บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาที่สำคัญมากในทางคณิตศาสตร์สำหรับการหาผลเฉลยต่างๆของสมการเชิงเส้น สมการไม่เชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดา และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ การมีผลเฉลย (solution) ของสมการต่างๆเหล่านั้น เราจะรู้ได้อย่างไรว่าสมการต่างๆเหล่านั้นมีผลเฉลย ต่อมานักคณิตศาสตร์จึงได้พยายามสร้างเครื่องมือและหาวิธีการต่างๆเพื่อช่วยหาผลเฉลยให้กับสมการต่างๆนั้น โดยเฉพาะการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ได้มีการพัฒนาเครื่องมือที่สำคัญ เพื่อช่วยหาผลเฉลยของสมการ คือ ทฤษฎีฟูเรียร์ (Fourier theory) และทฤษฎีการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้สร้างและพัฒนาทฤษฎีที่เรียกว่า ทฤษฎีการแจกแจง (Distributions Theory) ทฤษฎีดังกล่าวมีบทบาทเป็นอย่างมากต่อการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบธรรมดาและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนั้นจึงมีการศึกษาและวิจัยทฤษฎีการแจกแจงกันอย่างต่อเนื่องและกว้างขวาง ในการวิจัยทางทฤษฎีการแจกแจงส่วนมากจะเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการต่างๆ ตัวดำเนินการที่คุ้นเคย ได้แก่ ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operator) บทนิยามโดย

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad (1.1)$$

จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงวงรี (Elliptic equation) ซึ่งมีความสำคัญมากในทฤษฎีศักย์ (potential theory) ตัวดำเนินการความร้อน (heat operator) นิยามโดย

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

ตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultra-hyperbolic) นิยามโดย

$$\Box^k = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2} - \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right)^k \qquad (1.2)$$

โดยเฉพาะตัวดำเนินการลาปลาซนั้นได้มีการศึกษาสมบัติต่างๆ มากมาย เช่น การหาผลเฉลยหลักมูล (fundamental solution) การหาผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการลาปลาซและนำผลเฉลยที่หาได้โดยเฉพาะผลเฉลยมูลฐานไปศึกษาสมบัติต่างๆ เพิ่มเติม รวมทั้งการประยุกต์ในทางทฤษฎีการแจกแจง เป็นต้นและในส่วนของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก ก็ได้มีการหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการดังกล่าว โดย Prof. S.E. Trione และ Prof. M.A. Tellez ได้แสดงว่าผลเฉลยดังกล่าวจะมีอยู่จริง (existence) ขึ้นอยู่กับค่าของ p,q และ n หลังจากได้รู้จักกับผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกแล้ว ก็ได้มีนักคณิตศาสตร์มากมายศึกษาสมบัติต่างๆ เช่น การศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการประกอบที่

เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก การศึกษาสมการของผลการประสานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก การประยุกต์ใช้กับสมการคลื่นอิลาสติค (elastic wave) และมีการศึกษาสมบัติอื่นๆ อีกมากมาย ปัจจุบันการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับตัวดำเนินการยังกระทำอย่างต่อเนื่อง เช่น การค้นพบผลเฉลยมูลฐาน (elementary solution) ของตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\Delta^k u(x) = \delta$$

เมื่อ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า

$$u(x) = (-1)^k R_{2k}^{e}(x)$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 1997 ศาสตราจารย์อำนวย ขนันไทย ได้ศึกษาและคิดค้นตัวดำเนินการขึ้นมาใหม่ โดยให้ชื่อว่า **ตัวดำเนินการไดมอนด์** (diamond operator) ซึ่งนิยามโดย

$$\Diamond = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right)^2, \qquad p+q=n \tag{1.3}$$

ซึ่งเป็นตัวดำเนินการที่มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซและตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$\Diamond = \Delta \Box$$

ความสำคัญของตัวดำเนินการไดมอนด์นั้นสามารถนำไปประยุกต์กับสมการคลื่นชนิดต่างๆได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการไดมอนด์นั้นจะสัมพันธ์กับผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการลาปลาซและตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกด้วย

จากแนวคิดของการสร้างตัวดำเนินการไดมอนด์ ได้มีนักคณิตศาสตร์ชาวตุรกี คือ Prof. H. Yildirim และคณะได้สร้างตัวดำเนินขึ้นมาใหม่โดยอาศัยความรู้เพิ่มเติมทางตัวดำเนินการการเลื่อนออกไป (generalized shift operator) และให้ชื่อว่า **ตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์** (Bessel diamond operator) ซึ่งนิยามโดย

$$\Diamond_B^k = \left[\left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j} \right)^2 \right]^k, \qquad p+q=n$$

โดยที่ $B_{x_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dfrac{2v_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ และ $2v_i = 2\alpha_i + 1, \quad \alpha_i > -\dfrac{1}{2}$ ซึ่งเป็นตัวดำเนินการที่มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล และตัวดำเนินการเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$\Diamond_B^k = \Delta_B^k \Box_B^k \tag{1.4}$$

ซึ่งการหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์นั้นจะสัมพันธ์กับผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล (Bessel Laplace operators) และตัวดำเนินการเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิก (Bessel ultra-hyperbolic operators) โดยที่ตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิลนิยามโดย

$$\Delta_B = \left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} + \sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j} \right) \tag{1.5}$$

และตัวดำเนินการเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิกนิยามโดย

$$\Box_B = \left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j} \right) \qquad (1.6)$$

หลังจากนั้นก็ได้มีการศึกษาสมบัติต่างๆ ตามมา เช่น การหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์ สมการไม่เชิงเส้นของตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์ และสมบัติอื่นๆ

นอกจากนี้ได้มีนักคณิตศาสตร์คิดค้นตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซซึ่งนิยามโดย

$$\Delta_c = \left(\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \qquad (1.7)$$

และตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งนิยามโดย

$$\Box_c = \left(\frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \qquad (1.8)$$

จากนั้นยังมีการศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบอัลตราไฮเพอร์โบลิก โดยที่สมการอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Box^r u(x) = f(x)$$

ต่อมาได้นำแนวคิดจากค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนสมการเชิงประกอบอัลตราไฮเพอร์โบลิกมาพัฒนาเป็นสมการเชิงประกอบเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิก ซึ่งสมการอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Box_B^r u(x) = f(x)$$

นอกจากนี้ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Box_c^r u(x) = f(x)$$

(Bupasiri and Nonlaopon. 2009)

ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นการศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ^r แทนตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta^r = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^r, \ p+q=n$$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ R^n , $x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัว

นอกจากนี้ เราจะขยายแนวความคิดที่ได้ไปศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล และสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซด้วย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซและลาปลาซเบสเซิล
2. ศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ^r แทนตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta^r = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)\right]^r,\ p+q=n$$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ R^n , $x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัว

นอกจากนี้ เราจะขยายแนวความคิดที่ได้ไปศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล และสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซด้วยซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta_c^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ_c^r แทนตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta_c^r = \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)\right]^r,$$

$p+q=n$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ R^n , $x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัวและสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล สมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta_B^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ_B^r แทนตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta_B^r = (B_{x_1} + \cdots B_{x_p} + B_{x_{p+1}} + \cdots + B_{x_{p+q}})^r,\ p+q=n$$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ $\mathrm{R}_n^+, x \in \mathrm{R}_n^+$ และ C_r เป็นค่าคงตัว

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้องค์ความรู้และทฤษฎีบทใหม่ๆที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ สมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซและสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล
2. การนำไปประยุกต์ใช้อย่างต่อเนื่องในแขนงวิชาอื่นๆ เนื่องจากการค้นพบองค์ความรู้ใหม่
3. มีผลงานตีพิมพ์ในระดับนานาชาติเพื่อเป็นการเผยแพร่ผลงานและชื่อเสียงของนักคณิตศาสตร์ไทย
4. เกิดความร่วมมือและแลกเปลี่ยนทางวิชาการระหว่างนักคณิตศาสตร์ไทย และ นักคณิตศาสตร์ต่างประเทศที่มีชื่อเสียงของโลก ซึ่งไปสู่การพัฒนาความเป็นเลิศทางวิชาการของวงการคณิตศาสตร์ไทยและการพัฒนาประเทศชาติต่อไปในที่สุด

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในทางคณิตศาสตร์ ตัวดำเนินการ (operators) ถือว่ามีความสำคัญมาก ซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับตัวดำเนินการ โดยเฉพาะตัวดำเนินการที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) เนื่องจากตัวดำเนินการช่วยให้เกิดความสะดวกในการแยกแยะชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และ มีส่วนสำคัญในการหาผลเฉลย (solutions) ของสมการ ตัวดำเนินการที่คุ้นเคยในอดีต ได้แก่

1. ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplace operator)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงวงรี (Elliptic equation) ซึ่งมีความสำคัญมากในทฤษฎีศักย์ (potential theory)

2. ตัวดำเนินการความร้อน (heat operator)

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$$

จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงพาราโบลา (parabolic equation) ซึ่งเป็นตัวแทนของสมการความร้อน

3. ตัวดำเนินการคลื่น (wave equation)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

จะเกี่ยวข้องกับสมการเชิงไฮเพอร์โบลา (hyperbolic equation) ซึ่งมีความสำคัญในสมการคลื่นชนิดต่างๆ

4. ตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultra-hyperbolic)

$$\square^k = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2} - \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right)^k$$

บทนิยามและความรู้พื้นฐาน

1. ฟังก์ชันค่าทดสอบ (test functions)

กำหนดให้ R^n เป็นปริภูมิ n มิติซึ่งระบบคาร์ทีเซียนของพิกัดของจุด P จะเขียนแทนด้วย $x = (x_1, \ldots, x_n)$ และระยะทาง r ของ P จากจุดกำเนิดคือ $r = |x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$ ให้ k เป็น n-tuple ของจำนวนที่ไม่เป็นลบซึ่ง $k = (k_1, \ldots, k_n)$ ซึ่งเรียก k ว่า multiindex ของอันดับ n จะได้ว่า

$$|k| = k_1 + \cdots + k_n, \quad x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

และ

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = D_1^{k_1} \cdots D_n^{k}$$

โดยที่ $D_j = \partial / \partial x_j ,\ j = 1,2,\ldots,n$

ตัวอย่าง 1.1

สำหรับใน R^3 ซึ่ง $k = (3,0,4)$ จะได้ว่า

$$D^k = \frac{\partial^7}{\partial x_1^3 \partial x_3^4} = D_1^3 D_3^4$$

บทนิยาม 1.1

ซัพพอร์ต (supports) ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือส่วนปิดคลุม (closure) ของเซตของจุด x ทั้งหมดซึ่ง $f(x) \neq 0$ ซัพพอร์ต (supports) ของฟังก์ชัน $f(x)$ จะเขียนแทนด้วย supp f

ตัวอย่าง 1.2

สำหรับ $f(x) = \sin x$, $x \in R$ supp f ประกอบด้วยเส้นจำนวนจริงทั้งหมด ลากผ่าน $\sin x = 0$ เมื่อ $x = n\pi$

บทนิยาม 1.2

ถ้า supp f เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set) แล้ว f จะกล่าวว่ามีซัพพอร์ตกระชับ (compact support)

ต่อไปจะเป็นความรู้พื้นฐานในการบทนิยามฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalized function) พิจารณาปริภูมิ D ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันค่าจริง $\varphi(x) = \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ ซึ่งประกอบด้วยข้อความเหล่านี้

(1) $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้อนันต์ครั้งบทนิยามที่ทุกๆจุดใน R^n ฟังก์ชันที่ว่าจะเขียนแทนด้วย C^∞

(2) จะมีจำนวน A ที่ $\varphi(x) = 0$ สำหรับ $r > A$ หมายความว่า $\varphi(x)$ มีซัพพอร์ตกระชับ จะเรียก $\varphi(x)$ ว่า**ฟังก์ชันค่าทดสอบ (test function)**

ตัวอย่าง 1.3

ซัพพอร์ตของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x \le -1 \\ x+1, -1 < x < 0 \\ 1-x, 0 \le x < 1 \\ 0, 1 \le x < \infty \end{cases}$$

คือ $[-1,1]$

บทนิยาม 1.3

ปริภูมิชวาร์ท (Schwartz space) ของฟังก์ชัน S บน R^n คือปริภูมิฟังก์ชัน

$$S(R^n) = \{ f \in C^\infty(R^n) \mid \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty, \forall \alpha, \beta \}$$

โดยที่ $C^\infty(\mathrm{R}^n)$ เป็นเซตของฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth function) จากเซตของจำนวนเชิงซ้อน C ไปยัง C และ $\|f\|_{\alpha,\beta} = \left\| x^\alpha D^\beta f \right\|_\infty$

โดยที่ $\|\cdot\|_\infty$ เป็น supremum norm

2. ดิสตริบิวชัน (distribution)

บทนิยาม 2.1

ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) t บนปริภูมิ D ของฟังก์ชันค่าทดสอบ คือการดำเนินการที่ทุกๆฟังก์ชันค่าทดสอบ $\varphi(x)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\langle t,\varphi\rangle$ ซึ่ง

$$\langle t, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle = c_1\langle t,\varphi_1\rangle + c_2\langle t,\varphi_2\rangle$$

สำหรับฟังก์ชันค่าทดสอบ φ_1 และ φ_2 และจำนวนจริง c_1, c_2

ในทางฟิสิกส์จะมีปัญหามากมายซึ่งต้องใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันไดแรคเดลตา ซึ่งมีสมบัติดังต่อไปนี้

$$\delta(x-\varsigma) = 0, x \neq \varsigma$$

$$\int_a^b \delta(x-\varsigma)dx = \begin{cases} 0, a,b < \varsigma \\ 1, a \le \varsigma \le b \end{cases}$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\varsigma) f(x) dx = f(\varsigma)$$

บทนิยาม 2.2

ฟังก์ชันเชิงเส้นต่อเนื่อง (continuous linear function) บนปริภูมิ D ของฟังก์ชันค่าทดสอบจะเรียกว่า **ดิสตริบิวชัน**

ตัวอย่าง 2.1 ดิสตริบิวชันเฮฟวิไซด์ (heaviside distribution) ใน R^n คือ

$$\langle H_R, \varphi\rangle = \int_R \varphi(x) dx$$

โดยที่

$$H_R(x) = \begin{cases} 1, x \in R \\ 0, x \notin R \end{cases}$$

ตัวอย่าง 2.2 ดิสตริบิวชันไดแรคเดลตาใน R^n คือ

$$\langle \delta(x-\varsigma), \varphi(x)\rangle = \varphi(\varsigma)$$

สำหรับ ς เป็นจุดตรึง (fixed point) ใน R^n

บทนิยาม 2.3

ดิสตริบิวชัน E จะกล่าวว่าเป็นผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย L ถ้า

$$LE = \delta$$

3. ฟังก์ชันแกมมา (gamma function)

บทนิยาม 3.1

ฟังก์ชันแกมมาเขียนแทนด้วย Γ ซึ่งบทนิยามโดย

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

โดยที่ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ $\mathrm{Re}(z)>0$

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

(1) $z\Gamma(z+1)=\Gamma(z+1) \qquad z\neq 0,-1,-2,\ldots$

(2) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z} \qquad z\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$

(3) $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z) \qquad z\neq 0,-1,-2,\ldots$

4. สมบัติของผลประสาน (convolution) ของดิสตริบิวชัน

บทนิยาม 4.1

ผลประสานของ $f*g$ ของ $f(t)$ และ $g(t)$ ใน R^n นิยามโดย

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

ตัวอย่าง 4.1

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

และ

$$g(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0\end{cases}$$

เนื่องจาก

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

จะได้ว่า

$$f*g=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t l^{-t}\sin(t-\tau)d\tau, 0<t<\frac{\pi}{2}\\ \displaystyle\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} l^{-t}\sin(t-\tau)d\tau, t\ge\frac{\pi}{2}\\ 0, t<0\end{cases}$$

สมบัติข้อที่ 1

$$s*t=t*s \quad \text{(สมบัติการสลับที่ของดิสตริบิวชัน)}$$

สมบัติข้อที่ 2

$$(s*t)*u=s*(t*u) \quad \text{(สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของดิสตริบิวชัน)}$$

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้า $s*t$ หาค่าได้ จะได้ว่า $\left(D^k s\right)*t$ และ $s*\left(D^k t\right)$ หาค่าได้ และ

$$\left(D^k s\right)*t = D^k(s*t) = s*\left(D^k t\right)$$

ถ้า L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะได้ว่า

$$\left(L\, s\right)*t = L\,(s*t) = s*\left(L\, t\right)$$

บทนิยาม 4.2

กำหนดให้ $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ เป็นจุดของปริภูมิ R^n และ

$$V=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2 \tag{2.1}$$

โดยที่ $p+q=n$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน α ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$R_\alpha^e(x)=\frac{V^{\frac{\alpha-n}{2}}}{w_n(\alpha)} \tag{2.2}$$

