

บทที่ 4

การแปลงเชิงเรขาคณิต

4.1 บทนำ

การแปลงเชิงเรขาคณิตเป็นทฤษฎีพื้นฐานทางคอมพิวเตอร์กราฟิกกว่าด้วยการแปลงพิกัดภาพ หรือวัตถุหนึ่งไปยังพิกัดใหม่โดยใช้พารามิเตอร์ของการแปลงจำนวนหนึ่ง

4.2 การแปลงเชิงเรขาคณิตแบบเชิงเส้น

ในงานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกนั้น บางครั้งจำเป็นต้องมีการเคลื่อนย้ายภาพไปยังตำแหน่งใหม่ ย่อ-ขยายภาพ หรือมีการหมุนภาพให้อยู่ในมุมมองที่เหมาะสม ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้การแปลงเชิงเรขาคณิต(Geometric transformation)

ในการพิจารณาการแปลงนั้นจะพิจารณาได้ว่าเป็นการแปลงจุดในปริภูมิสามมิติ และเพื่อความเข้าใจง่ายจึงมักจะเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ โดยกำหนดให้จุดที่ต้องการแปลงเป็นจุด P มีพิกัดเป็น (x, y, z) ใดๆ เมื่อต้องการย้ายตำแหน่งของจุด P ไปยังพิกัดใหม่คือ P' ซึ่งมีพิกัด (x', y', z') ก็ทำได้โดยการนำพิกัดของจุด P ไปบวกกับเมทริกซ์การแปลงซึ่งก็คือ T สามารถแสดงเมทริกซ์ของการแปลงได้ดังนี้

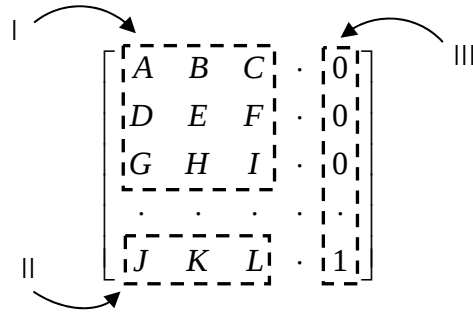
$$P' = P + T = [x \ y \ z] + [T_x \ T_y \ T_z] \quad (4.1)$$

นอกจากนี้เมื่อนำพิกัดของจุด P มาคูณกับเมทริกซ์การแปลง T ให้ได้พิกัดใหม่คือ P' นั้นจะเป็นการสเกล การหมุน การสะท้อน หรืออื่นๆ ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ภายในเมทริกซ์การแปลงนั้นและสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$P' = P \cdot T = [x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

สำหรับการแปลงเชิงเรขาคณิตในทางคอมพิวเตอร์กราฟิกโดยทั่วไปแล้วจะประกอบด้วยการแปลงหลายๆชนิดประกอบกัน และเนื่องจากการคำนวณในรูปของเมทริกซ์จึงทำให้ยากในการคำนวณเมทริกซ์ที่มีรูปแบบแตกต่างกัน จึงได้มีการนำระบบพิกัดโฮโมจีเนียส (Homogeneous Coordinate System) เข้ามาใช้เพื่อแก้ปัญหานี้

ในระบบพิกัดโฮโมจีเนียส จุดในระบบสามมิติ (x, y, z) จะถูกแทนด้วยระบบสี่มิตินั้นคือ (x, y, z, H) โดยจะมี H เป็นค่าแฟกเตอร์ที่มีหน้าที่สเกลซึ่งจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จุด (x, y, z, H) จะถูกนอร์มอลไลซ์ (Normalize) เป็น $(x/H, y/H, z/H, 1)$ โดยทั่วไปแล้วค่า H จะมีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้นจุด (x, y, z) ใดๆจะมีค่าในระบบพิกัดโฮโมจีเนียสเป็น $(x, y, z, 1)$



รูปที่ 4.1 ส่วนประกอบของระบบพิกัดโฮโมจีเนียส

จากรูปที่ 3.1 เมทริกซ์ย่อย I เป็นส่วนที่กำหนดว่าเป็นการแปลงแบบใด เช่น การหมุน การสเกล การสะท้อน เป็นต้น ส่วนเมทริกซ์ย่อย II เป็นส่วนของการย้ายตำแหน่งแบบเชิงเส้น และในส่วนสุดท้ายเมทริกซ์ย่อย III ใช้ในการรวมระหว่างการเคลื่อนย้ายพิกัดและการแปลงที่อยู่ในรูปการคูณ โดยมีรายละเอียดของการแปลงแบบต่างๆดังนี้

