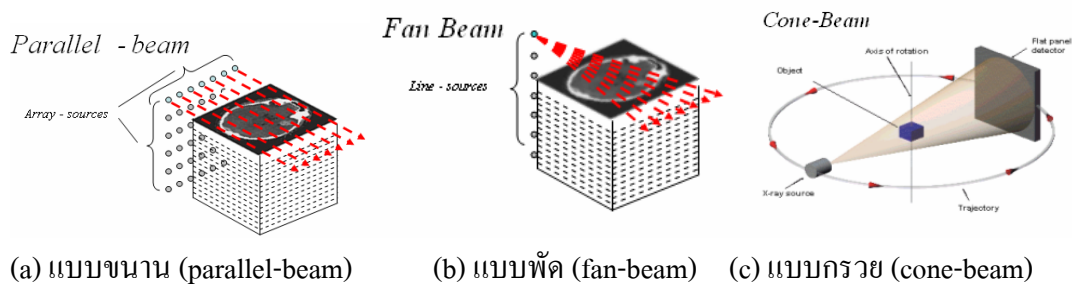


บทที่ 3

อัลกอริธึมของการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย

3.1 บทนำ

อัลกอริธึมที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางสำหรับทางเดินแสงแบบกรวยในบทความนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีเฟลด์แคม(Feldkemp Cone-beam) ซึ่งพิจารณาทางเดินแสงแบบกรวย ซึ่งจากที่ได้กล่าวมาแล้วเป็นกระบวนการสร้างภาพตัดขวางแบบ 2 มิติที่สามารถสร้างภาพตัดขวางของวัตถุได้ครึ่งละระนาบ ถ้าวัตถุมีข้อมูลเป็นแบบปริมาตรก็สามารถทำได้โดยการแบ่งวัตถุออกเป็นหลายๆระนาบแล้วสร้างภาพตัดขวางทีละระนาบ แต่การสร้างภาพตัดขวางแบบขนานนี้ยังไม่สามารถนำไปใช้ได้กับข้อมูลจริงได้ ดังนั้นจึงมีการพิจารณาทางเดินของแสงใหม่ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงคือคือทางเดินแสงแบบพัดและทางเดินแสงแบบกรวยดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 เส้นทางเดินแสง

3.2 การสร้างภาพตัดขวางแบบพัด(Fan-beam reconstruction)

กระบวนการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้อัลกอริธึมแบบ 3 มิติ(cone-beam reconstruction) พิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบกรวย ซึ่งมีลักษณะเหมือนพัดที่ยกขึ้น- ลงรอบจุดหมุนที่ตำแหน่งแหล่งกำเนิดแสง (point source) เพื่อให้เกิดความเข้าใจจึงต้องกล่าวถึงวิธีการสร้างภาพแบบพัดเสียก่อนซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

3.2.1 มุมระหว่างเส้นแสงเท่ากัน(Equiangular ray)

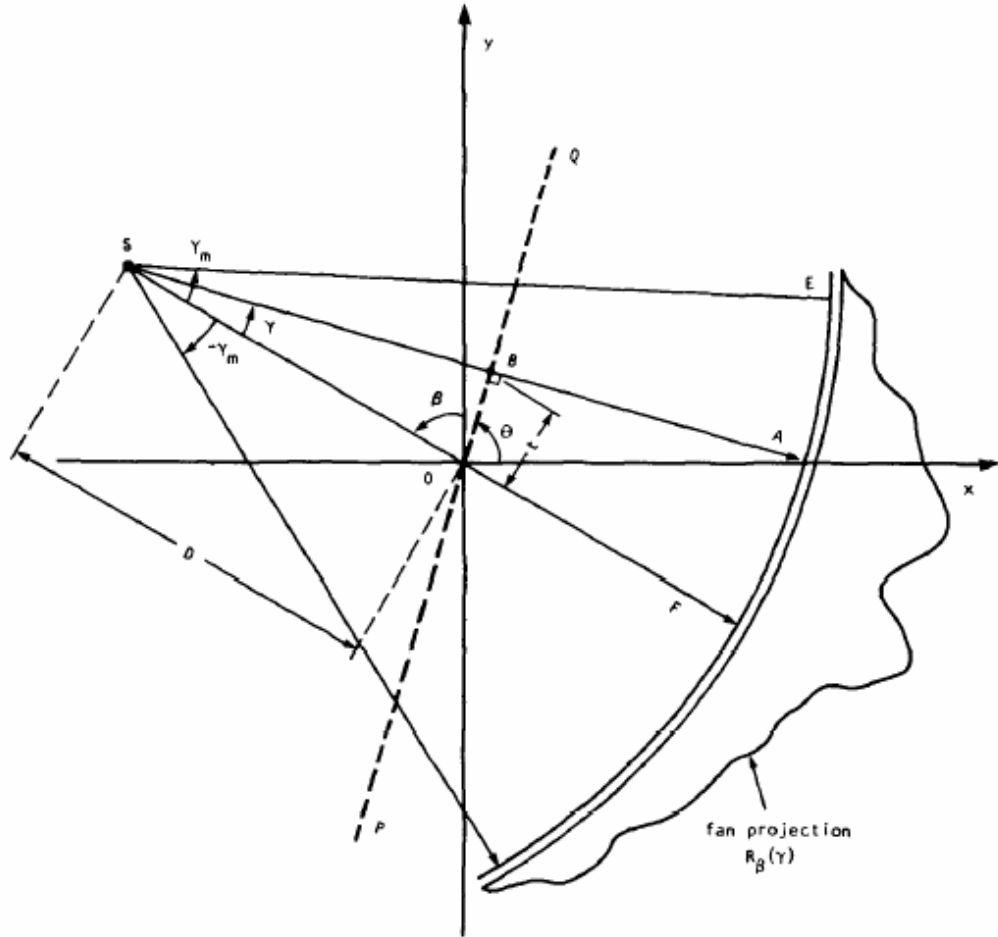
กำหนดให้ $R_\beta(s)$ เป็นข้อมูลโปรเจกชันที่มีทางเดินแสงเป็นแบบพัดดังรูปที่ 3.2 ซึ่ง β เป็นมุมที่ทำกับแกน y พิจารณาเส้นแสง $\overline{SA}$ ถ้าโปรเจกชันถูกสร้างโดยพิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบขนานนั่นคือ $\overline{SA}$ เป็นเส้นแสงเส้นหนึ่งของโปรเจกชัน $p_\theta(t)$ มีมุมเท่ากับ θ ตำแหน่ง t