โดยที่

$$w_n(\alpha)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \tag{2.3}$$

บทนิยาม 4.3

กำหนดให้ $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ เป็นจุดของปริภูมิ R^n และ

$$V=c^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2)+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2 \tag{2.4}$$

โดยที่ $p+q=n$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน α ใดๆ นิยามฟังก์ชัน

$$R_{\alpha,c}^e(x)=\frac{V^{\frac{\alpha-n}{2}}}{w_n(\alpha)} \tag{2.5}$$

โดยที่

$$w_n(\alpha)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \tag{2.6}$$

บทนิยาม 4.4

กำหนดให้ $x=(x_1,...,x_n)$ เป็นจุดของปริภูมิ

$$\mathrm{R}_n^+=\{x=(x_1,...,x_n): x_1>0,...,x_n>0\}$$

$$V=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2 \tag{2.7}$$

โดยที่ $p+q=n$ นิยามฟังก์ชัน

$$R_{2k}(x)=\frac{|x|^{2k-n-|v|}}{w_n(2k)}, \tag{2.8}$$

$$|x|=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ และ}$$

$$w_n(2k)=\frac{\Pi_{i=1}^{n}2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k)}{2^{n+2|v|-4k}\Gamma\left(\frac{n+2|v|-2k}{2}\right)} \tag{2.9}$$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกจะมีอยู่จริง (existence) ขึ้นอยู่กับค่าของ p,q และ n (Trione. 1987)

หลังจากได้รู้จักกับผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกแล้ว ก็ได้มีนักคณิตศาสตร์มากมายศึกษาสมบัติต่างๆ เช่น การศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการประกอบที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก การศึกษาสมการของผลการประสานของตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก การประยุกต์ใช้กับสมการคลื่นอิลาสติค (elastic wave) และมีการศึกษาสมบัติอื่นๆ อีกมากมาย ปัจจุบันการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับตัวดำเนินการยังกระทำอย่างต่อเนื่อง

ต่อมาได้ค้นพบผลเฉลยมูลฐาน (elementary solution) ของตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\Delta^k u(x)=\delta$$

เมื่อ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า

$$u(x)=(-1)^k R_{2k}^e(x)$$

และได้ศึกษาและคิดค้นตัวดำเนินการขึ้นมาใหม่ โดยให้ชื่อว่า **ตัวดำเนินการไดมอนด์** (diamond operator) ซึ่งนิยามโดย

$$\Diamond=\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2-\left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)^2, \qquad p+q=n$$

ซึ่งเป็นตัวดำเนินการที่มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซและตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของ $\Diamond=\Delta\Box$ (Kananthai. 1997)

ความสำคัญของตัวดำเนินการไดมอนด์นั้นสามารถนำไปประยุกต์กับสมการคลื่นชนิดต่างๆได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการไดมอนด์นั้นจะสัมพันธ์กับผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการลาปลาซและตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกด้วย

จากแนวคิดของการสร้างตัวดำเนินการไดมอนด์ จึงสร้างตัวดำเนินขึ้นมาใหม่โดยอาศัยความรู้เพิ่มเติมทางตัวดำเนินการการเลื่อนออกไป (generalized shift operator) และให้ชื่อว่า **ตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์** (Bessel diamond operator) ซึ่งนิยามโดย

$$\Diamond_B^k = \left[\left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i}\right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j}\right)^2\right]^k, \qquad p+q=n$$

โดยที่ $B_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ และ $2v_i = 2\alpha_i + 1, \quad \alpha_i > -\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นตัวดำเนินการที่มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการเบสเซิลลาปลาซและตัวดำเนินการเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$\Diamond_B^k = \Delta_B^k \Box_B^k$$

ซึ่งการหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์นั้นจะสัมพันธ์กับผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล (Bessel Laplace operators) และตัวดำเนินการเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิก (Bessel ultra-hyperbolic operators) โดยที่ตัวดำเนินการเบสเซิลลาปลาซนิยามโดย

$$\Delta_B = \left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} + \sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j}\right)$$

และตัวดำเนินการเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิกนิยามโดย

$$\Box_B = \left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j}\right)$$

หลังจากนั้นก็ได้มีการศึกษาสมบัติต่างๆ ตามมา เช่น การหาผลเฉลยมูลฐานของตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์ สมการไม่เชิงเส้นของตัวดำเนินการเบสเซิลไดมอนด์ และสมบัติอื่นๆ (Yildirim. et al. 2004)

นอกจากนี้ยังมีตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซซึ่งนิยามโดย

$$\Delta_c = \left(\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)$$

และตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งนิยามโดย

$$\Box_c = \left(\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)$$

(Sritanratana and Kananthai. 2004)

นอกจากนี้ยังค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบอัลตราไฮเพอร์โบลิก โดยที่สมการอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Box^r u(x) = f(x)$$

(Kananthai and Nonlaopon. 2002)

ต่อมาได้มีการนำแนวคิดจากค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนสมการเชิงประกอบอัลตราไฮเพอร์โบลิกมาพัฒนาเป็นสมการเชิงประกอบเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิก ซึ่งสมการอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \square_B^r u(x) = f(x)$$

(Sarikaya and Yildirim. 2007)

ต่อจากนั้นยังได้ค้นพบผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิกซึ่งอยู่ในรูปแบบของ

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \square_c^r u(x) = f(x)$$

(Bupasiri and Nonlaopon. 2009)

จากการศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบต่างๆของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalized functions) นั้น จะเห็นว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยล้วนมีหลายรูปแบบ เช่น

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \square_c^r u(x) = f(x)$$

มีผลเฉลยเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2k,c}^H(x) * \left(C_m R_{0,c}^H(x) + w(x) R_{2,c}^H(x)\right)^{*-1}$$

มีผลเฉลยเป็น

$$w(x) = C_{m-1} + C_{m-2}\frac{V}{2(4-n)} + C_{m-3}\frac{V^2}{2\cdot 4(4-n)(6-n)} + \cdots + C_0 \frac{V^{m-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(m-1)(4-n)(6-n)\cdots(2m-n)},$$

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป, n เป็นมิติของปริภูมิ R^n และ $x \in \mathrm{R}^n$

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \square_B^r u(x) = f(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x) = f(x) * R_{2k}(x) * \left(C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)^{*-1}$$

เมื่อ

$$w(x) = C_{m-1} + C_{m-2}\frac{V}{2(4-n)} + C_{m-3}\frac{V^2}{2\cdot 4(4-n)(6-n)} + \cdots + C_0 \frac{V^{m-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(m-1)(4-n)(6-n)\cdots(2m-n)},$$

เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป, n เป็นมิติของปริภูมิ R_n^+ และ

$$x \in \mathrm{R}_n^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$$

และรูปแบบที่น่าสนใจของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนอกจากที่กล่าวมาแล้ว ได้แก่

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \ \Delta^r \ u(x) = f(x), \sum_{r=0}^{m} c_r \ \Delta_c^r \ u(x) = f(x) \text{ และ } \sum_{r=0}^{m} c_r \ \Delta_B^r \ u(x) = f(x)$$

ซึ่งผลเฉลยก็น่าจะเป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ เป็นการสร้างทฤษฎีบทการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบของตัวดำเนินการบางตัวที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการลาปลาซ

วิธีการดำเนินการวิจัย

1 ศึกษาความรู้ต่างๆเกี่ยวกับการบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ สมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล และ สมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซจากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2 ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และ เอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จาก แหล่งข้อมูลต่างๆ

3 โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1, 2 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและปรึกษากับนักวิจัยที่ปรึกษาและนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีความเชี่ยวชาญ การหาผลเฉลยแบบอ่อนและหาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ สมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล และ สมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ

4 สร้างเครื่องมือเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ สมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซและสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล ดังนี้

4.1 บทตั้ง 3.1 – บทตั้ง 3.4 ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซ

4.2 บทตั้ง 3.5 – บทตั้ง 3.8 ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ

4.3 บทตั้ง 3.9 – บทตั้ง 3.12 ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล

5 สรุปผล เตรียมเอกสารสำหรับการตีพิมพ์ และเขียนรายงานการวิจัย

ต่อไปจะเป็นเครื่องมือที่จำเป็นสำหรับการสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ

บทตั้งที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์

บทตั้ง 3.1

$R_\alpha^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ (homogeneous distribution) ของอันดับ $(\alpha-n)$ สำหรับกรณีเฉพาะ $R_\alpha^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์(tempered distribution) ด้วย