4.2.1 การเลื่อนพิกัด (Translation)

เมทริกซ์การแปลง (T_T) ที่ใช้สำหรับการแปลงที่ต้องการเลื่อนพิกัดมีลักษณะดังนี้

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

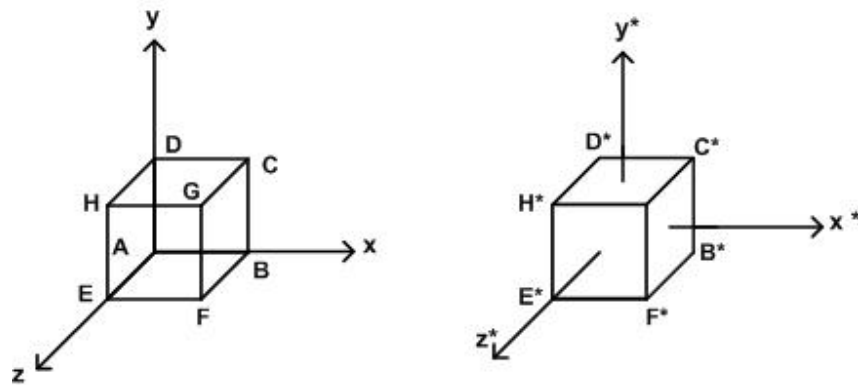
โดยที่ค่า T_x, T_y และ T_z แสดงระยะทางที่ต้องการเคลื่อนย้ายตำแหน่งไปในแนวแกน X, Y และ Z ตามลำดับ และพิกัดของจุดในระบบโฮโมจีเนียส (x', y', z', h) เป็น

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+T_x & y+T_y & z+T_z & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

การเลื่อนเมทริกซ์เป็นการแปลงที่มีประโยชน์มากในทางคอมพิวเตอร์กราฟิก เนื่องจากข้อมูลภาพต้นฉบับที่นำมาใช้จะมีตำแหน่งอยู่ในด้านบวกเท่านั้น จึงจำเป็นต้องการอาศัยการแปลงแบบนี้เพื่อเลื่อนพิกัดกึ่งกลางของข้อมูลต้นฉบับให้มาอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0,0) เสียก่อน แสดงในรูปที่ 4.2 จึงถือได้ว่าการแปลงแบบเลื่อนพิกัดเป็นพื้นฐานที่สำคัญของการสร้างภาพทางคอมพิวเตอร์กราฟิก



รูปที่ 4.2 การเลื่อนจุดกึ่งกลางของปริมาตรต้นฉบับมายังจุดกำเนิด

4.2.2 การสเกล (Scaling)

การสเกลเป็นการแปลงเพื่อปรับเปลี่ยนขนาดของวัตถุที่ต้องการ มีเมทริกซ์การแปลง (S) ดังนี้

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

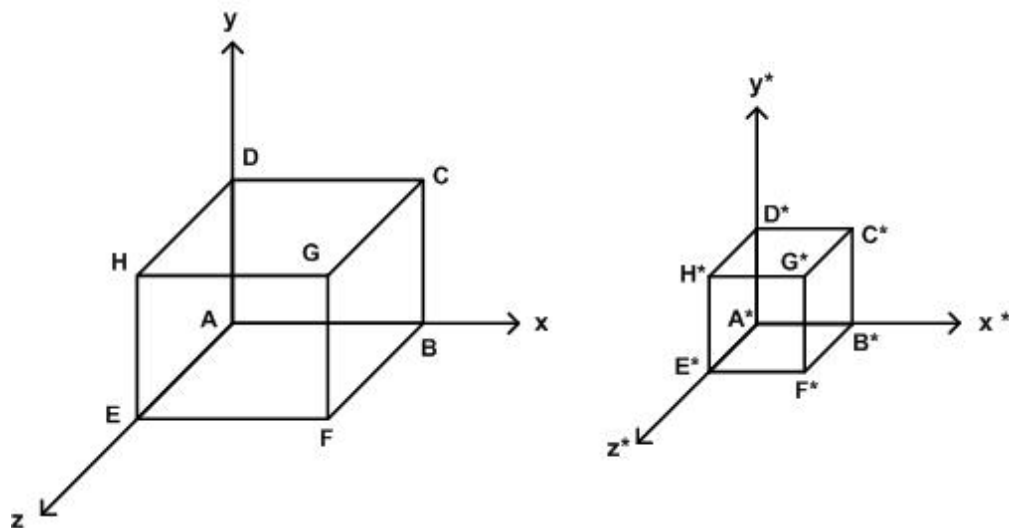
โดยที่ S_x, S_y และ S_z เป็นสัมประสิทธิ์การสเกลสำหรับพิกัด X, Y และ Z ตามลำดับ และพิกัดของจุดในระบบโฮโมจีเนียส (x', y', z', h) เป็น

