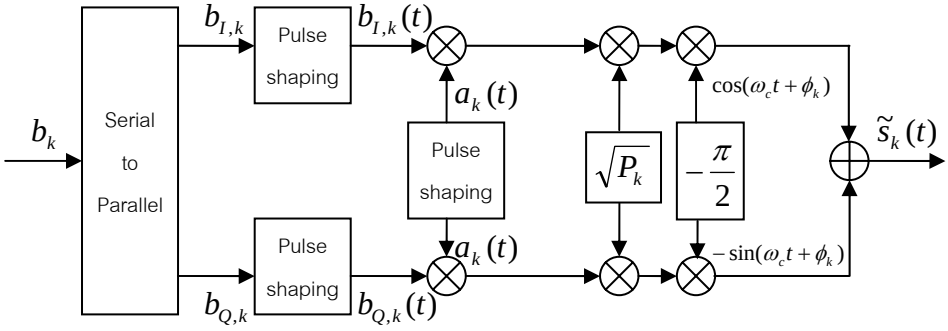
บทที่ 3
การหาสมรรถนะของระบบดีเอส-คิวพีเอสเคซีดีเอ็มเอในช่องสัญญาณการจางหายแบบนาคากามิ

ในบทนี้เราจะแสดงการทำงานระบบดีเอส-คิวพีเอสเคซีดีเอ็มเอ (Direct Sequence-QPSK CDMA) ที่อัตราการรับ-ส่งข้อมูลแตกต่างกันออกไป โดยจะแสดงหลักการทำงานเป็นส่วนๆ แต่ละส่วนแสดงขั้นตอนการทำงานของระบบโดยจะอธิบายออกมาในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ และจะนำความสัมพันธ์ที่ได้มาวิเคราะห์หาสมรรถนะของระบบในบทต่อไป

3.1 หลักการทำงานของระบบดีเอส-คิวพีเอสเคซีดีเอ็มเอ

3.1.1 เครื่องส่ง (Transmitter)



รูปที่ 3.1 วงจรภาคส่งของดีเอส-คิวพีเอสเค

จากรูปที่ 3.1 แสดงให้เห็นการทำงานของเครื่องส่งของระบบ โดยกำหนดให้มีผู้ใช้งานในระบบเท่ากับ K และกำหนดให้ข้อมูลกับรหัสการแผ่สเปกตรัมเป็นเลขฐานสอง หลักการทำงานของระบบ คือจะทำการกระจายลำดับข้อมูล (Data Sequence, $\{b_k\}$) ที่มีความเร็วสูงให้เป็นชุดข้อมูลที่มีความเร็วต่ำลง จากอนุกรมให้เป็นขนานเพื่อส่งให้ในแต่ละส่วนของอินเฟส (in-phase) และควอเดรอเจอร์ (quadrature) หลังจากนั้นจะทำการคูณกันระหว่างลำดับข้อมูลกับลำดับรหัส (Code Sequence, $\{a_k\}$) แล้วทำการมอดูเลตเชิงเลขทางเฟสฐานสองแบบร่วมนัย (Binary Phase Shift Keying) ดังนั้นสัญญาณที่ถูกส่งออกไปของผู้ใช้งานลำดับที่ k $\{\tilde{S}_k(t)\}$ สามารถแสดงได้ดังนี้ [5]

$$\tilde{s}_k(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{P}b_{I,k}(t)a_k(t) + j\sqrt{P}b_{Q,k}(t)a_k(t)\right\}e^{j(\omega_c t+\phi_k)} \tag{3.1}$$

$$\tilde{s}_k(t) = \mathrm{Re}\left\{s_k(t)e^{j\omega_c t}\right\} \tag{3.2}$$

เมื่อ $s_k(t)$ คือ สัญญาณส่งที่แสดงอยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อนกำหนดนิยามได้ดังนี้

$$s_k(t) = \left(\sqrt{P}b_{I,k}(t)a_k(t) + j\sqrt{P}b_{Q,k}(t)a_k(t)\right)e^{j\phi_k} \tag{3.3}$$