$$\theta = \beta + \gamma$$

$$t = D \sin \gamma \quad (3.1)$$

โดย D คือระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสง S ถึงจุดกำเนิด O ความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.1) ถูกนำมาใช้ในการพิจารณาให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันกับทางเดินแสงแบบขนาน

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-t_m}^{t_m} p_{\theta}(t) \cdot h(s \cos \theta + y \sin \theta) dt d\theta \quad (3.2)$$



รูปที่ 3.2 ข้อมูลโปรเจกชันเมื่อพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่มีระยะห่างระหว่างหัวรับเท่ากัน
(Equally space collinear detectors)

โดยที่ t_m คือขอบเขตบนแกนดีเทคเตอร์ สมการ (3.2) นี้เป็นสมการการสร้างภาพตัดขวางวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันโดยพิจารณาทางเดินแสงแบบขนาน ดังนั้นช่วงมุมโปรเจกชันจึงอยู่ระหว่าง 0 ถึง 180 องศา อย่างไรก็ตามการสร้างภาพตัดขวางจากโปรเจกชันที่เป็นแบบพัดนั้นจำเป็นต้องใช้ช่วงมุมที่มากกว่าคือระหว่าง 0 ถึง 360 องศา ดังนั้นเขียนสมการ (3.2) ได้ใหม่คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_{-t_m}^{t_m} p_{\theta}(t) \cdot h(s \cos \theta + y \sin \theta) dt d\theta \quad (3.3)$$

จากรูปที่ (3.3) ที่พิกัด (x, y) หรือจุด C สามารถเขียนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r, ϕ) ได้คือ

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi \quad (3.4)$$

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{2\pi-\gamma} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_{\beta}(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.7)$$

พารามิเตอร์ในฟังก์ชัน h เขียนได้เป็น

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = r \cos(\beta - \phi) \cos \gamma - (r \sin(\beta - \phi) + D) \sin \gamma \quad (3.8)$$

L คือระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสง S ถึงพิกัด (x, y) หรือ (r, ϕ) ในระบบพิกัดทรงกลมเช่น จุด C ในรูป 3.3 ซึ่ง L เป็นฟังก์ชันของ 3 ตัวแปรคือ r, ϕ, β และ γ' เป็นมุมของเส้นแสงที่ผ่านพิกัด (r, ϕ) ซึ่งเขียนความสัมพันธ์ได้คือ

$$\begin{aligned} L \cos \gamma' &= D + r \sin(\beta - \phi) \\ L \sin \gamma' &= r \cos(\beta - \phi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$L(r, \phi, \beta) = \sqrt{[D + r \sin(\beta - \phi)]^2 + [r \cos(\beta - \phi)]^2} \quad (3.10)$$

และ

$$r' = \tan^{-1} \left[\frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)} \right] \quad (3.11)$$

นำสมการ (3.9) แทนใน (3.8) ได้

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = L \sin(\gamma' - \gamma) \quad (3.12)$$

และนำไปแทนใน (3.7) จะได้

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_{\beta}(\gamma) h(L \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.13)$$

สำหรับฟังก์ชัน h เป็นเทอมของการฟิลเตอร์ ซึ่ง $h(t)$ เป็นการแปลงกลับฟูเรียร์ของ $|\omega|$ ในโดเมนของความถี่

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi t \omega} d\omega \quad (3.14)$$

เพราะฉะนั้น

$$h(L \sin \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi L \sin \gamma \omega} d\omega \quad (3.15)$$

กำหนด ω' ให้เป็น

$$\omega' = \frac{\omega L \sin \gamma}{\gamma} \quad (3.16)$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} h(L \sin \gamma) &= \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi \omega' \gamma} d\omega \\ &= \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \end{aligned} \quad (3.17)$$

สมการที่ (3.13) เขียนได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\gamma}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.18)$$

โดย

$$g(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \quad (3.19)$$

ดังนั้นสมการการสร้างภาพตัดขวางวิธีฟิลเตอร์เบ็คโปรเจกชันทางเดินแสงแบบตัดโดยพิจารณามุมระหว่างเส้นแสงเท่ากัน เขียนสมการที่ (3.18) ได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} Q_\beta(\gamma') d\beta \quad (3.18)$$

โดยที่

$$Q_\beta(\gamma) = R'_\beta(\gamma') * g(\gamma) \quad (3.19)$$

$$R'_\beta(\gamma') = R_\beta(\gamma) \cdot D \cdot \cos \gamma \quad (3.20)$$

3.2.2 ระยะระหว่างเส้นแสงเท่ากัน (Equally space collinear detectors)

