

บทที่ 2

การวิเคราะห์ความเพียงพอของค่าวัดในวงจรข่าย

State Estimation (SE) มีบทบาทที่สำคัญมากในการเฝ้ามองและควบคุมระบบกำลังไฟฟ้าสมัยใหม่ วัตถุประสงค์ของ SE คือ การหาค่าที่ดีที่สุดที่เป็นไปได้ของขนาดและมุมของแรงดันบัสจากชุดของค่าการวัดซึ่งประกอบด้วย ค่ากำลังไฟฟ้าจริงที่ไหลใน branch (Real Power Flow), ค่ากำลังไฟฟ้าเสมือนที่ไหลใน branch (Reactive Power Flow), กำลังไฟฟ้าจริงที่ป้อนให้บัส (Real Power Injection) และค่ากำลังไฟฟ้าเสมือนที่ป้อนให้บัส (Reactive Power Injection) [2]

State Estimator โดยทั่วไปจะประกอบด้วยฟังก์ชันต่าง ๆ ดังนี้ [3]

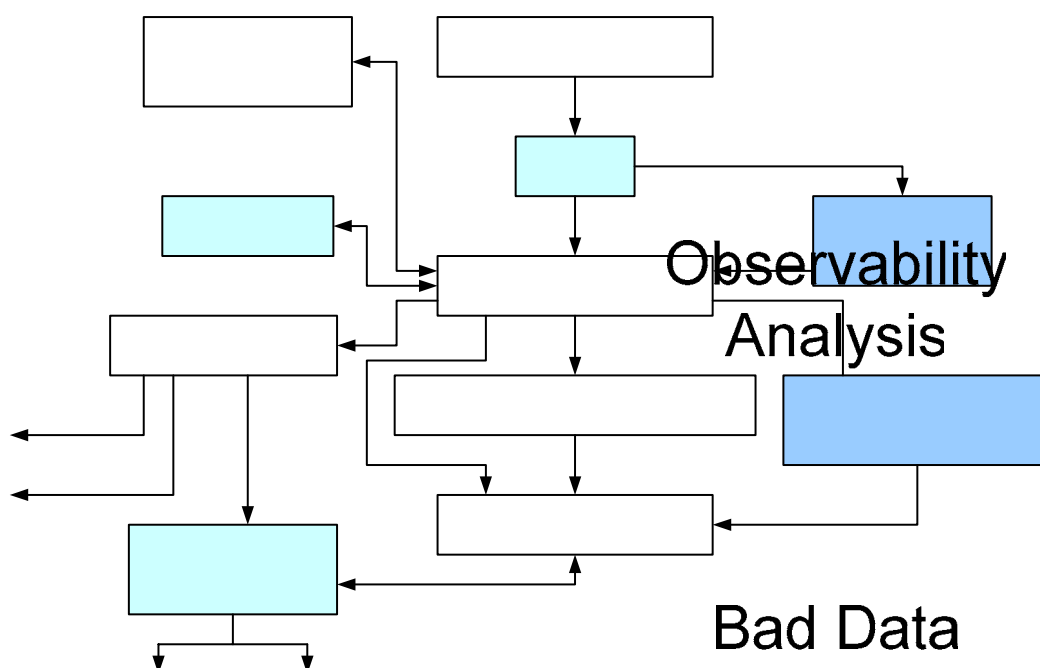
- Network Topology Processor : รวบรวมข้อมูลสถานะเกี่ยวกับ CB, Switch และรูปร่างของ One Line Diagram ของระบบ

- Observability Analysis : ประเมินว่าผลลัพธ์จาก State Estimation (SE) สำหรับทั้งระบบนั้นจะสามารถหาได้จากการใช้ชุดค่าวัดที่หาได้นั้นหรือไม่ระบุ branch ที่ unobservable และ island ที่ observable ในระบบถ้าหากมี

- State Estimation Solution : หากการประเมินที่ดีที่สุดสำหรับสถานะระบบซึ่งประกอบด้วยค่าแรงดันที่บัสในระบบไฟฟ้ากำลังทั้งหมดซึ่งจะขึ้นอยู่กับ network model และชุดของค่าวัดที่รวบรวมได้จากระบบและให้การประเมินที่ดีที่สุดสำหรับทุก ๆ Line Flow, Load, TP Tab และ Generator Output

- Bad data processing : ตรวจสอบการมีความคลาดเคลื่อนรวมทั้งหมด (gross error) ในชุดค่าวัด, ระบุและกำจัด bad measurement

- Parameter and structural error processing : ประเมินค่าพารามิเตอร์ ต่าง ๆ ของ network เช่น พารามิเตอร์ของแบบจำลองสายส่ง, พารามิเตอร์หม้อแปลงที่เปลี่ยน Tap ได้, พารามิเตอร์ของ Shunt Capacitor หรือ Reactor



รูปที่ 2.1 Block Diagram ของ Real-Time Security Analysis

Limit Checking

State estimator สำหรับระบบกำลังไฟฟ้าใช้ชุดค่าวัดที่มีเพื่อประเมินสถานะของระบบ เมื่อให้ชุดค่าวัดพร้อมตำแหน่ง การวิเคราะห์ความเพียงพอของชุดค่าวัดในวงจรข่าย (Network Observability, NO) จะตัดสินว่าสามารถหาค่าประเมินเฉพาะสำหรับสถานะของระบบได้หรือไม่ การวิเคราะห์นี้อาจทำแบบออฟไลน์ระหว่างระยะเริ่มต้นของการติดตั้ง State estimator เพื่อเป็นการตรวจสอบความเพียงพอของการจัดวางค่าวัดที่มีอยู่ หากพบว่าระบบนั้นมีค่าวัดไม่เพียงพอ (Unobservable) อาจต้องติดตั้งมิเตอร์เพิ่มเติมในบางตำแหน่ง และมีการวิเคราะห์ NO แบบออนไลน์ก่อนการรัน State estimator ด้วยเช่นกัน เพื่อให้มั่นใจว่าสามารถหาการประเมินค่าประจักษ์ได้โดยการใช้ชุดค่าวัดที่ได้มาล่าสุด ความผิดพลาดด้านการติดต่อสื่อสาร การเปลี่ยนแปลงของโทโปโลยี (Topology) หรือการล้มเหลวของมิเตอร์ในบางครั้งอาจนำไปสู่กรณีที่สถานะของทั้งระบบไม่สามารถประเมินได้ ดังนั้นระบบจะมีหลายๆ กลุ่มที่มีค่าวัดเพียงพอ (Observable island) ซึ่งอยู่แยกจากกัน โดยแต่ละอันจะมีค่าอ้างอิงมุมเฟสของตัวเองซึ่งเป็นอิสระจากส่วนที่เหลือทั้งหมด การวิเคราะห์ NO ทำให้มีการตรวจพบกรณีเช่นนั้นและระบุ Observable island ที่มีอยู่ทั้ง Secure และการทำ State estimator Insecure

NO ถูกตัดสินใจโดยประเภทและตำแหน่งของคำวัดที่มีและรวมทั้งโทโปโลยีของวงจรข่าย (Network topology) การวิเคราะห์ NO จึงใช้ประโยชน์ของทฤษฎีกราฟเพราะสัมพันธ์กับวงจรข่ายไฟฟ้า. สมการที่เกี่ยวข้องและคำตอบของสมการนั้น [3]

$$SE = 0$$

2.1 วงจรข่ายและกราฟ (Networks and Graphs)

2.1.1 กราฟ (Graphs)

กราฟนิยามโดยเซตของโหนด ("Node") N และเซตของเอดจ์ ("Edge") E และแสดงด้วย

$$G = \{N, E\} \quad (2.1)$$

โดยที่แต่ละเอดจ์จะมีโหนดสองโหนดอยู่ที่ส่วนปลายทั้งสองด้าน จะถือว่ากราฟเชื่อมต่ออย่างสมบูรณ์หากโหนดใดๆ สามารถเข้าถึงได้จากโหนดอื่นใดๆ ด้วยการเดินไปตามเอดจ์ต่างๆ ของกราฟระบุทิศทาง (Directed graph) คือกราฟที่ทุกเอดจ์ถูกกำหนดทิศทาง ในกราฟระบุทิศทางโหนดที่ส่วนปลายของเอดจ์ถูกกำหนดให้เป็นโหนดส่ง (Sending-end node) และโหนดรับ (Receiving-end node) ทิศทางของเอดจ์ระบุโดยลูกศรจากโหนดส่งไปยังโหนดรับของเอดจ์นั้น

ต้นไม้หรือทรี (Tree) ของกราฟนิยามโดยเซตของเอดจ์ที่เชื่อมต่อกันซึ่งไม่ทำให้เกิดเป็นวงจรปิดหรือลูป (Loop) ภายใน หากมีโหนดใดของกราฟที่สามารถเข้าถึงได้โดยเดินไปตามเอดจ์ของทรี จะเรียกว่าสเปนนิงทรี (Spanning tree) ของกราฟ

