ผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล
On the Weak Solution of Compound Laplace Bessel Equation

สุดประไทย บุพศิริ
Sudprathai Bupasiri

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
Faculty of Education Mathematics Program,
Sakon Nakhon Rajabhat University,
e-mail : sudprathai1@hotmail.co.th

บทคัดย่อ

สำหรับบทความวิจัยนี้เป็นการศึกษาสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิลซึ่งอยู่ในรูป

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_B^r u(x) = f(x)$$

โดยที่ Δ_B^r เป็นตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิลกระทำซ้ำกัน r ครั้ง $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $x \in \mathrm{R}_n^+$ และ C_r เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$u(x) = f(x) * R_{2m}(x) * \left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)^{*-1}$$

โดยที่

$$w(x) = (-1)^{m-1} C_{m-1} + (-1)^{m-2} C_{m-2} \frac{V}{16(n+2|v|-4)} + (-1)^{m-3} C_{m-3} \frac{V^2}{16 \cdot 32(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)}$$

$$\cdots + C_0 \frac{V^{m-1}}{16 \cdot 32 \cdot 64 \cdots 16(m-1)(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)\cdots(n+2|v|-2m)}$$

และ V นิยามในสมการ (2.1) และ $\left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)^{*-1}$ เป็นตัวผกผัน ของ $\left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)$

Abstract

In this paper, we study the compound Laplace Bessel equation

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_B^r u(x) = f(x),$$

where Δ_B^r is the Laplace-Bessel operator, iterated r-times, $f(x)$ is a generalized function, $u(x)$ is an unknown function, $u(x)$, $x \in \mathrm{R}_n^+$ and C_r is a constant, we obtain the weak solution

$$u(x) = f(x) * R_{2m}(x) * \left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)^{*-1},$$

where

$$w(x)=(-1)^{m-1}C_{m-1}+(-1)^{m-2}C_{m-2}\frac{V}{16(n+2|v|-4)}+(-1)^{m-3}C_{m-3}\frac{V^2}{16\cdot 32(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)}$$

$$\cdots+C_0\frac{V^{m-1}}{16\cdot 32\cdot 64\cdots 16(m-1)(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)\cdots(n+2|v|-2m)}$$

And V defined by (2.1) and $\left((-1)^m C_m R_0(x)+w(x)R_2(x)\right)^{*-1}$ is an inverse of $\left((-1)^m C_m R_0(x)+w(x)R_2(x)\right)$

1 บทนำ

(M.Z. Sarikaya and H. Yildirim. 2007) ได้แสดงว่า $u(x)=(-1)^k R_{2k}^e(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐาน (elementary solution) ของสมการ

$$\Delta_B^k u(x)=\delta(x)$$

ต่อมา (A. Kananthai and K. Nonlaopon. 2002) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบอัลตราไฮเพอร์โบลิก (M.Z. Sarikaya and H. Yildirim. 2007) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบเบสเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิกด้วย

นอกจากนี้ (S. Bupasiri and K. Nonlaopon. 2009) ก็ศึกษาเกี่ยวกับผลเฉลยแบบอ่อนของสมการเชิงประกอบที่สัมพันธ์กับตัวดำเนินการเซิลอัลตราไฮเพอร์โบลิก

ในบทความนี้ จะพิจารณาตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิลกระทำซ้ำกัน k ครั้ง สำหรับ $x\in \mathrm{R}_n^+=\{x: x=(x_1,...,x_n), x_1>0,...,x_n>0\}$ โดยที่ ตัวดำเนินการเบสเซิลกระทำซ้ำกัน k ครั้ง กำหนดโดย

$$\Delta_B^k=\left(B_{x_1}+\cdots+B_{x_p}+B_{x_{p+1}}+\cdots+B_{x_{p+q}}\right)^k, \tag{1.1}$$

$p+q=n$, $B_{x_i}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\dfrac{2v_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ เมื่อ $2v_i=2\alpha_i+1,\ 2\alpha_i>-\dfrac{1}{2}$, $x_i>0$, $i=1,2,3,\ldots,n$, k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (nonnegative integer) และ n เป็นมิติของปริภูมิ R_n^+

พิจารณาสมการ

$$\Delta_B^r u(x)=f(x) \tag{1.2}$$

เมื่อ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function), $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป (generalize function)

เราจะขยายแนวคิดจากสมการ (1.2) ให้อยู่ในรูปของสมการ

$$\sum_{r=0}^{m} C_r\Delta_B^r u(x)=f(x) \tag{1.3}$$

ซึ่งสมการ **(1.3)** จะเรียกว่า **สมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล** (compound Laplace Bessel equation) เพื่อความสะดวกจะได้ว่า $\Delta_B^0 u(x)=\delta(x)$ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการ (1.3) จะใช้ความรู้เกี่ยวกับผลประสาน (convolution) ของฟังก์ชันวางนัยทั่วไป

