

บทที่ 4

การสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นอัลตราโซนิก โดยใช้เทคนิคสำหรับแหล่งกำเนิดชนิดที่เกิดผลการเลี้ยวเบน

ในบทนี้นั้นเป็นการนำเสนอ การประยุกต์ใช้ทฤษฎีการสร้างภาพตัดขวางสำหรับแหล่งกำเนิดชนิดที่มีผลกระทบของการเลี้ยวเบน (Diffraction Tomography) ในการสร้างภาพตัดขวางจากคลื่นอัลตราโซนิก เนื่องจากคลื่นอัลตราโซนิกนั้นถือเป็นแหล่งกำเนิดประเภทหนึ่งที่มีผลกระทบจากการเลี้ยวเบนของคลื่นเมื่อคลื่นเดินทางผ่านรอยต่อใดระหว่างตัวกลาง ซึ่งผลกระทบจากการเลี้ยวเบนของคลื่นนี้นั้นทำให้ทฤษฎีในการสร้างภาพตัดขวางต่างๆ ที่ใช้สำหรับแหล่งกำเนิดชนิดที่ไม่มีผลกระทบจากการเลี้ยวเบน ไม่สามารถให้ภาพตัดขวางจากข้อมูลที่ได้รับจากคลื่นอัลตราโซนิกได้สมบูรณ์ เนื่องจากเสมือนเป็นการประมาณการเดินทางของคลื่นอัลตราโซนิกว่าเป็นเส้นตรง [5] ซึ่งต่างจากความเป็นจริง ดังนั้นการใช้ทฤษฎีการสร้างภาพตัดขวางสำหรับแหล่งกำเนิดที่เกิดผลการเลี้ยวเบนกับคลื่นอัลตราโซนิกจึงควรที่จะสร้างภาพตัดขวางได้ถูกต้องสมบูรณ์กว่า

4.1 การเดินทางของคลื่นที่เกิดการเลี้ยวเบน

การคำนวณโปรเจกชันของคลื่นที่เกิดการเลี้ยวเบนเมื่อเดินทางผ่านตัวกลางใดๆนั้น ไม่สามารถคำนวณได้โดยใช้การอินทิเกรตตามเส้น (Line Integral) เหมือนดังคลื่นที่เดินทางเป็นตรง ดังนั้นจึงต้องใช้สมการคลื่นเพื่ออธิบายการเดินทางของคลื่นดังกล่าว สำหรับในกรณีของตัวกลางเนื้อเดียว (Homogeneous medium) นั้น การคำนวณการแพร่ของคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ สามารถทำได้โดยใช้สมการอนุพันธ์อันดับสอง แต่ทว่าในกรณีของตัวกลางที่เป็นสารที่ประกอบไปด้วยค่าความหนาแน่นหลากหลายค่า (Inhomogeneous medium) นั้น ไม่มีหลักการใดที่จะสามารถคำนวณการแพร่ของคลื่นในสารนั้นๆ ได้โดยตรง แต่ได้มีผู้เสนอหลักการที่ใช้ในการประมาณสมการคลื่นได้แก่ การประมาณค่าของ บอร์น (Born) และไรทอฟ (Rytov) โดยใช้ได้ในกรณีที่ตัวกลางแต่ละส่วนมีความแตกต่างกันไม่มากนักซึ่งจะนำเสนอในรายละเอียดต่อไป

4.1.1 สมการคลื่นสำหรับตัวกลางเนื้อเดียว (Homogeneous Wave Equation)

สนามคลื่นต่างๆไม่ว่าจะเป็นสนามคลื่นเสียง หรือสนามคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้นสามารถที่จะเขียนแทนได้ด้วยสมการที่ 4.1 [4]

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\nabla^2}{dt^2} u(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.1)$$

โดยที่ $u(\vec{r}, t)$ แทนค่าขนาดของสนามคลื่นที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ ณ เวลา t ใดๆ c แทนค่าของความเร็วในการเคลื่อนที่ของคลื่น ซึ่งจากสมการที่ 4.1 นั้นจะพบว่ามีความซับซ้อนเกินกว่าที่จำเป็นเนื่องจากโดยส่วนมากแล้วนั้น เราจะพิจารณาความถี่มูลฐานค่าใดค่าหนึ่งจากการทำการแปลงฟูเรียร์ ณ ช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการแทนสนาม $u(\vec{r}, t)$ ที่ความถี่ ω ค่าใดค่าหนึ่งได้เป็น

$$[\nabla^2 + k^2(\vec{r})]u(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.2)$$

เมื่อค่า $k(\vec{r})$ นั้นแทน หมายเลขคลื่น (wave number) ของคลื่นที่กำลังพิจารณา ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$k(\vec{r}) = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega}{c} \quad (4.3)$$

โดยค่า λ คือค่าความยาวคลื่น ซึ่งในการพิจารณานั้นจะพิจารณาที่ความถี่ค่าใดค่าหนึ่ง ทำให้อาจกล่าวได้ว่าเป็นส่วนจริง (Real Part) ของ $u(\vec{r})e^{-j\omega t}$ โดยจะเห็นได้ว่าสนามคลื่นนั้นขึ้นกับเวลา ดังนั้นที่เวลาใดเวลาหนึ่งจะสามารถเขียนสมการที่ 4.2 ใหม่ได้เป็น

$$(\nabla^2 + k^2(\vec{r}))u(\vec{r}) = 0 \quad (4.4)$$

สำหรับในกรณีการสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นเสียงซึ่งรวมถึงคลื่นอัลตราโซนิกด้วยนั้น ค่าของ $u(\vec{r})$ สามารถแทนได้ด้วยค่าของความดันคลื่นที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ และสำหรับค่าความยาวคลื่นซึ่งเป็นค่าคงที่นั้นหากเขียนให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ($k(\vec{r}) = k_0$) จะทำให้สมการที่ 4.4 กลายเป็น

$$(\nabla^2 + k_0^2)u(\vec{r}) = 0 \quad (4.5)$$

เมื่อแทนค่าของตัวกระทำเกรเดียน (∇ ; Gradient operator) ลงในสมการที่ 4.5 จะจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial^2 u(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\vec{r})}{\partial y^2} + k_0^2 u(\vec{r}) = 0 \quad (4.6)$$

โดยที่

$$u(\vec{r}) = e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.7)$$

โดยที่ค่าของ $\vec{k}$ นั้น แทนทิศทางการแพร่ของคลื่นในสองมิติ (k_x, k_y) และจะเห็นได้ว่า $u(\vec{r})$ นั้นมีรูปแบบที่ตรงกับสูตรการแปลงฟูเรียร์ ซึ่งหากอาศัยความสัมพันธ์ดังกล่าวจะสามารถจัดสมการคลื่นให้อยู่ในรูปของผลรวมระนาบคลื่นได้ หากแต่ระนาบคลื่นนั้นๆ จะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไข

$$|\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_0^2 \quad (4.8)$$

จากสมการที่ 4.7 นั้น จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k_y) e^{j(-k_x x + k_y y)} dk_y \quad (4.9)$$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการ 4.8 จะได้

$$k_x = \sqrt{k_0^2 - k_y^2} \quad (4.10)$$

ซึ่งจากสมการที่ 4.9 นั้นจะเห็นได้ว่าพจน์ของการอินทิเกรตนั้น สามารถแบ่งออกเป็นสองพจน์หลัก โดยมีค่าสัมประสิทธิ์หลักประจำพจน์ได้แก่ $\alpha(k_y)$ และ $\beta(k_y)$ ซึ่งเป็นส่วนของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพตามลำดับ โดยค่าสัมประสิทธิ์นี้นั้นมีผลกระทบต่อสนามคลื่นโดยตรงในทางการสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นอัลตราโซนิกนั้น $\alpha(k_y)$ จะเป็นผลกระทบทางขนาดของคลื่น และ $\beta(k_y)$ นั้นจะเป็นผลกระทบทางเฟสของคลื่น และสำหรับสมการที่ 4.9 นั้นจะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงเส้นที่สามารถหาค่าได้ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าการแปลงฟูเรียร์ของสนามคลื่น $u(\vec{r})$ นั้นจะทำให้ทราบค่าของสัมประสิทธิ์ $\alpha(k_y)$ และ $\beta(k_y)$ ได้นั่นเอง