กำหนดให้ $R_\beta(s)$ เป็นโปรเจกชันแบบพัด (fan-beam projection) โดยที่มุมภายในระหว่างเส้นแสงห่างเท่าๆกัน จากรูปที่ 3.4 ให้ $\overline{D_1 D_2}$ เป็นแกนดีเทคเตอร์เสมือนตัดผ่านจุดหมุนหรือจุดกำเนิด ถ้าพิจารณาเส้นแสงจากแหล่งกำเนิดแสงไปยังฉากรับ $\overline{SB}$ ซึ่งผ่านจุด A บนแกน $\overline{D_1 D_2}$ เช่นเดียวกับจุด B บน $\overline{D_1 D_2}$ จากรูปที่ 3.3 แกนดีเทคเตอร์สมมติ $\overline{D_1 D_2}$ พิจารณาเส้นแสง $\overline{SA}$ พบว่าค่า s มีระยะเท่ากับ $\overline{OA}$ และถ้าสมมติการสร้างข้อมูลโปรเจกชันพิจารณาทางเดินแสงเป็นแบบขนานเส้นแสง $\overline{SA}$ ก็คือเส้นแสงตำแหน่งที่ t ทำมุม θ หรือ $p_\theta(t)$ ดังนั้นเขียนสมการความสัมพันธ์ระหว่าง β กับ t สำหรับการพิจารณาทางเดินแสงแบบขนาน (parallel-beam projection) ดังสมการที่ (3.21)

$$\begin{aligned} t &= s \cos \gamma & \theta &= \beta + \gamma \\ t &= \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} & \theta &= \beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} \end{aligned} \quad (3.21)$$

โดยที่มุม AOC เท่ากันกับมุม OSC และ D คือระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดแสงที่จุด S ถึงจุดกำเนิด O จากสมการโปรเจกชันแบบขนานเขียนสมการการสร้างภาพตัดขวางแบบฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันได้คือ

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-t_m}^{t_m} p_\theta(t) h(r \cos(\theta - \phi) - t) dt d\theta \quad (3.22)$$

เมื่อ $f(r, \phi)$ คือภาพที่สร้างได้ในระบบพิกัดทรงกลม (Polar coordinates) ให้แทนความสัมพันธ์สมการ (3.21) ในสมการ (3.22) จะได้

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\tan(s_m/D)}^{2\pi - \tan(s_m/D)} \int_{-s_m}^{s_m} p_{\beta+\gamma} \left(\frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \cdot h \left(r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (3.23)$$

โดยที่

$$dt d\theta = \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (3.24)$$

จากสมการที่ (3.23) s_m คือค่าที่มากที่สุดของ s ของแต่ละโปรเจกชันและเท่ากับ t_m ของโปรเจกชันแบบขนาน $-\tan(s_m/D)$ และ $2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)$ เป็นมุมอยู่ในช่วง 0 ถึง 360 องศาเขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลโปรเจกชันแบบพัดกับแบบขนานได้เป็น

$$R_\beta(s) = p_{\beta+\gamma} \left(\frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \quad (3.25)$$

แทน $R_\beta(s)$ โปรเจกชันแบบพัดในสมการ (3.23) เขียนสมการได้เป็น

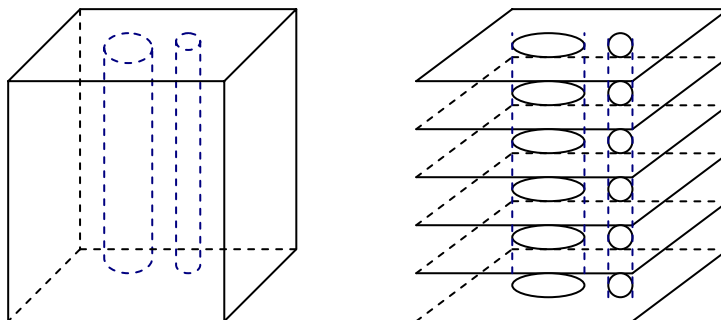
$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\tan(s_m/D)}^{2\pi - \tan(s_m/D)} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) \cdot h \left(r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (3.26)$$

เทอมของฟิลเตอร์ h เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} r \cos \left(\beta + \tan^{-1} \left(\frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \\ = r \cos(\beta - \phi) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} - (D + r \sin(\beta - \phi)) \frac{s}{\sqrt{D^2 + s^2}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

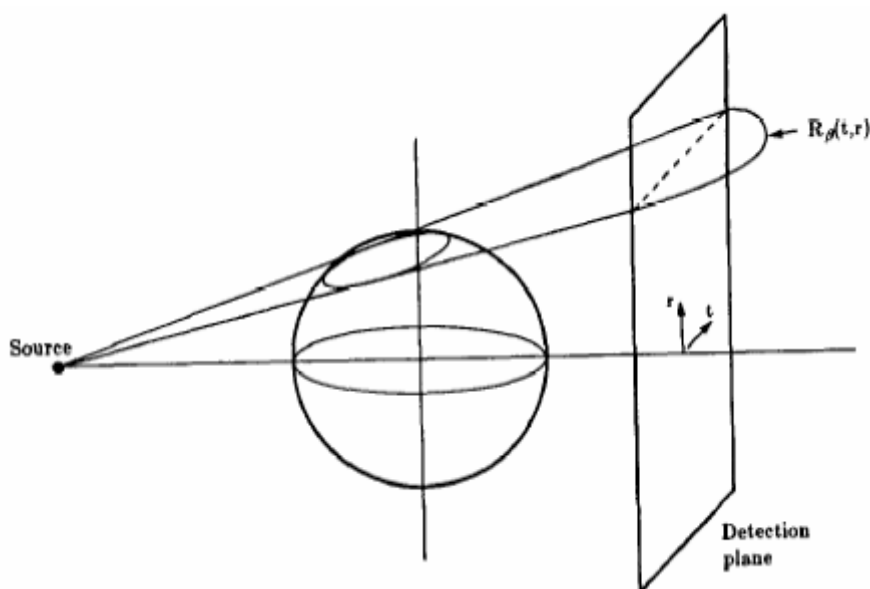
3.3 การสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย (Cone-beam reconstruction)

