

บทที่ 3

การสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นอัลตราโซนิก

โดยใช้เทคนิคสำหรับแหล่งกำเนิดชนิดที่ไม่เกิดผลการเลี้ยวเบน

ในบทนี้นั้นเป็นการนำเสนอหลักการทั่วไป ในการสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นอัลตราโซนิก โดยใช้เทคนิคสำหรับแหล่งกำเนิดที่ไม่เกิดการเลี้ยวเบน (Non-Diffraction Tomography) ซึ่งเป็นงานวิจัยก่อนหน้าวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงความเป็นมา ความหมาย และหลักการสร้างภาพตัดขวางต่างๆ ที่นำมาใช้งาน

3.1 ความหมายของภาพตัดขวาง

โดยธรรมชาติการมองเห็นของมนุษย์นั้น เกิดจากการที่แสงตกกระทบวัตถุแล้วสะท้อนเข้าสู่เรตินาของดวงตา จึงปรากฏเป็นภาพต่างๆ ให้มนุษย์รับรู้ ซึ่งถ้าวัตถุที่แสงตกกระทบมีลักษณะทึบแสง ภาพที่มนุษย์มองเห็นนั้น จะเป็นเพียงลักษณะของพื้นผิววัตถุภายนอกเท่านั้น ไม่สามารถที่จะรับรู้ถึงลักษณะโครงสร้างภายในของวัตถุได้ จากข้อจำกัดดังกล่าวทำให้มีการคิดค้นที่จะใช้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีอำนาจทะลุทะลวงสูง ดังเช่น รังสีเอ็กซ์ (X-ray) ในการส่งผ่านวัตถุ ซึ่งข้อมูลที่ได้รับมานั้นจะเป็นข้อมูลที่ขึ้นกับสัมประสิทธิ์การดูดกลืนของวัตถุ โดยวัตถุที่มีสัมประสิทธิ์การดูดกลืนต่างกันก็จะให้ผลของข้อมูลที่แตกต่างกันไป ซึ่งข้อมูลที่แตกต่างกันเหล่านี้จะถูกใช้เป็นข้อมูลโปรเจกชัน (Projection Data) เพื่อนำไปใช้ในกระบวนการสร้างภาพตัดขวาง (Tomography) ของวัตถุต่อไป

สำหรับรูปแบบของข้อมูลที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางนั้น นอกเหนือจากลักษณะการส่งผ่าน (Transmission) ที่ได้กล่าวไปแล้ว ยังมีรูปแบบการสะท้อน (Reflection) และ การแผ่กระจาย (Emission) ซึ่งแต่ละวิธีการก็จะถูกใช้กับแหล่งกำเนิดที่แตกต่างกันไป เช่น กรณีของการสร้างภาพตัดขวางโดยเทคนิคแมกเนติกเรโซแนนซ์ (Magnetic Resonance Imaging : MRI) หรือที่เรียกเต็มๆว่านิวเคลียร์แมกเนติกเรโซแนนซ์ (Nuclear Magnetic Resonance Imaging : NMRI) ซึ่งใช้หลักการตรวจจับคลื่นจากการสั่นของนิวเคลียสของอะตอม เมื่ออยู่ภายในสนามแม่เหล็กกระตุ้นที่มีความถี่ที่เหมาะสม ซึ่งคลื่นความถี่ตอบสนองที่เกิดขึ้นนั้นจะแผ่ออกในทุกทิศทาง ดังนั้นจึงต้องใช้หลักการแพร่ในการสร้างภาพตัดขวาง เช่นเดียวกับการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้เทคนิคโพซิตรอนมิสชันโทโมกราฟี (Positron Emission Tomography : PET) และเทคนิคซิงเกิล

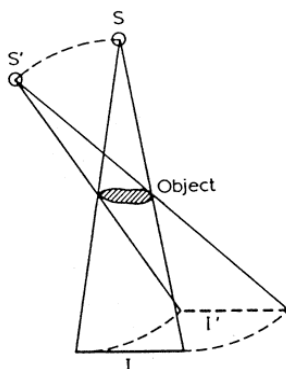
โฟตรอนอิมิตชันโทโมกราฟี (Single Photon Emission Tomography : SPECT) ซึ่งใช้การฉีดสารกัมมันตภาพรังสีเข้าสู่เส้นเลือด เป็นผลให้ร่างกายของมนุษย์เกิดการแพร่กระจายกัมมันตภาพรังสีที่เกิดจากสารดังกล่าวออกมา โดยปริมาณการแพร่จะขึ้นอยู่กับปริมาณการสะสมสารกัมมันตภาพรังสีของอวัยวะส่วนต่างๆ ซึ่งเทคนิคนี้โดยปกติจะใช้ในการตรวจหาภาวะเนื่องจากก้อนมะเร็งจะทำการซึมซับสารกัมมันตภาพรังสีที่ฉีดเข้าไปมากกว่าอวัยวะปกติของร่างกาย ทั้งนี้การซึมซับสารกัมมันตภาพรังสีดังกล่าว จะขึ้นอยู่กับสารที่ใช้ผสมอยู่ในสารกัมมันตภาพรังสีเองด้วย ซึ่งโดยปกตินิยมใช้น้ำตาลซึ่งก้อนมะเร็งจะซึมซับไว้เป็นปริมาณมาก ส่งผลให้บริเวณดังกล่าวมีการแพร่ของกัมมันตภาพรังสีสูงกว่าจุดอื่น จึงทำให้สามารถระบุตำแหน่งของก้อนมะเร็งได้ชัดเจน สำหรับในส่วนของการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้หลักการสะท้อนนั้นจะพบเห็นได้ทั่วไป ในการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุด้วยแหล่งกำเนิดที่มีคุณสมบัติในการสะท้อนกับหน้าสัมผัสของวัตถุ เช่น แสงลำอิเล็กตรอน เรดาร์ หรือคลื่นอัลตราโซนิก เป็นต้น