4.1.2 สมการคลื่นสำหรับตัวกลางที่มีเนื้อสารแตกต่าง (Inhomogeneous Wave Equation)

สำหรับการสร้างภาพจากตัวกลางที่มีเนื้อสารหลากหลายนั้น หากเริ่มพิจารณาจากสมการคลื่นรูปแบบทั่วไปดังสมการที่ 4.11 [4]

$$[\nabla^2 + k(\vec{r})^2]u(\vec{r}) = 0 \quad (4.11)$$

ซึ่งในกรณีของสนามคลื่นเสียงนั้นจะสามารถประมาณสมการการแพร่ได้เป็น

$$(\nabla^2 + k_0^2)u(\vec{r}) = -k_0^2[n^2(\vec{r}) - 1]u(\vec{r}) \quad (4.12)$$

โดยที่ค่า n นั้นแทนค่าดัชนีหักเหของวัตถุที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$n(\vec{r}) = \frac{c_0}{c(\vec{r})} \quad (4.13)$$

ค่า c_0 นั้นแทนค่าความเร็วในการแพร่ของคลื่นในตัวกลางใดๆที่วัตถุอยู่ภายใน และค่าของ $c(\vec{r})$ นั้นแทนค่าของดัชนีหักเหภายในวัตถุที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ โดยในกรณีของสนามเสียงนั้น ค่า $c(\vec{r})$ ของวัตถุจะคำนวณได้จาก

$$c(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\vec{r})\kappa(\vec{r})}} \quad (4.14)$$

ซึ่งค่าของ ρ และ κ นั้นแทนค่าของความหนาแน่นของวัตถุ และค่า Compressibility (อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรที่ขึ้นกับความดัน) ของวัตถุที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ ตามลำดับ โดยสมการที่ 4.12 นั้นจะสามารถใช้ได้เฉพาะกรณีที่ค่าคุณสมบัติต่างๆ ของวัตถุนั้นเป็นค่าคงที่ ซึ่งหากจัดรูปสมการที่ 4.12 ใหม่เป็น

$$(\nabla^2 + k_0^2)u(\vec{r}) = -o(\vec{r})u(\vec{r}) \quad (4.15)$$

โดย

$$o(\vec{r}) = k_0^2[n^2(\vec{r}) - 1] \quad (4.16)$$

สมการที่ 4.15 นั้นเป็นสมการหลักที่เราใช้ในการพิจารณา โดยที่ค่าของ $u(\vec{r})$ เป็นผลรวมของ $u_0(\vec{r})$ และ $u_s(\vec{r})$

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + u_s(\vec{r}) \quad (4.17)$$

โดยที่ค่าของ $u_0(\vec{r})$ นั้นแทนสนามคลื่นพุ่งเข้า ซึ่งไม่ได้รับผลกระทบจากตัวกลางใดๆ ซึ่งเรียกแทนด้วยคำว่าสนามพุ่งเข้า (Incident field) ซึ่งเป็นไปตามสมการที่ 4.18

$$(\nabla^2 + k_0^2)u_0(\vec{r}) = 0 \quad (4.18)$$

สำหรับในส่วนของ $u_s(\vec{r})$ นั้นแทนสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง (Scatter field) เมื่อคลื่นแพร่ผ่านวัตถุ ซึ่งหากใช้ความสัมพันธ์จากสมการที่ 4.17 และ 4.18 จะสามารถจัดรูปของสมการที่ 4.15 ใหม่เป็น

$$(\nabla^2 + k_0^2)u_s(\vec{r}) = -u(\vec{r})o(\vec{r}) \quad (4.19)$$

สมการที่ 4.19 นั้น เรียกว่าสมการคลื่นของเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz wave equation) ซึ่งสมการนี้นั้นไม่สามารถหาค่าได้โดยตรงแต่สามารถแทนค่าให้อยู่ในรูปของกรีนฟังก์ชัน ($g(\vec{r} | \vec{r}')$; Green's function) ดังสมการที่ 4.20

$$(\nabla^2 + k_0^2)g(\vec{r} | \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.20)$$

หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูป

$$g(\vec{r} | \vec{r}') = \frac{e^{jk_0 R}}{4\pi R} \quad (4.21)$$

โดย

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (4.22)$$

ในกรณีสองมิตินั้นสมการที่ 4.20 สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของฮานเกลฟังก์ชันอันดับที่ศูนย์ (Zero-order Hankel function) ซึ่งจะสามารถลดรูปสมการเป็น

$$g(\vec{r} | \vec{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 R) \quad (4.23)$$

โดยกรีนฟังก์ชัน ($g(\vec{r} | \vec{r}')$) นั้นเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับผลต่างของระหว่าง $\vec{r}$ และ $\vec{r}'$ ดังนั้นจึงอาจพิจารณาให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้นเป็น $g(\vec{r} - \vec{r}')$ และจากสมการที่ 4.20 นั้นหากพิจารณาส่วนที่เป็นฟังก์ชันของวัตถุ ($o(\vec{r})$; Object function) จะเห็นได้ว่าเป็นค่าความแตกต่างกันระหว่างเนื้อสารแต่ละจุด ดังนั้นกรีนฟังก์ชันจึงสามารถพิจารณาหาค่าของผลลัพธ์สนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงจากจุดใดจุดหนึ่งได้ จึงมีความเป็นไปได้ที่จะพิจารณาสมการคลื่นในรูปการเรียงกันของคลื่นแต่ละลูกหรือเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$o(\vec{r})u(\vec{r}) = \int o(\vec{r}')u(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')d\vec{r}' \quad (4.24)$$

จะเห็นว่าสมการนี้นั้นเป็นผลรวมกันของสัญญาณกระตุ้นที่ขึ้นกับค่าของ $o(\vec{r})u(\vec{r})$ เป็นระยะทาง $\vec{r}$ โดยที่กรีนฟังก์ชันนั้นแทนด้วยเดลต้าฟังก์ชัน $(\delta(\vec{r} - \vec{r}'))$ เพียงพจน์เดียว เนื่องจากค่าทางซ้ายมือของสมการมีลักษณะเชิงเส้น จึงทำให้สามารถที่จะเขียนสมการให้เป็น ลักษณะการรวมกันของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงจากจุดที่เกิดการกระเจิงแต่ละจุด ซึ่งจากสมการ จะเห็นว่าสนามคลื่นรวม (total field) เกิดขึ้นจากการกระตุ้นของ $o(\vec{r}')u(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ ซึ่งเป็น ผลรวมการตอบสนองทั้งทางด้านขนาด และการเลื่อนของเวลา และเมื่อใช้ความสัมพันธ์จากสมการ ที่ 4.19 จะสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$u_s(\vec{r}) = \int g(\vec{r} - \vec{r}')o(\vec{r}')u(\vec{r}')d\vec{r}' \quad 4.25$$