2 ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1

กำหนดให้ $x=(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นจุด (point) ของปริภูมิ

$$\mathrm{R}_n^+=\{x=(x_1,\ldots,x_n): x_1>0,\ldots,x_n>0\}$$

$$V=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2 \tag{2.1}$$

โดยที่ $p+q=n$ นิยามฟังก์ชัน

$$R_{2k}(x)=\frac{V^{2k-n-|v|/2}}{w_n(2k)}, \tag{2.2}$$

และ

$$w_n(2k)=\frac{\Pi_{i=1}^{n}2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k)}{2^{n+2|v|-4k}\Gamma\left(\frac{n+2|v|-2k}{2}\right)} \tag{2.3}$$

บทตั้ง 2.1

$R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ (homogeneous distribution) ของอันดับ $(\alpha-n-2|v|)$ สำหรับกรณีเฉพาะ $R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ (temper distribution) ด้วย

พิสูจน์

เราจำเป็นต้องแสดงว่า $R_\alpha(x)$ สอดคล้องกับสมการออยเลอร์นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}R_\alpha(x)=(\alpha-n-2|v|)R_\alpha(x)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}R_\alpha(x)&=\frac{1}{w_n(\alpha)}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}}\\&=\frac{1}{w_n(\alpha)}(\alpha-n)\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}-1}\\&\quad\times\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)\\&=\frac{1}{w_n(\alpha)}(\alpha-n)\left(x_1^2+\cdots+x_p^2+x_{p+1}^2+\cdots+x_{p+q}^2\right)^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}}\\&=\frac{(\alpha-n-2|v|)V^{\frac{\alpha-n-2|v|}{2}}}{w_n(\alpha)}\\&=(\alpha-n-2|v|)R_\alpha^e(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $R_\alpha(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเอกพันธ์ของอันดับ $(\alpha-n-2|v|)$, (Donoghue. 1969) ได้พิสูจน์ว่าสำหรับทุกๆดิสตริบิวชันเอกพันธ์จะเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ เพราะฉะนั้น $R_\alpha(x)$ เป็น
ดิสตริบิวชันเทมเพอร์

บทตั้ง 2.2

กำหนดสมการ

$$\Delta_B^k u(x) = \delta(x) \tag{2.4}$$

โดยที่ Δ_B^k นิยามโดย (1.1) สำหรับ $x \in \mathrm{R}_n^+ = \{x : x = (x_1, ..., x_n), x_1 > 0, ..., x_n > 0\}$ และ δ เป็นดิสตริบิวชันไดแรคเดลตา จะได้ว่า $u(x) = (-1)^k R_{2k}(x)$ เป็นผลเฉลยมูลฐานองสมการ (2.4) โดยที่ $R_{2k}(x)$ นิยามโดยสมการ (2.2)

สำหรับ $\alpha = 2k$

พิสูจน์

การพิสูจน์ปรากฏในบทความวิจัย (Yildirim, Sarikaya and Ozturk. 2004)

บทตั้ง 2.3 (ผลประสานของดิสตริบิวชันเทมเพอร์)

(a) $(\Delta_B^k \delta) * u(x) = \Delta_B^k u(x)$ โดยที่ $u(x)$เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ใดๆ

(b) กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$นิยามโดยสมการ (2.2)

จะได้ว่า $R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$ หาค่าได้ และเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$นิยามโดยสมการ (2.2)

จะได้ว่า $R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k+2m}(x)$

(d) กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ถ้า $R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = \delta$ แล้ว $R_{2k}(x)$ เป็นตัวผกผันของ $R_{2m}(x)$ ในพีชคณิตผลประสานเขียนแทนด้วย $R_{2k}(x) = R_{2m}^{*-1}(x)$

พิสูจน์

(a) พิจารณากรณี $k = 1$จะได้ว่า

$$\Delta_B \delta(x) = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \delta(x)}{\partial x_j} \right)$$

$$,\ p + q = n$$

กำหนดให้ $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าทดสอบในปริภูมิซวาร์ต S โดยบทนิยามของผลประสานจะได้ว่า

$$\langle \Delta_B \delta(x) * u(x), \varphi(x) \rangle = \langle u(x), \langle \Delta_B \delta(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left\langle \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \delta(y)}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \delta(y)}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \delta(y)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \delta(y)}{\partial x_j} \right), \varphi(x+y) \right\rangle \right.$$

$$= \left\langle u(x), \left\langle \delta(y), \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \varphi(x+y)}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \varphi(x+y)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right) \right\rangle \right\rangle$$

$$= \left\langle u(x), \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^{p+q} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \varphi(x) \right\rangle$$

$$= \langle \Delta_B u(x), \varphi(x) \rangle$$

จะได้ว่า

$$\Delta_B\delta(x)*u(x)=\Delta_B u(x)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ k ใดๆ จะได้ว่า

$$\Delta_B^k\delta(x)*u(x)=\Delta_B^k u(x)$$

(b) โดยบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์และ $R_{2k}(x)*R_{2m}(x)$ หาค่าได้ และโดย (Yildirim, Sarikaya and Ozturk. 2004) จะได้ว่าเป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ด้วย