ทุกๆ เอดจ์ที่ไม่ได้เป็นของสเปนนิงทรีเรียกว่าลิงค์ (Link) วงจรข่ายที่มีโหนดจำนวน N และเอดจ์จำนวน L จะมีสเปนนิงทรีที่มีเอดจ์จำนวน $(N-1)$ และมีลิงค์จำนวน $(L-N+1)$ ที่เชื่อมต่อกับสเปนนิงทรีนี้ ขณะที่จำนวนของโหนดและเอดจ์ในสเปนนิงทรีนั้นกำหนดได้ล่วงหน้า แต่กลุ่มของเอดจ์ที่ประกอบขึ้นเป็นสเปนนิงทรีไม่ได้มีเพียงแบบเดียว

2.1.2 วงจรข่าย (Networks)

วงจรข่ายไฟฟ้า (Electric network) ประกอบด้วยกลุ่มของบรานช์ (Branch) และบัส (Bus) ซึ่งแต่ละบรานช์มีบัสอยู่ที่จุดต่อทั้งสองด้าน ที่อาจร่วมกับหลายบรานช์ภายในวงจรข่ายเดียวกันได้ หาก บรานช์มีบัสที่ถูกต่อกราวด์จะเป็นบรานช์ขนาน (Shunt branch) ส่วนบรานช์ที่ไม่ได้ต่อกราวด์เป็น บรานช์อนุกรม (series branch) แต่ละวงจรข่ายมีกราฟที่สอดคล้องซึ่งบรานช์และบัสถูกแทนด้วยเอดจ์และโหนดตามลำดับ

ที่แต่ละบรานช์ k มีอิมพีแดนซ์ z_k หากบรานช์ j และ k ถูกต่อวงจรเข้าด้วยกัน จะมีค่าอิมพีแดนซ์ของการต่อวงจรร่วมกัน (Mutual coupling impedance) z_{jk} ที่สัมพันธ์กับแรงดันที่ขั้วต่อและกระแสของบรานช์

2.2 เมตริกซ์ของวงจรข่าย (Network Matrices)

สำหรับวงจรข่ายที่มีบรานซ์จำนวน L เวกเตอร์ของกระแสบรานซ์ I_b และแรงดันบรานซ์ V_b จะสัมพันธ์กันผ่านเมตริกซ์อิมพีแดนซ์ของบรานซ์ (Branch impedance matrix) Z_p :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1L} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{L1} & z_{L2} & \cdots & z_{LL} \end{bmatrix}}_{Z_p} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}}_{I_b} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_L \end{bmatrix}}_{V_b} \quad (2.2)$$

โดยที่ z_{kk} คือ อิมพีแดนซ์ของบรานซ์ k และ z_{km} คืออิมพีแดนซ์ร่วมกันระหว่างบรานซ์ k และ m อินเวอร์สของเมตริกซ์ Z_p เรียกว่าเมตริกซ์แอดมิตแตนซ์ของบรานซ์ (Branch admittance matrix) ซึ่งแสดงด้วย $Y_p = Z_p^{-1}$

2.2.1 อินซิเดนซ์เมตริกซ์ของบรานซ์และบัส (Branch to Bus Incidence Matrix)

แต่ละบรานซ์ของวงจรข่ายจะเชื่อมต่อกับบัสสองบัส ไม่เช่นนั้นก็เป็นขั้วบรานซ์ที่เชื่อมต่อหนึ่งบัสกับกราวด์ สามารถกำหนดทิศทางให้แก่บรานซ์ได้โดยระบุให้บัสจุดต่อเป็นปลายส่ง (Sending terminal) และปลายรับ (Receiving terminal) ของบรานซ์ กราฟของวงจรข่ายจะกลายเป็นกราฟระบุทิศทาง ดังนั้นเมตริกซ์การเชื่อมต่อของบรานซ์กับบัส (branch-bus incidence matrix) A สามารถนิยามบนพื้นฐานของทิศทางของบรานซ์ที่เลือกได้ดังนี้:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{หากบัส } j \text{ คือปลายส่งของบรานซ์ } i \\ -1 & \text{หากบัส } j \text{ คือปลายรับของบรานซ์ } i \\ 0 & \text{อย่างอื่น} \end{cases}$$

แต่ละแถวของ A ประกอบด้วย 2 รายการที่ไม่ใช่ 0 และรวมได้เป็น 0 ดังนั้นสามารถกำจัดคอลัมน์ใดๆ ของ A ออกแล้วเอากลับคืนภายหลังได้โดยไม่สูญเสียข้อมูล เมตริกซ์ที่สร้างโดยการลบคอลัมน์ใดๆ ของ A ออกเรียกว่าอินซิเดนซ์เมตริกซ์ที่ถูกลดทอน (Reduced incidence matrix) เขียนแทนด้วย A_r

ในวงจรข่ายที่เชื่อมต่อครบจำนวนด้วยโหนดจำนวน N โหนด แถวจำนวน $(N-1)$ ของ A_r จะเป็นอิสระแบบเชิงเส้นก็ต่อเมื่อบรานซ์ประกอบกันเป็นสเปนนิงทรีของวงจรข่าย สมมุติว่าสเปนนิงทรีถูกเลือก จึงสามารถแบ่งแถวของ A_r และแสดงได้เป็น:

$$A_r = \begin{bmatrix} A_{rT} \\ A_{rL} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

โดยที่แถวของ A_{rT} และ A_{rL} ตรงกับบรรทัดและลิ่งค์ของสเปนนิงทรีตามลำดับ เมตริกซ์ A_{rT} คือ เมตริกซ์จัตุรัส nonsingular (Non-singular square matrix) ขนาด $(N-1) \times (N-1)$

2.2.2 อินซิเดนซ์เมตริกซ์ของวงจรปิดมูลฐานและบรรทัด (Fundamental Loop to Branch Incidence Matrix)

ดังที่แสดงในหัวข้อ 2.1.1 แต่ละวงจรปิดมูลฐาน ประกอบด้วยหลายบรรทัดของทรีและมีลิ่งค์หนึ่งอัน แต่ละวงจรปิดจะถูกกำหนดทิศทาง (ตามหรือทวนเข็มนาฬิกา) ซึ่งจะเข้ากับทิศของลิ่งค์โดยใช้ทิศทางที่เลือกสำหรับบรรทัด อินซิเดนซ์เมตริกซ์ของวงจรปิดมูลฐานและบรรทัด $\mathcal{L}$ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$\mathcal{L}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{หากบรรทัด } j \text{ อยู่ในวงจรปิด } i \text{ และมีทิศทางเดียวกัน} \\ -1 & \text{หากบรรทัด } j \text{ อยู่ในวงจรปิด } i \text{ และมีทิศทางตรงข้ามกัน} \\ 0 & \text{อย่างอื่น} \end{cases}$$

คอลัมน์ของ $\mathcal{L}$ สามารถแบ่งและแสดงได้เป็น:

$$\mathcal{L} = [\mathcal{L}_T : I] \quad (2.4)$$

โดยที่คอลัมน์ของ $\mathcal{L}_T$ และเมตริกซ์เอกลักษณ์ I (identity matrix) สอดคล้องกับบรรทัดของสเปนนิงทรีจำนวน $(N-1)$ และลิ่งค์จำนวน $(L-N+1)$ ที่สัมพันธ์กับวงจรปิดมูลฐานตามลำดับโดยใช้ความเป็นมุมฉากของเมตริกซ์ $\mathcal{L}$ และ A_r จะได้วิธีที่ง่ายสำหรับการสร้าง $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \cdot A_r &= 0 \\ \mathcal{L}_T \cdot A_{rT} + A_{rL} &= 0 \\ \mathcal{L}_T &= -A_{rL} \cdot A_{rT}^{-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3 สมการวงจรปิด (Loop Equation)

จากกฎของแรงดันของเคอร์ชอฟ (Kirchoff's Voltage Law) ผลรวมแรงดันของบรานช์ในวงจรปิดที่กำหนดให้ต้องรวมแล้วเป็นศูนย์ เมื่อมีสเปนนิงทรีและลิงค์ที่สอดคล้องกัน เซตของสมการวงจรปิดมูลฐานที่เป็นอิสระแบบเชิงเส้นสามารถเขียนได้เป็น

$$L \cdot V_b = 0 \quad (2.6)$$

โดยที่:

L : คือ อินซิเดนซ์เมตริกซ์ของวงจรปิดมูลฐานและบรานช์ ขนาด $(L-N+1) \times L$

V_b : คือ เวกเตอร์แรงดันของบรานช์

สมการที่ 2.6 เพียงแค่กล่าวถึงกฎของแรงดันของเคอร์ชอฟสำหรับวงจรข่าย จึงไม่เพียงพอสำหรับแก้ปัญหาที่ไม่รู้ค่าแรงดัน สมการนี้จะถูกขยายด้วยสมการค่าวัดที่เป็นไปตามกฎของแรงดันของเคอร์ชอฟเพื่อที่จะสร้างชุดที่สมบูรณ์ของสมการวงจรข่าย