ซึ่งสิ่งที่ต้องการทราบคือค่าของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง (u_s) แต่สมการนี้นั้นค่าของ สนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงมาจากพจน์ของสนามคลื่นรวม ($u = u_0 + u_s$) ทำให้สมการนี้ยังคงไม่ เป็นสมการเชิงเส้นซึ่งยังไม่สามารถหาค่าได้ จึงต้องอาศัยการประมาณค่าซึ่งจะกล่าวถึงในส่วน ถัดไป

4.2 การประมาณค่าเข้าสู่สมการคลื่น

จากหัวข้อที่ผ่านมาได้กล่าวถึงสมการคลื่นสำหรับตัวกลางสารที่มีเนื้อสารหลากหลาย โดยเป็นสมการแทนค่าของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง ($u_s(\vec{r})$) ที่ขึ้นกับฟังก์ชันของวัตถุ ($o(\vec{r})$) ซึ่งสมการนี้นั้นเป็นสมการที่ไม่สามารถหาค่าได้โดยตรง แต่สามารถใช้การประมาณค่าอย่างใด อย่างหนึ่งเพื่อหาค่าของสมการได้ โดยในที่นี้ได้นำเสนอการประมาณค่าสองรูปแบบคือ

4.2.1 การประมาณค่าอันดับหนึ่งของบอร์น (The First Born Approximation)

การประมาณค่าอันดับหนึ่งของบอร์นนั้นเป็นหนึ่งในวิธีการ ที่ถูกนำมาใช้ในการประมาณ ค่าของสนามคลื่น[1],[4] ซึ่งสนามคลื่นจะถูกพิจารณาในลักษณะของผลรวมระหว่างสนามพุ่งเข้า และสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + u_s(\vec{r}) \quad (4.26)$$

ซึ่งหากพิจารณาสมการนี้ร่วมกับสมการที่ 4.25 จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$u_s(\vec{r}) = \int g(\vec{r} - \vec{r}')o(\vec{r}')u_0(\vec{r}')d\vec{r}' + \int g(\vec{r} - \vec{r}')o(\vec{r}')u_s(\vec{r}')d\vec{r}' \quad (4.27)$$

แต่ในกรณีที่สนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง ($u_s(\vec{r})$) มีค่าต่ำเมื่อเทียบกับสนามพุ่งเข้า ($u_0(\vec{r})$) จะทำให้สามารถละทิ้งผลของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงไปได้ ซึ่งเป็นการประมาณค่าดังสมการที่ 4.28 [4]

$$u_s(\vec{r}) \cong u_B(\vec{r}) = \int g(\vec{r} - \vec{r}') o(\vec{r}') u_0(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.28)$$

ซึ่งในกรณีที่ต้องการให้การประมาณมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นค่าของ $u_0(\vec{r})$ จะถูกเขียนแทนด้วย $u_0(\vec{r}) + u_B(\vec{r})$ ซึ่งจะได้สมการเป็น

$$u_B^{(2)}(\vec{r}) = \int g(\vec{r} - \vec{r}') o(\vec{r}') [u_0(\vec{r}') + u_B(\vec{r}')] d\vec{r}' \quad (4.29)$$

อาจกล่าวได้ว่าการประมาณค่าอันดับที่ i ของบอร์นจะสามารถเขียนได้เป็น

$$u_B^{(i+1)}(\vec{r}) = \int g(\vec{r} - \vec{r}') o(\vec{r}') [u_0(\vec{r}') + u_B^{(i)}(\vec{r}')] d\vec{r}' \quad (4.30)$$

หรือเขียนแทนในอีกลักษณะได้เป็น

$$u(\vec{r}) = u_0(\vec{r}) + u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r}) + \dots \quad (4.31)$$

โดยที่

$$u_{(i+1)}(\vec{r}) = \int u_i(\vec{r}') o(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.32)$$

สำหรับสมการที่ 4.30 นั้น สามารถที่จะเขียนในรูปย่อได้เป็น

$$u_B^{(i)}(\vec{r}) = \sum_{j=0}^i u_j(\vec{r}) \quad (4.33)$$

และอยู่ภายในขอบเขต

$$u(\vec{r}) \cong u_0(\vec{r}) + u_1(\vec{r}) + u_2(\vec{r}) + u_3(\vec{r}) + \dots \quad (4.34)$$

จากที่กล่าวมานั้น จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าอันดับหนึ่งของบอร์นนั่นให้ค่าแทนสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงอันดับหนึ่ง (first-order scattered field) และ u_i แทนค่าสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงอันดับที่ i (i^{th} -order scattered field) ซึ่งในทางทฤษฎีนั้นการประมาณค่าอันดับที่สูงกว่าย่อมให้ผลที่ดีกว่า แต่ในขณะนี้การประมาณค่าอันดับที่สูงกว่าหนึ่งยังคงอยู่ในขั้นตอนของการวิจัยเท่านั้น

สำหรับข้อจำกัดของการประมาณค่าของบอร์นนี้ นั่นคือสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงจะต้องมีค่าน้อยกว่าสนามคลื่นพุ่งเข้าเพื่อให้สมการนี้เป็นจริง

$$u_s(\vec{r}) = u(\vec{r}) - u_0(\vec{r}) \quad (4.35)$$

ในกรณีที่เป็วัตถุทรงกระบอกเนื้อเดียว ฟังก์ชันวัตถุดังกล่าวอาจกล่าวได้ว่าเป็นฟังก์ชันของขนาดวัตถุ และฟังก์ชันของดัชนีหักเห โดยในกรณีที่คลื่นพุ่งเข้าเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่ไปในทิศทาง $\vec{s}$ หากวัตถุมีขนาดใหญ่การประมาณค่าสนามคลื่นภายในวัตถุโดยอ้างอิงจากสนามพุ่งเข้าจะไม่สามารถทำได้ถูกต้อง นั่นคือ

$$u(\vec{r}) = u_{object}(\vec{r}) \neq Ae^{jk_0\vec{s}\cdot\vec{r}} \quad (4.36)$$

แต่ใน

กรณีที่แทนฟังก์ชันของวัตถุด้วยการเปลี่ยนแปลงของค่าดัชนีหักเห (n_s) สนามคลื่นภายในวัตถุที่เดินทางผ่านจุดศูนย์กลาง และขนานกับทิศทางการแพร่ของระนาบคลื่นพุ่งเข้า จะเกิดการเปลี่ยนแปลงทางด้านความเร็วในการเดินทางซึ่งเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$u_{object}(\vec{r}) = Ae^{jk_0(1+n_s)\vec{s}\cdot\vec{r}} \quad (4.37)$$