การสร้างภาพจากวัตถุที่เป็น 3 มิติจากวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยพิจารณาทางเดินแสงแบบขนานและแบบพัดนั้นสามารถทำได้โดยการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุแบบ 3 มิติทีละสไลด์หรือทีละ 2 มิติ แล้วค่อยนำภาพตัดขวางแต่ละสไลด์มารวมกันดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 การสร้างภาพตัดขวางจากวัตถุ 3 มิติ

ในการสร้างภาพตัดขวางที่พิจารณาทางเดินแสงแบบกรวย ใช้การพิจารณาเช่นเดียวกันกับทางเดินแสงแบบพัด คือแทนทางเดินแสงแบบพัดที่ทำมุมเอียงกับระนาบ (x,y) ของภาพแต่ละสไลด์ มีจุดหมุนอยู่ที่ตำแหน่งแหล่งกำเนิดแสงดังรูป 3.7



รูปที่ 3.7 การพิจารณาทางเดินแสงแบบกรวยในรูปแบบทางเดินแสงแบบพัด

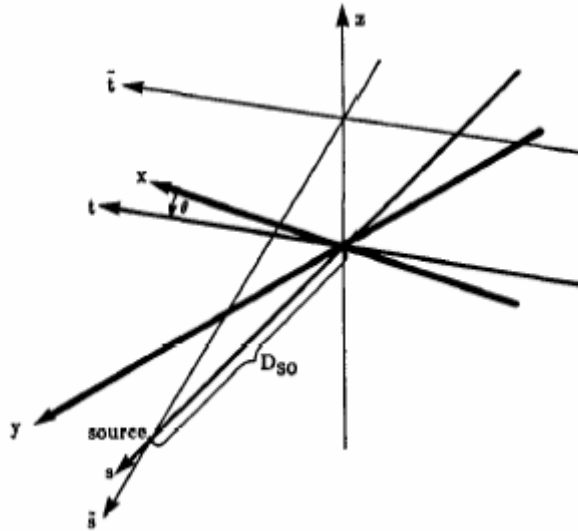
ข้อดีของการฉายแสงแบบกรวยคือลดเวลาในการทำงานให้น้อยลงซึ่งมีผลให้ผู้ป่วยได้รับปริมาณรังสีเอ็กซเรย์น้อยลงด้วย เนื่องจากในแต่ละมุมจะฉายรังสีเอ็กซเรย์เพียงครั้งเดียวโดยใช้ตัว

กำเนิดแสงเพียงอันเดียว จากรูปที่ 3.7 $R_\beta(p, \varsigma)$ เป็นโปรเจกชันที่ได้จากหัววัดรังสีเอ็กซ์คู่ขวาง เรียงเป็นระนาบ 2 มิติ ซึ่งโปรเจกชัน $R_\beta(p, \varsigma)$ นี้เป็นฟังก์ชันของมุม β และตำแหน่งบนระนาบ 2 มิติ (p, ς)

3.4 โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติ(Three-Dimension Projection)

โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติประกอบด้วย 2 ส่วนคือ โคออร์ดิเนตของทางเดินแสง (t, s, r) และ โคออร์ดิเนตของวัตถุ (x, y, z) มีความสัมพันธ์กันจากการหมุนดังรูปที่ 3.8 (coordinate-rotation) ที่มี 2 การหมุนคือรอบแกน z ของลำดับมุมการฉายแสงเท่ากับ θ และที่จุดกำเนิดแสงรอบแกน t เป็นมุมเท่ากับ γ ซึ่งเขียนสมการความสัมพันธ์ในฟังก์ชันของเมตริก [3,14] คือ

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.28)$$



รูปที่ 3.8 ความสัมพันธ์ของการหมุนของระบบโคออร์ดิเนต

โปรเจกชันแบบขนานของวัตถุ 3 มิติ f มีสมการคือ

$$P_{\theta, \gamma}(t, r) = \int_{-S_m}^{S_m} f(t, s, r) ds \quad (3.29)$$

จากสมการที่ (3.29) โปรเจกชันเป็นฟังก์ชัน 4 ตัวแปรคือ (t, θ) เป็นตัวแปรสำหรับระบบขนาดและทิศทางของระบบพิกัด (x, y) และ (r, γ) สำหรับระบบพิกัด (s, z) แต่ในระบบทางเดินแสงแบบกรวย (cone-beam system) แหล่งกำเนิดแสงจะถูกหมุนด้วยมุมเท่ากับ β และผลรวมของแสงที่วัดได้แทนด้วย $R_\beta(p', \varsigma')$ โดยที่

$$p = \frac{p' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad \varsigma = \frac{\varsigma' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad (3.30)$$

เมื่อ D_{so} คือระยะห่างระหว่างจุดหมุน (Center of rotation) ถึงแหล่งกำเนิดแสง และ D_{DE} คือระยะห่างระหว่างจุดหมุนถึงฉากรับซึ่งเขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรในระบบทางเดินแสงทั้งสองได้คือ

$$t = p \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \varsigma^2}} \quad (3.31)$$