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xS_x & yS_y & zS_z & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ค่า S_x, S_y และ S_z จะเป็นตัวกำหนดว่าเป็นการย่อหรือขยายรูป กล่าวคือ ถ้า S มีค่ามากกว่า 1 จะเป็นการขยายภาพและถ้า S มีค่าน้อยกว่า 1 จะเป็นการย่อขนาดภาพ



รูปที่ 4.3 การสเกลวัตถุ

4.2.3 การหมุนวัตถุ (Rotation)

การหมุนวัตถุเป็นการหมุนวัตถุรอบแกนต่างๆทั้งสามแกน ซึ่งได้แก่ แกน X, Y หรือ Z โดยการอ้างอิงการมองในลักษณะมองออกจากจุดกำเนิดไปตามแนวแกน เมทริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกนต่างๆในทิศทางตามเข็มนาฬิกา มีดังนี้

เมทริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน X ไปเป็นมุม θ คือ

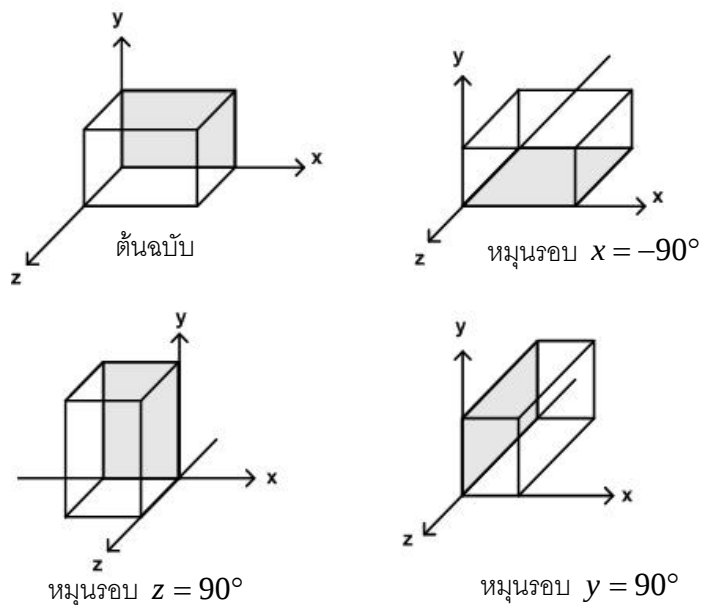
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

เมทริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน Y ไปเป็นมุม ϕ คือ

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

เมทริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน Z ไปเป็นมุม φ คือ

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$



รูปที่ 4.4 การแปลงแบบหมุนรอบแกนทั้งสาม

4.2.4 การสะท้อน (Reflection)

การสะท้อนวัตถุเป็นการสะท้อนพิกัดของวัตถุไปยังพิกัดที่อยู่อีกด้านหนึ่งของระนาบการสะท้อน XY, YZ หรือ XZ เมทริกซ์ของการสะท้อนมีดังต่อไปนี้

เมทริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ XY คือ

$$Rf_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด z โดย $z' = -z$

เมทริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ YZ คือ

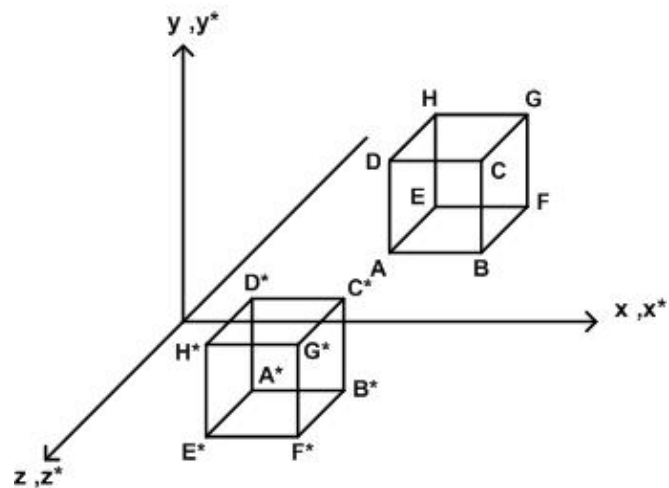
$$Rf_{YZ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด x โดย $x' = -x$

เมทริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ XZ คือ

$$Rf_{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด y โดย $y' = -y$



รูปที่ 4.5 การสะท้อนวัตถุกับระนาบ XY

4.2.5 การเฉือน (Shearing)

การเฉือนในปริภูมิสามมิติเป็นการแปลงพิกัดตามแกนของสองแกนใดๆ (สมมติว่าเป็น x และ y) โดยสัมพันธ์กับค่าของพิกัดตามแนวแกนที่สาม (z) เป็นผลให้ค่าพิกัดตามแนวแกนของสองแกนแรกเปลี่ยนไป ในขณะที่ค่าพิกัดตามแนวแกนที่สามนั้นมีค่าคงเดิม

เมทริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน X

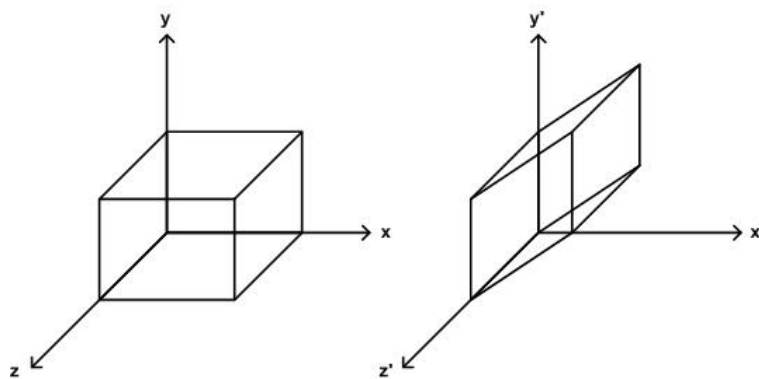
$$Sh_x = \begin{bmatrix} 1 & Sh_{xy} & Sh_{xz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

เมทริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน Y

$$Sh_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ Sh_{yx} & 1 & Sh_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

เมทริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน Z

$$Sh_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Sh_{zx} & Sh_{zy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$



รูปที่ 4.6 การเฉือนโดยสัมพันธ์กับค่า z เมื่อ $Sh_{zx} = 0$ และ $Sh_{zy} = 1$

4.2.6 การฉายภาพ (Projection)

การฉายภาพเป็นการแปลงจาก n มิติไปเป็น $n-1$ มิติ การฉายภาพมี 2 ประเภทคือแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สนใจเฉพาะการฉายภาพแบบเชิงเส้นเท่านั้น สำหรับการฉายภาพแบบเชิงเส้นยังสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

4.2.6.1 การฉายภาพแบบตั้งฉาก (Orthographic Projections)

การฉายภาพแบบตั้งฉากเป็นวิธีฉายภาพแบบขนานอย่างหนึ่งที่มีรูปแบบอย่างง่ายและถูกใช้ ในการวาดภาพทางวิศวกรรม โดยจะแสดงขนาดจริงของวัตถุในแต่ละด้าน เมทริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบต่างๆเป็นดังนี้

เมทริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $x = 0$

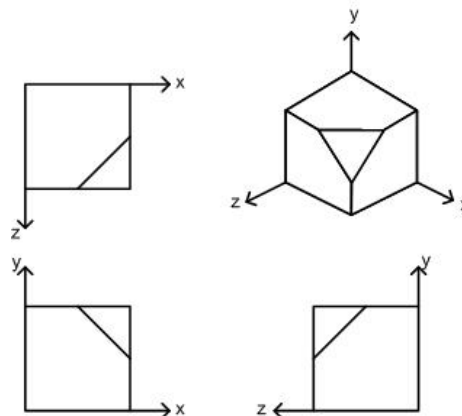
$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

เมทริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $y = 0$

$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

เมทริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $z = 0$

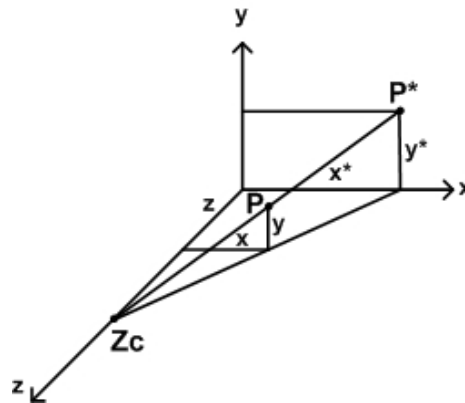
$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$