หมายเหตุ : ขั้วของแรงดันบรานช์จะต้องตรงกันกับทิศทางของบรานช์ที่กำหนดไว้ใน L เนื่องจาก $V_b = AV$ ทั้งสองอินซิเดนซ์เมตริกซ์ A และ L ต้องถูกสร้างโดยใช้การกำหนดทิศทางของ บรานช์ที่เหมือนกัน

2.4 วิธีการวิเคราะห์ความเพียงพอของค่าวัด (Method of Observability Analysis)

การวิเคราะห์ NO สามารถทำได้โดยใช้สมการที่เป็นคู่ (Fully coupled equation) หรือสมการค่าวัดที่ถูกแยกคู่ (Decoupled measurement equation) การวิเคราะห์ทำบนแบบจำลองค่าวัดที่ถูกทำเป็นเชิงเส้นโดยไม่เสียความเป็นทั่วไป การใช้แบบจำลองคู่มีข้อเสีย หนึ่งในนั้นคือการที่ไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียวซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้จากการพิจารณากรณีตัวอย่างของไลน์ (line) เดียวที่รีแอกทีฟเพาเวอร์ฟลว์ (Reactive power flow) ถูกวัดที่ปลายด้านหนึ่งและค่าแรงดันของทั้งสองบัสที่ปลายแสดงในรูปที่ 2.2 ถ้าอิมพีแดนซ์ของไลน์ คือ $j0.2$ p.u. และค่าวัดได้แก่

$$V_1 = 1.00 \text{ p.u.}, \quad V_2 = 0.99 \text{ p.u.}, \quad Q_{12} = -0.80 \text{ p.u.}$$

ดังนั้นตัวแปรสถานะ (State variable) θ_2 สามารถประเมินได้โดยแก้สมการต่อไปนี้

$$Q_{12} = \frac{V_1 V_2}{X} \cos \theta_2 - \frac{V_1^2}{X} \quad (2.7)$$

$$-0.8 = 49.5 \cos \theta_2 - 50 \quad (2.8)$$

จากสมการ 2.8 จะได้ $\theta_2 = \pm 6.31$ องศา ซึ่งดูเหมือนเป็นคำตอบทั้งคู่



รูปที่ 2.2 แสดงระบบสองบัสและค่าวัด

ตัวอย่างนี้แสดงถึงความเสี่ยงที่เกี่ยวข้องในการพยายามประเมิน θ โดยใช้ค่าวัด Q (หรือหา V โดยใช้ P) เพื่อหลีกเลี่ยงกรณีเช่นนี้วิธีการวิเคราะห์ NO โดยปกติจะสมมติค่าวัดคู่ P และ Q และใช้แบบจำลองค่าวัดที่ถูกแยกคู่ (Decoupled measurement model)

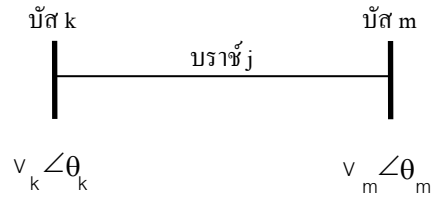
NO ของ θ ที่มีพื้นฐานบนค่าวัด P เท่านั้นถูกวิเคราะห์โดยใช้สมการเพาเวอร์โฟลว์กระแสตรง (DC Power flow equation) แต่วิธีการนี้ถูกจำกัดอยู่ในกรณีที่การแยกคู่ของสมการค่าวัดถูกแสดงว่าถูกต้องได้ ตัวอย่างเช่น ในการมีค่าวัดที่มีขนาดเป็นปัจจุบันสมการค่าวัดที่สอดคล้องกันนั้นจะไม่สามารถแยกคู่ได้บนพื้นฐานของสมมติฐานของการแยกคู่เดียวกันได้อีก [4] ดังนั้นแบบจำลองแยกคู่ต้องถูกใช้ต่อไปสำหรับวิธีการตรวจสอบการมีหลายคำตอบ

การวิเคราะห์ NO สามารถทำได้โดยใช้วิธีการทางด้านตัวเลขหรือวิธีการทาง Topology ก็ได้ วิธีการทาง Topology ใช้แบบจำลองค่าวัดที่ถูกแยกคู่และทฤษฎีกราฟ วิธีการทางตัวเลขอาจใช้แบบจำลองคู่หรือแบบจำลองที่ถูกแยกคู่ซึ่งจะมีพื้นฐานบนการแยกตัวประกอบเชิงตัวเลข (Numerical factorization) ของ Jacobian ของค่าวัดหรือเกนเมตริกซ์ (Gain matrix) วิธีการเหล่านี้ถูกพัฒนาเป็นสูตรโดยใช้ตัวแปรของบรานช์หรือโหนด

2.5 วิธีการทางตัวเลขที่มีพื้นฐานบนสูตรตัวแปรบรานช์ (Numerical Method Based on the Branch Variable Formulation)

2.5.1 ตัวแปรใหม่ของบรานช์ (New Branch Variables)

สมมติให้บรานช์ j เชื่อมต่อระหว่างบัสปลายทาง k และบัสปลายทางรับ m ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงบรานซ์ j

กำหนดให้ตัวแปรของแรงดันและมุมเฟสบรานซ์ α_j และ δ_j สามารถนิยามได้เป็น

$$\alpha_j = \ln \frac{V_k}{V_m} = \ln V_k - \ln V_m \quad (2.9)$$

$$\delta_j = \theta_k - \theta_m \quad (2.10)$$

โดยที่:

V_k, V_m คือขนาดของแรงดันที่บัส k และ m

θ_k, θ_m คือมุมเฟสของแรงดันที่บัส k และ m

ในรูปแบบที่กระชับ เวกเตอร์ตัวแปรบรานซ์ X_α, X_δ สามารถแสดงได้เป็น

$$X_\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_L]^T = A \cdot \ln|V| \quad (2.11)$$

$$X_\delta = [\delta_1 \delta_2 \dots \delta_L]^T = A \cdot \theta \quad (2.12)$$

โดยที่:

$|V| = [V_1 V_2 \dots V_N]^T$, เวกเตอร์ขนาดของแรงดันบัส

$\theta = [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_N]^T$, เวกเตอร์มุมเฟสของแรงดันบัส

A = อินซิเดนซ์เมตริกซ์ของบรานซ์และบัส

2.5.2 สมการค่าวัด (Measurement Equation)

ทุกประเภทของค่าวัดสามารถแสดงเป็นฟังก์ชันของตัวแปรบรานซ์ α_j และ δ_j (ที่ได้นิยามไว้ข้างต้น) การแสดงสำหรับค่าวัดที่แตกต่างกันจะต้องได้มาเป็นอันดับแรกแล้วตามด้วยการวิเคราะห์ที่ทำให้เป็นเชิงเส้น

2.5.2.1 เพาเวอร์โฟลว์ (Power Flows)

เรียลเพาเวอร์โฟลว์ (Real power flow) และรีแอคทีฟเพาเวอร์โฟลว์บนบรานซ์ j ของรูปที่ 2.3 แสดงได้ดังนี้:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m (g_{km} \cos \delta_j + b_{km} \sin \delta_j) \quad (2.13)$$

$$Q_{km} = -V_k^2 b_{km} - V_k V_m (g_{km} \sin \delta_j - b_{km} \cos \delta_j) \quad (2.14)$$

โดยที่:

$g_{km} + jb_{km}$ คือแอดมิตแตนซ์ (Admittance) ของบรานซ์ j , ที่มองข้ามชัสเซปแตนซ์ (Susceptance) ของบรานซ์

V_k : ขนาดแรงดันที่บัส k

$\delta_j : \theta_k - \theta_m$, ตัวแปรมุมเฟสของบรานซ์

θ_k : มุมเฟสแรงดันที่บัส k

พิจารณาสมการเพาเวอร์โฟลว์ที่ถูกดัดแปลงที่ถูกลดขนาดด้วยขนาดแรงดันที่บัส k ยกกำลังสอง

$$P_{km}^s = \frac{P_{km}}{V_k^2} = g_{km} \left(1 - \frac{V_m}{V_k} \cos \delta_j \right) - b_{km} \frac{V_m}{V_k} \sin \delta_j \quad (2.15)$$

$$= \frac{Q_{km}}{V_k^2} = -b_{km} \left(1 - \frac{V_m}{V_k} \cos \delta_{km} \right) - g_{km} \frac{V_m}{V_k} \sin \delta_{km} \quad (2.16)$$