$$\theta = \beta + \tan^{-1} \left[\frac{p}{D_{so}} \right] \quad (3.32)$$

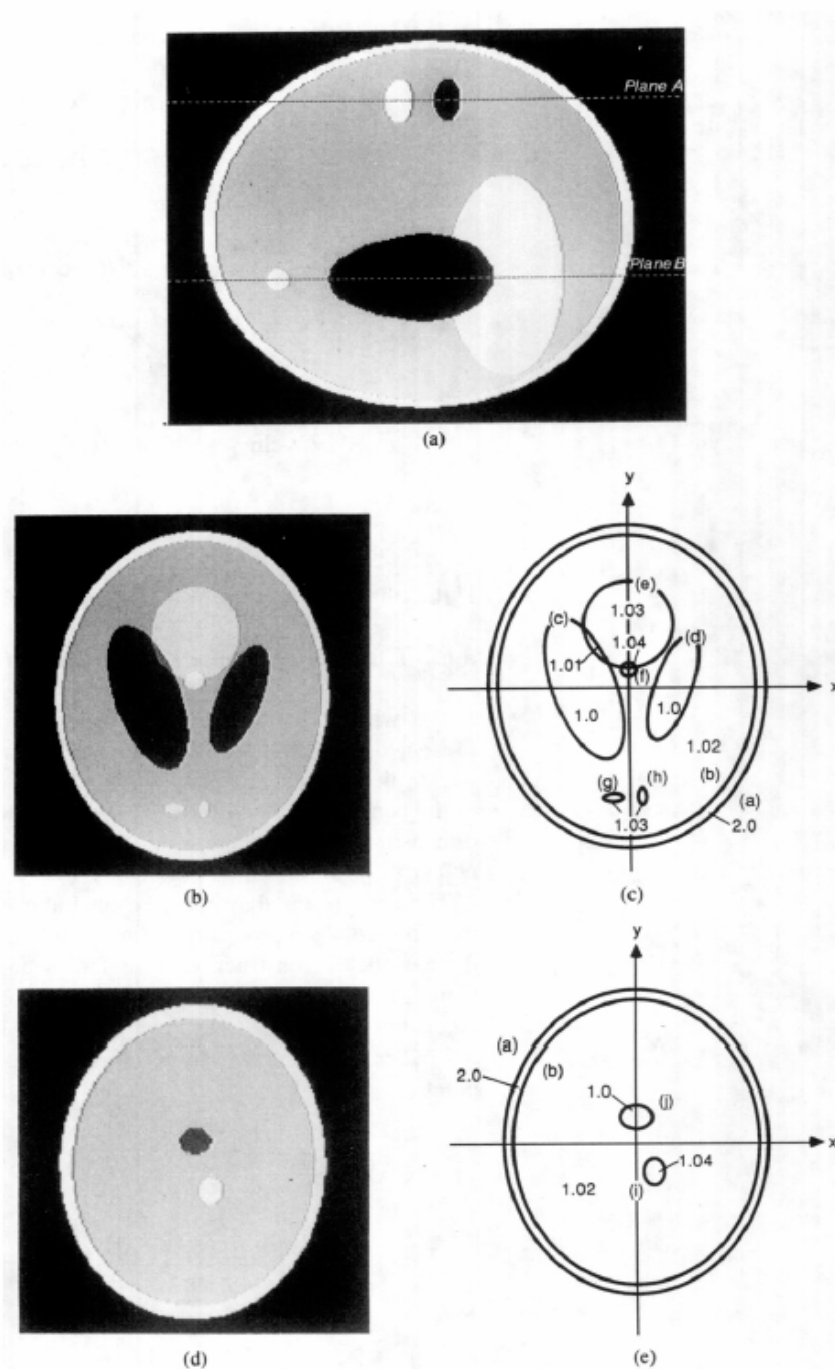
$$r = \varsigma \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \varsigma^2}} \quad (3.33)$$

โดยที่ r และ ς ทำหน้าที่ระบุตำแหน่งของระนาบแสงแบบพัด (Tilted fan) ที่ผ่านวัตถุ

ในการทดสอบกระบวนการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวยนี้จะใช้แบบจำลอง Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติที่ประกอบกันจากวัตถุรูปทรงรี ตารางที่ 3.1 แสดงขนาดและตำแหน่งของรูปทรงรีต่างๆดังรูปที่ 3.9

ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์รูปทรงเรขาคณิตสำหรับสร้าง Shepp-Logan head phantom แบบ 3 มิติ

Ellipsoid	Coordinate of The Center(x, y, z)	Axis Lengths (A, B, C)	Rotation Angle β (deg)	Gray Level ρ
a	(0, 0, 0)	(0.69,0.92,0.9)	0	2.0
b	(0, 0, 0)	(0.6624,0.874,0.88)	0	-0.98
c	(-0.22, 0, -0.25)	(0.41,0.16,0.21)	108	-0.02
d	(0.22, 0, -0.25)	(0.31,0.11,0.22)	72	-0.02
e	(0, 0.1, -0.25)	(0.046,0.046,0.046)	0	0.02
f	(0, 0.1,-0.25)	(0.046,0.046,0.046)	0	0.02
g	(-0.8,-0.65,-0.25)	(0.046,0.023,0.023)	0	0.01
h	(0.06,-0.065,-0.25)	(0.046,0.023,0.023)	90	0.01
i	(0.06,-0.105,0.625)	(0.56,0.04,0.1)	90	0.02
j	(0,0.1,-0.625)	(0.056,0.056,0.1)	0	-0.02



รูปที่ 3.9 Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติสำหรับการทดสอบกระบวนการสร้างภาพแบบกรวย

- (a) Shepp and Logan head phantom แบบ 3 มิติ
- (b) ภาพตัดขวาง A สไลด์ที่ 98
- (c) รูปเรขาคณิตในภาพตัดขวาง A สไลด์ที่ 98
- (d) ภาพตัดขวาง B สไลด์ที่ 208
- (e) รูปเรขาคณิตในภาพตัดขวาง B สไลด์ที่ 208