3.2 การสร้างภาพตัดขวางด้วยคลื่นอัลตราโซนิก

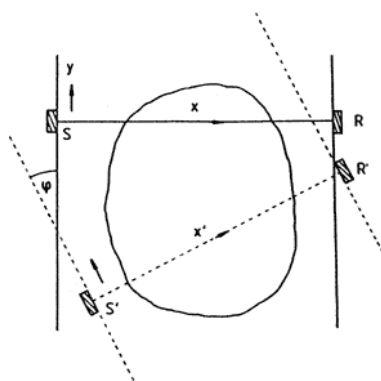
จากความสำเร็จในการสร้างภาพตัดขวางด้วยรังสีเอ็กซ์ จึงทำให้มีการคิดค้นที่จะใช้เทคนิคในการสร้างภาพตัดขวางมาประยุกต์เข้ากับกระบวนการสร้างภาพด้วยเสียง ซึ่งมีจุดมุ่งหมายที่จะทำให้ได้รับภาพตัดขวางที่มีคุณภาพสูงขึ้น สามารถให้ข้อมูลเชิงวินิจฉัยซึ่งนำไปใช้งานทางด้านการแพทย์ได้ ซึ่งหากเปรียบเทียบกับในกรณีของรังสีเอ็กซ์ ข้อมูลที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางจะมาจากตรวจวัดปริมาณรังสีที่สามารถเดินทางทะลุผ่านร่างกายหรือตัวกลางใดๆ ซึ่งปริมาณของรังสีที่ทะลุผ่านมานั้นจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติการดูดกลืนของตัวกลางนั้นๆ และเนื่องจากการเดินทางของรังสีเอ็กซ์นั้นมีลักษณะเป็นเส้นตรง จึงทำให้ผลลัพธ์ของรังสีที่เดินทางทะลุผ่านออกมาในแต่ละเส้นทางการเดินทางนั้นได้มาจากปริมาณคลื่นที่ส่งออกไป หักล้างกับผลรวมของคุณสมบัติการดูดกลืนของวัตถุที่อยู่ตลอดแนวการเดินทางของรังสี โดยปริมาณรังสีที่ตรวจวัดได้ตลอดแนวระนาบของวัตถุนั้น จะถูกบันทึกเป็นข้อมูลโปรเจกชัน (Projection Data) ที่ได้รับการฉายรังสีในแต่ละมุม ทั้งนี้โดยปกติแล้วจะมีการฉายรังสีที่มุมต่างๆรอบวัตถุ ซึ่งก็จะทำให้ได้รับข้อมูลโปรเจกชันที่มุมต่างๆกันของวัตถุชิ้นเดียวกัน ซึ่งจะพบว่ามีความสอดคล้องกันกับลักษณะของวัตถุจริง โดยลักษณะการฉายรังสีนั้นแสดงดังรูปที่ 3.1

เมื่อพิจารณาข้อมูลที่ได้รับจากการฉายแต่ละครั้ง จะสามารถแบ่งข้อมูลออกเป็นเส้นทางการเดินทางของรังสีที่อยู่ในแนวนานกันได้ โดยหากพิจารณาในแต่ละเส้นทางการเดินทางของรังสีนั้นจะพบว่าคลื่นที่ถูกส่งออกจากแหล่งกำเนิด (S) จะเดินทางผ่านวัตถุ โดยในแต่ละส่วนย่อยของวัตถุ (dx) จะเกิดการลดทอนคลื่นขึ้น ซึ่งคลื่นที่สามารถเดินทางผ่านวัตถุออกมาได้นั้น จะถูก

ตรวจวัดโดยตัวตรวจจับ (R) สำหรับคลื่นที่ถูกดัดกลืนในแต่ละส่วนย่อย dx จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการออกมาได้เป็นดังสมการที่ 3.1[2]



รูปที่ 3.1 การฉายรังสีไปสู่วัตถุเพื่อสร้างภาพ



รูปที่ 3.2 ลักษณะของระบบที่ใช้ในการเก็บข้อมูลเพื่อสร้างภาพตัดขวาง

$$\frac{dI}{I} = -2\alpha(x, y)dx \quad (3.1)$$

โดย $\alpha(x, y)$ นั้นแทนค่าของสัมประสิทธิ์การดูดกลืนคลื่นที่ตำแหน่ง x, y ใดๆ ซึ่งเป็นค่าที่ส่งผลโดยตรงกับขนาดของคลื่นที่จะเดินทางผ่านในแต่ละส่วนย่อยออกไป โดยหากพิจารณาถึงผลรวมในการเดินทางของคลื่นผ่านวัตถุตลอดแต่ละแนวการเคลื่อนที่ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมอินทิกรัล (Integration) ได้ดังสมการที่ 3.2 และ สมการที่ 3.3