โดยใช้ตัวแปรใหม่ของแรงดันบรานซ์ α_j ซึ่งได้จากสมการ 2.9

$$\alpha_j = \ln \frac{V_k}{V_m} \text{ หรือ } \frac{V_k}{V_m} = e^{\alpha_j} \quad (2.17)$$

สมการ 2.15 และ 2.16 สามารถแสดงได้ในรูปของตัวแปรแรงดันและมุมเฟสของบรานช์

$$P_{km}^S = g_{km} \left(1 - e^{\alpha_j \cos \delta_j} \right) - b_{km} e^{\alpha_j \sin \delta_j} \quad (2.18)$$

$$Q_{km}^S = -b_{km} \left(1 - e^{\alpha_j \cos \delta_j} \right) - g_{km} e^{\alpha_j \sin \delta_j} \quad (2.19)$$

2.5.2.2 เพาเวอร์อินเจกชัน (Power injection)

เพาเวอร์อินเจกชันที่ถูกลดขนาดสามารถแสดงได้เป็นผลรวมแบบเชิงเส้นของเพาเวอร์โฟลว์ที่ถูกลดขนาดซึ่งสร้างจากบัสที่ถูกวัดอินเจกชัน ดังนั้นสามารถแสดงเพาเวอร์อินเจกชันที่ถูกลดขนาดในรูปของตัวแปร α_j และ δ_j ได้เช่นกัน

2.5.2.3 ขนาดแรงดัน (Voltage Magnitudes)

สมมุติให้ในระบบมีอย่างน้อยหนึ่งค่าวัดขนาดแรงดัน เลือกหนึ่งในบัสที่ถูกวัดค่าเพื่อเป็นบัสอ้างอิง ดังนั้นทรีของวงจรข่ายที่มีรากเป็นบัสอ้างอิงสามารถสร้างขึ้นได้และเขียนแทนด้วย T อัตราส่วนของขนาดแรงดันที่บัสใดๆ ต่อขนาดแรงดันที่บัสอ้างอิง (V_{ref}) สามารถแสดงได้เป็น

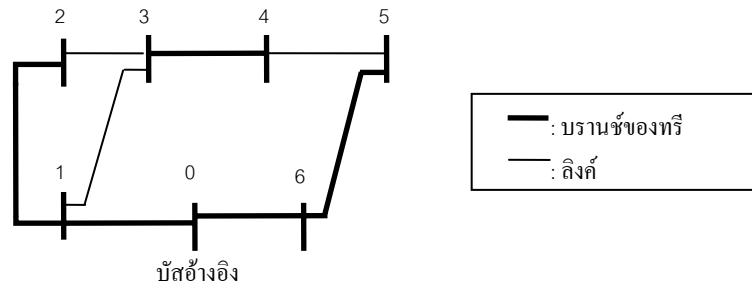
$$V_k^S = \frac{V_k}{V_{ref}} = \frac{V_k}{V_m} \cdot \frac{V_m}{V_l} \dots \frac{V_j}{V_{ref}} \quad (2.20)$$

$$= e^{\alpha_{j1}} \cdot e^{\alpha_{j2}} \dots e^{\alpha_{jr}} \quad (2.21)$$

ใส่ลอการิทึม (log) ทั้งสองข้างของสมการ

$$\ln V_k^S = \alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \dots + \alpha_{jr} \quad (2.22)$$

โดยที่ $\{j1, j2, \dots, jr\}$ ประกอบเป็นเซตของบรานช์ที่เป็นของทรี T ซึ่งมีรากอยู่ที่บัสอ้างอิงและสร้างเป็นเส้นทางต่อเนื่องจากบัส k ไปยังบัสอ้างอิง ref ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงรากของโครงสร้างทรี

2.5.2.4 ขนาดกระแส (Current Magnitudes)

กำลังสองของขนาดกระแสของไลน์ที่ผ่านบรานช์ j ซึ่งเชื่อมต่อบัส k กับบัส m แสดงได้เป็น

$$I_{km}^2 = \frac{P_{km}^2 + Q_{km}^2}{V_k^2} = V_k^2 \left[(P_{km}^s)^2 + (Q_{km}^s)^2 \right] \quad (2.23)$$

ดังนั้น กำลังสองของขนาดกระแสไลน์ที่ถูกลดขนาดจะเป็น

$$\left(I_{km}^s \right)^2 = \left(\frac{I_{km}}{V_k} \right)^2 = (P_{km}^s)^2 + (Q_{km}^s)^2 \quad (2.24)$$

2.5.2.5 สมการวงจรปิด (Loop Equations)

หมายเหตุ ในวงจรปิดที่สร้างขึ้นจากบรานช์ $j_1, j_2, \dots, j_L$, ตัวแปรบรานช์จะทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \dots + \alpha_{jL} = 0 \quad (2.25)$$

$$\delta_{j1} + \delta_{j2} + \dots + \delta_{jL} = 0 \quad (2.26)$$

ดังนั้นสมการวงจรปิดพื้นฐานที่ได้ในสมการ 2.6 จะเป็นจริงถ้าเวกเตอร์แรงดันบรานช์ V_b ถูกแทนด้วยเวกเตอร์ผลต่างของขนาดแรงดันบรานช์ X_α หรือเวกเตอร์ผลต่างของมุมเฟสแรงดันบรานช์ X_δ

$$L \cdot X_{\delta} = 0 \quad (2.27)$$

$$L \cdot X_{\alpha} = 0 \quad (2.28)$$

ในสมการ 2.27 และ 2.28 ตัวแปรที่สอดคล้องกับลิงค์สามารถแสดงในรูปของตัวแปรบรานช์ที่เหลือของทรี การลดทอนแบบจำลองเป็นไปได้โดยการกำจัดตัวแปรลิงค์ออกจากที่เหลือของสมการค่าวัด

2.5.3 แบบจำลองค่าวัดที่ทำเป็นเชิงเส้น (Linearized Measurement Model)

สมการสำหรับเพาเวอร์อินเจกชัน, โฟลว์, ขนาดแรงดันและกระแส, และวงจรปิด ซึ่งได้อธิบายไปแล้วนั้นสามารถแสดงในรูปแบบที่กระชับได้เป็นสมการเวกเตอร์แบบไม่เชิงเส้น

$$f(X) = z \quad (2.29)$$

โดยที่

$$X^T = [\delta^T, \alpha^T]$$

z คือ เวกเตอร์ค่าวัดที่ถูกลดขนาดซึ่งมีศูนย์อยู่ด้วยสำหรับสมการวงจรปิด และค่าวัดถูกสมมุติว่าไม่มีความคลาดเคลื่อน

δ คือ เวกเตอร์ของตัวแปรมุมเฟสของบรานช์

α คือ เวกเตอร์ของตัวแปรแรงดันของบรานช์

หมายเหตุ การสมมุติให้ค่าวัดไม่มีความคลาดเคลื่อนในสมการ 2.29 นั้นสมเหตุผลเพราะความคลาดเคลื่อนของค่าวัดไม่มีผลต่อการวิเคราะห์ NO

การประมาณอันดับแรกของเทเลอร์ (First-order Taylor approximation) ของสมการ 2.29 ให้ผลเป็น

$$H \cdot \Delta x = z - f(X^0) = \Delta z \quad (2.30)$$

โดยที่

$$H = \frac{\partial f(X)}{\partial X}, \text{ ถูกหาค่าที่ } X^0 \text{ ใดๆ}$$

$$\Delta X = X - X^0$$

เพื่อให้มั่นใจว่าค่าวัดกำลังไฟฟ้าจริง (Real power) และกำลังไฟฟ้าเสมือน (Reactive power) ไม่ได้ถูกใช้เพื่อเฟ้นาส่งเกิดตัวแปรแรงดัน (และมุมเฟส) ค่าวัดของเพาเวอร์โพล์และอินเจกชันถูกสมมติให้มาเป็นคู่เช่นเดียวกับสมการ 2.30 ที่ไม่สนใจการจับคู่ของค่าวัดกำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้าเสมือน เข้ากับตัวแปรแรงดัน(และมุมเฟส)ในเมตริกซ์ H ดังนั้นชนิดเดียวของค่าวัดที่แตกต่างๆ มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งในคอลัมน์ของตัวแปรแรงดันและมุมเฟส จะเป็นค่าวัดกระแส

2.5.3.1 สมาชิกของ H (Elements of H)

จาโคเบียน (Jacobian) ของค่าวัด H ถูกสร้างโดยการหาค่าจากสมการต่อไปนี้ซึ่งตรงกับอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการค่าวัดและวงจรปิดเทียบกับตัวแปรบรานซ์