3.5 FeldKamp หรือ ฟิลเตอร์แบ็คโพรเจกชันแบบ 3 มิติ (3D Filtered Backprojection)

การสร้างภาพกลับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโพรเจกชันแบบ 3 มิติ นั้นมีวิธีการเช่นเดียวกันกับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโพรเจกชันแบบขนาน แต่ต่างกันที่เส้นทางเดินของแสง ซึ่งสามารถพิจารณาทางเดินแสงให้เป็นรูปพัด(Fan-beam) ในระนาบ 2 มิติ แล้วนำระนาบดังกล่าวหมุนรอบแกน p โดยจุดหมุนอยู่ที่แหล่งกำเนิดแสง

เริ่มแรกให้พิจารณาสมการการสร้างภาพกลับแบบพัด(Fan-beam reconstruction) ในระบบพิกัด (r, ϕ) คือ

$$g(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(p) h(p' - p) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.34)$$

$$p' = \frac{D_{so} r \cos(\beta - \phi)}{D_{so} + r \sin(\beta - \phi)} \quad h(p) = \int_{-W}^W |\omega| \cdot e^{j\omega p} d\omega \quad (3.35)$$

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{D_{so} + r \sin(\beta - \phi)}{D_{so}} \quad (3.36)$$

เขียนสมการความสัมพันธ์ (r, ϕ) ให้อยู่ในระบบโคออร์ดิเนตการหมุน (t, s) ได้คือ

$$t = x \cos \beta + y \sin \beta \quad s = y \cos \beta - x \sin \beta \quad (3.37)$$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (3.38)$$

$$p' = \frac{D_{so}}{D_{so} - s} \quad U(x, y, z) = \frac{D_{so} - s}{D_{so}} \quad (3.39)$$

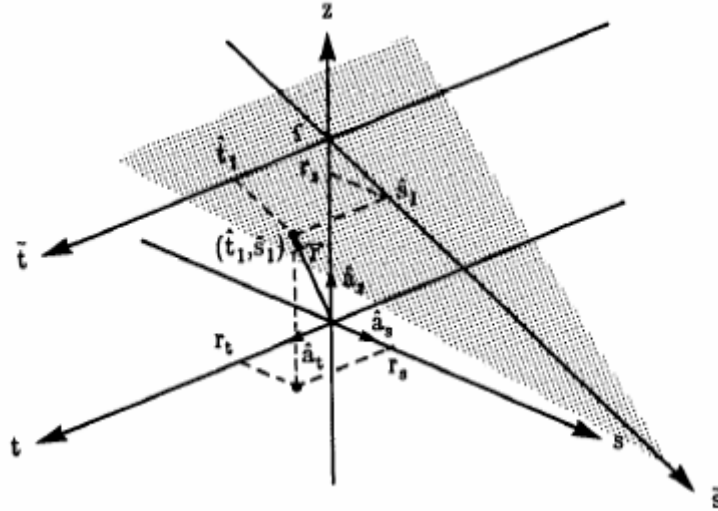
สมการสร้างภาพแบบพัดในระบบโคออร์ดิเนต (t, s) เขียนได้เป็น

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(p, \varsigma) h\left(\frac{D_{so} \cdot t}{D_{so} - s} - p\right) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.40)$$

เมื่อแสงเปลี่ยนระนาบไปดังรูปที่ 3.10 ทำให้ไม่สามารถใช้สมการที่ (3.40) ได้เนื่องจากระยะทางของแสงเปลี่ยนไป เขียนสมการสร้างภาพแบบพัดสำหรับ (t', s') คือ

$$g(t', s') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}'^2}{(D_{so}' - s')^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta'}(p, \varsigma) h\left(\frac{D_{so}' \cdot t'}{D_{so}' - s'} - p\right) \frac{D_{so}'}{\sqrt{D_{so}'^2 + p^2}} dp d\beta' \quad (3.41)$$

โดยที่ ς คือความสูงของแสงแบบพัดบนแกนหมุนและ $d\beta'$ หาได้จาก



รูปที่ 3.10 ภาพแสดงระบบพิกัด (t, s)

$$D_{so} d\beta = D'_{so} d\beta' \quad d\beta' = \frac{D_{so} d\beta}{D'_{so}} \quad (3.42)$$

$$t = t' \quad s' = D'_{so} \frac{s}{D_{so}} \quad \zeta = D_{so} \frac{z}{D_{so} - s} \quad (3.43)$$

$$D'_{so} = \sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2} \quad (3.44)$$

แทนค่า D'_{so} ด้วย D_{so} และ β' ด้วย β เขียนสมการ(3.41) สำหรับทุกระนาบแสงได้เป็น

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta'}(p, \zeta) h\left(\frac{D_{so} \cdot t}{D_{so} - s} - p\right) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.45)$$

โดยขั้นตอนของฟิลเตอร์เบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติดังต่อไปนี้

1. นำโปรเจกชัน $R_{\beta}(p, \zeta)$ คูณด้วยฟังก์ชัน $\frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}}$ เพื่อหาค่า คือ

$$R'(p, \zeta, \beta) = R(p, \zeta, \beta) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}} \quad (3.46)$$

2. คอนโวลูชันโปรเจกชัน $R'_{\beta}(p, \zeta)$ กับ $\frac{1}{2} h(p)$ ได้ค่า $Q_{\beta}(p, \zeta)$ คือ

$$Q(p, \zeta, \beta) = R'(p, \zeta, \beta) * \frac{1}{2} h(p) \quad (3.47)$$

3. แเบ็คโพรเจกชันด้วยค่าแฟกเตอร์น้ำหนักตามระยะทางของเส้นแสงสำหรับระบบโคออร์ดิเนตแบบ 3 มิติ