คลื่นที่แพร่ผ่านวัตถุตัวกลางนั้นจะเกิดการเลื่อนทางเฟสระหว่างสนามคลื่นพุ่งเข้า และสนามคลื่นที่เดินทางภายในวัตถุ โดยสามารถคิดเป็นผลรวมเชิงเส้นของการเปลี่ยนแปลงทางเฟสตลอดแนวการเดินทางของคลื่น ซึ่งในกรณีที่เป็วัตถุทรงกระบอกรัศมี a ซึ่งผลรวมการเลื่อนทางเฟสของวัตถุจะเป็น

$$\text{การเปลี่ยนแปลงของเฟส} = 4\pi n_s \frac{a}{\lambda} \quad (4.38)$$

โดยที่ค่า λ นั้นแทนค่าความยาวคลื่นของสนามพุ่งเข้า ซึ่งสมการที่ 4.38 นี้แสดงให้เห็นถึงเงื่อนไขสำคัญที่จะทำให้สามารถใช้ในการประมาณค่าของบอร์นได้ นั่นคือการเปลี่ยนแปลงทางเฟสระหว่างสนามพุ่งเข้า และสนามคลื่นที่เดินทางผ่านวัตถุ จะต้องมิต่ำกว่า π ซึ่งแสดงเป็นเงื่อนไขดังสมการที่ 4.39

$$an_s < \frac{\lambda}{4} \quad (4.39)$$

4.2.2 การประมาณค่าอันดับหนึ่งของไรทอฟ (The First Rytov Approximation)

ทฤษฎีการประมาณค่าอีกทฤษฎีหนึ่ง ที่ใช้ในการประมาณค่าของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงได้แก่ทฤษฎีการประมาณค่าของไรทอฟ (Rytov approximation) [1],[4] ซึ่งมีข้อจำกัดแตกต่างกันเล็กน้อย โดยเราจะเริ่มพิจารณาจากสนามคลื่นที่แสดงอยู่ในรูปของเฟสเชิงซ้อน [10] ดังสมการที่ 4.40

$$u(\vec{r}) = e^{\phi(\vec{r})} \quad (4.40)$$

ซึ่งหากเขียนแทนลงในสมการที่ 4.11

$$[\nabla^2 + k(\vec{r})^2]u(\vec{r}) = 0 \quad (4.11)$$

จะได้เป็น

$$\nabla^2 e^{\phi} + k^2 e^{\phi} = 0 \quad (4.41)$$

$$\nabla[\nabla \phi e^{\phi}] + k^2 e^{\phi} = 0 \quad (4.42)$$

$$\nabla^2 \phi e^{\phi} + (\nabla \phi)^2 e^{\phi} + k^2 e^{\phi} = 0 \quad (4.43)$$

โดยท้ายที่สุดจะได้

$$(\nabla \phi)^2 + \nabla^2 \phi + k_0^2 = -o(\vec{r}) \quad (4.44)$$

ซึ่งเมื่อเขียนสมการเฟสเชิงซ้อนนี้ให้อยู่ในรูปของผลรวมระหว่าง ฟังก์ชันเฟสของคลื่นพุ่งเข้า (Incident phase function : ϕ_0) และฟังก์ชันเฟสเชิงซ้อนของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง (Scattered complex phase : ϕ_s) โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0(\vec{r}) + \phi_s(\vec{r}) \quad (4.45)$$

เมื่อ

$$u_0(\vec{r}) = e^{\phi_0(\vec{r})} \quad (4.40)$$

จะสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$(\nabla \phi_0)^2 + 2\nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_s + (\nabla \phi_s)^2 + \nabla^2 \phi_0 + \nabla^2 \phi_s + k_0^2 + o(\vec{r}) = 0 \quad (4.41)$$

ซึ่งหากใช้หลักในการพิจารณาเช่นเดียวกับในการประมาณค่าของบอร์น จะทำให้สามารถตัดพจน์ที่ยู่ยากของสมการออกไปได้ โดยเราจะได้

$$k_0^2 + (\nabla \phi_0)^2 + \nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (4.42)$$

ซึ่งเมื่อนำไปลบออกจากสมการที่ 4.41 จะได้

$$2\nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_s + \nabla^2\phi_s = -(\nabla\phi_s)^2 - o(\vec{r}) \quad (4.43)$$

ถึงแม้ว่าสมการที่ 4.43 นั้น ยังคงเป็นสมการที่ไม่ใช่สมการเชิงเส้น แต่สมการที่จะพิจารณาหาค่าได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\nabla^2(u_0\phi_s) = \nabla(\nabla u_0 \cdot \phi_s + u_0 \nabla\phi_s) \quad (4.44)$$

หรืออาจเขียนสมการทางด้านขวามือใหม่เป็น

$$\nabla^2(u_0\phi_s) = \nabla^2 u_0 \cdot \phi_s + 2\nabla u_0 \cdot \nabla\phi_s + u_0 \nabla^2\phi_s \quad (4.45)$$

เมื่อพิจารณาสมการสนามคลื่นพุ่งเข้า

$$u_0 = Ae^{jk_0\vec{s} \cdot \vec{r}} \quad (4.46)$$

จะได้

$$\nabla^2 u_0 = -k_0^2 u_0 \quad (4.47)$$

ดังนั้นสมการที่ 4.45 จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$2u_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_s + u_0 \nabla^2\phi_s = \nabla^2(u_0\phi_s) + k_0^2 u_0\phi_s \quad (4.48)$$

ซึ่งเมื่อนำสมการที่ได้มานี้ไปแทนในสมการที่ 4.43 จะได้

$$(\nabla^2 + k_0^2)u_0\phi_s = -u_0[(\nabla\phi_s)^2 + o(\vec{r})] \quad (4.49)$$

จะเห็นว่าสมการนี้สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นได้เป็น

$$u_0\phi_s = \int_{\mathcal{V}} g(\vec{r} - \vec{r}') u_0 [(\nabla\phi_s)^2 + o(\vec{r}')] d\vec{r}' \quad (4.50)$$

เมื่อใช้การประมาณค่าของไรทอฟ พจน์ภายในวงเล็บของสมการข้างต้นจะถูกประมาณค่าเป็น

$$(\nabla \phi_s)^2 + o(\vec{r}) \cong o(\vec{r}) \quad (4.51)$$

ซึ่งจะทำให้ได้สมการการประมาณค่าอันดับหนึ่งของไรทอฟของฟังก์ชัน $u_0 \phi_s$ เป็นดังสมการ

$$u_0 \phi_s = \int_{V'} g(\vec{r} - \vec{r}') u_0(\vec{r}') o(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.52)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการเฟสเชิงซ้อนของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง (ϕ_s) เป็น

$$\phi_s(\vec{r}) = \frac{1}{u_0(\vec{r})} \int_{V'} g(\vec{r} - \vec{r}') u_0(\vec{r}') o(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.53)$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาพร้อมกับสมการที่ 4.28 สมการที่ 4.53 จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\phi_s(\vec{r}) = \frac{u_B(\vec{r})}{u_0(\vec{r})} \quad (4.54)$$