โดยที่ $\sqrt{p_k}$ คือ กำลังงานส่งเฉลี่ยที่มีค่าเท่ากันสำหรับผู้ใช้งานทุกคน

ϕ_k คือ มุมเฟสของคลื่นพาห์สำหรับผู้ใช้งานที่ k

$b_{k,I}(t)$ และ $b_{k,Q}(t)$ คือ สัญญาณข้อมูลในส่วนอินเฟสและควอเดรอเจอร์ตามลำดับ นิยามความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$b_{I,k}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_{I,k}^{(i)} p_{T_b}(t - iT_b) \tag{3.4}$$

และ

$$b_{Q,k}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_{Q,k}^{(i)} p_{T_b}(t - iT_b) \tag{3.5}$$

เมื่อ $b_{k,I}^{(i)}$ และ $b_{k,Q}^{(i)} \in \{\pm 1\}$ คือ บิตลำดับที่ i ของผู้ใช้งานที่ k ในส่วนอินเฟส และควอเดรอเจอร์ตามลำดับ, $p_{T_b}(t)$ คือ พัลส์สี่เหลี่ยมที่มีความสูง 1 หน่วย สามารถนิยามได้ดังนี้

$$p_{T_b} = \begin{cases} 1 & if\ 0 \le t < T_b, T_c \\ \\ 0 & t \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases} \tag{3.6}$$

เมื่อ T_b คือ ระยะห่างระหว่างบิต และจากสมการที่ 3.3 พจน์ $a_k(t)$ คือ สัญญาณการแผ่ (Spreading Waveform) สามารถแสดงนิยามได้ดังนี้

$$a_k(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_k^{(j)} p_{Tc}(t - jT_c) \tag{3.7}$$

เมื่อ $a_k^{(j)} \in \{\pm 1\}$ คือ บิตชิปส์ลำดับที่ j ของผู้ใช้งานที่ k, $p_{T_c}(t)$ พัลส์สี่เหลี่ยมที่มีความสูง 1 หน่วย สามารถแสดงนิยามได้ดังนี้

$$p_{T_c} = \begin{cases} 1 & if\ 0 \le t < T_b, T_c \\ 0 & t \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases} \quad (3.8)$$

ดังนั้นค่าอัตราการขยายการประมวลผลของระบบ (Processing Gain) จึงมีค่าเท่ากับ

$$N = \frac{T_b}{T_c} \quad (3.9)$$

3.1.2 แบบจำลองช่องสัญญาณ (Multipath Channel)

ช่องสัญญาณของระบบการสื่อสารไร้สายที่ทำการพิจารณา สัญญาณคลื่นที่เดินทางจะเกิดการจางหายซึ่งมีสาเหตุจากการสะท้อน หรือการหักเหของคลื่น ดังนั้นที่เครื่องรับจะรับสัญญาณที่มีความแตกต่างทางเวลา และขนาดภายในช่องสัญญาณกรองต่ำซึ่งสอดคล้องกับผลตอบสนองอิมพัลส์ (Impulse Response) ของช่องสัญญาณการจางหายในหลายวิถีสามารถแสดงได้ตามสมการดังนี้

$$\tilde{h}(t,\tau) = \mathrm{Re}\left\{h(t,\tau)e^{j\omega_c t}\right\} \quad (3.10)$$

เมื่อ τ คือ เวลาที่ถูกหน่วง , ω_c คือ ความถี่ของคลื่นพาห์ และ $h(t,\tau)$ คือ สัญญาณอิมพัลส์ที่แสดงในรูปจำนวนเชิงซ้อน และมีความสัมพันธ์สำหรับผู้ใช้งานที่ k แสดงได้ตามสมการ

$$h_k(t,\tau) = \sum_{l=1}^{L} \alpha_{l,k} e^{j\varphi_{l,k}} \delta(t - \tau_{l,k}) \quad (3.11)$$

