K_m + \frac{BR_a}{K_m}\left(1+s\tau_m\right)\left(1+s\tau_a\right)} \tag{2.15}$$

โดยในวิทยานิพนธ์นี้จะไม่คิดค่าความเหนี่ยวนำเนื่องจากมีค่าน้อยนั่นคือค่าของ $\tau_a = 0$ และจากสมการที่ (2.15) จะได้สมการอัตราส่วนของความเร็วดีซีมอเตอร์ต่อแรงดันที่ขั้วคือ

$$\frac{\omega_m\left(s\right)}{V_t\left(s\right)} = \left(\frac{K_m}{K_m^2 + R_a B}\right)\left(\frac{1}{\left(1+s\tau_m^{'}\right)}\right) \tag{2.16}$$

จากสมการที่ (2.16) เมื่อกำหนดให้

$$\tau'_m = \frac{R_a B}{K_m^2 + R_a B}\tau_m \ \langle \tau_m \tag{2.17}$$

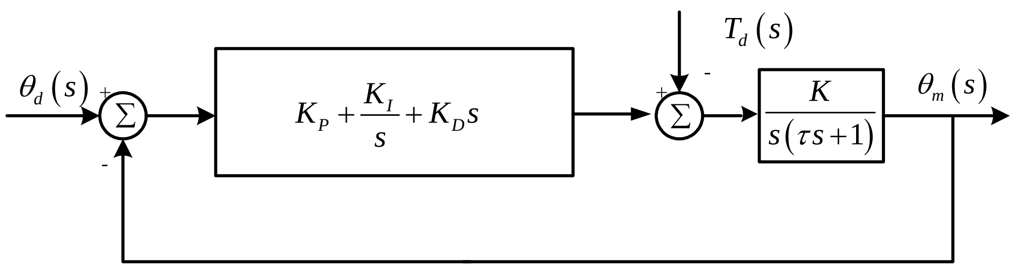
และ

$$K'_m = \frac{1}{K_m^2 + R_a B} \tag{2.18}$$

ดังนั้นจะได้อัตราส่วนระหว่างความเร็วดีซีมอเตอร์ต่อแรงดันที่ขั้ว ดังสมการฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับหนึ่งดังต่อไปนี้

$$G_m(s) = \frac{\omega_m(s)}{V_t(s)} = \frac{K'_m}{\tau'_m s + 1} \tag{2.19}$$

เมื่อต้องการพิจารณาการควบคุมตำแหน่งดีซีมอเตอร์ด้วยตัวควบคุมพีไอดีสามารถเขียนบล็อกไดอะแกรมของดีซีมอเตอร์ได้ใหม่เป็น



รูปที่ 2.3 บล็อกไดอะแกรมของการควบคุมตำแหน่งดีซีมอเตอร์ด้วยตัวควบคุมพีไอดี

ดังนั้นสมการทรานเฟอร์ฟังก์ชันเอาต์พุตต่ออินพุตจะเป็น

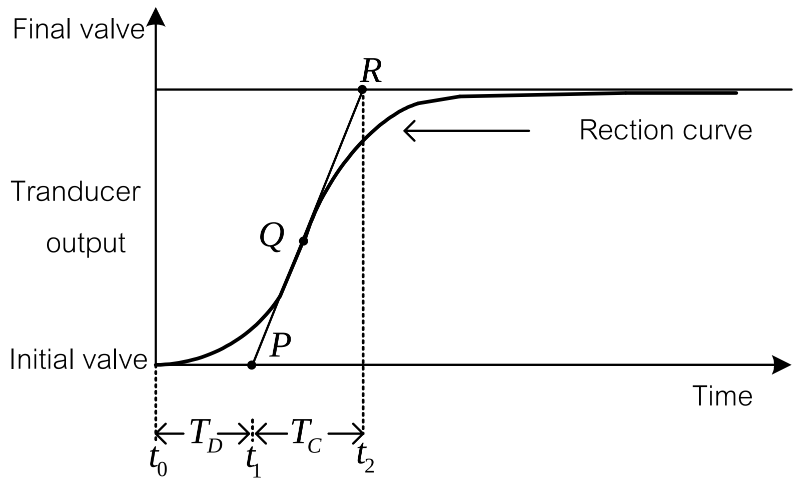
$$\frac{\theta_d(s)}{\theta_m(s)} = \frac{K_m\left(K_D s^2 + K_P s + K_I\right)}{\tau_m s^3 + \left(1 + K_m K_D\right)s^2 + K_m K_P s + K_m K_I} \tag{2.20}$$

จากสมการที่ (2.20) สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{T_d(s)}{\theta_d(s)} = \frac{K_m s}{\tau_m s^3 + (1 + K_m K_D) s^2 + K_m K_P s + K_m K_I} \tag{2.21}$$

2.2 การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของพลานต์การควบคุม ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้วิธีการทดสอบโดยการหาฟังก์ชันถ่ายโอนของพลานต์การควบคุม [1,2] ด้วยการป้อนสัญญาณแบบขั้นบันไดให้กับพลานต์การควบคุม เพราะสามารถที่จะใช้อธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ภายในตัวของพลานต์ที่มีค่าความไม่แน่นอนได้ และในหัวข้อนี้จะถูกใช้อ้างอิงในการหาฟังก์ชันถ่ายโอนของดีซีมอเตอร์ในลำดับต่อไป



รูปที่ 2.4 วิธีการหาผลตอบสนองแบบขั้นบันได

การทดสอบหาฟังก์ชันถ่ายโอนของพลานต์ [2] มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- ป้อนสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันไดเข้าสู่พลานต์ลูปเปิด และวัดผลตอบสนองที่ได้
- จากรูปที่ 2.4 เป็นผลตอบสนองที่ได้ ขั้นตอนต่อไปคือลากเส้น PR สัมผัสตำแหน่งกราฟที่มีความชันมากที่สุด ซึ่งก็คือจุด Q แล้วลากไปตัดกับเส้นค่าสุดท้ายของผลตอบสนองที่จุด R
- ลากเส้นตั้งฉากระหว่างค่าเริ่มต้น และตำแหน่งที่เส้นค่าสุดท้ายตัดกับเส้น PR นั้นคือจุด R
- จากกราฟจะได้ค่า T_D และค่า T_C โดยที่ T_D เป็นค่าตั้งแต่ t_0 ถึง t_1 และ T_C เป็นค่าตั้งแต่ t_1 ถึง t_2
- จะได้ค่าเวลาคงตัว (τ) ก็คือ t_2

- *D.C. Gain* ; $K_m^{'}$ คือผลตอบสนองที่สภาวะคงตัว
- กระบวนการที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นกระบวนการอันดับหนึ่ง ที่มีค่าหน่วงเวลาซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังรูปฟอร์มต่อไปนี้

$$G_P(s) = \frac{K_m^{'}}{\tau_m^{'} + 1} \tag{2.22}$$

โดยที่อัตราการขยายของมอเตอร์ $\left(K_m^{'}\right)$ หาได้จากสมการ

$$K_m^{'} = \frac{Output}{Input} \tag{2.23}$$

และค่าเวลาคงตัวของมอเตอร์ $\left(\tau_m^{'}\right)$ ซึ่งโดยปกติการหาค่าเวลาคงตัวจะคิดที่ 63.2 %