2.5.3.2 เพาเวอร์โพล์ (Power flows)

$$\frac{\partial P_{km}^S}{\partial \alpha_j} = -g_{km} e^{\alpha_j} \cos \delta_j - b_{km} e^{\alpha_j} \sin \delta_j \approx 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial P_{km}^S}{\partial \delta_j} = g_{km} e^{\alpha_j} \sin \delta_j - b_{km} e^{\alpha_j} \cos \delta_j \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^S}{\partial \alpha_j} = b_{km} e^{\alpha_j} \cos \delta_j - g_{km} e^{\alpha_j} \sin \delta_j \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^S}{\partial \delta_j} = -b_{km} e^{\alpha_j} \sin \delta_j - g_{km} e^{\alpha_j} \cos \delta_j \approx 0 \quad (2.34)$$

2.5.3.3 เพาเวอร์อินเจกชัน (Power Injections)

เมื่อไม่คำนึงถึงส่วนชั้ของบัส อินเจกชันของบัส k ที่ถูกลดขนาด P_k^S หรือ Q_k^S สามารถแสดงในรูปโพล์ (ของบรานซ์ที่เชื่อมต่อกัน) ซึ่งถูกลดขนาด

$$P_k^S = \sum_{i \in N_k} P_{ki}^S \quad (2.35)$$

$$Q_k^S = \sum_{i \in N_k} Q_{ki}^S \quad (2.36)$$

โดยที่ N_k คือเซตของบัสที่เชื่อมต่อโดยตรงกับบัส k

ดังนั้น

$$\frac{\partial P_k^s}{\partial \alpha_j} = \sum_{i \in N_k} \frac{\partial P_{ki}^s}{\partial \alpha_j} \approx 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial P_k^s}{\partial \delta_j} = \sum_{i \in N_k} \frac{\partial P_{ki}^s}{\partial \delta_j} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial Q_k^s}{\partial \alpha_j} = \sum_{i \in N_k} \frac{\partial Q_{ki}^s}{\partial \alpha_j} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial Q_k^s}{\partial \delta_j} = \sum_{i \in N_k} \frac{\partial Q_{ki}^s}{\partial \delta_j} \approx 0 \quad (2.40)$$

2.5.3.4 ขนาดแรงดัน (Voltage Magnitude)

โดยใช้สมการ 2.22

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (\ln V_k^s) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } j = j_1, j_2, \dots, j_r \\ 0 & \text{อย่างอื่น} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta_j} (\ln V_k^s) = 0$$

2.5.3.5 ขนาดกระแส (Current Magnitude)

โดยใช้สมการ 2.23 อนุพันธ์ของค่าวัดขนาดกระแสที่ถูกลดขนาดสามารถแสดงได้ในรูปของเพาเวอร์อินเจกชันที่ถูกลดขนาดและอนุพันธ์ของมัน

$$\frac{\partial I_j^s}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{I_j^s} \left\{ P_{km}^s \frac{\partial P_{km}^s}{\partial \alpha_j} + Q_{km}^s \frac{\partial Q_{km}^s}{\partial \alpha_j} \right\} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial I_j^s}{\partial \delta_j} = \frac{1}{I_j^s} \left\{ P_{km}^s \frac{\partial P_{km}^s}{\partial \delta_j} + Q_{km}^s \frac{\partial Q_{km}^s}{\partial \delta_j} \right\} \quad (2.42)$$

2.5.3.6 สมการวงจรปิด (Loop Equations)

โดยการรวมสมการ 2.27 และ 2.28 แล้วหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรบรานซ์ X_δ, X_α จะได้

$$\frac{\partial}{\partial X} \begin{bmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\delta \\ X_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{L} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

2.5.4 การวิเคราะห์ความเพียงพอของค่าวัด (Observability Analysis)

สมการ 2.30 สัมพันธ์ค่าวัดที่มีทั้งหมดกับตัวแปรบรานซ์โดยใช้การประมาณอันดับแรกของ เทเลอร์ค่าประเมินของ Δx สามารถหาได้ทราบเท่าที่จำนวนคอลัมน์ของ H เท่ากับขนาดของ Δx มีวิธีเดียวคือผ่านทาง การแตกเมตริกซ์ (Matrix factorization) สามารถใช้วิธีการของปีเตอร์-วิลคินสัน (Peters-Wilkinson) [5] เพื่อแตก H เป็นตัวประกอบสามเหลี่ยม (Triangular factor) ได้ดังนี้

$$H = \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} [U] \quad (2.44)$$

โดยที่

L และ U คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างจัตุรัส (Square lower triangular matrix) และเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนจัตุรัส (Square upper triangular matrix) ตามลำดับ

M คือ เมตริกซ์มุมฉาก (Rectangular matrix)

ในระหว่างการแตกเมตริกซ์ การทำตัวหลักแถว (Row pivot) และตัวหลักคอลัมน์ (Column pivot) อาจจำเป็นต้องหลีกเลี่ยงตัวหลักที่เป็นศูนย์ เมื่อระบบ Unobservable จะไม่สามารถหลีกเลี่ยงตัวหลักที่เป็นศูนย์ได้ กรณีเช่นนี้จะใช้ค่าที่ไม่เป็นศูนย์คือ 1.0 แทนตัวหลักศูนย์แล้วการแตกเมตริกซ์จะดำเนินต่อไปได้ ตัวประกอบ L ที่ได้จากวิธีนี้ประกอบด้วยตัวหลักที่ถูกเพิ่มเองซึ่งแต่ละอันจะสอดคล้องกับตัวแปร บรานซ์

เขียนสมการ 2.30 ใหม่โดยแทนด้วยสมการที่ 2.44

$$L \cdot U \cdot \Delta x = \Delta z^e \quad (2.45)$$

$$M \cdot U \cdot \Delta x = \Delta z^r \quad (2.46)$$

$$\text{โดยที่ } \Delta z = \left[(\Delta z^e)^T (\Delta z^r)^T \right]^T$$

หมายเหตุสำหรับวัตถุประสงค์ในการวิเคราะห์ NO , ชุดของค่าวัดที่สอดคล้องกับค่าวัดส่วนบนจำนวน N คำนั่นเพียงพอ (N คือจำนวนตัวแปรของบรานซ์) เพราะมันแสดงถึงชุดค่าวัดที่เป็นอิสระอย่างเชิงเส้น

หากระบบ Observable สมการ 2.45 จะให้คำตอบศูนย์ (Null solution) สำหรับ Δx สำหรับเวกเตอร์ศูนย์ (Null vector) ของ Δz^e ในกรณีที่ระบบ Unobservable สมาชิกใน Δz^e ที่สอดคล้องกับตัวหลักศูนย์ของ L ที่ถูกกำหนดให้เท่ากับ 1.0 ในระหว่างการแตกเมตริกซ์นั้นจะถูก

กำหนดให้เป็นค่าที่ไม่เจาะจงแต่ไม่เท่ากับศูนย์ สามารถแสดงให้เห็นว่ากระบวนการนี้เทียบเท่ากับการเพิ่มค่าวัดใหม่ของตัวแปรของบรานซ์ที่สอดคล้องกันให้กับชุดวัดที่มีอยู่ สมการ 2.45 สามารถจัดเรียงได้ใหม่เพื่อให้แถวและคอลัมน์ของตัวหลักที่ไม่เป็นศูนย์ที่เพิ่มเข้าไปเองมาเป็นสุดท้าย

$$\begin{bmatrix} L_0 & 0 \\ L_e & I_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 & U_e \\ 0 & I_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x_u \end{bmatrix} = \Delta z^e = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta z_u^e \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

โดยที่

L_0 คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างนอนซิงกูลาร์ (non-singular lower triangular matrix)

U_0 คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมบนนอนซิงกูลาร์ (non-singular upper triangular matrix)

L_e, U_e คือ เมตริกซ์มุมฉาก

I_u คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด N_u

N_u คือ จำนวนตัวหลักศูนย์ที่พบและถูกแทนด้วย 1.0 ระหว่างการแตกเมตริกซ์ H

Δz_u^e คือ เวกเตอร์ของค่าที่ไม่เจาะจงแต่ไม่เป็นศูนย์ที่ถูกกำหนดให้

$\Delta x_0, \Delta x_u$ คือ คำตอบของตัวแปรบรานซ์

หมายเหตุ

$$\Delta x_u = \Delta z_u^e \quad (2.48)$$

$$U_0 \Delta x_0 = -U_e \Delta z_u^e \quad (2.49)$$

แก้สมการ 2.49 จะได้ Δx_0 โดยที่สมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์จะสอดคล้องกับบรานซ์ที่ Unobservable กลุ่มของบรานซ์ที่ Unobservable จะเป็นกลุ่มที่ประกอบด้วยบรานซ์ที่ได้ระบุถึงก่อนหน้านี้ซึ่งสอดคล้องกับสมาชิกของ Δz_u เมื่อรายชื่อของบรานซ์ที่ Unobservable ถูกสร้างขึ้นจะสามารถกำจัดบรานซ์เหล่านี้ออกจากแปลนของระบบ ได้เป็น “Observable island” ของระบบ