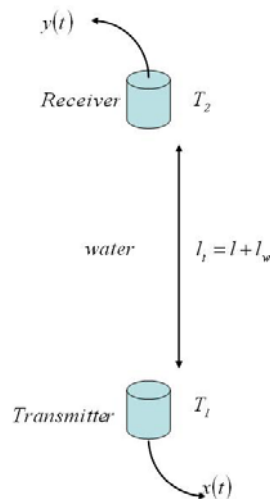
$$\ln \left[\frac{I(y)}{I_0} \right] = -2 \int \alpha(x, y) dx \quad (3.2)$$

หรืออาจจัดให้อยู่ในรูปของ $p(y) = \int \alpha(x, y) dx \quad (3.3)$

เมื่อ

$$-\frac{1}{2} \ln \left[\frac{I(y)}{I_0} \right] = p(y) \quad (3.4)$$

จากแนวคิดนี้ หากประยุกต์ใช้กับแหล่งกำเนิดที่ไม่เกิดการเลี้ยวเบน (Non-Diffraction Source) ดังเช่นรังสีเอ็กซ์ หรือกัมมันตภาพรังสีต่างๆ จะสามารถใช้งานได้ถูกต้อง แต่ในกรณีของคลื่นอัลตราโซนิก ซึ่งเป็นแหล่งกำเนิดที่มีผลกระทบจากการเลี้ยวเบนของคลื่นนั้น การใช้หลักการนี้จะเป็นเสมือนการประมาณการเดินทางของคลื่นว่าเป็นเส้นตรงนั่นเอง แต่หากในกรณีที่วัตถุที่เป็นตัวกลางมีค่าดัชนีหักเห (Refractive Index) ต่ำ เช่น เนื้อเยื่ออ่อน (Soft Tissue) ฯลฯ ก็พบว่าผลกระทบจากการเลี้ยวเบนนั้นมีค่าน้อย ซึ่งทำให้อาจจะทิ้งผลดังกล่าวไปได้ นอกเหนือจากนี้ ในกรณีของรังสีเอ็กซ์นั้น ขณะที่คลื่นเดินทางผ่านวัตถุจะมีความเร็วคงที่เสมอ โดยมีความเร็วในการเคลื่อนที่เท่ากับความเร็วแสง (ประมาณ 3×10^8 m/s) ดังนั้นการพิจารณาผลกระทบของวัตถุต่อคลื่นที่ส่งผ่าน จึงมีเพียงผลทางด้านขนาดของคลื่นที่ถูกลดทอนไปโดยวัตถุเท่านั้น แต่ในกรณีของคลื่นอัลตราโซนิกซึ่งมีความเร็วในการเดินทางผ่านตัวกลางแต่ละประเภทแตกต่างกัน โดยขึ้นกับความหนาแน่นของวัตถุ ที่คลื่นเดินทางผ่าน ทำให้ข้อมูลโปรเจกชันที่จะได้รับจากคลื่นอัลตราโซนิกนั้น แบ่งเป็น 2 ส่วนหลัก ได้แก่ ผลทางขนาด และผลทางด้านเวลา โดยจากรูปที่ 3.3 นั้น เป็นภาพแทนการส่งคลื่นจากหัวส่งไปยังหัวรับ โดยผ่านตัวกลางที่เป็นน้ำเพียงอย่างเดียว ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ 3.5 [4]



รูปที่ 3.3 การคลื่นอัลตราโซนิกจากหัวส่งไปยังหัวรับโดยมีน้ำเป็นตัวกลาง

$$Y_w(f) = X(f)H_1(f)H_2(f)\exp[-[\alpha_w(f) + j\beta_w(f)](\ell + \ell_w)] \quad (3.5)$$

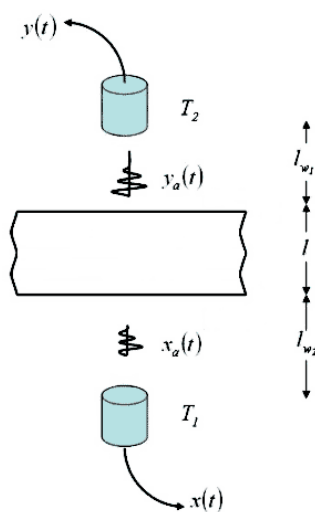
โดย

$Y_w(f)$ คือ การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณที่เดินทางผ่านน้ำที่ได้รับ $y_w(t)$

$X(f)$ คือ การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณไฟฟ้าที่จ่ายให้หัวส่ง $x(t)$

- $H_1(f)$ คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนของหัวส่ง
 $H_2(f)$ คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนของหัวรับ
 α_w คือ สัมประสิทธิ์การลดทอนคลื่นในน้ำ
 β_w คือ สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงทางเฟสของคลื่นในน้ำ

สำหรับรูปที่ 3.4 นั้น แสดงถึงกรณีที่คลื่นเดินทางผ่านวัตถุ โดยเป็นการเดินทางผ่านตัวกลางที่มีค่าความหนาแน่นภายในเพียงค่าเดียว ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการที่ 3.6



รูปที่ 3.4 การส่งคลื่นอัลตราโซนิกผ่านน้ำและวัตถุที่มีความหนาแน่นค่าเดียว

$$Y(f) = X(f)H_1(f)H_2(f)A_r \cdot \exp[-[\alpha(f) + j\beta(f)l]\exp[-[\alpha_w(f) + j\beta_w(f)]\ell_w] \quad (3.6)$$

โดย

- $Y(f)$ คือ การแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณที่เดินทางผ่านตัวกลางทั้งหมด $y(t)$
 A_r คือ อัตราการส่งผ่านรอยต่อ ($A_r = \tau_1 \cdot \tau_2$)
 $\alpha(f)$ คือ สัมประสิทธิ์การลดทอนคลื่นในเนื้อวัตถุ
 $\beta(f)$ คือ สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงทางเฟสของวัตถุ
 l คือ ความหนาของวัตถุที่คลื่นเดินทางผ่าน
 ℓ_w คือ ระยะทางทั้งหมดของน้ำที่คลื่นเดินทางผ่าน ($\ell_w = \ell_{w1} + \ell_{w2}$)

เมื่อพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของสมการ 3.5 และ สมการ 3.6 จะทำให้สามารถจัดรูปของสมการ 3.6 ใหม่ได้เป็น

$$Y(f) = Y_w(f) A_r \exp[-[(\alpha(f) - \alpha_w(f))\ell + j(\beta(f) - \beta_w(f))\ell]] \quad (3.7)$$

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าความเร็วเสียงและค่าสัมประสิทธิ์การลดทอนของวัตถุต่างๆ

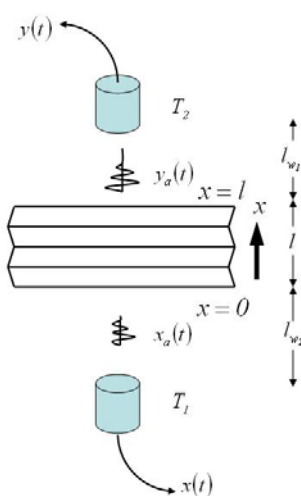
ตัวกลาง	ความเร็ว (เมตร/วินาที)	สัมประสิทธิ์การลดทอน
อากาศ	343	1.38
น้ำ	1484	0.00025
โลหะ*	1550	0.02
ไม้อาคารเคียม*	1550	0.35
ไขมัน*	1450	0.06
ตับ*	1570	0.11
ไต*	1560	0.09
กระดูก	3360	1.3

*เนื้อเยื่ออ่อน

ซึ่งหากพิจารณาถึงค่าสัมประสิทธิ์การลดทอนคลื่นในน้ำ ($\alpha_w(f)$) จากตารางที่ 3.1 ซึ่งมีค่าต่ำมากเมื่อเทียบกับสัมประสิทธิ์การลดทอนคลื่นในเนื้อวัตถุ จึงทำให้สามารถละทิ้งผลดังกล่าวออกไป ดังสมการที่ 3.8

$$Y(f) = Y_w(f) A_r \exp[-[(\alpha(f) + j(\beta(f) - \beta_w(f))\ell]] \quad (3.8)$$

จากที่กล่าวมานั้นเป็นกรณีที่วัตถุตัวกลางเป็นสารเนื้อเดียว แต่ในความเป็นจริงนั้นวัตถุอาจมีความหนาแน่นในแต่ละชั้นไม่เท่ากัน ดังแสดงในรูปที่ 3.5 ซึ่งจะพบว่าวัตถุมีความหนารวมกัน l โดยแบ่งออกเป็นชั้นย่อยๆขนาด dx ดังนั้นจึงสามารถจัดรูปสมการที่ 3.8 ให้อยู่ในรูปอินทิเกรชันได้ดังสมการที่ 3.9



รูปที่ 3.5 การส่งคลื่นอัลตราโซนิกผ่านน้ำและวัตถุที่มีความหนาแน่นหลายค่า

$$Y(f) = X(f)H_1(f)H_2(f)A_\tau \exp\left[-\int_0^\ell [\alpha(x, f) + j\beta(x, f)]dx\right] \cdot \exp[-j\beta_w(f)\ell_w] \quad (3.9)$$

โดย

$\alpha(x, f)$ คือ สัมประสิทธิ์การลดทอนคลื่นในเนื้อวัตถุที่ชั้น x ใดๆ

$\beta(x, f)$ คือ สัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงทางเฟสของวัตถุที่ชั้น x ใดๆ

จากสมการที่ 3.9 นั้น หากทำการแบ่งพจน์ของผลกระทบทางขนาดซึ่งขึ้นกับค่าสัมประสิทธิ์การลดทอน และพจน์ของผลกระทบทางด้านการเลื่อนของเฟสซึ่งขึ้นกับสัมประสิทธิ์การเปลี่ยนแปลงทางเฟส ซึ่งเราสามารถใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ 3.10 และ 3.11 เพื่อจัดรูปสมการเป็นดังสมการที่ 3.12

$$\beta(x, f) = 2\pi f / V(x) \quad (3.10)$$

$$\beta_w(f) = 2\pi f / V_w \quad (3.11)$$

$$Y(f) = A_\tau Y_w(f) \exp\left[-\int_0^\ell \alpha(x, f)dx\right] \cdot \exp\left[-j2\pi f \int_0^\ell (1/V(x) - 1/V_w)dx\right] \quad (3.12)$$

โดย

$V(x)$ คือ ค่าความเร็วในการเดินทางของคลื่นที่ตำแหน่ง x ใดๆ

V_w คือ ค่าความเร็วในการเดินทางของคลื่นในน้ำ

จากสมการที่ 3.12 นั้นจะพบว่าการแบ่งออกเป็น 2 พจน์อย่างชัดเจนนั้นคือพจน์ที่มีผลต่อขนาดของสัญญาณ ซึ่งค่าที่หามาได้จากพจน์นี้นั้นสามารถใช้เป็นข้อมูลในการสร้างภาพตัดขวางได้ โดยเรียกว่าการสร้างภาพตัดขวางจากการลดทอน (Attenuation Tomography) สำหรับอีกส่วนหนึ่งนั้นได้แก่พจน์ที่มีผลต่อเฟสของสัญญาณ ซึ่งจากคุณสมบัติของการแปลงฟูเรียร์ การเลื่อนเฟส (Phase Shift) ในโดเมนความถี่นั้นมีค่าเท่ากับการหน่วงเวลา (Time Delay) ในโดเมนเวลา จึงได้ว่า

$$T_d = \int_0^\ell \left(\frac{1}{V(x)} - \frac{1}{V_w} \right) dx \quad (3.13)$$

สำหรับสมการที่ 3.13 นั้น หากใช้ความสัมพันธ์ทางด้านดัชนีหักเห (Refractive Index) ของคลื่นที่เดินทางผ่านวัตถุเทียบกับคลื่นที่เดินทางผ่านน้ำดังสมการที่ 3.14 จะทำให้สามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังสมการที่ 3.15

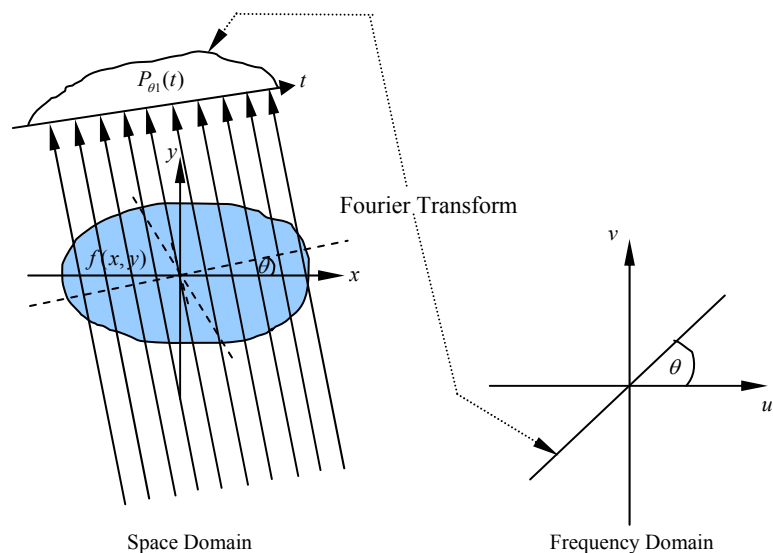
$$n(x) = \frac{V_w}{V(x)} \quad (3.14)$$

$$T_d = \frac{1}{V_w} \int_0^{\ell} (1 - n(x)) dx \quad (3.15)$$

สำหรับสมการที่ 3.13 และ 3.15 นั้นเป็นข้อมูลทางด้านเวลาที่คลื่นใช้ในการเดินทางผ่านวัตถุ ซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลในการสร้างภาพตัดขวางได้เช่นเดียวกัน โดยเรียกว่าการสร้างภาพตัดขวางจากความเร็วของคลื่น (Sound Velocity Tomography) หรือหากจัดรูปสมการที่ 3.15 ให้ข้อมูลหลักที่นำไปใช้ในการสร้างภาพตัดขวางเป็นค่าของดัชนีหักเห ก็จะเรียกว่าการสร้างภาพตัดขวางจากค่าดัชนีหักเห (Refractive Index Tomography) หลังจากที่ได้รับข้อมูลในลักษณะต่างๆดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ข้อมูลเหล่านี้จะถูกนำไปใช้ในกระบวนการสร้างภาพตัดขวางด้วยเทคนิคต่างๆ โดยเป็นเทคนิคเดียวกันกับที่ใช้สำหรับแหล่งกำเนิดชนิดที่ไม่มีผลของการเลี้ยวเบน ซึ่งมีเทคนิคต่างๆมากมาย โดยในที่นี้จะนำเสนอวิธีการที่มีความสำคัญบางวิธีการได้แก่

3.2.1 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์

วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์เป็นวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้นิยามจากทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลซ์ (The Fourier Slice Theorem) [4] ซึ่งระบุไว้ว่า เมื่อทำการหาโปรเจกชันของวัตถุ $f(x, y)$ ที่มุมต่างๆ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ แล้วทำการแปลงฟูเรียร์โปรเจกชันเหล่านั้น จะมีค่าเท่ากับการแปลงฟูเรียร์สองมิติของภาพตามแนวเส้นที่ทำมุม $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ เช่นกัน ดังรูปที่ 3.6 ซึ่งเราจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลซ์ได้โดยเริ่มต้นจากการนิยามของการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติของภาพ $f(x, y)$ จะได้



รูปที่ 3.6 หลักการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้ทฤษฎีการแปลงฟูเรียร์

$$F(u, v) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (3.16)$$

และให้ $S_{\theta}(w)$ คือ การแปลงฟูเรียร์ของข้อมูลโปรเจกชันที่มุม $\theta(P_{\theta})$

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\alpha}^{\alpha} P_{\theta}(t) e^{-j2\pi wt} dt \quad (3.17)$$

พิจารณาการแปลงฟูเรียร์ของวัตถุตลอดเส้นในโคเมนความถี่ โดยให้ $v = 0$ จะได้

$$F(u, 0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy \quad (3.18)$$

แต่เนื่องจากตัวประกอบเฟส (Phase factor) จะไม่ขึ้นอยู่กับ y เราสามารถแบ่งการทำอินทิกรัลออกเป็น 2 ส่วนคือ

$$F(u, 0) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x, y) dy \right] e^{-j2\pi ux} dx \quad (3.19)$$

จะเห็นว่าเทอมที่อยู่ในวงเล็บเหมือนกับสมการของโปรเจกชันตลอดแนวนอนที่ค่า x คงที่ ซึ่งก็คือการโปรเจกชันภาพ $f(x, y)$ ที่มุม $\theta = 0$

$$P_{\theta=0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (3.20)$$

นำสมการที่ 3.20 แทนลงในสมการที่ 3.19 จะได้

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (3.21)$$

จากสมการที่ 3.21 ทางขวามือ แสดงถึงการแปลงฟูเรียร์ 1 มิติของโปรเจกชัน $P_{\theta=0}$ ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างโปรเจกชันในแนวตั้งกับการแปลง 2 มิติ ของฟังก์ชันวัตถุ คือ

$$F(u, 0) = S_{\theta=0}(u) \quad (3.22)$$

จะเห็นว่าเป็นรูปแบบอย่างง่ายของทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ ผลที่ได้นี้จะไม่ขึ้นอยู่กับการหมุนระหว่างวัตถุกับระบบพิกัด เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลด์ที่มุมอื่นได้โดยให้ $f(t, s)$ คือฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในระบบพิกัดหมุน (Rotated Coordinate System) ดังในรูปที่ 3.6 พิกัด (t, s) สัมพันธ์กับพิกัด (x, y) โดยความสัมพันธ์

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ซึ่งในระบบพิกัด (t, s) เราจะสามารถเขียนโปรเจกชันตลอดแนวเส้นของค่าคงที่ t ได้เป็น

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds \quad (3.24)$$

นำสมการที่ 3.24 แทนลงในสมการที่ 3.17 จะได้

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t, s) ds] e^{-j2\pi w t} dt \quad (3.25)$$

เมื่อนำผลที่ได้มาแปลงให้อยู่ในระบบพิกัด (x, y) โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ 3.23 จะได้

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi w (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (3.26)$$

ทางด้านขวาของสมการ คือการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติ ที่ความถี่ $u = w \cos \theta, v = w \sin \theta$

$$S_\theta(w) = F(w, \theta) = F(w \cos \theta, w \sin \theta) \quad (3.27)$$

จากทั้งหมดที่ผ่านมาแสดงให้เห็นถึงโปรเจกชันของฟังก์ชันวัตถุที่มุม $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ และการแปลงฟูเรียร์ของแต่ละโปรเจกชันนั้น เราสามารถหาค่าของ $F(u, v)$ ได้ถ้าจำนวนโปรเจกชันมีค่าเป็นอนันต์ ดังนั้นควรจะรู้ค่า $F(u, v)$ ในทุกๆจุดในระนาบ uv จากนั้นจึงทำการแปลงกลับฟูเรียร์เพื่อที่จะหาค่าฟังก์ชันวัตถุ $f(x, y)$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3.28)$$

ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ มีขอบเขต คือ $-\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}$ และ $-\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2}$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ 3.28 ใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_m \sum_n F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{j2\pi((m/A)x + (n/A)y)}, \quad -\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}, -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2} \quad (3.29)$$

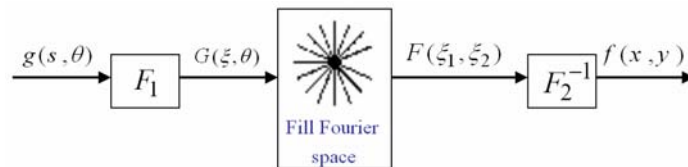
ในทางปฏิบัติ เราจะรู้ว่าส่วนประกอบของฟูเรียร์มีจำนวนจำกัด สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{A^2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F\left(\frac{m}{A}, \frac{n}{A}\right) e^{j2\pi((m/A)x + (n/A)y)}, \quad -\frac{A}{2} < x < \frac{A}{2}, -\frac{A}{2} < y < \frac{A}{2} \quad (3.30)$$

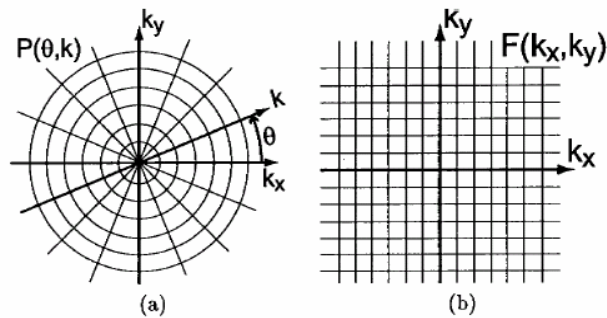
โดยสมมติว่า N เป็นจำนวนเต็มคู่ เราจะเห็นว่ารายละเอียด (Resolution) ของภาพที่สร้างได้จะถูกกำหนดโดย N สมการ 3.30 สามารถถูกคำนวณได้แบบเร็วโดยใช้อัลกอริทึมการแปลงฟูเรียร์เร็ว (FFT) ถ้าเรารู้สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์จำนวน N^2 ของ $F(m/A, n/A)$

จากทฤษฎีข้างต้นนี้เราสามารถแบ่งขั้นตอนวิธีการสร้างภาพกลับด้วยวิธีการแปลงฟูเรียร์ดังรูปที่ 3.7 ออกเป็น 3 ขั้นตอน คือ

- นำข้อมูลโปรเจกชันไปแปลงฟูเรียร์ 1 มิติ จะได้ $F_1\{p_\theta(r)\} = P_\theta(k)$
- วาง $P_\theta(k)$ ในราสเตอร์เชิงขั้ว (polar raster) จะได้ $P(k, \theta)$ จากนั้นจึงประมาณค่าให้อยู่ในราสเตอร์เชิงตั้งฉาก (rectangular raster) ดังรูปที่ 3.8
- ทำการแปลงกลับฟูเรียร์ 2 มิติของ $F(k_x, k_y)$ จะได้ $f(x, y)$

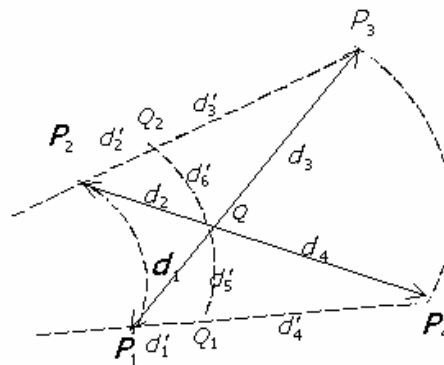


รูปที่ 3.7 Block diagram แสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้การแปลงฟูเรียร์



รูปที่ 3.8 ราสเตอร์รูปแบบต่างๆ (a) ราสเตอร์เชิงขั้ว (b) ราสเตอร์เชิงตั้งฉาก

การประมาณค่าในช่วงจากราสเตอร์เชิงขั้วไปยังราสเตอร์เชิงตั้งฉาก สามารถทำได้หลายวิธี จากรูปที่ 3.9 จะทำการหาจุด Q จาก P_1, P_2, P_3, P_4 ด้วยวิธีดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.9 การประมาณค่าจุด Q

1) การหาจุดที่ใกล้ที่สุด

$$F(Q) = F(P_k) \quad k : \min_i \{d_i\} = d_k \quad (3.31)$$

2) การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น

$$F(Q) = \frac{\sum_{k=1}^4 F(P_k) / d_k}{\sum_{k=1}^4 \frac{1}{d_k}} \quad (3.32)$$

3) การประมาณค่าในช่วงแบบไม่เชิงเส้น

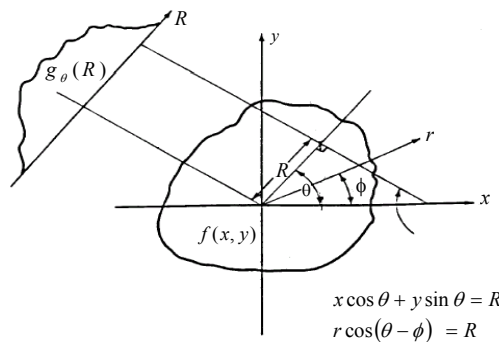
$$\begin{aligned} F(Q) &= \frac{F(Q_1)/d'_5 + F(Q_2)/d'_6}{(1/d'_5) + (1/d'_6)} \\ &= \frac{F(Q_1)/d'_6 + F(Q_2)/d'_5}{d'_5 + d'_6} \end{aligned} \quad (3.33)$$

โดยที่

$$F(Q_1) = \frac{F(P_1)/d'_4 + F(P_4)/d'_1}{d'_1 + d'_4}, \quad F(Q_2) = \frac{F(P_2)/d'_3 + F(P_3)/d'_2}{d'_2 + d'_3} \quad (3.34)$$

3.2.2 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้แบคโปรเจกชัน

การสร้างภาพตัดขวางโดยใช้แบคโปรเจกชัน จะเป็นวิธีการที่ง่ายที่สุด และมีความยุ่งยากทางคณิตศาสตร์น้อย โดยจะทำการนำค่าโปรเจกชันที่มุมต่างๆ มาบวกรวมกันบนระนาบ 2 มิติ



รูปที่ 3.10 แสดงโปรเจกชันของฟังก์ชัน 2 มิติ

จากรูปที่ 3.10 และนิยามของโปรเจกชันที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 จะได้นิยามของแบคโปรเจกชันของโปรเจกชันที่มุม θ คือ

$$b_\theta(x, y) = \int_0^\pi g_\theta(R) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dR \quad (3.35)$$

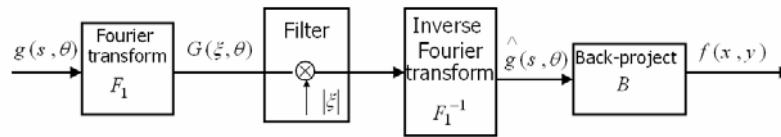
โดยที่ $b_\theta(x, y)$ คือ ตัวกระทำแบคโปรเจกชัน (Backprojection operator) ของโปรเจกชัน $g_\theta(R)$ ที่มุม θ

ดังนั้น การสร้างภาพกลับ (Image Reconstruction) จากวิธีแบคโปรเจกชัน คือ ผลรวมของแบคโปรเจกชันในทุกๆมุม จะได้

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi b_\theta(x, y) d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-\alpha}^\alpha g_\theta(R) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dR d\theta \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\alpha}^\alpha g_\theta(R) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - R) dR \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.2.3 วิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน

วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันนี้เป็นวิธีที่เป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการสร้างภาพตัดขวาง ทั้งนี้เนื่องจากเป็นวิธีที่ได้รับการปรับปรุงจากวิธีแบคโปรเจกชัน ซึ่งวิธีนี้จะใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลซ์ช่วยในการพิสูจน์



รูปที่ 3.11 บล็อกไดอะแกรมแสดงวิธีการสร้างภาพตัดขวางโดยใช้วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน

จากทฤษฎีบทของฟูเรียร์สไลซ์ ภาพ $f(x, y)$ จะสามารถหามาได้จากการแปลงฟูเรียร์ย้อนกลับ [4]

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3.37)$$

ถ้าให้ (w, θ) เป็นระบบพิกัดแบบโพลาร์ (Polar Coordinate) ในระนาบ uv เราสามารถเขียนสมการ 3.37 ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(w, \theta) e^{j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \\ f(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^\infty F(w, \theta) e^{j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} w dw d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^\infty F(w, \theta + \pi) e^{j2\pi w(x \cos(\theta+\pi) + y \sin(\theta+\pi))} w dw d\theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

จากนั้นใช้คุณสมบัติ

$$F(w, \theta + \pi) = F(-w, \theta) \quad (3.39)$$

สมการ 3.38 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty F(w, \theta) |w| e^{j2\pi w t} dw \right] d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

โดยที่

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.41)$$

และเราสามารถเขียนสมการ 3.40 ใหม่ได้เป็น

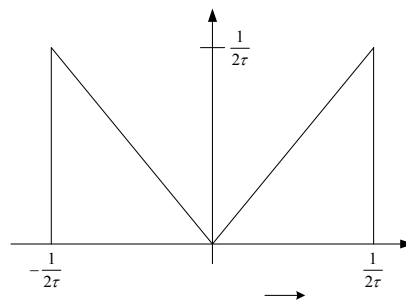
$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (3.42)$$

โดยที่

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi w t} dw \quad (3.43)$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ในการสร้างภาพตัดขวางเราสามารถทำได้โดยการนำข้อมูลแต่ละโปรเจกชัน $P_\theta(t)$ มาทำการฟิลเตอร์ ที่มีผลตอบสนองทางความถี่ (Frequency Response) เท่ากับ $|w|$ ดังสมการที่ 3.43 จากนั้นจึงนำค่าที่ได้มาทำการแบคโปรเจกชันดังสมการที่ 3.42 โดยที่ฟิลเตอร์ในสมการที่ 3.43 เรียกว่าการกรองแบบแรม-แล็ค (Ram-Lak Filter)

พารามิเตอร์ w เป็นตัวแปรความถี่ โดยหลักการแล้วการทำอินทิเกรตในสมการที่ 3.43 ต้องทำตลอดทุกย่านความถี่ ในทางปฏิบัติพลังงานที่อยู่ในส่วนประกอบ (Components) การแปลงฟูเรียร์เหนือความถี่ค่าหนึ่งจะมีค่าน้อย ดังนั้นการโปรเจกชันจึงถูกทำในแถบความถี่ที่จำกัด (Bandlimited) โดยให้ W แทนค่าความถี่ซึ่งถ้าเกินจากนี้พลังงานสำหรับการโปรเจกชันจะมีค่าน้อยมาก



รูปที่ 3.12 ภาพแสดงผลตอบสนองทางความถี่ของ Ram-Lak Filter

เราสมมติว่าข้อมูลโปรเจกชันถูกสุ่มด้วยช่วงของการสุ่มเท่ากับ τ ชม. เราสมมติว่าไม่มีปัญหาเรื่องการแทนค่า (Aliasing) ซึ่งกล่าวเป็นนัยว่าในโดเมนของการแปลง (Transform Domain) โปรเจกชันไม่มีพลังงานนอกย่านความถี่ $(-W, W)$ โดยที่

$$W = \frac{1}{2\tau} \quad \text{ไซเคิลต่อชม. (3.44)}$$

เราจะสามารถเขียนสมการการกรองแบบแรม-แล็คได้เป็น

$$H(w) = |w| b_w(w) \quad (3.45)$$

โดยที่ $b_w(w) = 0 \quad (3.46)$