พิสูจน์

เราจำเป็นต้องแสดงว่า $R_\alpha^e(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์ (Euler equation) นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_\alpha^e(x) = (\alpha-n) R_\alpha^e(x)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_\alpha^e(x) &= \frac{1}{w_n(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n}{2}} \\
&= \frac{1}{w_n(\alpha)}(\alpha-n)\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2}{2}} \\
&\times\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right) \\
&= \frac{1}{w_n(\alpha)}(\alpha-n)\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n}{2}} \\
&= \frac{(\alpha-n)V^{\frac{\alpha-n}{2}}}{w_n(\alpha)} \\
&= (\alpha-n) R_\alpha^e(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $R_\alpha^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ของอันดับ $(\alpha-n)$ (Donoghue. 1969) ได้พิสูจน์ว่าสำหรับทุกๆดิสตริบิวชันเอกพันธ์จะเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ เพราะฉะนั้น $R_\alpha^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 3.2

กำหนดสมการ

$$\Delta^k u(x) = \delta(x) \tag{3.1}$$

โดยที่ Δ^k นิยามโดย (1.1) สำหรับ $x \in \mathrm{R}^n$ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า $u(x) = (-1)^k R_{2k}^e(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานองสมการ (3.1) โดยที่ $R_{2k}^e(x)$ นิยามโดยสมการ (2.2) สำหรับ $\alpha = 2k$

พิสูจน์

การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Kananthai. 1997 : 31-32])

บทตั้ง 3.3 (ผลประสานของดิสตริบิวชันเทมเพอร์)

(a) $(\Delta^k\delta) * u(x) = \Delta^k u(x)$ โดยที่ $u(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ใดๆ

(b) กำหนดให้ $R^e_{2k}(x)$ และ $R^e_{2m}(x)$ นิยามโดยสมการ (2.2) จะได้ว่า $R^e_{2k}(x) * R^e_{2m}(x)$ หาค่าได้ และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) กำหนดให้ $R^e_{2k}(x)$ และ $R^e_{2m}(x)$ นิยามโดยสมการ (2.2) จะได้ว่า $R^e_{2k}(x) * R^e_{2m}(x) = R^e_{2k+2m}(x)$

(d) กำหนดให้ $R^e_{2k}(x)$ และ $R^e_{2m}(x)$ ถ้า $R^e_{2k}(x) * R^e_{2m}(x) = \delta$ แล้ว $R^e_{2k}(x)$ เป็นตัวผกผันของ $R^e_{2m}(x)$ ในพีชคณิตผลประสาน (convolution algebra) เขียนแทนด้วย $R^e_{2k}(x) = R^{e*-1}_{2m}(x)$

พิสูจน์

(a) พิจารณากรณี $k=1$ จะได้ว่า

$$\Delta\delta(x) = \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\delta(x)}{\partial x_i^2}\right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\delta(x)}{\partial x_j^2}\right), \quad p+q=n$$

กำหนดให้ $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าทดสอบในปริภูมิชวาร์ต S โดยบทนิยามของผลประสานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\langle \Delta\delta(x) * u(x), \varphi(x)\rangle &= \langle u(x), \langle \Delta\delta(x), \varphi(x+y)\ \rangle\rangle \\
&= \left\langle u(x), \left\langle \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\delta(y)}{\partial x_i^2}\right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\delta(y)}{\partial x_j^2}\right), \varphi(x+y)\right\rangle\right. \\
&= \left\langle u(x), \left\langle \delta(y), \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\varphi(x+y)}{\partial x_i^2}\right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\varphi(x+y)}{\partial x_j^2}\right)\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle u(x), \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}, \varphi(x)\right\rangle \\
&= \langle \Delta u(x), \varphi(x)\rangle
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\Delta\delta(x) * u(x) = \Delta u(x)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ k ใดๆ จะได้ว่า

$$\Delta^k\delta(x) * u(x) = \Delta^k u(x)$$

(b) โดยบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า $R_{2k}^{e}(x)$ และ $R_{2m}^{e}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์และ $R_{2k}^{e}(x) * R_{2m}^{e}(x)$ หาค่าได้ และโดย (Kananthai. 1997) จะได้ว่าเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) จากสมการ $\Delta^{k+m}u(x) = \delta(x)$ โดยบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k+2m}^{e}(x)$ สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆที่ไม่เป็นลบ และโดยบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า

$$\Delta^{k+m}u(x) = \Delta^{k}\Delta^{m}u(x) = \delta(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\Delta^{m}u(x) = (-1)^{k} R_{2k}^{e}(x)$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการข้างต้นด้วย $(-1)^{m} R_{2m}^{e}(x)$ จะได้ว่า

$$(-1)^{m} R_{2m}^{e}(x) * \Delta^{m}u(x) = (-1)^{k} R_{2k}^{e}(x) * (-1)^{k} R_{2m}^{e}(x)$$

หรือ

$$\delta(x) * u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k}^{e}(x) * R_{2m}^{e}(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k}^{e}(x) * R_{2m}^{e}(x)$$

ดังนั้น

$$u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k+2m}^{e}(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$R_{2k}^{e}(x) * R_{2m}^{e}(x) = R_{2k+2m}^{e}(x)$$

(d) เนื่องจาก $R_{2k}^{e}(x)$ และ $R_{2m}^{e}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $R_{2k}^{e}(x)$และ $R_{2m}^{e}(x)$ จึงเป็นสมาชิกของพีชคณิตผลประสาน u' ของดิสตริบิวชัน โดย (Kananthai. 1997) สามารถแสดงได้ว่า $R_{2k}^{e}(x) = R_{2m}^{e*-1}(x)$ เป็นตัวผกผัน

บทตั้ง 3.4

กำหนดให้ $R_{2k}^{e}(x)$ และ $w_n(2k)$ ซึ่งนิยามโดยสมการ (2.2) และ (2.3) จะได้ว่า

(a) $w_n(2k+2) = 2k(n-2k-2)w_n(2k)$

(b) $\Delta^{k} R_{2m}^{e}(x) = (-1)^{k} R_{2m-2k}^{e}(x)$ โดยที่ k และ m เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

(c) $R_{-2k}^{e}(x) = (-1)^{k} \Delta^{k}\delta(x)$โดยที่ k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

(a) จากสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$w_n(2k+2) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2k+2} \Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2k-2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2k(n-2k-2)\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2k}\Gamma(k)}{\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}\right)}$$
$$= 2k(n-2k-2)w_n(2k)$$

(b) โดยบทตั้ง 3.3(c) จะได้ว่า

$$\delta * R^e_{2m}(x) = R^e_{2k}(x) * R^e_{2m-2k}(x)$$
$$\Delta^k(-1)^k R^e_{2k}(x) * R^e_{2m}(x) = R^e_{2k}(x) * R^e_{2m-2k}(x)$$
$$(-1)^k R^e_{2k}(x) * \Delta^k R^e_{2m}(x) = R^e_{2k}(x) * R^e_{2m-2k}(x)$$

และ

$$\Delta^k R^e_{2m}(x) = (-1)^k R^e_{2m-2k}(x)$$

(c) สำหรับ $m = k$ โดยบทตั้ง 3.4(b) จะได้ว่า

$$\Delta^k R^e_{2m}(x) = (-1)^k R^e_0(x) \quad R^e_0 = \delta$$

สำหรับ $m = 0$ โดยบทตั้ง 3.4(b) จะได้ว่า

$$\Delta^k R^e_0(x) = (-1)^k R^e_{-2k}(x) \quad \text{หรือ} \quad (-1)^k \Delta^k \delta = R^e_{-2k}(x)$$

บทตั้ง 3.5

$R^e_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ของอันดับ $(\alpha - n)$ สำหรับกรณีเฉพาะ $R^e_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

พิสูจน์

เราจำเป็นต้องแสดงว่า $R^e_{\alpha,c}(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์ นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R^e_{\alpha,c}(x) = (\alpha - n) R^e_{\alpha,c}(x)$$

จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R^e_{\alpha,c}(x) = \frac{1}{w_n(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n}{2}}$$
$$= \frac{1}{w_n(\alpha)} (\alpha - n)\left(c^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2}{2}}$$
$$\times \left(c^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)$$
$$= \frac{1}{w_n(\alpha)} (\alpha - n)\left(c^2(x_1^2 + \cdots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n}{2}}$$

$$= \frac{(\alpha - n)V^{\frac{\alpha-n}{2}}}{w_n(\alpha)}$$
$$= (\alpha - n)R^e_{\alpha,c}(x)$$