การประมาณค่าของไรทอฟนั้นจะสามารถใช้ได้ภายใต้ข้อจำกัดที่มากกว่าการประมาณค่าของบอร์นเล็กน้อย โดยเมื่อพิจารณาการประมาณค่าของไรทอฟในสมการที่ 4.51

$$(\nabla \phi_s)^2 + o(\vec{r}) \cong o(\vec{r}) \quad (4.51)$$

จะพบว่าสมการนี้จะเป็นจริงเฉพาะในกรณีที่

$$o(\vec{r}) \gg (\nabla \phi_s)^2 \quad (4.55)$$

ซึ่งถ้าเขียนฟังก์ชัน ($o(\vec{r})$) ให้อยู่ในเทอมของการเปลี่ยนแปลงของค่าดัชนีหักเหจะได้เป็น

$$o(\vec{r}) = k_0^2 [n^2(\vec{r}) - 1] = k_0^2 [(1 + n_\delta(\vec{r}))^2 - 1] \quad (4.56)$$

$$o(\vec{r}) = k_0^2 [(1 + 2n_\delta(\vec{r}) + n_\delta^2(\vec{r})) - 1] \quad (4.57)$$

$$o(\vec{r}) = k_0^2 [(2n_\delta(\vec{r}) + n_\delta^2(\vec{r}))] \quad (4.58)$$

โดยในกรณีการประมาณค่าอันดับหนึ่งของไรทอฟนั้น จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันวัตถุจะแปรผันตามค่าของดัชนีหักเห หรือเขียนได้เป็น

$$o(\vec{r}) \cong 2k_0^2 n_s(\vec{r}) \quad (4.59)$$

เมื่อแทนสมการที่ 4.59 ลงในสมการที่ 4.55 จะได้เป็น

$$n_s \gg \frac{(\nabla \phi_s)^2}{k_0^2} \quad (4.60)$$

จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าอันดับหนึ่งของฟังก์ชันเฟสของคลื่นที่เกิดการกระเจิง (ϕ_s) นั้นเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นเชิงเส้นขึ้นกับค่าของดัชนีหักเห ดังนั้นจึงทำให้สามารถละทิ้งพจน์แรกของสมการที่ 4.51 ไปได้โดยไม่มีผลกระทบถ้าหากค่าของดัชนีหักเห (n_s) มีค่าต่ำๆ

สำหรับข้อแตกต่างเมื่อเทียบกับการประมาณค่าของบอร์น จะพบว่าขนาดของวัตถุไม่ได้เป็นตัวแปรในการประมาณค่าของไรทอฟ ซึ่งพจน์ของ $\nabla \phi_s$ นั้นเป็นการเปลี่ยนแปลงเฟสเชิงซ้อนของคลื่นต่อหน่วยระยะทาง และถูกหารด้วยค่าของหมายเลขคลื่น (wavenumber)

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.61)$$

ซึ่งทำให้พบเงื่อนไขสำคัญในการใช้งานการประมาณค่าของไรทอฟนั้นคือ

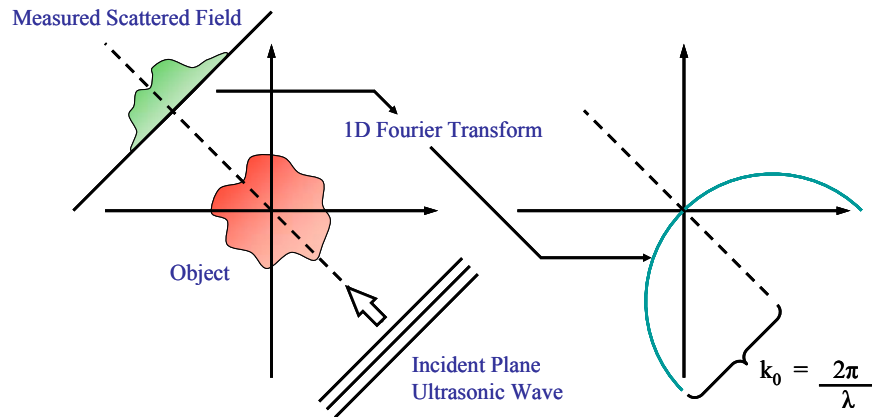
$$n_s \gg \left[\frac{\nabla \phi_s \lambda}{2\pi} \right]^2 \quad (4.62)$$

ข้อที่แตกต่างกับการประมาณค่าของบอร์นอีกอย่างหนึ่งคือ ในกรณีที่เกิดการเลื่อนของเฟส ϕ_s เกินกว่าช่วงความยาวคลื่น λ ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าของเฟสนั้นจะไม่ใช่ค่าผลรวมเฟสทั้งหมด ดังนั้นเมื่อพิจารณาตัวปฏิบัติการ ∇ การประมาณค่าของไรทอฟจะสามารถใช้ได้เฉพาะกรณีที่การเปลี่ยนแปลงทางเฟสที่มากเกินกว่าช่วงความยาวคลื่นที่เกิดขึ้นนั้นมีค่าต่ำ

4.3 การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้ทฤษฎีฟูเรียร์สไลซ์ทั่วไป

ทฤษฎีหนึ่งที่ถูกนำมาใช้ในการสร้างภาพตัดขวาง สำหรับแหล่งกำเนิดที่เกิดการเลี้ยวเบน ที่จะนำเสนอในที่นี้ได้แก่ทฤษฎีฟูเรียร์สไลซ์ทั่วไป (Generalized Fourier Slice Theory) [1],[4] โดยมี

หลักการคือ การแปลงฟูเรียร์สัญญาณที่เกิดการกระเจิง (Scattered Field) ที่สามารถตรวจวัดได้ จะเทียบได้กับการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันวัตถุ โดยทฤษฎีการแปลงฟูเรียร์สำหรับแหล่งกำเนิดที่เกิดการเลี้ยวเบนนั้น จะสามารถใช้งานได้เฉพาะกรณีที่คุณสมบัติที่แตกต่างกันภายในเนื้อวัตถุมีค่าไม่มากนัก



รูปที่ 4.1 ทฤษฎีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้ทฤษฎีฟูเรียร์สไลซ์ทั่วไป

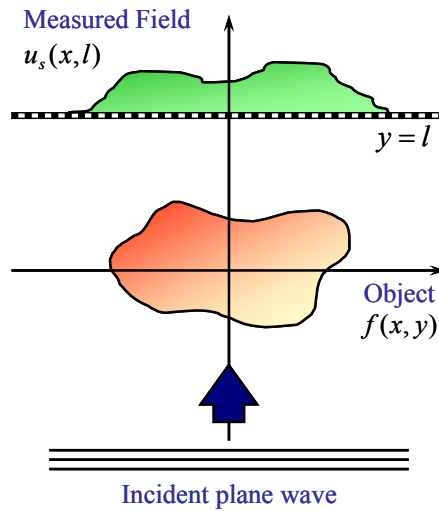
หลักการสำคัญของทฤษฎีนี้คือ เมื่อวัตถุถูกวางไว้ให้ระนาบคลื่นเดินทางผ่านในทิศทางต่างๆกันตลอดทั้ง 360 องศารอบวัตถุ ผลลัพธ์ของคลื่นที่สามารถตรวจวัดได้จะถูกนำไปวางในลักษณะเส้นโค้งของวงกลมในระนาบของโดเมนความถี่ ซึ่งเมื่อทำการแปลงฟูเรียร์ย้อนกลับจะทำให้ได้ฟังก์ชันของวัตถุกลับคืนมา