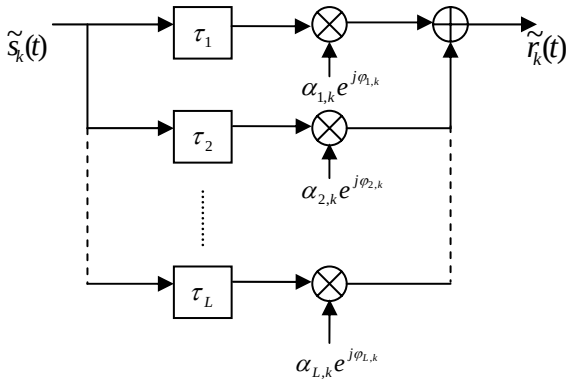
โดยที่ L คือ จำนวนเส้นทางของสัญญาณที่เดินทางในช่องสัญญาณผ่านมาถึงด้านรับ

$\alpha_{k,I}$ คือ อัตราการลดทอนของขนาด

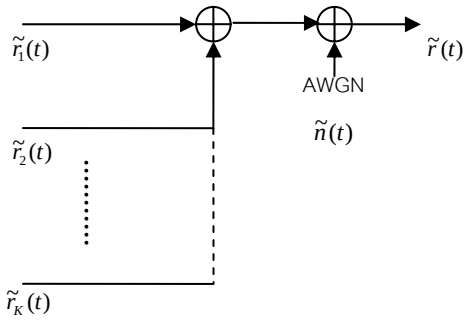
$\tau_{k,I}$ คือ เวลาที่ถูกหน่วง

$\varphi_{k,I}$ คือ มุมเฟสที่มีการหน่วงเวลา

$\delta(\cdot)$ คือ ฟังก์ชั่นเดลต้า (Delta function)



รูปที่ 3.2 เส้นทางเดินของช่องสัญญาณในจำนวน L เส้นทาง



รูปที่ 3.3 สัญญาณที่รับได้ของจำนวนผู้ใช้งาน K ราย

จากรูปที่ 3.2 แสดงให้เห็นจำนวนเส้นทางเดินของช่องสัญญาณถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ L และในแต่ละเส้นทางจะมีการหน่วงทางเวลาและการจางหายที่แตกต่างกัน และรูปที่ 3.3 จะแสดงให้เห็นสัญญาณที่รับได้ที่เครื่องรับ สัญญาณที่รับ $\tilde{r}(t)$ นั้นมาจากผลรวมของสัญญาณของผู้ใช้งานทุกรายรวมกันกับสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก (Additive White Gaussian Noise) ดังนั้นสัญญาณที่รับได้สามารถแสดงได้ตามความสัมพันธ์ดังนี้ [14]

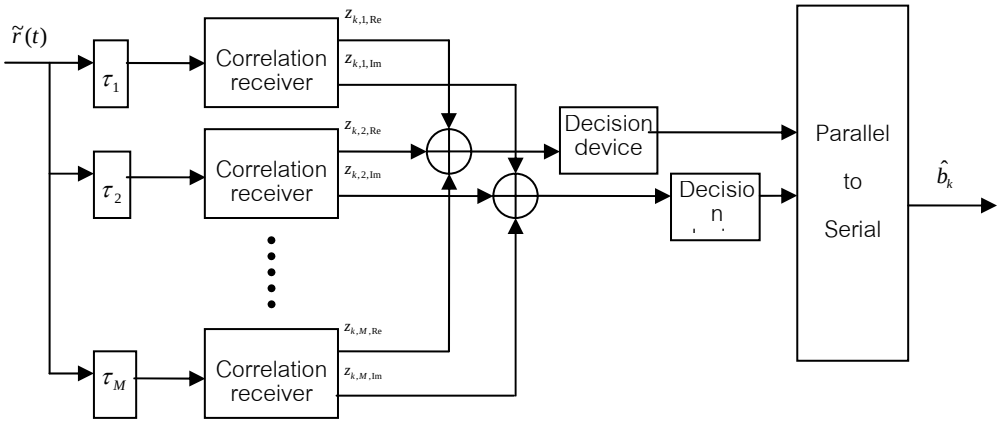
$$r(t) = n(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} s_k(t) * h(t) \tag{3.12}$$