รูปที่ 4.7 แสดงการฉายภาพลงบนระนาบ $x = 0$, $y = 0$ และ $z = 0$

4.2.6.2 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ (Perspective Projections)

เป็นรูปแบบการแปลงเชิงเรขาคณิตอย่างหนึ่งซึ่งแตกต่างจากการแปลงแบบอื่นๆที่ได้กล่าวมาแล้ว คือการแปลงแบบเลื่อนพิกัด การสเกล การหมุน การสะท้อน และการเฉือนนั้นเป็นการแปลงซึ่งคงคุณสมบัติความขนานกันของเส้น แต่การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟนี้แตกต่างออกไป และการแปลงแบบนี้ยังมีผลให้ขนาดของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปโดยมีความสัมพันธ์แบบผกผันกับระยะห่างระหว่างวัตถุกับจุดศูนย์กลางของการฉายภาพ



รูปที่ 4.8 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ

พิจารณารูปที่ 3.8 เป็นการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟและทำการฉายภาพจากจุด P ไปยังจุด P^* บนระนาบ $z = 0$ โดยมี z_c เป็นจุดศูนย์กลางของการฉายภาพ (Center of projection) จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย ได้ว่า

$$\frac{x^*}{z_c} = \frac{x}{z_c - z}$$

หรือ

$$x^* = \frac{x}{1 - \frac{z}{z_c}}$$

และ

$$\frac{y^*}{\sqrt{(x^*)^2 + z_c^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + (z_c - z)^2}}$$

หรือ

$$y^* = \frac{y}{1 - \frac{z}{z_c}}$$

จะได้ x^*, y^* เป็นพิกัดของ P^*

$$\text{กำหนดให้ } r = \frac{-1}{z_c} \text{ จะได้ } x^* = \frac{x}{rz+1} \text{ และ } y^* = \frac{y}{rz+1} \quad (4.21)$$

หรือเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 0 & rz+1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

เนื่องจาก $h = rz + 1 \neq 1$ ดังนั้นจึงคูณสมการที่ 3.22 ด้วย $\frac{1}{rz+1}$

$$\text{จะได้} \quad \begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz+1} & \frac{y}{rz+1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (4.21) มีค่าเท่ากับสมการที่ (4.23)

จะได้เมทริกซ์ของการแปลงแบบเพอร์สเปกทิฟเมื่อจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน X, Y และ Z ดังนี้

กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน X หรือที่พิกัด $[-1/p \ 0 \ 0 \ 1]$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & px+1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

และ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px+1} & \frac{y}{px+1} & \frac{z}{px+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน Y หรือที่พิกัด $[0 \ -1/q \ 0 \ 1]$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & qy+1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

และ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{qy+1} & \frac{y}{qy+1} & \frac{z}{qy+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

กรณีที่มีจุดศูนย์กลางกลางของการฉายภาพอยู่บนแกน Z หรือที่พิกัด $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/r & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & rz+1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

และ

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz+1} & \frac{y}{rz+1} & \frac{z}{rz+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.2.7 การแปลงแบบผสม (Multiple Transformations)

โดยทั่วไปในการใช้งานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกจำเป็นต้องใช้การแปลงหลายแบบร่วมกัน เช่นในการหมุนวัตถุรอบเส้นตรงใดๆ ซึ่งขนานกับแกน Z จำเป็นต้องทำการเลื่อนให้จุดศูนย์กลางของวัตถุไปยังจุดกำเนิดก่อน จึงจะทำการหมุนวัตถุรอบแกน Z จากนั้นจึงทำการเลื่อนวัตถุกลับไปยังตำแหน่งเดิม

ตัวอย่าง หมุนวัตถุเป็นมุม φ รอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน Z ซึ่งผ่านจุด $(-T_x, -T_y, -T_z)$ กำหนดให้เมทริกซ์ M เป็นเมทริกซ์การแปลงแบบผสม จะได้

$$M = T_T \cdot R_Z \cdot T_T^{-1} \quad (4.30)$$

เมื่อ

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \quad T_T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมทริกซ์ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ ดังนั้นลำดับของเมทริกซ์ของการแปลงจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง