

บทที่ 3 ความจุช่องสัญญาณในระบบโมโม่ที่ใช้การประมวลผลเชิงมุม

3.1 กล่าวนำ

ในบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีความจุช่องสัญญาณที่ใช้การประมวลผลเชิงมุม รวมถึงการนำบทเลอว์ เมทริกซ์มาประยุกต์ใช้กับการประมวลผลเชิงมุมในทางปฏิบัติเพื่อความสะดวกในการสร้าง รวมถึงประหยัดค่าใช้จ่าย และหัวข้อสุดท้ายกล่าวถึงการเปรียบเทียบระหว่างการประมวลผลเชิงมุมและการประมวลผลแถวลำดับ

3.2 ความจุช่องสัญญาณการประมวลผลเชิงมุม

จากการส่งและรับข้อมูลในรูปที่ 2-3 ให้เห็นว่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นมุมที่ส่งออกไปหรือมุมที่รับเข้ามาเกิดจากองค์ประกอบของมุมทั้งสิ้น โดยสัญญาณที่รับเข้ามาจากมุม $\Omega_{r,i}$ ที่ภาครับ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้เป็น $\mathbf{e}_r(\Omega_{r,i})$ จากสมการ (2-8) ดังนั้นจะได้เวกเตอร์มูลฐานที่ภาครับ

$$\xi_r := \left\{ \mathbf{e}_r(0), \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{L_r}\right), \dots, \mathbf{e}_r\left(\frac{M_r-1}{L_r}\right) \right\} \quad (3-1)$$

ในทำนองเดียวกันการประมวลผลเชิงมุมจะมีสัญญาณที่ส่งออกไปที่ภาคส่ง และมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเป็น $\mathbf{e}_t(\Omega_{t,i})$ หาได้จากสมการ (2-7) ดังนั้นจะได้เวกเตอร์มูลฐานที่ภาคส่ง

$$\xi_t := \left\{ \mathbf{e}_t(0), \mathbf{e}_t\left(\frac{1}{L_t}\right), \dots, \mathbf{e}_t\left(\frac{M_t-1}{L_t}\right) \right\} \quad (3-2)$$

โดยที่ $L_t = N_t \Delta_t$ และ $L_r = N_r \Delta_r$ คือ การนอร์แมลไลซ์ระยะห่างระหว่างสายอากาศที่ภาคส่งและภาครับ ส่วน Δ_t และ Δ_r คือ ระยะห่างระหว่างสายอากาศที่ภาคส่งและภาครับ กำหนดให้ \mathbf{U}_t และ \mathbf{U}_r เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี ซึ่งมีจำนวนคอลัมน์เป็นไปตามเวกเตอร์มูลฐานตามสมการ (3-1) และ (3-2) จะได้ว่า

$$\mathbf{U}_t = \frac{1}{\sqrt{M_t}} \exp\left(\frac{-j2\pi k l}{M_t}\right) \quad k, l = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3-3)$$

และ

$$\mathbf{U}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} \exp\left(\frac{-j2\pi kl}{M_r}\right) \quad k, l = 0, 1, \dots, M_r - 1 \quad (3-4)$$

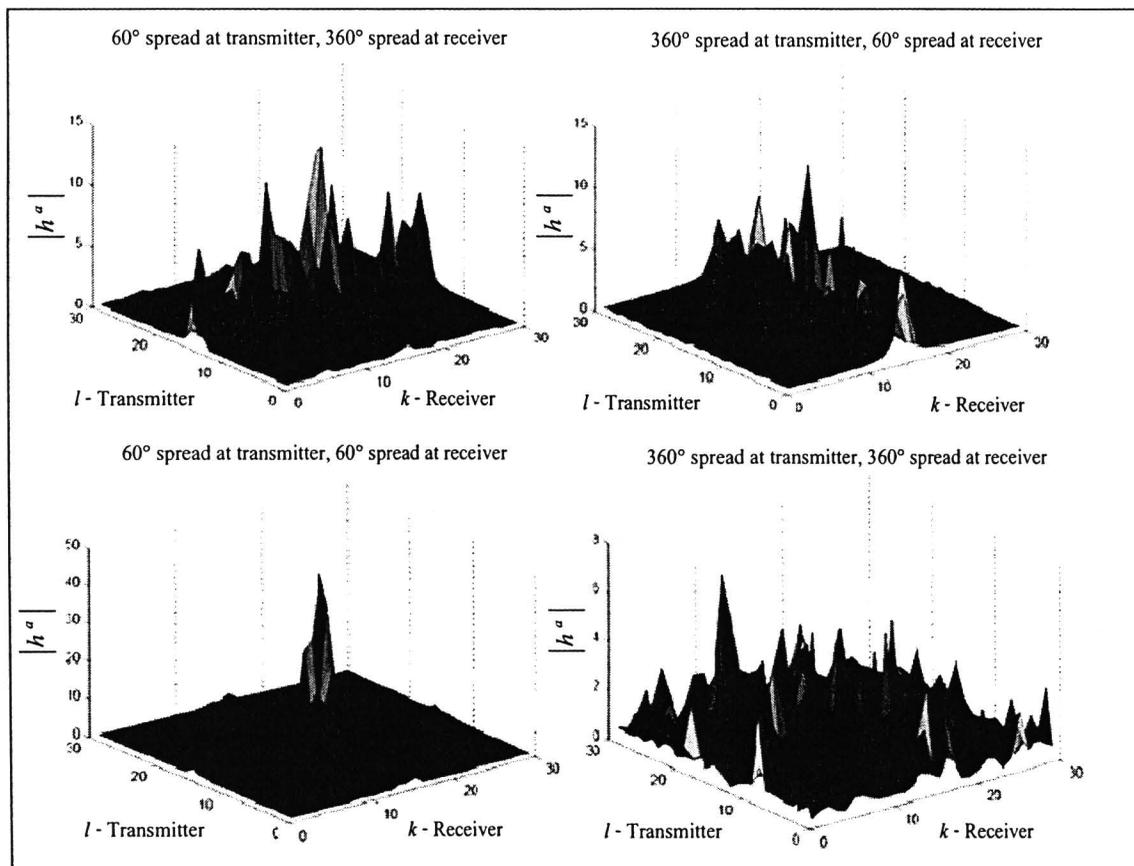
เมื่อแปลงช่องสัญญาณจากโดเมนแถวลำดับให้เป็นโดเมนเชิงมุมจะได้

$$\mathbf{H}^a = \mathbf{U}_r^H \mathbf{H} \mathbf{U}_t \quad (3-5)$$

ดังนั้นจากสมการความจุช่องสัญญาณที่เกิดจากการประมวลผลแถวลำดับ เมื่อใช้ช่องสัญญาณที่เกิดจากการประมวลผลเชิงมุมใน (3-5) จะได้ความจุช่องสัญญาณ

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{M_r} + \frac{P_t}{P_N M_t} \mathbf{H}^a \mathbf{H}^a H \right) \quad (3-6)$$

เมื่อ \mathbf{H}^a คือ เมทริกซ์ช่องสัญญาณที่ใช้การประมวลผลเชิงมุม ขนาด $M_r \times M_t$



รูปที่ 3-1 ตัวอย่างช่องสัญญาณจากการประมวลผลเชิงมุม เมื่อมุมที่ส่งออกไปและรับเข้ามาขนาดที่ต่างกัน

จากรูปที่ 3-1 แสดงการจำลองแบบจากโปรแกรมแมทแลปเพื่อพิสูจน์ช่องสัญญาณให้เป็นที่ไปตามการอ้างอิง Tse, D., and Viswanath, P. (2005) โดยใช้สมการ (2-5) พิจารณาการส่งและรับ 4 กรณียุติแก่

- มุมส่ง 60 องศา - มุมรับ 360 องศา

ทั้ง 4 กรณีนี้ใช้ในการหาช่องสัญญาณที่เกิดจากการประมวลผลแถวลำดับ แล้วนำ (2-5), (3-3) และ (3-4) แปลงเป็นช่องสัญญาณโคเมนเชิงมุมใน (3-5) จากนั้นนำสมการ (3-5) คำนวณขนาดที่เกิดแล้วนำไปพล็อตให้เห็นความแตกต่างของการส่งและรับในแต่ละกรณี

3.3 การประยุกต์ใช้บัทเลอร์ เมทริกซ์กับการประมวลผลเชิงมุม

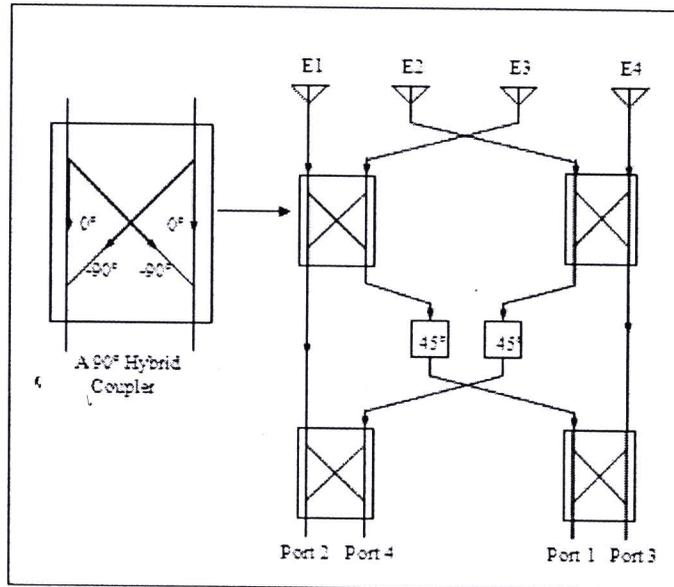
จากที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้นว่าการพัฒนาสายอากาศที่สามารถประมวลผลเชิงมุมนั้นแบ่งออกเป็นสองแนวคิดคือ

1. การพัฒนาสายอากาศที่ประมวลผลเชิงมุมขึ้นมาใหม่
แนวคิดนี้คือการสร้างรูปทรง หรือลักษณะ โครงสร้างของสายอากาศขึ้นมาใหม่เพื่อให้สามารถทำงานตรงตามวัตถุประสงค์ของการประมวลผลเชิงมุม
2. การพัฒนาสายอากาศที่ประมวลผลเชิงมุมโดยการแปลงสายอากาศแถวลำดับ
แนวคิดนี้คือการนำสายอากาศแถวลำดับที่อยู่ในระบบไม โมปกติมาทำให้เป็นสายอากาศที่ประมวลผลเชิงมุม

งานวิจัยนี้เลือกใช้แนวคิดที่สองเพราะสามารถนำไปประยุกต์เข้ากับระบบไม โมปกติที่ใช้งานอยู่ได้โดยตรงและยังสามารถเปรียบเทียบการทดสอบระหว่างแถวลำดับและเชิงมุมได้อย่างยุติธรรม เพราะจะมีอุปกรณ์เพิ่มเข้ามาในระบบเดิมที่สามารถแปลงสายอากาศแถวลำดับให้กลายเป็นสายอากาศที่ประมวลผลเชิงมุม ในงานวิจัยนี้เลือกใช้อุปกรณ์ที่ทำหน้าที่แปลงคือ บัทเลอร์ เมทริกซ์ เพราะสามารถให้คุณสมบัติของสัญญาณที่เข้าและออกเป็นที่ไปตามหลักการประมวลผลเชิงมุม



3.3.1 โครงข่ายก่อรูปลำคลื่นแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์

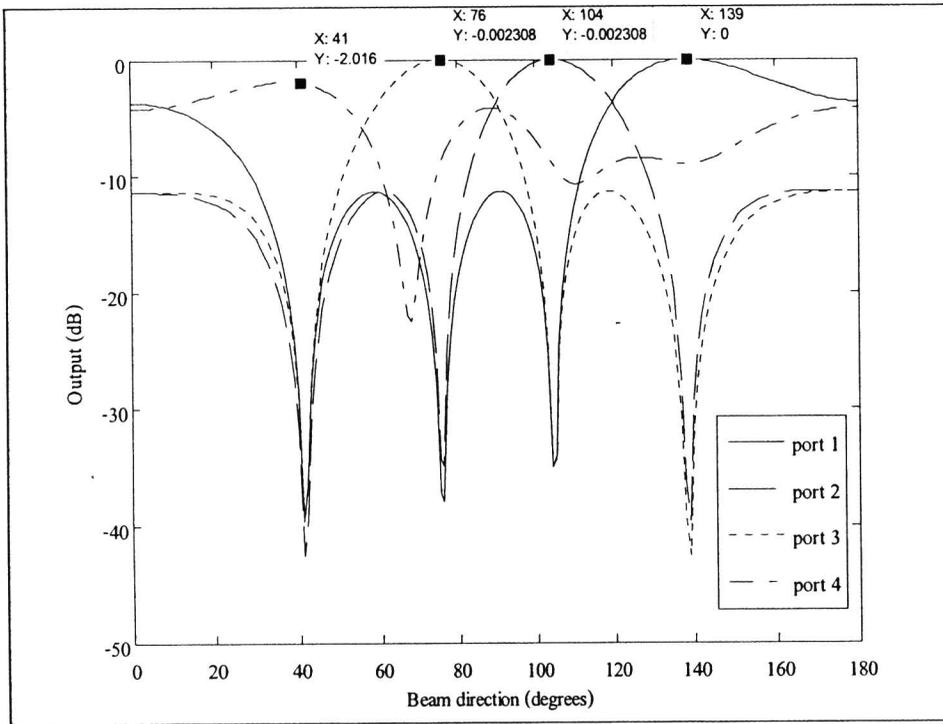


รูปที่ 3-2 วงจรก่อรูปลำคลื่นแบบแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์

จากรูปที่ 3-2 แสดงถึงเมทริกซ์ 4×4 อย่างง่ายในการก่อรูปลำคลื่น ประกอบไปด้วยตัวไขว้สัญญาณ 2 ตัว ตัวคัปเปอร์แบบไฮบริดจ์ 90 องศา 4 ตัว และสายอากาศโมโนโพลอีก 4 ต้น ตารางที่ 3-1 จะแสดงถึงเฟสของสายอากาศแต่ละต้น ทิศทางของลำคลื่นและเฟสที่มาจากบัทเลอร์ เมทริกซ์เช่น สายอากาศต้นที่ 1 จะมีค่าเฟส $-45^\circ, 0^\circ, -135^\circ, -90^\circ$ จากพอร์ตที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ จะมีค่าทิศทางของลำคลื่นเป็น $138.6^\circ, 104.5^\circ, 75.5^\circ, 41.4^\circ$ จากพอร์ตที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ และมีเฟสที่มาจากแต่ละต้นเป็น $-135^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 135^\circ$ จากพอร์ตที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับเช่นกัน

ตารางที่ 3-1 แสดงเฟสของสายอากาศ ทิศทางของลำคลื่น และเฟสที่มาจากบัทเลอร์ เมทริกซ์ในรูปแบบที่ 3-2 ตามทฤษฎี

θ_k	E1 ($l=1$)	E2 ($l=2$)	E3 ($l=3$)	E4 ($l=4$)	Beam Direction	Inter-Element Phasing
Port 1 ($k=1$)	-45°	-180°	45°	-90°	138.6°	-135°
Port 2 ($k=2$)	0°	-45°	-90°	-135°	104.5°	-45°
Port 3 ($k=3$)	-135°	-90°	-45°	0°	75.5°	45°
Port 4 ($k=4$)	-90°	-45°	-180°	-45°	41.4°	135°



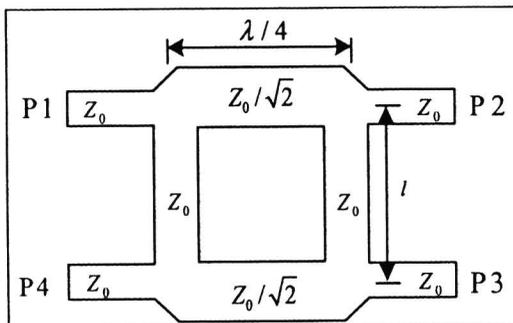
รูปที่ 3-3 แบบรูปการแผ่พลังงานในแต่ละทิศทางของโครงข่ายท่อรูปลำคลื่นแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์

จากรูปวงจรถูกอรูปลำคลื่นแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์แบ่งลักษณะการออกแบบของวงจรถูกอได้ดังนี้

- ตัวคัปเปอร์แบบไฮบริดจ์ 90 องศา (Hybrid coupler 90°) 4 ตัว
- ตัวไขว้สัญญาณ (crossover) 1 ตัว
- ตัวเลื่อนเฟส 45 องศา (phase shifters 45°) 2 ตัว

ซึ่งรายละเอียดของแต่ละส่วนมีดังต่อไปนี้

1. ตัวคัปเปอร์แบบไฮบริดจ์ 90 องศา (Hybrid coupler 90°)



รูปที่ 3-4 ตัวคัปเปอร์แบบไฮบริดจ์ 90 องศา (Hybrid coupler 90°)

จากการอ้างอิงรูปที่ 3-4 โดยการดำเนินการขั้นพื้นฐานของการแยกเส้นทางของการเชื่อมต่อ ถ้าทุกพอร์ตมีค่าอิมพีแดนซ์เท่ากันและเมื่อใส่พลังงานเข้าไปที่พอร์ต P1 พลังงานจะถูกแบ่งแยกอย่างเท่าเทียมระหว่าง พอร์ต P2 และ พอร์ต P3 ซึ่งพลังงานที่ได้จะมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของพลังงานที่เข้ามาในพอร์ต P1 พลังงานที่ได้จากพอร์ต P2 และ พอร์ต P3 จะล่าหลังกันอยู่ 90 องศา และจะไม่มีพลังงานออกไปที่ พอร์ตที่ P4 (พอร์ต โคคเคียว) ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการ $[S]$ เมตริกซ์ ได้ดังสมการ (3-7)

$$[S] = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

จากวงจรและสมการค่า $[S]$ เมตริกซ์ จะได้ค่าดังนี้

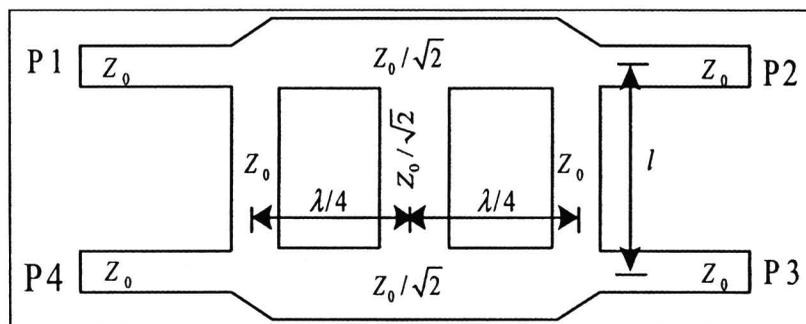
$$P_1 = 0 \quad (\text{พอร์ตเข้าของพลังงาน})$$

$P_2 = -\frac{j}{\sqrt{2}}$ (พลังงานลดลงครึ่งหนึ่งจากพลังงานที่เข้ามาในพอร์ต P1 และมีเฟสล่าหลังอยู่ -90 องศาจากพอร์ต P1 ถึงพอร์ต P2)

$P_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (พลังงานลดลงครึ่งหนึ่งจากพลังงานที่เข้ามาในพอร์ต P1 และมีเฟสล่าหลังอยู่ -180 องศาจากพอร์ต P1 ถึงพอร์ต P3)

$$P_4 = 0 \quad (\text{ไม่มีพลังงานออกจาก พอร์ต P4})$$

2. ตัวไขว้สัญญาณ (crossover)



รูปที่ 3-5 ตัวไขว้สัญญาณ (crossover)

จากรูปที่ 3-5 ตัวไขว้สัญญาณ (crossover) เป็นวงจรเชื่อมต่อโดยที่มีสัญญาณมารวมกันโดยไม่มีการสูญเสียพลังงานและความล่าช้าระหว่างกัน ลักษณะการไหลของพลังงานจะเป็นแบบไขว้ เมื่อพลังงานเข้าพอร์ต P1 พลังงานนั้นก็จะออกพอร์ต P3 และ เมื่อพลังงานเข้าพอร์ต P4 พลังงานนั้นก็จะออกพอร์ต P2 ดังนั้น ค่า $[S]$ เมตริกซ์ ได้ดังสมการ (3-8)

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

จากวงจรและสมการค่า $[S]$ เมตริกซ์ จะได้ค่าดังนี้

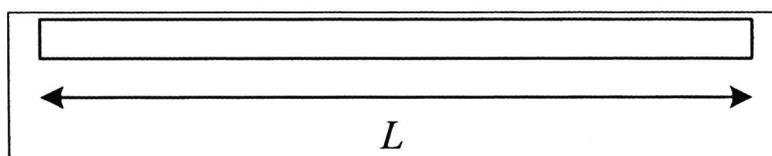
$$P_1 = 0 \quad (\text{พอร์ตเข้าของพลังงาน})$$

$$P_2 = -j \quad (\text{พลังงานที่เข้ามาในพอร์ต P4 และมีเฟสล่าช้าอยู่ 0 องศาจาก พอร์ต P4 ถึงพอร์ต P2})$$

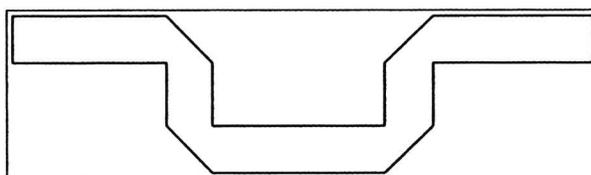
$$P_3 = -j \quad (\text{พลังงานที่เข้ามาในพอร์ต P1 และมีเฟสล่าช้าอยู่ 0 องศาจาก พอร์ต P1 ถึงพอร์ต P3})$$

$$P_4 = 0 \quad (\text{พอร์ตเข้าของพลังงาน})$$

3. ตัวเลื่อนเฟส 45 องศา (Phase shifters 45°)



(ก.)



(ข.)

รูปที่ 3-6 ตัวเลื่อนเฟส 45 องศา (phase shifters 45°)

จากวงจรระยะห่าง 45 องศา สร้างมาจากการออกแบบสายส่ง โดยที่มี W คือความกว้างตัวเลื่อนเฟสในสายส่งแบบไมโครสตริป และมีความยาวเท่ากับ L ซึ่งได้จากการคำนวณจากสมการดังต่อไปนี้

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda} L \quad (3-9)$$

$$\frac{W}{d} = \frac{8e^A}{e^{2A}-2} \quad (3-10)$$

$$\text{โดยที่} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \quad (3-11)$$

เมื่อ L คือความยาว

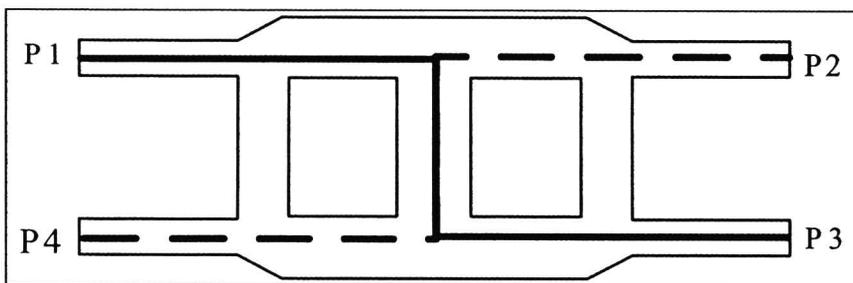
θ คือมุม

λ คือค่าความยาวคลื่นในตัวกลางของสายส่ง

λ_0 คือค่าความยาวคลื่นในตัวกลางของอากาศ

W คือความกว้างตัวเลื่อนเฟสในสายส่งแบบไมโครสตริป

จากรูป (ก.) เป็นตัวเลื่อนเฟสที่เป็นเส้นตรงซึ่งมีการเลื่อนเฟส 45 องศาโดยการสร้างรวมในวงจรนั้น จะเป็นการสร้างโดยการนำค่าความยาวระหว่างพอร์ต P1 กับ พอร์ต P3 ในการสร้างเฟสด้านล่างและนำค่าความยาวระหว่างพอร์ต P4 กับ พอร์ต P2 ในการสร้างเฟสด้านบนเพื่อให้มีการเพิ่มเฟสโดยเส้นทางของตัวไขว้สัญญาณดังรูปที่ 3-7



รูปที่ 3-7 ความยาวของเส้นทางการเดินทางของพลังงานภายในตัวไขว้สัญญาณ

(ก) เส้นทึบเป็นความยาวระหว่างพอร์ต P1 กับ พอร์ต P3

(ข) เส้นประเป็นความยาวระหว่างพอร์ต P4 กับ พอร์ต P2

ดังนั้นค่าของตัวเลื่อนเฟส 45 องศาภายในโครงข่ายระหว่าง พอร์ต P1 กับ พอร์ต P3 มีความยาวเท่ากับความยาวระหว่างพอร์ต P4 กับ พอร์ต P2 รวมกับค่าของตัวเลื่อนเฟส 45 องศา มีค่าเท่ากับกับค่าของตัวเลื่อนเฟส 45 องศาภายในโครงข่ายระหว่าง พอร์ต P1 กับ พอร์ต P3

วิธีเลื่อนเฟสนี้เป็นการทำให้ก่อรูปลำคลื่นได้ตามทิศทางที่ต้องการภายในโครงข่ายก่อรูปลำคลื่นแบบแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์ ซึ่งจากรูปที่ 3-2 นั้นมีการนำตัวเลื่อนเฟส 45 องศา อยู่ระหว่างพอร์ต 1 กับ พอร์ต 3 และอยู่ระหว่างพอร์ต 4 กับ พอร์ต 2 เพื่อทำให้เกิดการก่อรูปลำคลื่นเลื่อนเฟสไป 45 องศา และเมื่อรวมทั้งวงจรแล้วจะทำให้ได้ค่าดังตารางที่ 3-1 แล้วนำไปหาแบบรูปการแผ่พลังงานในแต่ละทิศทางของโครงข่ายก่อรูปลำคลื่นแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์ แสดงดังรูปที่ 3-3

3.3.2 การหาช่องสัญญาณและความจุช่องสัญญาณจากแบบบัทเลอร์ เมทริกซ์

จากรูปที่ 3-2 แสดง โครงสร้างของบัทเลอร์ เมทริกซ์ ซึ่งนำมาประยุกต์ใช้กับการประมวลผลเชิงมุมสำหรับระบบไมโมที่ใช้สายอากาศส่งและรับภาคละ 4 ต้น โดยมีการชี้ทิศทางแต่ละทิศทางหาได้จากตารางที่ 3-1 มีสมการการหาทิศทางสำหรับสายอากาศแต่ละต้น โดยการประยุกต์จากสมการ (3-3) และ (3-4) ได้

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\sqrt{M_t}} e^{-j\theta_{kl}} \quad k, l = 0, 1, \dots, M_t - 1 \quad (3-12)$$

และ

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}} e^{-j\theta_{kl}} \quad k, l = 0, 1, \dots, M_r - 1 \quad (3-13)$$

จะได้ช่องสัญญาณที่เกิดจากการประยุกต์ใช้บัทเลอร์ เมทริกซ์กับการประมวลผลเชิงมุม

$$\mathbf{H}^b = \mathbf{B}_r^H \mathbf{H} \mathbf{B}_t \quad (3-14)$$

เมื่อ \mathbf{B}_t และ \mathbf{B}_r คือเมทริกซ์ยูนิแทรี ที่มีอย่างละ 4 ทิศทางในภาคส่งและภาครับ และ \mathbf{H} คือเมทริกซ์ช่องสัญญาณที่มีขนาด $M_r \times M_t$ หาได้จากช่องสัญญาณที่เกิดจากการประมวลผลแวลค่าดับ ดังนั้นความจุช่องสัญญาณในระบบไมโมเมื่อมีการประยุกต์ใช้บัทเลอร์ เมทริกซ์

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{M_r} + \frac{P_t}{P_N M_t} \mathbf{H}^b \mathbf{H}^{bH} \right) \quad (3-15)$$

3.4 เปรียบเทียบระหว่างการประมวลผลแถวลำดับและโดเมนเชิงมุม

จากการสำรวจปริทัศน์วรรณกรรม ความจุช่องสัญญาณขึ้นอยู่กับค่าสหสัมพันธ์ของช่องสัญญาณ (Channel correlation) เมื่อมีขนาดสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์มากส่งผลให้ความจุช่องสัญญาณมีค่าลดลง ดังนั้นหัวข้อนี้จึงเสนอการวิเคราะห์การประมวลผลเชิงมุมเปรียบเทียบกับ การประมวลผลแถวลำดับ โดยแสดงผลกระทบที่เกิดจากค่าสหสัมพันธ์ของช่องสัญญาณ

กำหนดให้เมทริกซ์ช่องสัญญาณ

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Psi}_r^{1/2} \mathbf{H}_{iid} \mathbf{\Psi}_t^{1/2} \quad (3-16)$$

โดยที่ \mathbf{H}_{iid} เป็นเมทริกซ์ช่องสัญญาณที่เกิดจากการสุ่มและที่มีการกระจายตัวอย่างอิสระ ส่วน $\mathbf{\Psi}_r$ และ $\mathbf{\Psi}_t$ เมทริกซ์ช่องสัญญาณสหสัมพันธ์ของภาคส่งและภาครับตามลำดับ

3.4.1 วิเคราะห์การประมวลผลแถวลำดับ

จากสมการช่องสัญญาณ $\mathbf{H} = \sum_i a_i^b \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \mathbf{e}_t(\Omega_{ti})^H$ ความสัมพันธ์ของอิลิเมนต์ (k,l) จากเมทริกซ์ค่าสหสัมพันธ์ที่ภาครับแสดงได้โดย

$$\Psi_r|_{k,l} = E \left\{ \left(\sum_i a_i^b e^{-j2\pi k \Delta_r \Omega_{ri}} \mathbf{e}_t(\Omega_{ti})^H \right) \left(\sum_{i'} a_{i'}^b e^{-j2\pi l \Delta_r \Omega_{i'r}} \mathbf{e}_t(\Omega_{i't})^H \right)^H \right\} \quad (3-17)$$

เมื่อ $E\{\cdot\}$ คือ ค่าคาดหวัง และกำหนดให้ในแต่ละเส้นทางมีความเป็นอิสระต่อกันสามารถลดรูปจากสมการ (3-17) มาเป็นสมการ (3-18)

$$\Psi_r|_{k,l} = \sum_i |a_i^b|^2 e^{-j2\pi(k-l)\Delta_r \Omega_{ri}} \quad (3-18)$$

ในทำนองเดียวกันกับภาครับ ที่ภาคส่งแสดงความสัมพันธ์ของอิลิเมนต์ (k,l) โดย

$$\Psi_t|_{k,l} = \sum_i |a_i^b|^2 e^{j2\pi(k-l)\Delta_r \Omega_{ri}} \quad (3-19)$$

จากปริทัศน์วรรณกรรมการลดลงของค่าความจูงของสัญญาณขึ้นอยู่กับขนาดสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์ จากสมการ (3-18) และ (3-19) ขนาดจะเปลี่ยนแปลงตามสัมประสิทธิ์การลดทอน รวมถึงมุมที่รับเข้ามาและส่งออกไป ดังนั้นจึงไม่มีผลลัพธ์ที่แน่นอนในการอธิบายขนาดสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์ แต่อย่างไรก็ตามในการที่จะหาค่าเจาะจงเพื่อเปรียบเทียบ พิจารณากรณีแย่งที่สุดเมื่อขนาดสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์มากที่สุดที่ภาครับและภาคส่ง $k \neq l$ จะได้ว่า

$$|\Psi_r|_{\max} = |\Psi_l|_{\max} = \sum_i |a_i^b|^2 \quad (3-20)$$

3.4.2 วิเคราะห์การประมวลผลเชิงมุม

ในทำนองเดียวกับสมการ (3-16) เมื่อนำแต่ละช่องสัญญาณมาพิจารณาในรูปแบบการประมวลผลเชิงมุมจาก $\mathbf{H}^a = \mathbf{U}_r^H \mathbf{H} \mathbf{U}_t$ และเพื่อให้ง่ายต่อการเปรียบเทียบกับ การประมวลผลแถวลำดับ แสดงความสัมพันธ์ของเมทริกซ์ช่องสัญญาณได้โดย

$$\mathbf{H}^a = \mathbf{\Psi}_r^{a/2} \mathbf{H}_{iid} \mathbf{\Psi}_t^{a/2} \quad (3-21)$$

แล้วความสัมพันธ์ของอิลิเมนต์ (k,l) ค่าสหสัมพันธ์ที่ภาครับแสดงได้โดย

$$\Psi_r^a|_{k,l} = \mathbb{E} \left\{ \left(\mathbf{e}_r \left(\frac{k}{L_r} \right)^H \left(\sum_i a_i^b \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \mathbf{e}_t(\Omega_{ri})^H \right) \mathbf{U}_t \right) \left(\mathbf{e}_r \left(\frac{l}{L_r} \right)^H \left(\sum_i a_i^b \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \mathbf{e}_t(\Omega_{ri})^H \right) \mathbf{U}_t \right)^H \right\} \quad (3-22)$$

เมื่อกำหนดให้แต่ละเส้นทางมีความเป็นอิสระต่อกันจะได้

$$\begin{aligned}
\Psi_r^a|_{k,l} &= \sum_i |a_i^b|^2 \left(\mathbf{e}_r \left(\frac{k}{L_r} \right)^H \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \right) \left(\mathbf{e}_r \left(\frac{l}{L_r} \right)^H \mathbf{e}_r(\Omega_{ri}) \right)^H \\
&= \sum_i |a_i^b|^2 \left(\frac{1}{M_r} \frac{1 - e^{j2\pi M_r \Delta_r \left(\frac{k}{L_r} - \Omega_{ri} \right)}}{1 - e^{j2\pi \Delta_r \left(\frac{k}{L_r} - \Omega_{ri} \right)}} \right) \left(\frac{1}{M_r} \frac{1 - e^{j2\pi M_r \Delta_r \left(\frac{l}{L_r} - \Omega_{ri} \right)}}{1 - e^{j2\pi \Delta_r \left(\frac{l}{L_r} - \Omega_{ri} \right)}} \right)^H \\
&= \sum_i |a_i^b|^2 e^{\left(\frac{j\pi(M_r-1)(k-l)}{M_r} \right)} \left(\frac{\sin \left(\pi M_r \Delta_r \left(\frac{k}{L_r} - \Omega_{ri} \right) \right)}{M_r \sin \left(\pi \Delta_r \left(\frac{k}{L_r} - \Omega_{ri} \right) \right)} \right) \left(\frac{\sin \left(\pi M_r \Delta_r \left(\frac{l}{L_r} - \Omega_{ri} \right) \right)}{M_r \sin \left(\pi \Delta_r \left(\frac{l}{L_r} - \Omega_{ri} \right) \right)} \right)
\end{aligned} \tag{3-23}$$

ที่ภาคส่งสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์แสดงได้โดย

$$\Psi_t^a|_{k,l} = \sum_i |a_i^b|^2 e^{\left(\frac{-j\pi(M_t-1)(k-l)}{M_t} \right)} \left(\frac{\sin \left(\pi M_t \Delta_t \left(\frac{k}{L_t} - \Omega_{ti} \right) \right)}{M_t \sin \left(\pi \Delta_t \left(\frac{k}{L_t} - \Omega_{ti} \right) \right)} \right) \left(\frac{\sin \left(\pi M_t \Delta_t \left(\frac{l}{L_t} - \Omega_{ti} \right) \right)}{M_t \sin \left(\pi \Delta_t \left(\frac{l}{L_t} - \Omega_{ti} \right) \right)} \right) \tag{3-24}$$

จากข้อเท็จจริงที่ว่า

$$\left(\frac{\sin \left(\pi M_t \Delta_t \left(\frac{k}{L_t} - \Omega_{ti} \right) \right)}{M_t \sin \left(\pi \Delta_t \left(\frac{k}{L_t} - \Omega_{ti} \right) \right)} \right) = \begin{cases} 1 & \frac{k}{L_t} = \Omega_{ti} \\ < 1 & \frac{k}{L_t} \neq \Omega_{ti} \end{cases}$$

ดังนั้นจะได้ค่าความจูงของสัญญาณแท้ที่สุดเมื่อขนาดสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์มากที่สุด ที่ $k \neq l$ จะได้ว่า

$$|\Psi_r^a|_{\max} = |\Psi_t^a|_{\max} < \sum_i |a_i^b|^2 \tag{3-25}$$

เปรียบเทียบระหว่างสมการ (3-20) และ (3-25) ขนาดสัมประสิทธิ์ค่าสหสัมพันธ์ที่ได้ กรณีการประมวลผลเชิงมุมมีค่าน้อยกว่าการประมวลผลแถวลำดับ ดังนั้นจากปริทัศน์วรรณกรรม เมื่อพิจารณาความจูง

ช่องสัญญาณในระบบไมโม การประมวลผลเชิงมุมจึงให้ความจุของช่องสัญญาณเพิ่มขึ้นมากกว่าการประมวลผลแถวลำดับ

3.5 กล่าวท้ายบท

สำหรับเนื้อในบทนี้ได้อธิบายถึงช่องสัญญาณระบบไมโมเทคนิคการประมวลผลเชิงมุม และการประยุกต์ใช้การประมวลผลเชิงมุมในทางปฏิบัติ โดยเทคนิคการประมวลผลเชิงมุมเป็นการประยุกต์จากการประมวลผลแถวลำดับเพื่อให้ได้ความจุช่องสัญญาณมีค่ามากขึ้น และมีการนำบัทเลอร์ เมทริกซ์ มาประยุกต์ใช้กับการประมวลผลเชิงมุมเพื่อให้ได้ผลจริงในทางปฏิบัติ และช่วยลดต้นทุนในการผลิต เนื่องจากบัทเลอร์ เมทริกซ์ ไม่ต้องใช้ตัวถ่วงน้ำหนักในการหาค่าแอมพลิจูดและค่าเฟส สามารถนำมาใช้งานได้โดยไม่ต้องใช้บัทเลอร์ เมทริกซ์สามารถใช้ได้กับสายอากาศส่งและรับภาคละ 4 ต้น เท่านั้น และเนื้อหาในส่วนสุดท้ายแสดงการเปรียบเทียบการประมวลผลเชิงมุมและการประมวลผลแถวลำดับในรูปแบบการวิเคราะห์สมการ ส่วนเนื้อหาบทถัดไปได้แสดงแบบจำลองของระบบไมโมเมื่อใช้การประมวลผลแถวลำดับเปรียบเทียบกับ การประมวลผลเชิงมุมมีการประยุกต์ใช้บัทเลอร์ เมทริกซ์ ในทางปฏิบัติ รวมถึงการสร้างและวัดผลจริงเพื่อเปรียบเทียบการประมวลผลทั้งสองวิธี