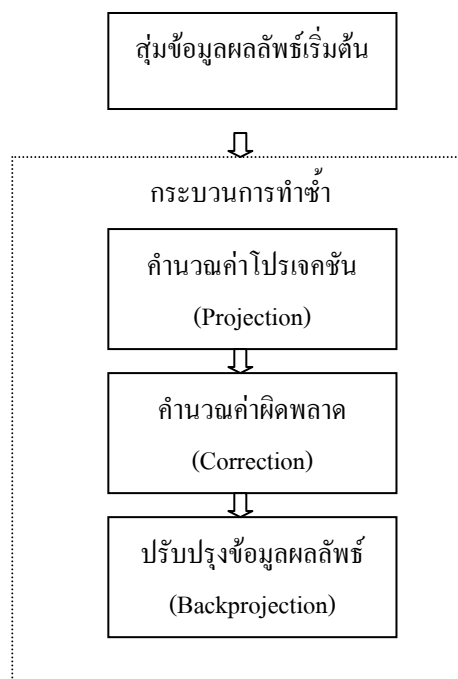
$$g(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} Q_{\beta'}(p, \zeta, \beta) d\beta \quad (3.48)$$

หรือ

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R(p, \zeta, \beta) h\left(\frac{D_{so} \cdot t}{D_{so} - s} - p\right) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.48)$$

3.6 ART และ SART แบบ 3 มิติ (3D Algebraic Reconstruction Algorithm)

อัลกอริธึมการสร้างภาพแบบ 3 มิติสามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกับฟิลเตอร์แบ็คโพรเจกชันแบบ 3 มิติ คือพิจารณาทางเดินแสงแบบพัดที่ถูกยกขึ้น-ลง(Tilted fan-beam) โดยที่กระบวนการยังเหมือนเดิมกับแบบขนานดังที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 นั่นคืออัลกอริธึมเชิงพีชคณิตมีขั้นตอนคือ



รูปที่ 3.11 บล็อกไดอะแกรมของอัลกอริธึมเชิงพีชคณิต

หลักการทำงานของอัลกอริธึมเชิงพีชคณิต แบบ 3 มิติจะเหมือนกับแบบ 2 มิติ แต่ต่างกันว่าเราจะพิจารณาข้อมูลภาพเป็นปริมาตรหรือภาพหลายๆสไลด์แทนโดยสมการได้คือ

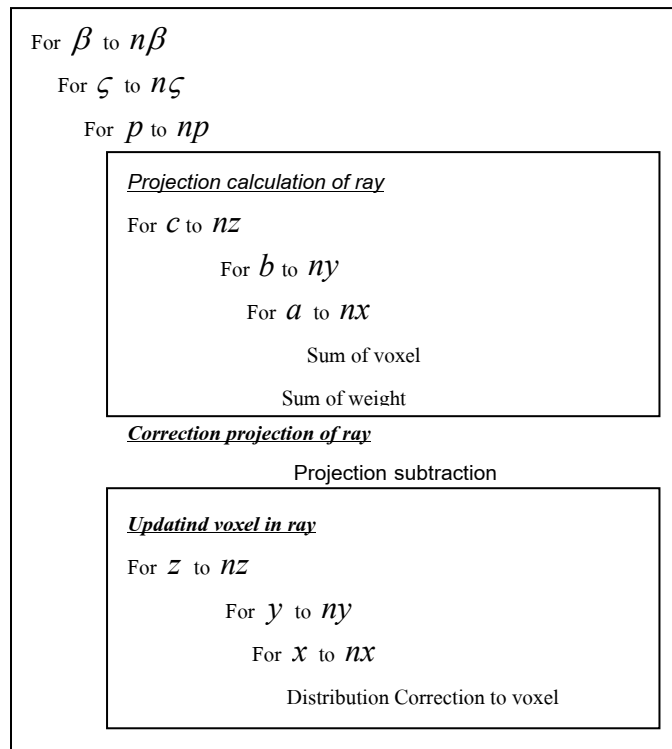
$$v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)} + \frac{\left(p_i - \sum_{h=1}^N v_n^{(k-1)} w_{in} \right)}{\sum_{n=1}^N w_{in}^2} w_{ij} \quad (3.49)$$

หรือเขียนให้อยู่ในระบบพิกัด (x, y, z) และ (p, ς, β) คือ

$$v_{x,y,z}^{(k)} = v_{x,y,z}^{(k-1)} + \lambda \frac{\left(p_{p,\varsigma,\beta} - \sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} v_{a,b,c}^{k-1} w_{p,\varsigma,\beta,a,b,c} \right)}{\sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} w_{p,\varsigma,\beta,a,b,c}^2} w_{p,\varsigma,\beta,x,y,z} \quad (3.50)$$

$$v_{x,y,z}^{(k)} = v_{x,y,z}^{(k-1)} + \lambda \frac{\sum_{p_{p,\varsigma,\beta} \in P_\phi} \left(\frac{p_{p,\varsigma,\beta} - \sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} v_{a,b,c}^{k-1} w_{p,\varsigma,\beta,a,b,c}}{\sum_{c=1}^{nz} \sum_{b=1}^{ny} \sum_{a=1}^{nx} w_{p,\varsigma,\beta,a,b,c}} \right) w_{p,\varsigma,\beta,x,y,z}}{\sum_{p_{p,\varsigma,\beta} \in P_\phi} w_{p,\varsigma,\beta,x,y,z}} \quad (3.51)$$