เมื่อ $(*)$ คือ สัญลักษณ์การคอนโวลูชัน และ $n(t)$ คือ สัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวกที่แสดงอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีค่าความหนาแน่นสเปกตรัมกำลังงานของสัญญาณเท่ากับ $\frac{N_0}{2}$ ดังนั้นสัญญาณรบกวนที่อยู่ในรูปแถบผ่าน คือ

$$\tilde{n}(t) = \mathrm{Re}\left\{n(t)e^{j\omega_c t}\right\} \tag{3.13}$$

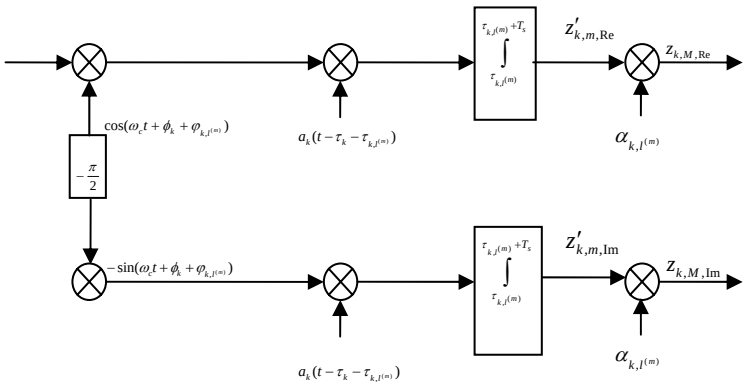
3.1.3 เครื่องรับ (Receiver)

การทำงานทางด้านเครื่องรับสัญญาณแบบเรค และให้ผู้ใช้งานคนที่ 1 เป็นผู้ใช้งานอ้างอิง โดยที่กำหนดให้เครื่องรับเรคมีจำนวน M สาขา แต่ละสาขาของเครื่องรับจะประกอบด้วยอุปกรณ์การดีโมดูเลตที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.4 กำลังงานของสัญญาณเอาท์พุตในเครื่องรับเรคสามารถใช้เทคนิคการรวมอัตราส่วนสูงสุด (Maximal Ratio Combining ; MRC) หรือการรวมกันแบบอัตราขยายเท่ากัน(Equal Gain Combining ; EGC) อย่างใดอย่างหนึ่ง ในการวิจัยนี้จะใช้เทคนิคการรวมอัตราส่วนสูงสุด จากรูปที่ 3.5 พจน์ $\alpha_{k,l^{(m)}}$ เรียกว่าน้ำหนักจุดแยกทำหน้าที่เป็นตัวชดเชยขนาดของสัญญาณที่อยู่ในรูปจำนวนผันเชิงซ้อน (complex conjugate)



รูปที่ 3.4 เครื่องรับสัญญาณแบบเรค จำนวน M สาขา

จากรูปที่ 3.5 พจน์ $\alpha_{k,l^{(m)}}$ คือ น้ำหนักจุดแยกซึ่งเป็นตัวชดเชยขนาดของสัญญาณที่อยู่ในรูปจำนวนผันเชิงซ้อน (complex conjugate) สัญญาณที่รับได้จะกำหนดให้เป็นสัญญาณแบบร่วมนัยและจะถูกแยกออกเป็น 2 ส่วน ประกอบด้วยส่วนอินเฟส และส่วนควอเดรอเจอร์ ด้วยวิธีการคูณสัญญาณคลื่นพาห์ คือ



รูปที่ 3.5 ตัวรับแบบสหสัมพันธ์ของเครื่องรับเรค

$\cos(\omega_c t + \phi_k + \varphi_{k,l^{(m)}})$ และ $-\sin(\omega_c t + \phi_k + \varphi_{k,l^{(m)}})$ ตามลำดับ เมื่อสัญญาณผ่านการดีโมดูเลตแล้วนำสัญญาณมูลฐานมาทำการดีสเปรดสเปกตรัมด้วย $a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})$ สุดท้ายเมื่อสัญญาณผ่านแมตซ์ฟิลเตอร์ ที่มีการหน่วงเวลาแล้วจะถูกชดเชยขนาดสัญญาณด้วยน้ำหนักจุดแยก $(\alpha_{k,l^{(m)}})$ ส่วนสุดท้ายที่เครื่องรับเรค คืออุปกรณ์เปรียบเทียบบิต (Decision device) จะทำหน้าที่ประมาณค่าบิตข้อมูลที่ผ่านการดีโมดูเลตเทียบกับข้อมูลเริ่มต้น และสุดท้ายจะนำบิตข้อมูลในส่วนของอินเฟส และควอเดรอเจอร์ มารวมกันเป็นลำดับข้อมูล