ในตอนต้นของบทนี้นั้นได้นำเสนอการหาค่าของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง สำหรับกรณีที่เกิดการกระเจิงที่เกิดขึ้นมีค่าเพียงเล็กน้อย ให้อยู่ในรูปการทำคอนโวลูชัน (convolution) ดังสมการ

$$u_B(\vec{r}) = \int o(\vec{r}') u_0(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') d(\vec{r}') \quad (4.63)$$

โดยที่ค่าของ $u_B(\vec{r})$ นั้นแทนอาจแทนด้วยค่าของขนาดของสนามคลื่นเชิงซ้อนในกรณีที่เป็นการประมาณค่าของบอร์น หรือแทนด้วยการเคลื่อนทางเฟสเชิงซ้อนของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง ในกรณีที่เป็นการประมาณค่าของไรทอฟ โดยการหาค่าของสมการที่ 4.63 นั้นสามารถทำได้สองวิธีการโดยวิธีการแรกจะเป็นการแยกองค์ประกอบของกรีนฟังก์ชัน (Decomposition the Green's Function) และอีกวิธีหนึ่งคือการใช้การพิจารณาคุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์ทั้งโดเมนความถี่และโดเมนเวลา ซึ่งทั้งสองวิธีมีจุดเด่นที่แตกต่างกัน วิธีแรกนั้นเป็นการใช้การคำนวณทางคณิตศาสตร์อย่างตรงไปตรงมา แต่เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงขอแนะนำเสนอเฉพาะวิธีการที่สอง ซึ่งสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย และสามารถแสดงให้เห็นถึงข้อ

แตกต่างระหว่างการใช้การส่งคลื่นในโหมดส่งผ่าน และการส่งคลื่นในโหมดสะท้อนกลับได้อย่างชัดเจน



รูปที่ 4.2 การวัดสัญญาณที่เกิดการกระเจิงของวัตถุที่ถูกวางไว้ในสนามคลื่น

จากสมการที่ 4.63 นั้น เป็นสมการผลรวมเชิงเส้นของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิง ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นการทำคอนโวลูชันของกรีนฟังก์ชัน ($g(\vec{r} - \vec{r}')$) กับผลคูณของฟังก์ชันวัตถุ ($o(\vec{r}')$) และสนามพุ่งเข้า ($u_0(\vec{r}')$) โดยเมื่อทำการแปลงให้เข้าสู่โดเมนความถี่ค่าต่างๆจะเปลี่ยนแปลงเป็น

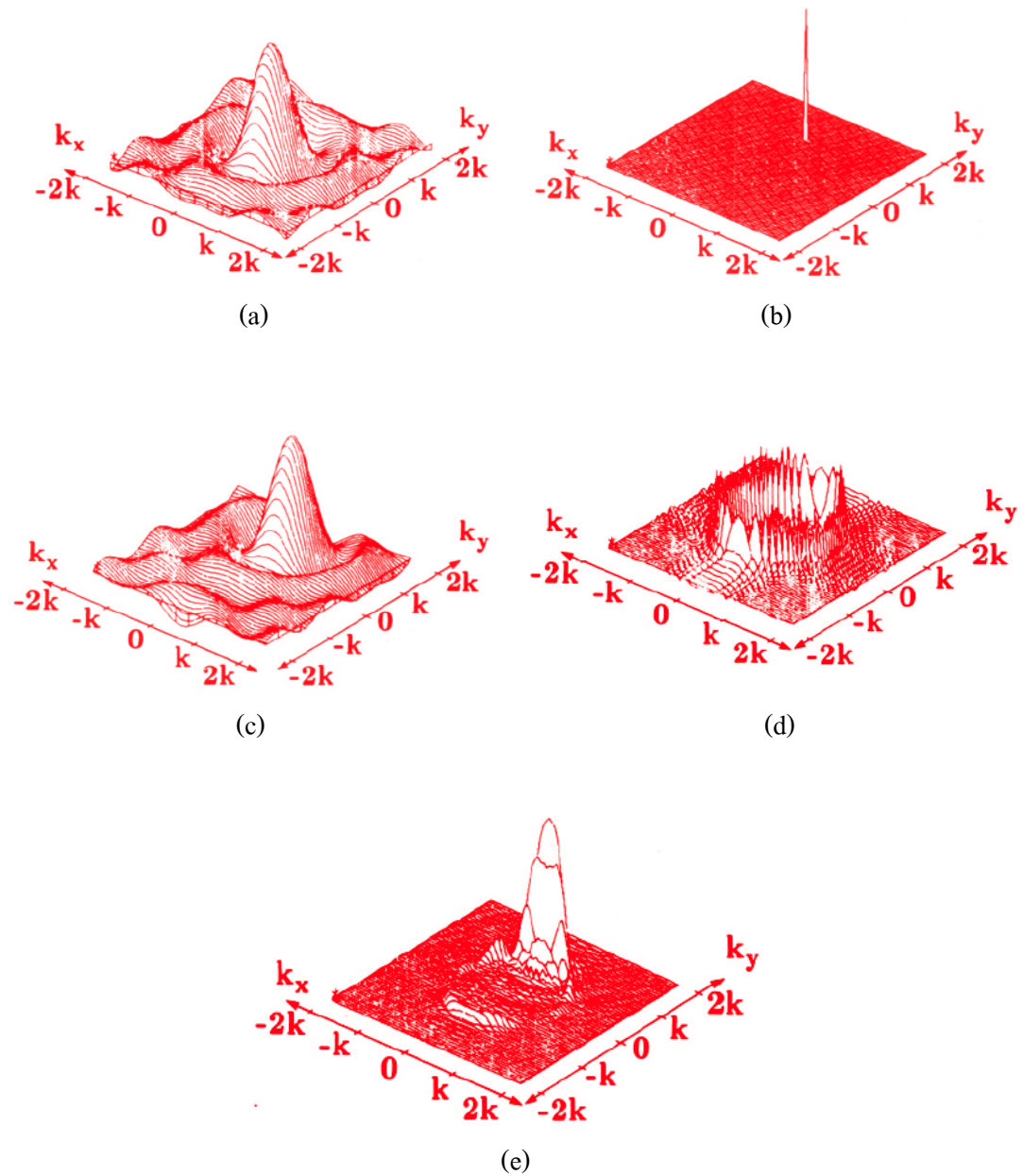
$$\begin{aligned} o(\vec{r}) &\leftrightarrow O(\vec{K}) \\ g(\vec{r} - \vec{r}') &\leftrightarrow G(\vec{K}) \\ u(\vec{r}) &\leftrightarrow U(\vec{K}) \end{aligned} \quad (4.64)$$

ซึ่งสมการที่ 4.63 นั้นจะถูกแปลงเป็น

$$U_s(\vec{\Lambda}) = G(\vec{\Lambda}) \{O(\vec{\Lambda}) * U_0(\vec{\Lambda})\} \quad (4.65)$$