(c) จากสมการ $\Delta_B^{k+m}u(x)=\delta(x)$ โดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า $u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k+2m}(x)$ สำหรับจำนวนเต็ม m ใดๆที่ไม่เป็นลบ และโดยบทตั้ง 2.2 จะได้ว่า

$$\Delta_B^{k+m}u(x)=\Delta_B^k\Delta_B^m u(x)=\delta(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\Delta_B^m u(x)=(-1)^k R_{2k}(x)$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการข้างต้นด้วย $(-1)^m R_{2m}(x)$ จะได้ว่า

$$(-1)^m R_{2m}(x)*\Delta_B^m u(x)=(-1)^k R_{2k}(x)*(-1)^k R_{2m}(x)$$

หรือ

$$\delta(x)*u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k}(x)*R_{2m}(x)$$

จะได้ว่า

$$u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k}(x)*R_{2m}(x)$$

ดังนั้น

$$u(x)=(-1)^{k+m}R_{2k+2m}(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$R_{2k}(x)*R_{2m}(x)=R_{2k+2m}(x)$$

(d) เนื่องจาก $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $R_{2k}(x)$ และ $R_{2m}(x)$ จึงเป็นสมาชิกของพีชคณิตผลประสาน u' ของดิสตริบิวชัน โดย (Yildirim, Sarikaya and Ozturk. 2004) สามารถแสดงได้ว่า $R_{2k}(x)=R_{2m}^{*-1}(x)$ เป็นตัวผกผัน

บทตั้ง 2.4

กำหนดให้ $R_{2k}(x)$ และ $w_n(2k)$ ซึ่งนิยามโดยสมการ (2.2) และ (2.3) จะได้ว่า

(a) $w_n(2k+2)=16k(n+2|v|-2k-2)w_n(2k)$

(b) $\Delta_B^k R_{2m}(x)=(-1)^k R_{2m-2k}(x)$ โดยที่ k และ m เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

(c) $R_{-2k}(x)=(-1)^k\Delta_B^k\delta(x)$ โดยที่ k เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ

พิสูจน์

(a) จากสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$w_n(2k+2)=\frac{\Pi_{i=1}^n 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)}{2^{n+2|v|-4k-4}\Gamma\left(\frac{n+|v|-2k-2}{2}\right)}$$

$$=16k(n+|v|-2k-2)w_n(2k)$$

(b) โดยบทตั้ง 2.3(c) จะได้ว่า

$$\delta * R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}(x)$$
$$\Delta_B^k (-1)^k R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}(x)$$
$$(-1)^k R_{2k}(x) * \Delta_B^k R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}(x)$$

และ

$$\Delta_B^k R_{2m}(x) = (-1)^k R_{2m-2k}(x)$$

(c) สำหรับ $m = k$ โดยบทตั้ง 2.4(b) จะได้ว่า

$$\Delta_B^k R_{2m}(x) = (-1)^k R_0(x) \quad R_0 = \delta$$

สำหรับ $m = 0$ โดยบทตั้ง 2.4(b) จะได้ว่า

$$\Delta_B^k R_0(x) = (-1)^k R_{-2k}(x) \quad \text{หรือ} \quad (-1)^k \Delta_B^k \delta = R_{-2k}(x)$$

3 ทฤษฎีบทหลัก

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดสมการเชิงประกอบลาปลาซเบสเซิล (compound Laplace Bessel equation)

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Delta_B^r u(x) = f(x) \tag{3.1}$$

โดยที่ Δ_B^r เป็นตัวดำเนินการลาปลาซเบสเซิล กระทำซ้ำกัน r ครั้ง ซึ่งนิยามในสมการ (1.1) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันวางนัยทั่วไป $u(x)$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า $x \in \mathrm{R}_n^+$ และ C_r เป็นค่าคงตัว จะได้ว่าสมการ (3.1) มีผลเฉลยเป็น

$$u(x) = f(x) * R_{2m}(x) * \left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)^{*-1} \tag{3.2}$$

โดยที่

$$w(x) = (-1)^{m-1} C_{m-1} + (-1)^{m-2} C_{m-2} \frac{V}{16(n+2|v|-4)} + (-1)^{m-3} C_{m-3} \frac{V^2}{16 \cdot 32(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)}$$

$$\cdots + C_0 \frac{V^{m-1}}{16 \cdot 32 \cdot 64 \cdots 16(m-1)(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)\cdots(n+2|v|-2m)} \tag{3.3}$$