ดังนั้นสัญญาณที่รับได้กรณีอะซิงโครนัส (uplink) ของผู้ใช้งานหลายๆ คนที่ส่งมาจากเครื่องส่งสามารถแสดงได้ดังสมการ

$$r_a(t) = n(t) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k,l}s_k(t-\tau_k-\tau_{k,l})e^{j\varphi_{k,l}} \tag{3.14}$$

และกรณีซิงโครนัส (downlink) สัญญาณที่รับได้สามารถแสดงได้ตามสมการ

$$r_s(t) = n(t) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_l s_k(t-\tau_l)e^{j\varphi_l} \tag{3.15}$$

ในระบบโทรศัพท์ซีดีเอ็มเอเป็นการสื่อสารข้อมูลแบบ 2 ทางขาขึ้น (uplink) และขาลง (downlink) จะถูกแบ่งออกจากกันอย่างชัดเจนโดยใช้เทคนิคความถี่ที่ต่างกันในการส่ง (Frequency Division Duplex ; FDD) หรือใช้ช่องเวลาที่ต่างกันในการส่ง (Time Division Duplex ; TDD) จากสมการที่ 3.14 ค่า τ_k คือ สัญญาณที่ถูกหน่วงของผู้ใช้งานที่ k ที่มีความสัมพันธ์กับเส้นทางของสัญญาณที่ l นำเอาสมการที่ 3.3 มาแทนในสมการ 3.14 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} r_a(t) = n(t) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k,l}\Big\{&\sqrt{p_k}b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l}) \\ &+ j\sqrt{p_k}b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l})\Big\}e^{j\theta_{k,l}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

เมื่อ $\theta_{k,l}$ คือ เฟสชิฟของผู้ใช้ที่ k บนเส้นทางลำดับที่ l ของเครื่องรับ และมีค่าเท่ากับ $\phi_k + \varphi_{k,l}$ ดังนั้นสามารถเขียนสัญญาณที่รับได้ที่แสดงอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\tilde{r}_a(t) = \mathrm{Re}\left\{r_a(t)e^{j\omega_c t}\right\} \tag{3.17}$$

จากสมการที่ 3.16 สามารถแทนความสัมพันธ์ในส่วนอินเฟส และควอเดรเจอร์ได้เป็น

$$In_{k,l} = \sqrt{p_k}b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l}) \tag{3.18}$$

$$Qu_{k,l} = \sqrt{p_k}b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l}) \tag{3.19}$$

นำสมการ 3.18 และ 3.19 แทนลงในสมการ 3.17

$$\begin{aligned}\tilde{r}_a(t) &= \mathrm{Re}\left\{ n(t)e^{j\omega_c t} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k,l}(In_{k,l} + jQu_{k,l})e^{j(\omega_c t+\theta_{k,l})} \right\} \\ &= \mathrm{Re}[n(t)e^{j\omega_c t} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k,l}\{(In_{k,l}\cos(\omega_c t+\theta_{k,l}) - Qu_{k,l}\sin(\omega_c t+\theta_{k,l})) \\ &\quad + j(In_{k,l}\sin(\omega_c t+\theta_{k,l}) + Qu_{k,l}\cos(\omega_c t+\theta_{k,l}))\}] \\ &= \tilde{n}(t) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k,l}\left\{In_{k,l}\cos(\omega_c t+\theta_{k,l}) - Qu_{k,l}\sin(\omega_c t+\theta_{k,l})\right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

สาขาที่ m ของเครื่องรับเรคจะจับสัญญาณที่แรงที่สุดของสัญญาณที่เดินทางมาถึง ดังนั้น $z'_{k,m}$ ของตัวรับสหสัมพันธ์ที่สาขา m สามารถแสดงได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} z'_{k,m,\mathrm{Re}} &= \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \tilde{r}_a(t)\{\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\}dt \\ &= \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} [\{\tilde{n}(t) + \sum_{k'=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k',l}(In_{k',l}\cos(\omega_c t+\theta_{k',l}) - Qu_{k',l}\sin(\omega_c t+\theta_{k',l}))\} \\ &\quad \times\{\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\}]dt \end{aligned} \quad (3.21)$$