หมายเหตุ การใช้ตัวแปรบรานซ์ในการทำสูตรสำหรับปัญหาการวิเคราะห์ NO มีข้อดีที่สำคัญอยู่สองข้อ หนึ่งคือลักษณะการไม่ทำซ้ำของกระบวนการที่ให้ผลลัพธ์ อีกข้อหนึ่งคือการทำให้อุตรง่ายลงด้วยการไม่มีหลักการของสแลคบัส (Slack bus) แม้ว่าความต้องการในการสร้างสมการวงจรปิดจะดูเป็นภาระแต่ในทางปฏิบัติแบบจำลองถูกลดได้โดยการกำจัดค่าวัดเพาเวอร์โพล์และตัวแปรบรานซ์ที่สอดคล้องกันโดยตรง ซึ่งไม่สามารถทำได้ในสูตรของโนด (Nodal formulation) ที่จะกล่าวต่อไป

2.6 วิธีการทางตัวเลขที่มีพื้นฐานบนสูตรตัวแปรโนด (Numerical Method Based on the Nodal Variable Formulation)

การวิเคราะห์ NO ทางตัวเลขสามารถทำได้โดยใช้ตัวแปรโนด ให้เวกเตอร์ตัวแปรโนด x แทนเวกเตอร์ของขนาดและมุมเฟสของแรงดันทุกบัสในระบบ พิจารณาแบบจำลองค่าวัดถูกทำเป็นเชิงเส้นที่ไม่สนใจความคลาดเคลื่อนของค่าวัดเนื่องจากไม่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ NO

$$\Delta z = H \Delta x$$

โดยที่

$\Delta z = z - h(x_0)$, ความไม่เข้ากันระหว่างเวกเตอร์ค่าวัดกับค่าของมันที่คำนวณได้ที่ค่าประเมิน x_0

$$\Delta x = x - x_0$$

$$H = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \text{ หาค่าที่ } x_0$$

ค่าประเมิน WLS $\Delta \hat{x}$ กำหนดโดย

$$\Delta \hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \Delta z$$

คำตอบเดียวสำหรับ Δx สามารถหาได้ถ้า $(H^T R^{-1} H)$ เป็นนอนซิงกูลาร์หรือถ้า H มีจำนวนคอลัมน์เต็ม (เช่น $\text{rank}[H]=n$ โดย n คือจำนวนของสถานะทั้งหมด)

อาศัยการจับคู่ที่อ่อนแอ (Weak coupling) ระหว่าง P-V และ Q- θ สามารถแยกคู่แบบจำลองเชิงเส้นได้เป็น

$$\Delta z_A = H_{AA} \Delta \theta$$

$$\Delta z_R = H_{RR} \Delta V$$

โดยที่

$\Delta z_A, \Delta z_R$ คือเวกเตอร์ความไม่เข้ากันของค่าวัดกำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้าเสมือนตามลำดับ

$H_{AA} = \frac{\partial h_A}{\partial \theta}$ คือ Jacobian ที่ถูกแยกคู่สำหรับค่าวัดกำลังไฟฟ้าจริง

$H_{RR} = \frac{\partial h_R}{\partial V}$ คือ Jacobian ที่ถูกแยกคู่สำหรับค่าวัดกำลังไฟฟ้าเสมือน

$$\Delta \theta = \theta - \theta_0$$

$$\Delta V = V - V_0$$

สมมติว่าค่าวัด P และ Q มาเป็นคู่ความเพียงพอของค่าวัด P- θ และ Q-V สามารถทดสอบแยกกันได้ หมายความว่าไม่เหมือนกับ θ ค่าตอบของแรงดันต้องการบัสอ้างอิงที่ถุกวัด ดังนั้นการวิเคราะห์ P- θ ควรจะตรวจสอบต่อไปเพื่อให้มั่นใจว่าอย่างน้อยหนึ่งค่าวัดแรงดันต่อหนึ่ง Observable island

ควรสังเกตว่า NO ไม่ขึ้นกับตัวแปรบรานซ์เช่นเดียวกันกับสถานการณ์ทำงานของระบบ จึงสามารถถูกสมมติให้ทุกบรานซ์ของระบบมีอิมพีแดนซ์เป็น j1.0 p.u. และแรงดันของทุกบัสกำหนดให้เท่ากับ 1.0 p.u. เพื่อจุดประสงค์ของการวิเคราะห์ NO ดังนั้นเพาเวอร์โฟลว์กระแสตรงตามบรานซ์ของระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$P_b = A\theta \quad (2.50)$$

โดยที่

P_b คือ เวกเตอร์ของโฟลว์ของบรานซ์

A คือ อินซิเดนซ์เมตริกซ์ของบรานซ์และบัส

θ คือ เวกเตอร์ของมุมเฟสแรงดันบัส

หากสถานะที่ถุกประเมิน $\hat{\theta}$ เป็นศูนย์ดังนั้นทุกบรานซ์จะเป็นศูนย์ดังที่กำหนดโดยสมการ 3.50 โดยใช้แบบจำลองค่าวัดกระแสตรง (DC measurement model)

$$H_{AA}\theta = z_A \quad (2.51)$$

ค่าประเมินกำลังสองน้อยสุดที่ถ่วงน้ำหนัก (WLS) สำหรับ θ จะกำหนดโดย

$$\hat{\theta} = (H_{AA}^T H_{AA})^{-1} H_{AA}^T z_A = G_{AA}^{-1} t_A \quad (2.52)$$

ค่าประเมินศูนย์ (Null estimate) สำหรับ $\hat{\theta}$ จะได้มาสำหรับระบบที่ Observable เมื่อทุกค่าวัดของระบบ Δz_A เช่นค่าวัดโฟลว์, อินเจ็คชั่นมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ถ้ามีค่าประเมิน $\hat{\theta}$ ที่เป็นไปตามสมการค่าวัด

$$H_{AA} \hat{\theta} = 0 \quad (2.53)$$

ได้โฟลว์ของบรานช์ที่ไม่เท่ากับศูนย์

$$P_b = A\hat{\theta} \neq 0 \quad (2.54)$$

ดังนั้น $\hat{\theta}$ จะถูกเรียกว่าสถานะที่มีค่าวัดไม่เพียงพอ (Unobservable state) และบรานช์ที่มีโฟลว์ไม่เท่ากับศูนย์จะถูกอ้างอิงเป็นบรานช์ที่มีค่าวัดไม่เพียงพอ (Unobservable branch)

2.6.1 การหาบรานช์ที่มีค่าวัดไม่เพียงพอ (Determining the Unobservable Branches)

หากระบบถูกพบว่า Unobservable จะสามารถหา Observable island ที่ถูกแบ่งด้วยบรานช์ที่ Unobservable [6] หมายถึงบรานช์ที่ไม่มีค่าวัดของการเชื่อมต่อ (Incident measurement) จะเรียกว่าเป็นบรานช์ที่ไม่เกี่ยวข้องและสถานะที่ถูกประเมินจะไม่ขึ้นอยู่กับสถานะ (On/Off) และตัวแปรต่างๆ ของบรานช์นั้น จึงไม่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ NO

พิจารณาแบบจำลองเชิงเส้นที่ถูกแยกคู่ที่ทุกค่าวัดถูกกำหนดให้เท่ากับศูนย์

$$(H_{AA}^T H_{AA}) \hat{\theta} = H_{AA}^T z_A = t_A = 0 \quad (2.55)$$

G_{AA} เป็นซิงกูลาร์แม้กระทั่งสำหรับระบบที่ Observable โดยสมบูรณ์ เพราะมุมเฟสของบัสอ้างอิงถูกรวมอยู่ในเวกเตอร์สถานะ (State vector) θ แล้ววิธีการจัดเรียงของแถวและหลักสามารถใช้เพื่อจัดเรียงใหม่และแบ่งเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_a \\ \hat{\theta}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ G_{11} คือเมตริกซ์ย่อยนอซิงกูลาร์ ใน G_{AA}

โดยการกำหนดค่าที่ไม่เจาะจงแต่ไม่ซ้ำกันให้แก่สมาชิกของ $\hat{\theta}_b$ เพื่อเป็น $\bar{\theta}_b$ หนึ่งในคำตอบที่เป็นไปได้สำหรับ $\hat{\theta}_a$ สามารถหาได้จาก

$$\hat{\theta}_a = -G_{11}^{-1}G_{12}\bar{\theta}_b$$

โพล์ของบรานซ์ที่สอดคล้องกับคำตอบนี้ $(\hat{\theta}_a, \bar{\theta}_b) = \hat{\theta}^*$ สามารถหาได้จาก

$$A\hat{\theta}^* = P_b^*$$

บรานซ์ i ที่ $P_b^*(i) \neq 0$ จะถูกระบุว่าเป็นบรานซ์ที่ Unobservable

ในทางปฏิบัติกระบวนการข้างต้นนั้นทำได้โดยการแตกเมตริกซ์เป็นสามเหลี่ยม (Triangular factorization) ของ G_{AA} ซึ่งใช้วิธีการของโคเลสกี (Cholesky) เพราะ G_{AA} เป็นซิงกูลาร์จึงมีอย่างน้อยหนึ่งตัวหลักที่เป็นศูนย์ ในระหว่างการทำเมื่อพบตัวหลักที่เป็นศูนย์จะถูกแทนที่ด้วย 1.0 และสมาชิกที่สอดคล้องกันของเวกเตอร์ทางขวามือของสมการ (Right-Hand-Side vector) จะถูกกำหนดค่าที่ไม่เจาะจงให้ ซึ่งค่าที่กำหนดในลักษณะนี้ควรจะไม่ซ้ำกันและเป็นการกำหนดค่าจำนวนเต็มเรียงลำดับจากน้อยไปมาก เช่น 0,1,2,... เป็นต้น