และ V นิยามในสมการ (2.1) และ $\left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)^{*-1}$ เป็นตัวผกผัน ของ $\left((-1)^m C_m R_0(x) + w(x) R_2(x)\right)$

พิสูจน์

จากบทตั้ง 2.3(a) สมการ (3.1) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\left(C_m \Delta_B^m \delta + C_{m-1} \Delta_B^{m-1} \delta + \cdots + C_1 \delta + C_0 \delta\right) * u(x) = f(x)$$

จากสมการข้างต้น convolving ด้วยฟังก์ชัน $R_{2m}(x)$ จะได้ว่า

$$(C_m\Delta_B^m R_{2m}(x)+C_{m-1}\Delta_B^{m-1}R_{2m}(x)+\cdots+C_1R_{2m}(x)+C_0R_{2m}(x))*u(x)= f(x)*R_{2m}(x)$$

จากบทตั้ง 2.2 และ 2.4(b) จะได้ว่า

$$((-1)^m C_m\delta+(-1)^{m-1}C_{m-1}R_2(x)+\cdots+(-1)C_1R_{2(m-1)}(x)+C_0R_{2m}(x))*u(x)= f(x)*R_{2m}(x) \tag{3.4}$$

จากบทตั้ง 2.4(a) จะได้ว่า

$$R_4(x)=\frac{V^{\frac{4-n-|v|}{2}}}{w_n(4)}=\frac{V^{\frac{2-n-|v|}{2}}\cdot V}{16(n+2|v|-4)w_n(2)}=R_2(x)\cdot\frac{V}{16(n+2|v|-4)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$R_6(x)=R_2(x)\cdot\frac{V^2}{16\cdot 32(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)}$$

$$R_8(x)=R_2(x)\cdot\frac{V^3}{16\cdot 32\cdot 64(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)(n+2|v|-8)}$$

$$\vdots$$

$$R_{2m}(x)=R_2(x)\cdot\frac{V^{m-1}}{16\cdot 32\cdot 64\cdots 16(m-1)(n+2|v|-4)(n+2|v|-6)\cdots(n+2|v|-2m)}$$

ดังนั้น จะได้ว่าฟังก์ชัน $w(x)$ ในสมการ (3.3) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ $R_2(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับ ดังนั้น $w(x)R_2(x)$ และ $(-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)$ เป็นดิสตริบิวชันเทมเพอร์ที่มีซัพพอร์ตกระชับด้วย โดยบทตั้ง 2.3(d) จะได้ว่า $(-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)$ มีตัวผกผันเป็น

$$\left((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)\right)^{*-1}$$

เนื่องสมการ (3.4) จัดรูปใหม่เป็น

$$\left((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)\right)*u(x)= f(x)*R_{2m}(x), \quad R_0=\delta$$

convolving ทั้งสองข้างของสมการด้วย

$$\left((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x)\right)^{*-1}$$

จะได้ว่า

$$u(x)= f(x)*R_{2m}(x)*((-1)^m C_mR_0(x)+w(x)R_2(x))^{*-1}$$

เป็นผลเฉลยแบบอ่อนของสมการ (3.1) สำหรับ n มิติ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่

4 กิตติกรรมประกาศ

ผู้แต่งขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร ที่ให้ทุนสนับสนุนการวิจัยสำหรับบุคลากรมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

5 เอกสารอ้างอิง

A. Kananthai and K. Nonlaopon. (2002). On the weak solution of the compound ultra-hyperbolic equation, **CMU J**. Vol. 3, 209 - 214.

A.H. Zemanian. (1965). **Distribution and Transform Analysis**. New York : Mc Graw-Hill.

H. Yildirim, M. Z. Sarikaya and S. Ozturk. (2004). The solutions of the n-dimensional

Bessel diamond operator and the Fourier-Bessel transform of their convolution, **Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)**. Vol.**114**, 375-387.

M. Z. Sarikaya and H. Yildirim. (2007). On the weak solution of the compound Bessel ultra-hyperbolic equation. **Appl. Math. Comput**. Vol.189, 910 - 917.

M.A. Tellez and S.E. Trione. (1995). The distributional convolution products of Marcel Riesz's ultra-hyperbolic kernel. **Revista de la Union Mathematica Argentina. Vol.** 39, 115-124.

S. Bupasiri and K. Nonlaopon. (2009). On the weak solutions of the compound equation related to the ultra-hyperbolic operators, **Far East J. Appl. Math.,Vol.35**, 129-139.

S. E. Trione. (1987). On Marcel Riesz's ultrahyperbolic kernel. **Trabajos de Matematica**. Vol. 116, 1-12.

W.F. Donoghue. (1969). **Distribution and Fourier Transform**. Academic Press :New York.