และ

$$\begin{aligned} z'_{k,m,\mathrm{Im}} &= \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \tilde{r}_a(t)\{-\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\}dt \\ &= \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} [\{\tilde{n}(t) + \sum_{k'=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\alpha_{k',l}(In_{k',l}\cos(\omega_c t+\theta_{k',l}) - Qu_{k',l}\sin(\omega_c t+\theta_{k',l}))\} \\ &\quad \times\{-\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\}]dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

โดยที่ T_s คือ ช่วงเวลาสัญลักษณ์ของการถูกโมดูเลตแบบคิวพีเอสเค

k' คือ ลำดับการใช้งานของผู้ใช้ $(1,2,3,.....,K)$

K คือ จำนวนผู้ใช้งานทั้งหมด

จากสมการ 3.21 และ 3.22 พิจารณาในส่วนของการอินทิเกรตจะประกอบด้วยสัญญาณ 4 ส่วน คือสัญญาณของผู้ใช้งานจริง, สัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก, สัญญาณแทรกสอดระหว่างสัญลักษณ์ และสัญญาณแทรกสอดที่เกิดขึ้นระหว่างผู้ใช้งาน เพราะฉะนั้นสามารถจัดรูปสมการ 3.21 และ 3.22 ได้ใหม่ดังนี้

$$z'_{k,m,\mathrm{Re}} = A_I + \xi_I + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq l^{(m)}}}^{L} I_{k,l,\mathrm{Re}} + \sum_{\substack{k'=1 \\ k'\neq k}}^{K}\sum_{l=1}^{L} I_{k',l,\mathrm{Re}} \tag{3.23}$$

และ

$$z'_{k,m,\mathrm{Im}} = A_Q + \xi_Q + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq l^{(m)}}}^{L} I_{k,l,\mathrm{Im}} + \sum_{\substack{k'=1 \\ k'\neq k}}^{K}\sum_{l=1}^{L} I_{k',l,\mathrm{Im}} \tag{3.24}$$

จากรูปที่ 3.4 ตัวรับสหสัมพันธ์จำนวน M ตัวที่อยู่ในเครื่องรับเรคจะทำการรวมสัญญาณที่ผ่านการชดเชยขนาดด้วยน้ำหนักจุดแยก ซึ่งจะทำให้ขนาดของสัญญาณที่รับได้มีค่าใกล้เคียงกับสัญญาณส่ง ดังนั้นเอาท์พุตสามารถแสดงเป็นความสัมพันธ์ได้ตามสมการ

$$z_{k,\mathrm{Re}} = \sum_{m=1}^{M} \alpha_{k,m} z'_{k,m,\mathrm{Re}} \qquad \text{;อินเฟส} \tag{3.25}$$

และ

$$z_{k,\mathrm{Im}} = \sum_{m=1}^{M} \alpha_{k,m} z'_{k,m,\mathrm{Im}} \qquad \text{;ควอเดรอเจอร์} \tag{3.26}$$

ส่วนสุดท้ายของด้านรับจะเป็นการเปรียบเทียบค่าบิตที่เป็นเอาท์พุตของ $z_{k,\mathrm{Re}}$ และ $z_{k,\mathrm{Im}}$ โดยมีกฎเกณฑ์ดังนี้

$$\hat{b}^i_{k,I} = \begin{cases} 1 & if \quad z_{k,\mathrm{Re}} \geq 0 \\ -1 & if \quad z_{k,\mathrm{Re}} < 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

และ

$$\hat{b}^i_{k,Q} = \begin{cases} 1 & if \quad z_{k,\mathrm{Im}} \geq 0 \\ -1 & if \quad z_{k,\mathrm{Im}} < 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