2.6.2 การระบุกลุ่มที่มีค่าวัดเพียงพอ (Identification of Observable Islands)

กระบวนการหาบรานซ์ที่ Unobservable สามารถนำมาใช้เพื่อหา Observable island ในระบบ ซึ่งเป็นกระบวนการที่ต้องทำซ้ำๆ แต่ครั้งจะกำจัดอินเจ็คชั่นที่ไม่เกี่ยวข้องจนกว่าจะสามารถระบุ Observable island ได้ครบทั้งหมดอินเจ็คชั่นที่ไม่เกี่ยวข้องคืออินเจ็คชั่นที่เชื่อมต่อกับบรานซ์ที่ Unobservable อัลกอริทึมเป็นดังนี้

1. กำจัดบรานซ์ทั้งหมดที่ไม่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นบรานซ์ที่ไม่มีค่าวัดของการเชื่อมต่อ
2. สร้างเกนเมตริกซ์ที่ถูกทำเป็นเชิงเส้นและเกนเมตริกซ์เชิงเส้นที่ถูกแยกคู่ (Decoupled linearized gain matrix) สำหรับปัญหาการประเมิน $P - \theta$

$$G_{AA} = H_{AA}^T R_A^{-1} H_{AA}$$

3. แยก G_{AA} ที่ปรับเปลี่ยนตัวหลักศูนย์และเวกเตอร์ทางขวามือ
4. ระบุและกำจัดทุกบรานซ์ที่ Unobservable และกำจัดทุกอินเจ็คชั่นที่เชื่อมต่อกับบรานซ์ที่ Unobservable ทั้งหมดนั้น

5. หากไม่พบบรรทัดที่ Unobservable อีก ให้หา Observable island ที่ถูกแบ่งด้วยบรรทัดที่ Unobservable แล้วหยุด แต่หากยังพบบรรทัดที่ Unobservable อยู่ต้องทำขั้นตอนที่ 2 อีก

2.6.3 การใส่ค่าวัดเพื่อฟื้นฟูความเพียงพอของค่าวัด (Measurement Placement to Restore Observability)

เมื่อ Observable island ถูกระบุ สามารถใส่ค่าวัดเพิ่มเข้าไปเพื่อรวมกลุ่มเหล่านี้สร้างเป็นหนึ่ง Observable island ค่าวัดที่เป็นตัวเลือกสำหรับรวมกลุ่ม ได้แก่

- โพล์ของไลนส์ตลอดบรรทัดที่เชื่อมต่อ Observable island
- อินเจกชันที่บัสขอบเขตของ Observable island

พิจารณาเกนเมตริกซ์ G_{AA} ของสมการ 2.55 จะตัดตัวเขียนข้างใต้ (AA) ออกเพื่อให้สัญลักษณ์ดูง่ายขึ้น หมายความว่าเพราะแอสลึคบัสดูกรวมอยู่ในสูตรด้วยเช่นกัน จำนวนแถวของ H (และ G) จะไม่เกิน $(n-1)$ (n คือจำนวนของบัส) แม้สำหรับระบบที่ Observable ดังนั้นการแตกเกนเมตริกซ์ G ด้วยวิธีโคเลสกีจะถูกหยุดโดยอย่างน้อยหนึ่งตัวหลัก ซึ่งสมมุติว่าเกิดขึ้นภายหลังกระบวนการของตัวหลักที่ i ดังต่อไปนี้

$$G_{\text{red}} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_i & & \\ & & & & 0 & 0 \dots 0 \\ & & & & 0 & x & x & x \\ & & & & \vdots & x & x & x \\ & & & & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

โดยที่

$$G_{\text{red}} = L_i^{-1} L_{i-1}^{-1} \dots L_1^{-1} G L_1^{-T} \dots L_{i-1}^{-T} L_i^{-T} \quad (2.57)$$

และ L_i คือ ตัวประกอบมูลฐาน (Elementary factor) กำหนดโดย

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & x & \ddots & \\ & & x & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

โดยที่คอลัมน์ที่ i มีสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ได้แนวทแยงมุมหลักซึ่งทำเครื่องหมายด้วย x

กำหนดให้ $L_{i+1} = I_{n \times n}$ การแตกเมตริกซ์ G_{red} ด้วยวิธีโคเลสกีในสมการ 2.56 สามารถดำเนินไปด้วยคอลัมน์ที่ $i+2$ กระบวนการนี้จะถูกทำซ้ำในแต่ละครั้งที่พบตัวหลักศูนย์ไปจนกว่าจะเสร็จสิ้นการแตกเมตริกซ์จึงสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} D &= L_n^{-1} L_{n-1}^{-1} \dots L_1^{-1} G L_1^{-T} \dots L_{n-1}^{-T} L_n^{-T} \\ &= L^{-1} G L^{-T} \end{aligned} \quad (2.59)$$

โดยที่ D คือเมตริกซ์ทแยงมุมซิงกูลาร์ซึ่งมีศูนย์อยู่ในแถวที่สอดคล้องกับตัวหลักศูนย์ที่พบระหว่างการแตกเมตริกซ์ G และ L คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างนอนซิงกูลาร์

พิจารณาการเพิ่มค่าวัดซึ่งจะให้แถวใหม่ h_k แก่ Jacobian ของค่าวัด ดังนั้นเมตริกซ์อันใหม่ G' จะเป็น

$$\begin{aligned} G' &= G + h_k^T h_k \\ &= L(D + MM^T)L^T \\ &= LD'L^T \end{aligned} \quad (2.60)$$

โดยที่ $D' = D + MM^T$ และ $M = L^{-1} h_k^T$ สามารถแสดงได้ว่า จำนวนแถวของ G' จะเพิ่มขึ้น 1 ก็ต่อเมื่อ $M(i) \neq 0$ สำหรับค่า i ใดๆ ที่ $D(i,i) = 0$

ค่าของ $M(i)$ สามารถหาได้จากผลคูณภายในของ h_k กับแถวที่ i ของ L^{-1} ซึ่งคำนวณด้วยขั้นตอนเดียวของการแทนค่าย้อนกลับ (Back substitution) ดังแสดงต่อไปนี้

$$L^T w^T = e_i \quad (2.61)$$

โดยที่ e_i คือ อาร์เรย์ซิงเกิลตัน (singleton array) ที่ทุกสมาชิกเป็นศูนย์ยกเว้นสมาชิกที่ i ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.0 และ w คือแถวที่ i ของ L^{-1} ซึ่งมีโครงสร้างเป็น

$$w = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dots \ w_{i-1} \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

นิยามให้ W เป็นเมตริกซ์ที่มีเฉพาะแถวของ L^{-1} ที่สอดคล้องกับตัวหลักศูนย์ในเมตริกซ์เทียงมุม D แถวของ W หาได้จากการแก้สมการ 2.61 ซ้ำๆ สำหรับทุกค่า i ที่ $D(i,i) = 0$

อัลกอริทึมการใส่ค่าวัดสามารถทำขึ้นได้โดยมีพื้นฐานบนเมตริกซ์ต่างๆ ที่ได้กล่าวไปแล้ว

1. สร้างเมตริกซ์และคำนวณตัวประกอบของโคเลสกี
2. ตรวจสอบว่า D มีแค่ตัวหลักศูนย์เพียงตัวเดียวหรือไม่ ถ้าใช่ให้หยุดและถือว่าระบบ Observable หากไม่ใช่ให้คำนวณเมตริกซ์ W โดยแก้สมการ 2.61 ซ้ำๆ สำหรับแต่ละแถวของตัวหลักศูนย์
3. สร้างรายการค่าวัดที่เป็นตัวเลือกซึ่งประกอบด้วยค่าวัดโพล์และอินเจ็คชั่นที่เกิดขึ้นที่บรานซ์ซึ่งเชื่อมต่อกับ Observable island ที่ถูกระบุจากการวิเคราะห์ NO
4. สร้างเมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) H_c ของค่าวัด สำหรับค่าวัดตัวเลือก
5. คำนวณ $B = H_c W^T$ และคำนวณ E (รูปแบบขั้นบันไดลดรูป (reduced echelon) ของ B) แถวที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ E จะสอดคล้องกับทุกค่าวัดที่ต้องการเพิ่ม