ดังนั้น $R^e_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ของอันดับ $(\alpha - n)$ (Donoghue. 1969) ได้พิสูจน์ว่า สำหรับทุกๆดิสตริบิวชันเอกพันธ์จะเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ เพราะฉะนั้น $R^e_{\alpha,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 3.6

กำหนดสมการ

$$\Delta_c^k u(x) = \delta(x) \qquad (3.2)$$

โดยที่ Δ_c^k นิยามโดย (1.1) สำหรับ $x \in \mathrm{R}^n$ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า $u(x) = (-1)^k R^e_{2k,c}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานองสมการ (3.2) โดยที่ $R^e_{2k,c}(x)$ นิยามโดยสมการ (2.5) สำหรับ $\alpha = 2k$

พิสูจน์

การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Kananthai. 1997)

บทตั้ง 3.7 (ผลประสานของดิสตริบิวชันเทมเพอร์)

(a) $(\Delta_c^k \delta) * u(x) = \Delta_c^k u(x)$ โดยที่ $u(x)$เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ใดๆ

(b) กำหนดให้ $R^e_{2k,c}(x)$ และ $R^e_{2m,c}(x)$นิยามโดยสมการ (2.5) จะได้ว่า $R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m,c}(x)$ หาค่าได้ และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) กำหนดให้ $R^e_{2k,c}(x)$ และ $R^e_{2m,c}(x)$นิยามโดยสมการ (2.5) จะได้ว่า $R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m,c}(x) = R^e_{2k+2m,c}(x)$

(d) กำหนดให้ $R^e_{2k,c}(x)$ และ $R^e_{2m,c}(x)$ถ้า $R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m,c}(x) = \delta$ แล้ว $R^e_{2k,c}(x)$ เป็นตัวผกผันของ $R^e_{2m,c}(x)$ ในพีชคณิตผลประสานเขียนแทนด้วย $R^e_{2k,c}(x) = R^{e*-1}_{2m,c}(x)$

พิสูจน์

(a) พิจารณากรณี $k = 1$จะได้ว่า

$$\Delta_c \delta(x) = \frac{1}{c^2}\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_i^2}\right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_j^2}\right), \quad p + q = n$$

กำหนดให้ $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าทดสอบในปริภูมิชวาร์ต S โดยบทนิยามของผลประสานจะได้ว่า

$$\langle \Delta_c \delta(x) * u(x), \varphi(x) \rangle = \langle u(x), \langle \Delta_c \delta(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left\langle \frac{1}{c^2}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\delta(y)}{\partial x_i^2}\right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\delta(y)}{\partial x_j^2}\right), \varphi(x+y)\right\rangle\right.$$

$$= \left\langle u(x), \left\langle \delta(y), \frac{1}{c^2}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\varphi(x+y)}{\partial x_i^2}\right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\varphi(x+y)}{\partial x_j^2}\right)\right\rangle\right\rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left(\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}\right)\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=p+1}^{p+q}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}, \varphi(x)\right\rangle$$

$$= \left\langle \Delta_c u(x), \varphi(x)\right\rangle$$

จะได้ว่า

$$\Delta_c\delta(x) * u(x) = \Delta_c u(x)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ k ใดๆ จะได้ว่า

$$\Delta_c^k\delta(x) * u(x) = \Delta_c^k u(x)$$

(b) โดยบทตั้ง 3.5 จะได้ว่า $R_{2k,c}^e(x)$ และ $R_{2m,c}^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์และ $R_{2k,c}^e(x) * R_{2m,c}^e(x)$ หาค่าได้ และโดย (Kananthai. 1997) จะได้ว่าเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) จากสมการ $\Delta_c^{k+m}u(x) = \delta(x)$ โดยบทตั้ง 3.6 จะได้ว่า $u(x) = (-1)^{k+m}R_{2k+2m,c}^e(x)$ สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆที่ไม่เป็นลบ และโดยบทตั้ง 3.6 จะได้ว่า

$$\Delta_c^{k+m}u(x) = \Delta_c^k\Delta_c^m u(x) = \delta(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\Delta_c^m u(x) = (-1)^k R_{2k,c}^e(x)$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการข้างต้น $(-1)^m R_{2m,c}^e(x)$ จะได้ว่า

$$(-1)^k R_{2m,c}^e(x) * \Delta_c^m u(x) = (-1)^k R_{2k,c}^e(x) * (-1)^k R_{2m,c}^e(x)$$

หรือ

$$\delta(x) * u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k,c}^e(x) * R_{2m,c}^e(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k,c}^e(x) * R_{2m,c}^e(x)$$

ดังนั้น

$$u(x) = (-1)^{k+m} R_{2k+2m,c}^e(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$R_{2k,c}^e(x) * R_{2m,c}^e(x) = R_{2k+2m,c}^e(x)$$

(d) เนื่องจาก $R^e_{2k,c}(x)$ และ $R^e_{2m,c}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $R^e_{2k,c}(x)$และ $R^e_{2m,c}(x)$ จึงเป็นสมาชิกของพีชคณิตผลประสาน u' ของดิสตริบิวชัน โดย (Kananthai. 1997) สามารถแสดงได้ว่า $R^e_{2k,c}(x) = R^{e*-1}_{2m,c}(x)$ เป็นตัวผกผัน

บทตั้ง 3.8

กำหนดให้ $R^e_{2k,c}(x)$ และ $w_n(2k)$ ซึ่งนิยามโดยสมการ (2.5) และ (2.6) จะได้ว่า

(a) $w_n(2k+2) = 2k(n-2k-2)w_n(2k)$

(b) $\Delta^k_c R^e_{2m,c}(x) = (-1)^k R^e_{2m-2k,c}(x)$ โดยที่ k และ m เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

(c) $R^e_{-2k,c}(x) = (-1)^k \Delta^k_c \delta(x)$โดยที่ k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

(a) จากสมการ (2.6) จะได้ว่า

$$w_n(2k+2) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2k+2} \Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2k-2}{2}\right)}$$

$$= \frac{2k(n-2k-2)\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2k} \Gamma(k)}{\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}\right)}$$

$$= 2k(n-2k-2)w_n(2k)$$

(b) โดยบทตั้ง 3.7(c) จะได้ว่า

$$\delta * R^e_{2m,c}(x) = R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m-2k,c}(x)$$

$$\Delta^k_c (-1)^k R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m,c}(x) = R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m-2k,c}(x)$$

$$(-1)^k R^e_{2k,c}(x) * \Delta^k_c R^e_{2m,c}(x) = R^e_{2k,c}(x) * R^e_{2m-2k,c}(x)$$

และ

$$\Delta^k_c R^e_{2m}(x) = (-1)^k R^e_{2m-2k,c}(x)$$

(c) สำหรับ $m = k$ โดยบทตั้ง 3.8(b) จะได้ว่า

$$\Delta^k_c R^e_{2m,c}(x) = (-1)^k R^e_{0,c}(x) \quad R^e_{0,c} = \delta$$

สำหรับ $m = 0$ โดยบทตั้ง 3.8(b) จะได้ว่า

$$\Delta^k_c R^e_{0,c}(x) = (-1)^k R^e_{-2k,c}(x) \quad \text{หรือ} \quad (-1)^k \Delta^k_c \delta = R^e_{-2k,c}(x)$$

บทตั้ง 3.9

$R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ของอันดับ $(\alpha - n - 2|v|)$ สำหรับกรณีเฉพาะ $R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

พิสูจน์

เราจำเป็นต้องแสดงว่า $R_\alpha(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_\alpha(x) = (\alpha - n - 2|v|)R_\alpha(x)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} R_\alpha(x) &= \frac{1}{w_n(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}} \\
&= \frac{1}{w_n(\alpha)}(\alpha - n)\left(x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}-1} \\
&\times\left(x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right) \\
&= \frac{1}{w_n(\alpha)}(\alpha - n)\left(x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}} \\
&= \frac{(\alpha - n - 2|v|)V^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}}}{w_n(\alpha)} \\
&= (\alpha - n - 2|v|)R_\alpha^e(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ของอันดับ $(\alpha - n - 2|v|)$, (Donoghue. 1969) ได้พิสูจน์ว่าสำหรับทุกๆดิสตริบิวชันเอกพันธ์จะเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ เพราะฉะนั้น $R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 3.10

กำหนดสมการ

$$\Delta_B^k u(x) = \delta(x) \tag{3.3}$$

โดยที่ Δ_B^k นิยามโดย (1.5) สำหรับ $x \in \mathrm{R}_n^+ = \{x : x = (x_1,...,x_n), x_1 > 0,..., x_n > 0\}$และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า $u(x) = (-1)^k R_{2k}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานองสมการ (3.3) โดยที่ $R_{2k}(x)$ นิยามโดยสมการ (2.8)
สำหรับ $\alpha = 2k$