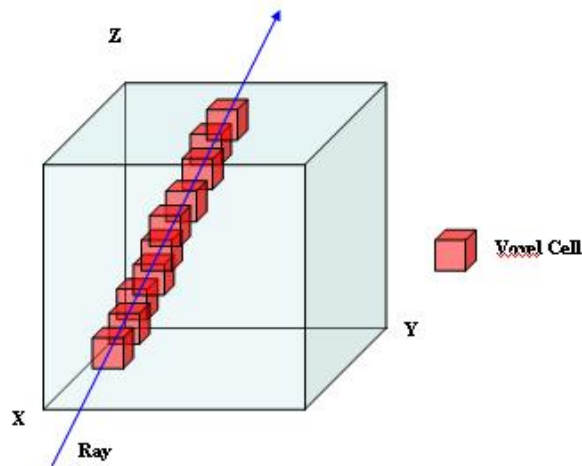
จากสมการที่ (3.50) และ (3.51) เป็นสมการการสร้างภาพกลับด้วยวิธีเชิงพีชคณิตแบบ 3 มิติที่อธิบายด้วยระบบโคออร์ดิเนต $(p, \varsigma, \beta, x, y, z)$ พบว่าฟังก์ชัน $w_{p,\varsigma,\beta,x,y,z}$ มีขนาดใหญ่มาก ตัวอย่างเช่น ถ้าต้องการสร้างภาพขนาด 64x64 พิกเซล จำนวน 64 สไลด์หรือ 64x64x64 วอกเซล จากข้อมูลโปรเจกชันขนาด 64x64 จำนวน 24 มุม ดังนั้นขนาดของ $w_{p,\varsigma,\beta,x,y,z}$ คือ คำนำน้หนักแสงของวอกเซลต่าง ๆ $64 \times 64 \times 64 \times 64 \times 64 \times 24 = 25,769,803,776$ หรือประมาณ 25.769 G-byte เนื่องจากต้องเก็บค่าแฟกเตอร์น้ำหนักของแต่ละเส้นแสงเป็นปริมาตรดังรูปที่ 3.12 และขั้นตอนการคำนวณแฟกเตอร์น้ำหนักจะยิ่งเพิ่มขึ้นเป็นเท่าตัวเมื่อใช้การคำนวณแบบแบ่งเซลล์ย่อยดังที่กล่าวไปในบทที่ 2 หัวข้อที่ 2.7.3 เช่นถ้าแบ่งเซลล์ย่อยเป็น 100 เซลล์ย่อย ดังนั้นขั้นตอนการคำนวณจะเท่ากับ $25,769,803,776 \times 100$ ดังนั้นนำไปใช้งานจริงสำหรับข้อมูลที่มีขนาดใหญ่



รูปที่ 3.14 โปรแกรมการทำงานของ SART แบบเดิม

จากรูปที่ 3.13 และรูปที่ 3.14 แสดงลำดับการทำงานทั้งหมดของ ART และ SART แบบ 3 มิติ ซึ่งมีความยุ่งยากและซับซ้อนเป็นอย่างมาก จำนวนการทำงานทั้งหมดเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 O(ART_{org}) = & O(nx \cdot ny \cdot nz \cdot np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Pr ojection} \\
 & + O(np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Correction} \\
 & + O(nx \cdot ny \cdot nz \cdot np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Back Pr ojection}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$



$p_{p,\zeta,\beta}$

รูปที่ 3.15 ภาพแสดงข้อมูลเชิงปริมาตรบนเส้นทางเดินแสง

พิจารณาทางเดินแสงดังรูปที่ 3.15 จะเห็นบริเวณที่แสงผ่านในข้อมูลปริมาตรนั้นมีอยู่เพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นการเก็บข้อมูลค่าแฟกเตอร์น้ำหนักจึงไม่จำเป็นต้องเก็บทุกตำแหน่ง ซึ่งอาจจะพิจารณาในรูปของฟังก์ชันได้เพื่อลดจำนวนการทำงานและพื้นที่ข้อมูลที่ไม่จำเป็นให้น้อยลง

$$\begin{aligned} O(ART_{org}) &= O(R \cdot np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Pr\ ojection} \\ &+ O(np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Correction} \\ &+ O(nR \cdot np \cdot n\zeta \cdot n\beta)_{Back\ Pr\ ojection} \end{aligned} \quad (3.52)$$

โดยที่ m คือค่าดัชนีตำแหน่งของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักขั้นตอนคำนวณค่าโปรเจกชันช่วง

$0 < m < nm$ เมื่อ nm เป็นจำนวนค่าดัชนีของเส้นแสง $p_{p,\zeta,\beta}$ และ $nm \ll nx.xy.xz$

r คือค่าดัชนีตำแหน่งของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักขั้นตอนแบ็คโปรเจกชันช่วง $0 < r < nr$

เมื่อ nr เป็นจำนวนค่าดัชนีของเส้นแสง $p_{p,\zeta,\beta}$ และ $nr \ll nx.ny.nz$

$$v_{x(r),y(r),z(r)}^{(k)} = v_{x(r),y(r),z(r)}^{(k-1)} + \lambda \frac{\left(p_{p,\zeta,\beta} - \sum_{m=1}^{nm} v_{a(m),b(m),c(m)}^{(k-1)} w_{p,\zeta,\beta,m} \right)}{\sum_{m=1}^{nm} w_{p,\zeta,\beta,m}^2} w_{p,\zeta,\beta,r} \quad (3.53)$$

$$v_{x(r),y(r),z(r)}^{(k)} = v_{x(r),y(r),z(r)}^{(k-1)} + \lambda \frac{\sum_{p_{p,\zeta,\beta} \in P\phi} \left(\frac{\left(p_{p,\zeta,\beta} - \sum_{m=1}^{nm} v_{a(m),b(m),c(m)}^{(k-1)} w_{p,\zeta,\beta,m} \right)}{\sum_{m=1}^{nm} w_{p,\zeta,\beta,m}} \right)}{\sum_{p_{p,\zeta,\beta} \in P\phi} w_{p,\zeta,\beta,r}} w_{p,\zeta,\beta,r} \quad (3.54)$$