2.7 วิธีการวิเคราะห์ความเพียงพอของค่าวัดทางโทโปโลยี (Topological Observability Analysis Method)

การวิเคราะห์ NO สามารถทำได้โดยใช้วิธีการทาง Topology ได้เช่นกัน [7] วิธีนี้ต่างจากวิธีการทางตัวเลขตรงที่ไม่ต้องใช้การคำนวณเลขทศนิยมในการวิเคราะห์ การตัดสินใจมีพื้นฐานบนการดำเนินการเชิงตรรกะและจึงต้องการข้อมูลเกี่ยวกับการเชื่อมต่อของวงจรข่ายรวมทั้งประเภทและตำแหน่งของค่าวัด ตัวแปรจริงขององค์ประกอบในวงจรข่ายไม่ได้ถูกใช้ในการวิเคราะห์ นอกจากนี้ยังสมมุติว่าค่าวัดมาเป็นคู่กำลังไฟฟ้าจริงและกำลังไฟฟ้าเสมือน และส่วนกำลังไฟฟ้าจริงของแบบจำลองค่าวัดที่ถูกแยกคู่ (หรือ DC) สามารถใช้สำหรับการวิเคราะห์ NO ได้ ในแบบจำลองนี้ค่าวัดเรียลเพาเวอร์โพล์และอินเจ็คชั่น ที่ไม่มีความคลาดเคลื่อนนั้นสัมพันธ์เชิงเส้นกับมุมเฟสของแรงดันบัส (ยกเว้นแอสลิตบัส) ดังนี้

$$z_A = H_{AA} \theta$$

พิจารณาบรานซ์ที่รีแอคแตนซ์ (reactance) $x_{km} = 1.0$ p.u. ที่เชื่อมต่อระหว่างบัส k กับ m สมมุติว่าขนาดแรงดันที่ปลายแต่ละด้านเป็น 1.0 p.u. แล้วการประมาณอันดับแรกที่ $\theta_k^0 = \theta_m^0 = 0$ ของเรียลเพาเวอร์โพล์ผ่านบรานซ์นี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta P = \left[\frac{V_k V_m}{x_{km}} \cos(\theta_k^0 - \theta_m^0) \right] (\theta_k - \theta_m)$$

$$= (\theta_k - \theta_m)$$

ถ้าทรีถูกสร้างขึ้นได้โดยที่แต่ละบรานช์ของทรีมีค่าวัดเพาเวอร์โพล์แล้วมุมเฟสของทุกบัสสามารถหาได้ซึ่งก็คือระบบ Observable โดยสมบรูณ์ วิธีการทาง Topology เริ่มต้นด้วยการกำหนดค่าวัดเพาเวอร์โพล์ให้กับแต่ละบรานช์และพยายามสร้างสเปนนิงทรี หากกระบวนการนี้ไม่สำเร็จจะทำให้เกิดกลุ่มของทรีขนาดเล็ก กรณีเช่นนี้ค่าวัดที่เหลืออยู่ซึ่งเป็นประเภทอินเจ็คชั่นจะถูกใช้เพื่อรวม ทรีเหล่านี้และลดขนาดของกลุ่มทรีลง หากทำสำเร็จจะได้ผลลัพธ์เป็นทรีหนึ่งอันและจะถือว่าระบบนั้น Observable

2.7.1 อัลกอริทึมของความเพียงพอของค่าวัดทางโทโปโลยี (Topological Observability Algorithm)

แม้ว่าการวิเคราะห์ NO ทาง Topology สามารถทำได้หลายวิธี ขั้นตอนที่สำคัญของอัลกอริทึมสามารถสรุปได้ดังนี้

อันดับแรก กำหนดทุกค่าวัดโพล์ให้กับแต่ละบรานช์
จากนั้นกำหนดค่าวัดอินเจ็คชั่นเพื่อลดขนาดกลุ่มของทรีด้วยการรวมทรีที่มีเข้าด้วยกัน หมายเหตุไม่มีวิธีที่จะทำนายลำดับที่ถูกต้องสำหรับการประมวลผลอินเจ็คชั่นการดำเนินการนี้ต้องมีการสำรวจและการกำหนดค่าใหม่ของอินเจ็คชั่นที่เหมาะสมเมื่อจำเป็น

2.7.2 การระบุกลุ่มที่มีค่าวัดเพียงพอ (Identifying the Observable Islands)

ภายหลังการประมวลผลทุกโพล์และอินเจ็คชั่นหากไม่สามารถหาสเปนนิงทรีได้ Observable island จำเป็นต้องถูกระบุ ซึ่งสามารถทำได้โดย

1. ทิ้งอินเจ็คชั่นที่มีอย่างน้อยหนึ่งบรานช์ที่ไม่สร้างวงจรปิดร่วมกับบรานช์ที่เป็นของกลุ่มทรี
2. ปรับปรุงกลุ่มทรีและทำขั้นตอนที่หนึ่งซ้ำจนกว่าไม่มีอินเจ็คชั่นที่ต้องกำจัดอีก

2.8 การหาค่าวัดวิกฤติ (Determination of Critical Measurements)

สามารถแบ่งค่าวัดอย่างกว้างๆ ได้เป็น 2 ประเภทคือวิกฤติและไม่วิกฤติ (redundant) หากการกำจัดค่าวัดออกเป็นสาเหตุให้ระบบที่ Observable กลายเป็น Unobservable แล้วค่าวัดนี้เรียกว่าค่าวัดวิกฤติ ซึ่งสามารถบ่งชี้ค่าวัดได้โดยทั้งวิธีการทางตัวเลขและทาง Topology

State estimator ที่มีพื้นฐานบนวิธีการค่ากำลังสองน้อยสุดที่ถ่วงน้ำหนักอาจใช้เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน (Error covariance matrix) ของค่าวัดโดยการหาคอลัมน์ศูนย์

เพื่อหาค่าวัดวิกฤติที่สอดคล้องกัน อีกวิธีการหนึ่งที่ไม่ต้องการการสร้างเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมเป็นดังนี้

พิจารณาระบบกำลังไฟฟ้าที่ Observable ที่มี n สถานะและ m ค่าวัด หากแรกเริ่มระบบเป็น Unobservable จะสันนิษฐานได้ว่าค่าวัดที่เหมาะสมถูกใส่เข้าไปเพื่อฟื้นฟู NO ดังนั้นชุดค่าวัดจำนวน n สามารถถูกเลือกออกมาจากค่าวัดที่อยู่มีจำนวน m เพื่อให้ระบบ Observable ด้วยค่าวัดเพียง n ค่านี้ และชุดค่าวัดจะถูกอ้างอิงเป็นค่าวัดที่จำเป็น (Essential measurement) ซึ่งชุดข้อมูลนี้ประกอบด้วยค่าวัดวิกฤติทั้งหมดและไม่ได้มีเพียงหนึ่งเดียว

จัดเรียงค่าวัดจำเป็นก่อนและแบ่งเมตริกซ์ จะได้สมการค่าวัดที่ทำการเป็นเชิงเส้นเป็น

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \cdot [x] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

โดยที่แถวของ H_1 , z_1 และ H_2 , z_2 สอดคล้องกับค่าวัดจำเป็นและค่าวัดไม่จำเป็นตามลำดับ โดยใช้การแยกตัวประกอบของปีเตอร์-วิลคินสัน

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \cdot [U] \quad (2.63)$$

โดยที่

L_1 คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างขนาด $n \times n$

M_2 คือ เมตริกซ์มุมฉากขนาด $(m-n) \times n$

U คือ เมตริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n \times n$

แทนสมการ 2.63 ลงในสมการ 2.62

$$z_1 = L_1 \cdot U \cdot x \quad (2.64)$$

$$z_2 = L_2 \cdot U \cdot x \quad (2.65)$$

กำจัด $U \cdot x$

$$z_2 = M_2 \cdot L_1^{-1} \cdot z_1 \quad (2.66)$$

$$z_2 = T \cdot z_1 \quad (2.67)$$

สมการ 2.67 แสดงการขึ้นต่อกันแบบเชิงเส้นระหว่างค่าวัดจำเป็นและค่าวัดไม่จำเป็น ดังนั้นสมาชิกของ z_1 จะเป็นวิกฤติหาคอถัมภ์ของ T ที่สอดคล้องกันเป็นศูนย์

2.9 สรุป

วิธีการวิเคราะห์ NO สามารถแบ่งอย่างๆ กว้างได้เป็นประเภทเชิงตัวเลขและเชิง Topology ทั้งสองวิธีสามารถใช้สำหรับหา NO และระบุ Observable island ระบุค่าวิกฤติที่มีอยู่และเพิ่มค่าวัดใหม่เพื่อฟื้นฟู NO