พิสูจน์

การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Yildirim, Sarikaya and Ozturk. 2004)

บทตั้ง 3.11 (ผลประสานของดิสตริบิวชันเทมเพอร์)

(a) $\left(\Delta_B^k \delta \right) * u(x) = \Delta_B^k u(x)$ โดยที่ $u(x)$เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ใดๆ

(b) กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$นิยามโดยสมการ (2.8) จะได้ว่า $R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$ หาค่าได้ และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$นิยามโดยสมการ (2.8) จะได้ว่า $R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k+2m}(x)$

(d) กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ถ้า $R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = \delta$ แล้ว $R_{2k}(x)$ เป็นตัวผกผันของ $R_{2m}(x)$ ในพีชคณิตผลประสานเขียนแทนด้วย $R_{2k}(x) = R_{2m}^{*-1}(x)$

พิสูจน์

(a) พิจารณากรณี $k = 1$จะได้ว่า

$$\Delta_B \delta(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_j} \right)$$

$$,\ p + q = n$$

กำหนดให้ $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าทดสอบในปริภูมิชวาร์ต S โดยบทนิยามของผลประสานจะได้ว่า

$$\left\langle \Delta_B \delta(x) * u(x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle u(x), \left\langle \Delta_B \delta(x), \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left\langle \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \delta(y)}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \delta(y)}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \delta(y)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \delta(y)}{\partial x_j} \right), \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left\langle \delta(y), \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \varphi(x+y)}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \varphi(x+y)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right) \right\rangle \right\rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \varphi(x) \right\rangle$$

$$= \left\langle \Delta_B u(x), \varphi(x) \right\rangle$$

จะได้ว่า

$$\Delta_B \delta(x) * u(x) = \Delta_B u(x)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ k ใดๆ จะได้ว่า

$$\Delta_B^k \delta(x) * u(x) = \Delta_B^k u(x)$$

(b) โดยบทตั้ง 3.9 จะได้ว่า $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์และ $R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$ หาค่าได้ และโดย (Yildirim, Sarikaya and Ozturk. 2004) จะได้ว่าเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) จากสมการ $\Delta_B^{k+m}u(x)=\delta(x)$ โดยบทตั้ง 3.10 จะได้ว่า $u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k+2m}(x)$ สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆที่ไม่เป็นลบ และโดยบทตั้ง 3.10 จะได้ว่า

$$\Delta_B^{k+m}u(x)=\Delta_B^k\Delta_B^m u(x)=\delta(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\Delta_B^m u(x)=(-1)^k R_{2k}(x)$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการข้างต้นด้วย $(-1)^m R_{2m}(x)$ จะได้ว่า

$$(-1)^m R_{2m}(x)*\Delta_B^m u(x)=(-1)^k R_{2k}(x)*(-1)^k R_{2m}(x)$$

หรือ

$$\delta(x)*u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k}(x)*R_{2m}(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k}(x)*R_{2m}(x)$$

ดังนั้น

$$u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k+2m}(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$R_{2k}(x)*R_{2m}(x)=R_{2k+2m}(x)$$

(d) เนื่องจาก $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ จึงเป็นสมาชิกของพีชคณิตผลประสาน u' ของดิสตริบิวชัน โดย (Yildirim, Sarikaya and Ozturk. 2004) สามารถแสดงได้ว่า $R_{2k}(x)=R_{2m}^{*-1}(x)$ เป็นตัวผกผัน

บทตั้ง 3.12

กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $w_n(2k)$ ซึ่งนิยามโดยสมการ (2.8) และ (2.9) จะได้ว่า

(a) $w_n(2k+2)=16k(n+2|v|-2k-2)w_n(2k)$

(b) $\Delta_B^k R_{2m}(x)=(-1)^k R_{2m-2k}(x)$ โดยที่ k และ m เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

(c) $R_{-2k}(x)=(-1)^k\Delta_B^k\delta(x)$ โดยที่ k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

(a) จากสมการ (2.9) จะได้ว่า

$$w_n(2k+2)=\frac{\Pi_{i=1}^n 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)}{2^{n+2|v|-4k-4}\Gamma\left(\frac{n+|v|-2k-2}{2}\right)}$$

$$=16k(n+|v|-2k-2)w_n(2k)$$

(b) โดยบทตั้ง 3.11(c) จะได้ว่า

$$\delta * R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}(x)$$
$$\Delta_B^k (-1)^k R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}(x)$$
$$(-1)^k R_{2k}(x) * \Delta_B^k R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}(x)$$

และ

$$\Delta_B^k R_{2m}(x) = (-1)^k R_{2m-2k}(x)$$

(c) สำหรับ $m = k$ โดยบทตั้ง 3.12(b) จะได้ว่า

$$\Delta_B^k R_{2m}(x) = (-1)^k R_0(x) \quad R_0 = \delta$$

สำหรับ $m = 0$ โดยบทตั้ง 3.12(b) จะได้ว่า

$$\Delta_B^k R_0(x) = (-1)^k R_{-2k}(x) \quad \text{หรือ} \quad (-1)^k \Delta_B^k \delta = R_{-2k}(x)$$

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ผลการวิจัยในครั้งนี้ ได้ค้นพบทฤษฎีบทการหาผลเฉลยแบบอ่อน (weak solution) ของสมการเชิงประกอบของตัวดำเนินการบางตัวที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งประกอบด้วย 3 ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1

กำหนดสมการเชิงประกอบลาปลาซ (compound Laplace equation)

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta^r u(x) = f(x) \tag{4.1}$$

โดยที่ Δ^r เป็นตัวดำเนินการลาปลาซกระทำซ้ำกัน r ครั้ง (iterated r-times) ซึ่งนิยามในสมการ (4.1) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalized function) $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function) $x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัว (constant) จะได้ว่าสมการ (4.1) มีผลเฉลยเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2m}^e(x) * \left((-1)^m C_m R_0^e(x) + w(x) R_2^e(x)\right)^{*-1} \tag{4.2}$$

โดยที่

$$w(x) = (-1)^{m-1} C_{m-1} + (-1)^{m-2} C_{m-2} \frac{V}{2(n-4)} + (-1)^{m-3} C_{m-3} \frac{V^2}{2\cdot 4(n-4)(n-6)} + \cdots$$

$$+ C_0 \frac{V^{m-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(m-1)(n-4)(n-6)\cdots(n-2m)} \tag{4.3}$$

และ V นิยามในสมการ (2.1) และ $\left((-1)^m C_m R_0^e(x) + w(x) R_2^e(x)\right)^{*-1}$ เป็นตัวผกผัน (inverse) ของ $\left((-1)^m C_m R_0^e(x) + w(x) R_2^e(x)\right)$

พิสูจน์

จากบทตั้ง 3.3(a) สมการ (4.1) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\left(C_m \Delta^m \delta + C_{m-1} \Delta^{m-1} \delta + \cdots + C_1 \delta + C_0 \delta\right) * u(x) = f(x)$$

จากสมการข้างต้น convolving ด้วยฟังก์ชัน $R_{2m}^e(x)$ จะได้ว่า

$$(C_m \Delta^m R_{2m}^e(x) + C_{m-1} \Delta^{m-1} R_{2m}^e(x) + \cdots + C_1 R_{2m}^e(x) + C_0 R_{2m}^e(x)) * u(x) = f(x) * R_{2m}^e(x)$$

จากบทตั้ง 3.2 และ 3.4(b) จะได้ว่า

$$((-1)^m C_m \delta + (-1)^{m-1} C_{m-1} R_2^e(x) + \cdots + (-1) C_1 R_{2(m-1)}^e(x) + C_0 R_{2m}^e(x)) * u(x) = f(x) * R_{2m}^e(x) \tag{4.4}$$

จากบทตั้ง 3.4(a) จะได้ว่า

$$R_4^e(x)=\frac{V^{\frac{4-n}{2}}}{w_n(4)}=\frac{V^{\frac{2-n}{2}}\cdot V}{2(n-2-2)w_n(2)}=R_2^e(x)\cdot\frac{V}{2(n-4)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$R_6^e(x)=R_2^e(x)\cdot\frac{V^2}{2\cdot 4(n-4)(n-6)}$$

$$R_8^e(x)=R_2^e(x)\cdot\frac{V^3}{2\cdot 4\cdot 6(n-4)(n-6)(n-8)}$$

$\vdots$

$$R_{2m}^e(x)=R_2^e(x)\cdot\frac{V^{m-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(m-1)(n-4)(n-6)(n-8)\cdots(n-2m)}$$