โดยที่ * นั้นแทนการกระทำคอนโวลูชัน และ $\vec{\Lambda}$ เป็นฟังก์ชันของ α และ γ เมื่อพิจารณา ค่าของ u_0 ร่วมกับสมการที่ 4.7 เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์จะได้

$$U_0(\vec{\Lambda}) = 2\pi\delta(\vec{\Lambda} - \vec{K}) \quad (4.66)$$



รูปที่ 4.3 สัญญาณที่ถูกพลอตในระนาบของฟูเรียร์สองมิติ

- (a) การแปลงฟูเรียร์ของวัตถุ (ในกรณีวัตถุทรงกระบอก)
- (b) การแปลงฟูเรียร์ของสนามพุ่งเข้า
- (c) การทำคอนโวลูชันในโดเมนความถี่ของ (a) และ (b)
- (d) การแปลงฟูเรียร์ของกรีนฟังก์ชัน (จากสมการที่ 4.23)
- (e) ผลคูณกันในโดเมนความถี่ของ (c) และ (d)

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการกระทำคอนโวลูชันในสมการที่ 4.65 นั้น เปรียบได้กับการเลื่อนตำแหน่งในโดเมนความถี่ (แสดงดังรูปที่ 4.3(c)) หรือพิสูจน์เป็นสมการได้เป็น

$$O(\vec{\Lambda}) * U_0(\vec{\Lambda}) = 2\pi O(\vec{\Lambda} - \vec{K}) \quad (4.67)$$

จากรูปที่ 4.3 (a)-(c) นั้นแสดงการแพร่ของคลื่นในทิศทาง $\vec{K}$ (เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจจะกำหนดให้ทิศทางการแพร่ของคลื่นนั้นเป็นไปตามแนวแกน y ($\vec{K} = (0, k_0)$) เท่านั้น) โดยรูป (a) นั้นแสดงการแปลงฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของวัตถุทรงกระบอกรัศมี 1λ รูป (b) นั้นแสดงการแปลงฟูเรียร์ของสนามพุ่งเข้า และรูป (c) นั้นแสดงการคูณ (ในโดเมนเวลา) หรือการคอนโวลูชัน (ในโดเมนความถี่) ของสนามพุ่งเข้าและฟังก์ชันของวัตถุ

เพื่อที่จะหาค่าของการแปลงฟูเรียร์ของกรีนฟังก์ชัน จึงทำการแปลงฟูเรียร์แก่สมการที่ 4.20

$$(-\Lambda^2 + k_0^2)G(\vec{\Lambda} | \vec{r}') = -e^{-j\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}'} \quad (4.68)$$

ซึ่งเราจะพบว่า

$$G(\vec{\Lambda} | \vec{r}') = \frac{e^{-j\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}'}}{\Lambda^2 - k_0^2} \quad (4.69)$$

โดยที่ค่าของ $\vec{\Lambda}$ นั้นมีค่าเท่ากับ

$$|\Lambda|^2 = \alpha^2 + \gamma^2 = k_0^2 \quad (4.70)$$

ซึ่งจะพบว่าค่าของกรีนฟังก์ชันนั้นกระจายตัวอยู่ในระนาบ $\vec{K}$ ในลักษณะของเส้นโค้งที่มีรัศมีเท่ากับ k_0 ดังรูปที่ 4.3(d) โดยสมการที่ 4.69 นั้น เมื่อนำไปพลอตโดยตรงอาจทำให้เกิดการสับสนขึ้นได้เนื่องจากจะมีค่าเกิดขึ้นในลักษณะเดียวกันทั้งทางด้านซ้ายและขวาแต่มีลักษณะตรงข้ามกัน ซึ่งในความเป็นจริงนั้นจะเกิดเฉพาะทางด้านที่มีขนาดสูงขึ้นเท่านั้น

เมื่อนำสัญญาณจากการคอนโวลูชันในสมการที่ 4.67 มาคูณกับกรีนฟังก์ชันในโดเมนความถี่ โดยพิจารณาที่ $\vec{r} = 0$ จะสามารถเขียนสมการสนามที่เกิดการกระเจิงได้ดังรูปที่ 4.3(e) หรืออธิบายเป็นสมการได้เป็น

$$U_s(\vec{\Lambda}) = 2\pi \frac{O(\vec{\Lambda} - \vec{K})}{\Lambda^2 - k^2} \quad (4.71)$$

หลังจากนี้จะทำการหาค่าของสนามตลอดแนวเส้นของตัวรับ ซึ่งจะยังคงสมมติให้ทิศทางการแพร่ของสนามพุ่งเข้านั้นยังคงเป็นไปตามแนวแกน y ($\vec{K} = (0, k_0)$) โดยสนามที่เกิดการกระเจิงตลอดแนวเส้นของตัวรับ ($x, y = l_0$) ที่ตรวจวัดได้นั้นจะมีลักษณะเหมือนกับการทำการแปลงฟูเรียร์กลับของสมการที่ 4.71

$$u(x, y = l_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_s(\vec{\Lambda}) e^{j\vec{\Lambda} \cdot \vec{r}} d\alpha d\gamma \quad (4.72)$$

เมื่อแทนสมการที่ 4.71 ลงไปจะกลายเป็น

$$u(x, y = l_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{O(\alpha, \gamma - k_0)}{\alpha^2 + \gamma^2 - k_0^2} e^{j(\alpha x + \gamma l_0)} d\alpha d\gamma \quad (4.73)$$

การหาค่าผลรวมเชิงเส้นนี้นั้นจะเริ่มจากการแทนค่าของ γ จากค่า α ที่ได้มา

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} \quad (4.74)$$

ใช้หลักการหาผลรวมตามแนวเส้น เราจะสามารถหาสมการผลรวมเชิงเส้นตลอดแนวดังรูปที่ 4.4 โดยเมื่อคูณกับ $1/2 \pi$ กับแต่ละส่วนจะได้

$$u_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_1(\alpha; y) e^{j\alpha x} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_2(\alpha; y) e^{j\alpha x} d\alpha \quad (4.75)$$

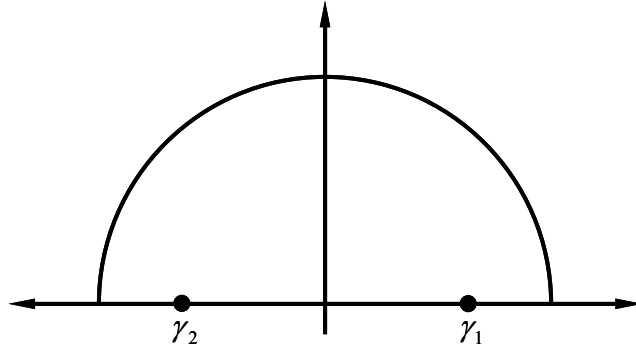
โดยที่

$$\Gamma_1 = \frac{jO(\alpha, \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} - k_0)}{2\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}} e^{j\sqrt{k_0^2 - \alpha^2} l_0} \quad (4.76)$$

$$\Gamma_2 = \frac{-jO(\alpha, \sqrt{k_0^2 - \alpha^2} - k_0)}{2\sqrt{k_0^2 - \alpha^2}} e^{-j\sqrt{k_0^2 - \alpha^2} l_0} \quad (4.77)$$

จากสมการ 4.76 และ 4.77 นั้น จะเห็นได้ว่าค่าของ Γ_1 แทนระนาบคลื่นที่เดินทางไปในทิศทาง y และ Γ_2 แทนระนาบคลื่นที่เดินทางไปในทิศทาง $-y$ ซึ่งทำให้สามารถที่จะแยกคิดได้

เป็นสองกรณีคือกรณีที่ค่า y มีค่ามากกว่าวัตถุ จะทำให้คลื่นที่เกิดการกระเจิงถูกแทนด้วยฟังก์ชันของ Γ_1



รูปที่ 4.4 ขั้วที่เกิดขึ้นในระนาบเชิงซ้อนจากส่วนของผลรวมเชิงเส้น

$$u_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_1(\alpha; y) e^{j\alpha x} d\alpha, \quad y > \text{object} \quad (4.78)$$

ในกรณีตรงกันข้าม เมื่อค่าของตัวรับตลอดแนว y เท่ากับ l_0 เมื่อค่าของ l_0 นั้นมีค่าน้อยกว่าค่าของแกน y ของจุดต่างๆภายในวัตถุ สนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงจะถูกแทนด้วยฟังก์ชัน Γ_2 หรือ

$$u_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_2(\alpha; y) e^{j\alpha x} d\alpha, \quad y < \text{object} \quad (4.79)$$

โดยทั่วไปนั้นสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงจะถูกเขียนแทนด้วยสมการ

$$u_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma(\alpha; y) e^{j\alpha x} d\alpha \quad (4.80)$$

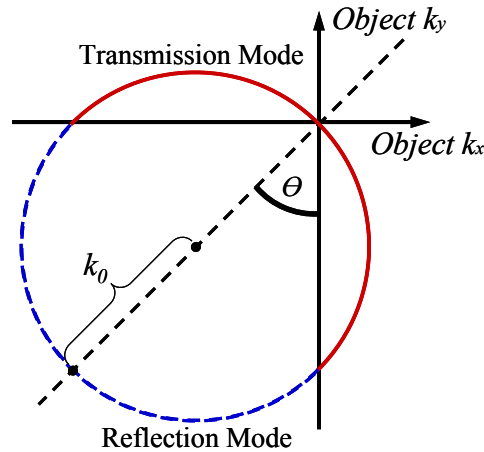
เมื่อทำการแปลงฟูเรียร์กับสมการที่ 4.80 ทั้งสองด้านจะได้

$$\int u(x, y = l_0) e^{-j\alpha x} dx = \Gamma(\alpha, l_0) \quad (4.81)$$

ซึ่งค่าของ $\Gamma(\alpha; l_0)$ ภายในสมการที่ 4.76 - 4.81 นั้น มีค่าเท่ากับการเลื่อนทางเฟสของฟังก์ชันวัตถุ โดยที่การแปลงฟูเรียร์ของสนามคลื่นที่เกิดการกระเจิงตลอดแนวเส้น $y = l_0$ นั้นสามารถเทียบได้กับการแปลงฟูเรียร์ของวัตถุในแนวเส้นโค้งของวงกลม ซึ่งเมื่อทำการหาผลรวมเชิงเส้นตามแนวเส้นขอบจะพบว่าคลื่นนั้นเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\alpha^2 + \gamma^2 = k_0^2 \quad (4.82)$$

ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่า การละทิ้งผลลัพธ์ของคลื่นทั้งหมดที่ไม่อยู่บนแนวเส้นโค้งของวงกลมนั้นไม่ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ที่ได้



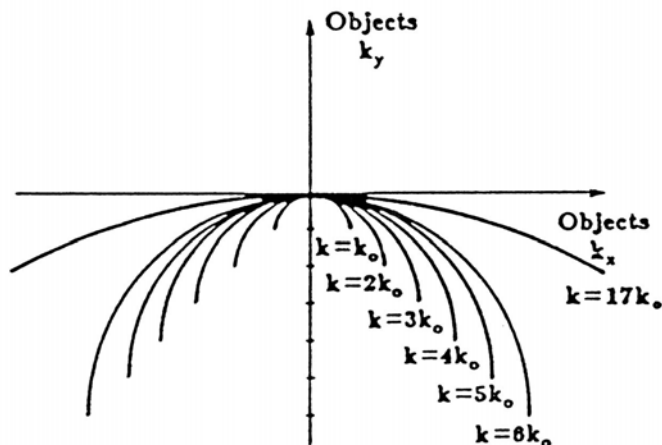
รูปที่ 4.5 การวางข้อมูลลงในโดเมนความถี่ (เส้นทึบในกรณีของการสร้างภาพตัดขวางในโหมดส่งผ่าน และเส้นประในกรณีของการสร้างภาพตัดขวางในโหมดสะท้อน)

ผลลัพธ์จากการแปลงฟูเรียร์ของวัตถุนั้นแสดงดังรูปที่ 4.5 สำหรับจุดต่างๆตามแนวเส้นโค้งนั้นจะถูกแทนด้วยค่า α, γ ซึ่งเป็นไปตามสมการ $\gamma = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2}$ โดยที่เส้นทึบนั้นแสดงคลื่นที่รับได้ในกรณีที่ตัวรับที่ตำแหน่ง $y = l_0$ นั้นอยู่ที่ระยะที่ทะลุผ่านไปแล้ว ซึ่งพิจารณาได้ว่าเป็นการสร้างภาพตัดขวางในโหมดส่งผ่านนั่นเอง ในทางตรงกันข้ามนั้นเมื่อตัวรับที่ตำแหน่ง $y = l_0$ อยู่ที่ตำแหน่งก่อนที่จะถึงวัตถุ หมายความว่า เป็นการสร้างภาพตัดขวางในโหมดสะท้อน ซึ่งเขียนแทนด้วยส่วนโค้งที่เป็นเส้นประดังรูป

เมื่อย้อนกลับไปพิจารณาการแปลงฟูเรียร์ ของข้อมูลโปรเจกชันที่เกิดการเลี้ยวเบนที่ตรวจวัดได้นั้น ข้อมูลนี้จะถูกนำไปวางตามแนวเส้นโค้งรัศมี k_0 บนระนาบของโดเมนความถี่ดังรูปที่ 4.2 ซึ่งค่าของ k_0 นั้นหาได้จากสมการ

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.83)$$

เมื่อพิจารณาค่า λ ซึ่งเป็นค่าความยาวคลื่นของระนาบคลื่น เมื่อค่าความยาวคลื่นนี้ลดลง ค่าของรัศมี k_0 จะเพิ่มขึ้น นั่นหมายความว่าขนาดของส่วนโค้งของวงกลมในโดเมนความถี่ก็จะมีขนาดใหญ่ขึ้นด้วย โดยความสัมพันธ์นี้แสดงดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ของขนาดส่วนโค้งที่เปลี่ยนไปเมื่อความถี่เกิดการเปลี่ยนแปลง

หากยกตัวอย่างในกรณีของการสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นอัลตราโซนิกที่ความถี่ 5MHz จะพบว่าคลื่นนี้มีความยาวคลื่นในน้ำเท่ากับ 0.3 มิลลิเมตร ซึ่งทำให้มีค่าของ k_0 เท่ากับ 333 เรเดียนต่อเมตร (radians/meter) แต่เมื่อพิจารณาในกรณีของรังสีเอกซ์ที่มีความแรง 100 กิโลอิเล็กตรอนโวลต์ (keV) ซึ่งมีความยาวคลื่นเท่ากับ 0.012 ไมโครเมตร จะทำให้ค่าของรัศมีเส้นโค้งนั้นมีค่าสูงถึง 5×10^8 เรเดียนต่อเมตร ซึ่งทำให้เส้นโค้งที่พิจารณานั้นมีลักษณะเป็นเส้นตรงนั่นเอง