ดังนั้น จะได้ว่าฟังก์ชัน $w(x)$ในสมการ (4.3)เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ $R_2^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ (temper distribution) ที่มีซัพพอร์ตกระชับ (compact support) ดังนั้น $w(x)R_2^e(x)$และ $(-1)^m C_m R_0^e(x)+w(x)R_2^e(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับด้วย โดยบทตั้ง 3.3(d) จะได้ว่า

$(-1)^m C_m R_0^e(x)+w(x)R_2^e(x)$ มีตัวผกผันเป็น

$$((-1)^m C_m R_0^e(x)+w(x)R_2^e(x))^{*-1}$$

เนื่องสมการ (4.4) จัดรูปใหม่เป็น

$$\left((-1)^m C_m R_0^e(x)+w(x)R_2^e(x)\right)*u(x)=f(x)*R_{2m}^e(x),\quad R_0^e=\delta$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการด้วย

$$((-1)^m C_m R_0^e(x)+w(x)R_2^e(x))^{*-1}$$

จะได้ว่า

$$u(x)=f(x)*R_{2m}^e(x)*((-1)^m C_m R_0^e(x)+w(x)R_2^e(x))^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ (4.1) สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท 4.2

กำหนดสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_c^r u(x) = f(x) \tag{4.5}$$

โดยที่ Δ_c^r เป็นตัวดำเนินที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการการลาปลาซกระทำซ้ำกัน r ครั้ง ซึ่งนิยามในสมการ (1.7) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัว จะได้ว่าสมการ (4.5) มีผลเฉลยเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2m,c}^e(x) * \left((-1)^m C_m R_{0,c}^e(x) + w(x) R_{2,c}^e(x)\right)^{*-1} \tag{4.6}$$

โดยที่

$$w(x) = (-1)^{m-1} C_{m-1} + (-1)^{m-2} C_{m-2} \frac{V}{2(n-4)} + (-1)^{m-3} C_{m-3} \frac{V^2}{2 \cdot 4(n-4)(n-6)} + \cdots$$

$$+ C_0 \frac{V^{m-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2(m-1)(n-4)(n-6) \cdots (n-2m)} \tag{4.7}$$

และ V นิยามในสมการ (2.4) และ $\left((-1)^m C_m R_0^e(x) + w(x) R_{2,c}^e(x)\right)^{*-1}$ เป็นตัวผกผัน (inverse) ของ $\left((-1)^m C_m R_0^e(x) + w(x) R_{2,c}^e(x)\right)$

พิสูจน์

จากบทตั้ง 3.7(a) สมการ (4.5) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\left(C_m \Delta^m \delta + C_{m-1} \Delta^{m-1} \delta + \cdots + C_1 \delta + C_0 \delta\right) * u(x) = f(x)$$

จากสมการข้างต้น convolving ด้วยฟังก์ชัน $R_{2m,c}^e(x)$ จะได้ว่า

$$(C_m \Delta^m R_{2m,c}^e(x) + C_{m-1} \Delta^{m-1} R_{2m,c}^e(x) + \cdots + C_1 R_{2m,c}^e(x) + C_0 R_{2m,c}^e(x)) * u(x) = f(x) * R_{2m,c}^e(x)$$

จากบทตั้ง 3.6 และ 3.8(b) จะได้ว่า

$$((-1)^m C_m \delta + (-1)^{m-1} C_{m-1} R_{2,c}^e(x) + \cdots + (-1) C_1 R_{2(m-1),c}^e(x) + C_0 R_{2m,c}^e(x)) * u(x) = f(x) * R_{2m,c}^e(x) \tag{4.8}$$

จากบทตั้ง 3.8(a) จะได้ว่า

$$R_{4,c}^e(x) = \frac{V^{\frac{4-n}{2}}}{w_n(4)} = \frac{V^{\frac{2-n}{2}} \cdot V}{2(n-2-2) w_n(2)} = R_{2,c}^e(x) \cdot \frac{V}{2(n-4)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$R_{6,c}^e(x) = R_{2,c}^e(x) \cdot \frac{V^2}{2 \cdot 4(n-4)(n-6)}$$

$$R_{8,c}^e(x) = R_{2,c}^e(x) \cdot \frac{V^3}{2 \cdot 4 \cdot 6(n-4)(n-6)(n-8)}$$

$$\vdots$$

$$R_{2m,c}^{e}(x)=R_{2,c}^{e}(x)\cdot\frac{V^{m-1}}{2\cdot4\cdot6\cdots2(m-1)(n-4)(n-6)(n-8)\cdots(n-2m)}$$

ดังนั้น จะได้ว่าฟังก์ชัน $w(x)$ ในสมการ (4.7) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับสำหรับ n เป็นจำนวนคี่ $R_{2,c}^{e}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $w(x)R_{2,c}^{e}(x)$ และ $(-1)^m C_m R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับด้วย โดยบทตั้ง 3.7(d) จะได้ว่า $(-1)^m C_m R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x)$ มีตัวผกผันเป็น

$$((-1)^m C_m R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x))^{*-1}$$

เนื่องสมการ (4.8) จัดรูปใหม่เป็น

$$\left((-1)^m C_m R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x)\right)*u(x)=f(x)*R_{2m,c}^{e}(x),\quad R_{0,c}^{e}=\delta$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการด้วย

$$((-1)^m C_m R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x))^{*-1}$$

จะได้ว่า

$$u(x)=f(x)*R_{2m,c}^{e}(x)*((-1)^m C_m R_{0,c}^{e}(x)+w(x)R_{2,c}^{e}(x))^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ (4.5) สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท 4.3

กำหนดสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล (compound Laplace Bessel equation)

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_B^r u(x)=f(x) \tag{4.9}$$

โดยที่ Δ_B^r เป็นตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล กระทำซ้ำกัน r ครั้ง ซึ่งนิยามในสมการ (1.5) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $x\in\mathrm{R}_n^+$ และ C_r เป็นค่าคงตัว จะได้ว่าสมการ (4.9) มีผลเฉลยเป็น

$$u(x)=f(x)*R_{2m}(x)*\left((-1)^m C_m R_0(x)+w(x)R_2(x)\right)^{*-1} \tag{4.10}$$

โดยที่

$$w(x)=(-1)^{m-1}C_{m-1}+(-1)^{m-2}C_{m-2}\frac{V}{16(n+2|v|-4)}+(-1)^{m-3}C_{m-3}\frac{V^2}{16\cdot32(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)}$$

$$\cdots+C_0\frac{V^{m-1}}{16\cdot32\cdot64\cdots16(m-1)(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)\cdots(n+2|v|-2m)} \tag{4.11}$$

และ V นิยามในสมการ (2.7) และ $\left((-1)^m C_m R_0(x)+w(x)R_2(x)\right)^{*-1}$ เป็นตัวผกผัน ของ $\left((-1)^m C_m R_0(x)+w(x)R_2(x)\right)$

พิสูจน์

จากบทตั้ง 3.11(a) สมการ (4.9) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\left(C_m\Delta_B^m\delta+C_{m-1}\Delta_B^{m-1}\delta+\cdots+C_1\delta+C_0\delta\right)*u(x)=f(x)$$

จากสมการข้างต้น convolving ด้วยฟังก์ชัน $R_{2m}(x)$ จะได้ว่า

$$(C_m\Delta_B^m R_{2m}(x)+C_{m-1}\Delta_B^{m-1}R_{2m}(x)+\cdots+C_1R_{2m}(x)+C_0R_{2m}(x))*u(x)=f(x)*R_{2m}(x)$$

จากบทตั้ง 3.10 และ 3.12(b) จะได้ว่า

$$((-1)^m C_m\delta+(-1)^{m-1}C_{m-1}R_2(x)+\cdots+(-1)C_1R_{2(m-1)}(x)+C_0R_{2m}(x))*u(x)=f(x)*R_{2m}(x) \tag{4.12}$$

จากบทตั้ง 3.12(a) จะได้ว่า

$$R_4(x)=\frac{V^{\frac{4-n-|v|}{2}}}{w_n(4)}=\frac{V^{\frac{2-n-|v|}{2}}\cdot V}{16(n+2|v|-4)w_n(2)}=R_2(x)\cdot\frac{V}{16(n+2|v|-4)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$R_6(x)=R_2(x)\cdot\frac{V^2}{16\cdot 32(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)}$$

$$R_8(x)=R_2(x)\cdot\frac{V^3}{16\cdot 32\cdot 64(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)(n+2|v|-8)}$$

$\vdots$

$$R_{2m}(x)=R_2(x)\cdot\frac{V^{m-1}}{16\cdot 32\cdot 64\cdots 16(m-1)(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)\cdots(n+2|v|-2m)}$$

ดังนั้น จะได้ว่าฟังก์ชัน $w(x)$ ในสมการ (4.11) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ $R_2(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $w(x)R_2(x)$ และ $(-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับด้วย โดยบทตั้ง 3.11(d) จะได้ว่า $(-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)$ มีตัวผกผันเป็น

$$((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x))^{*-1}$$

เนื่องสมการ (4.12) จัดรูปใหม่เป็น

$$\left((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)\right)*u(x)=f(x)*R_{2m}(x),\quad R_0=\delta$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการด้วย

$$((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x))^{*-1}$$

จะได้ว่า

$$u(x)=f(x)*R_{2m}(x)*((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x))^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ (4.9) สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

การวิจัยในครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบของตัวดำเนินการบางตัวที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการลาปลาซ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซและลาปลาซเบสเซิล
2. ศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ

ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ^r แทนตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta^r = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)\right]^r, \quad p+q=n$$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ $\mathrm{R}^n, x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัว

นอกจากนี้ เราจะขยายแนวความคิดที่ได้ไปศึกษาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล และสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซด้วยซึ่งสมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta_c^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ_c^r แทนตัวดำเนินการที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาซ ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta_c^r = \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)\right]^r, \quad p+q=n$$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ $\mathrm{R}^n, x \in \mathrm{R}^n$ และ C_r เป็นค่าคงตัว

และสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล สมการอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta_B^r u(x) = f(x)$$

เมื่อ Δ_B^r แทนตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล ซึ่งนิยามโดย

$$\Delta_B^r = (B_{x_1} + \cdots B_{x_p} + B_{x_{p+1}} + \cdots + B_{x_{p+q}})^r,\ p+q=n$$

โดยที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป n เป็นมิติของปริภูมิ $\mathbf{R}_n^+, x \in \mathbf{R}_n^+$ และ C_r เป็นค่าคงตัว

สรุปผลการวิจัย

จากการวิจัยในครั้งนี้ สามารถสรุปผลการวิจัย ดังนี้

1. ได้ค้นพบทฤษฎีบทในการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบของสมการที่อยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta^r u(x) = f(x)$$

และได้ผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2m}^e(x) * ((-1)^m C_m R_0^e(x) + w(x) R_2^e(x))^{*-1}$$

สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $x \in \mathrm{R}^n$

2. ได้ค้นพบทฤษฎีบทในการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบของสมการที่อยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta_B^r u(x) = f(x)$$

และได้ผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2m}(x) * ((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x))^{*-1}$$

สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่ $x \in \mathrm{R}_n^+$

3. ได้ค้นพบทฤษฎีบทในการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบของสมการที่อยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Delta_c^r u(x) = f(x)$$

และได้ผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2m,c}^e(x) * ((-1)^m C_m R_{0,c}^e(x) + w(x) R_{2,c}^e(x))^{*-1}$$

สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $x \in \mathrm{R}^n$

ข้อเสนอแนะ

1. ควรศึกษาการหาผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบอื่นๆเช่น ในรูปแบบของตัวดำเนินการไดมอนด์และเบสเซิลไดมอนด์

2. ควรเปลี่ยนรูปแบบสมการในการศึกษาจากรูปแบบ $\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta^r u(x) = f(x)$, $\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_B^r u(x) = f(x)$ และ $\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_c^r u(x) = f(x)$

เปลี่ยนเป็นรูปแบบ

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta^r (P \pm i0) = f(P \pm i0),\ \sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_B^r (P \pm i0) = f(P \pm i0) \text{ และ } \sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_c^r (P \pm i0) = f(P \pm i0)$$

โดยที่ $$P = x_1 + \cdots + x_p + x_{p+1} + \cdots + x_{p+q}$$

บรรณานุกรม

A. Kananthai. (1998). On the Convolution equation related to the Diamond Kernel of Marcel Riesz. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. Vol. **100** , 33-39.

__________ . (2000). On the Convolution related to the n-dimensional Ultra-hyperbolic operator. **Journal of Computational and Applied Mathematics.** Vol. **115**, 301-308.

__________ . (1997). On the solution of the n-dimensional Diamond operator. **Applied Mathematics and Computation.** Vol. 88, 27-37.

__________ . (1997). On the solutions of the n-dimensional Ultra-hyperbolic operator. **Functions Analysis and Global Analysis springer**. Vol.14. 157-161.

__________ . (1999). On the product of Ultra-hyperbolic operator related to the Elastic Waves. **Computational Technologies**. Vol. 4. 88-91.

A. Kananthai and K. Nonlaopon. (2002). On the weak solution of the compound ultra-hyperbolic equation, **CMU J**. Vol. 3, 209 - 214.

A.H. Zemanian. (1965). **Distribution and Transform Analysis**. New York : Mc Graw-Hill.

A. Saglam, H. Yildirim and M. Z. Sarikaya. (2009). On the product of the ultra-hyperbolic Bessel operator related to the elastic waves. **Selcuk J. Appl. Math.**, Vol. 10, 85-93.

G. Sritanratana and A. Kananthai. (2004). On the product of the non-linear Diamond operators related to the elastic wave. **Applied Mathematics and Computation**. Vol. 147, 79-88.

__________ . (2002). On the nonlinear Diamond operator related to the Wave equation. **Nonlinear Analysis : Series B. Real World Application** Vol.3, 465-470.

H.Bateman. (1953). **Higher transcendental function**. Manuscript Project. Vol.1 New York : Mc-Graw Hill.

I. M. Gelfand and G. E. Shilov. (1964). **Generalized Functions**. Academic Press : New York.

H. Yildirim, M. Z. Sarikaya and S. Ozturk. (2004). The solutions of the n-dimensional Bessel diamond operator and the Fourier-Bessel transform of their convolution, **Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)**. Vol.**114**, 375-387.

M. Z. Sarikaya and H. Yildirim. (2009). On the B-convolutions of the Bessel diamond kernel of Riesz. **Appl. Math. Comput.,** Vol. 208, 18–22.

M. Z. Sarikaya and H. Yildirim. (2007). On the weak solution of the compound Bessel ultra-hyperbolic equation. **Appl. Math. Comput**. Vol.189, 910 - 917.

M.A. Tellez. (1994). The distributional Hankel transform of Marcel Riesz's ultra-hyperbolic kernel. **studies in Applied Mathematics**. Vol. 93, 133-162.

M.A. Tellez and S.E. Trione. (1995). The distributional convolution products of Marcel Riesz's ultra-hyperbolic kernel. **Revista de la Union Mathematica Argentina. Vol.** 39, 115-124.

Mehmet Zeki Sarıkaya and Huseyin Yıldırı. (2008). On the Bessel diamond and the nonlinear Bessel diamond operator related to the Bessel wave equation. **Nonlinear Analysis**. Vol. 68, 430–442.

P.K. Ram. (1998). **Generalized functions theory and technique**. 2 nd ed. Birkhauser Boston Hamilton Printing.

S. Bupasiri and K. Nonlaopon. (2009). On the weak solutions of the compound equation related to the ultra-hyperbolic operators, **Far East J. Appl. Math.,Vol.35**, 129-139.

S. E. Trione and Rubén A. Cerutti**. (1999).** The inversion of Marcel Riesz ultrayperbolic Operators**. Applied Mathematics Letters**. Vol. **12**, 129-136.

S. E. Trione. (1987). On Marcel Riesz's ultrahyperbolic kernel. **Trabajos de Matematica**. p. 116.

W.F. Donoghue. (1969). **Distribution and Fourier Transform**. Academic Press :New York.

ประวัติผู้ทำวิจัย

ชื่อ – สกุล	นายสุดประไทย บุพศิริ
วัน เดือน ปีเกิด	23 มกราคม 2524
สถานที่เกิด	จังหวัดนครพนม
ประวัติการศึกษา	จบหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พ.ศ. 2542 โรงเรียนอากาศอำนวยศึกษา อำเภออากาศอำนวย จังหวัดสกลนคร จบหลักสูตรปริญญาตรี (ค.บ. คณิตศาสตร์) พ.ศ. 2547 สถาบันราชภัฏสกลนคร จังหวัดสกลนคร จบหลักสูตรปริญญาโท (วท.ม. คณิตศาสตร์) พ.ศ. 2552 มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัดขอนแก่น

ภาคผนวก

บทความวิจัยที่ได้รับการยอมรับตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ
จำนวน 2 เรื่อง