โดยที่ $\hat{b}^i_{k,I}$ และ $\hat{b}^i_{k,Q}$ คือลำดับบิตที่ i ของผู้ใช้งานที่ k ในส่วนอินเฟส และควอเดรอเจอร์ตามลำดับ แล้วนำลำดับข้อมูลทั้งสองส่วนมารวมกันตามที่แสดงในรูปที่ 3.4

จากสมการ 3.23 และ 3.24 พจน์ ξ_I และ ξ_Q คือสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวกของ $\tilde{n}(t)$ ที่ผ่านตัวรับแบบสหสัมพันธ์ในส่วนของอินเฟส และควอเดรอเจอร์ตามลำดับ ที่มีค่ากลางเท่ากับ 0 แสดงความสัมพันธ์ได้ตามสมการ 3.21 และ 3.22 ดังนี้

$$\xi_I = \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \tilde{n}(t)\left\{\cos(\omega_c t + \theta_{k,l^{(m)}}) a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\right\} dt \tag{3.29}$$

และ

$$\xi_Q = \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \tilde{n}(t)\left\{-\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\right\}dt \tag{3.30}$$

เช่นกันในพจน์ของ A_I และ A_Q คือ สัญญาณของผู้ใช้งานจริงในระบบในส่วนของอินเฟส และควอเดรอเจอร์ แสดงแสดงความสัมพันธ์ได้ตามสมการ 3.21 และ 3.22 ดังนี้

$$A_I = \sum_{m=1}^{M} \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \sqrt{p_k}\alpha_{k,l^{(m)}}[\{b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}}) - b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})$$
$$\cdot\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\}a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})]dt \tag{3.31}$$

และ

$$A_Q = \sum_{m=1}^{M} \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \sqrt{p_k}\alpha_{k,l^{(m)}}[\{b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}}) - b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})$$
$$\cdot\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\}a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})(-1)\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})]dt \tag{3.32}$$

เมื่อ $b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})$ เท่ากับ $b_{k,I}^i$ โดยที่ i คือลำดับบิตของบิตข้อมูลในส่วนอินเฟส และ $b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})$ เท่ากับ $b_{k,Q}^i$ โดยที่ i คือลำดับบิตของบิตข้อมูลในส่วนควอเดรอเจอร์ เมื่อสัญญาณมาถึงเครื่องรับเรคเส้นทางที่ผ่านช่องสัญญาณจะสัมพันธ์กับสาขาของเครื่องรับเรค นั่นคือ $l=m$ แทนค่าทั้งสามลงในสมการ 3.31 และ 3.32 ดังนั้น A_I และ A_Q จึงมีค่าเท่ากับ

$$A_I = \sqrt{p_k}\sum_{m=1}^{M}\alpha_{k,l^{(m)}} \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s}[\{b_{k,I}^i\cos^2(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}}) - b_{k,Q}^i\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})]dt$$
$$= \sqrt{p_k}\sum_{m=1}^{M}\alpha_{k,l^{(m)}}\left[\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} b_{k,I}^i\left(\frac{(1+\cos 2(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})}{2}\right)dt\right.$$
$$\left. - \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} b_{k,I}^Q\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})dt\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{p_k}\alpha_{k,l^{(m)}}b_{k,I}^i T_s \tag{3.33}$$

และ

$$A_Q = \sqrt{p_k}\alpha_{k,l^{(m)}} \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s}\{-b_{k,I}^i\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}}) + b_{k,Q}^i\sin^2(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\}dt$$
$$= \sqrt{p_k}\alpha_{k,l^{(m)}}\left[\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} -b_{k,I}^i\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})dt\right.$$

$$+\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} b_{k,I}^{Q}\left(\frac{(1-\cos 2(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})}{2}\right)dt\Bigg]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{p_k}\,\alpha_{k,l^{(m)}}b_{k,Q}^{i}T_s \tag{3.34}$$

ในส่วนของสัญญาณแทรกสอดระหว่างผู้ใช้งาน คือพจน์ $I_{k',l,\mathrm{Re}}$ และ $I_{k',l,\mathrm{Im}}$ ที่เกิดจากทางเดินวิถีที่ l ของผู้ใช้ที่ k $(l^{(m)}\neq l$ และ $k'=k)$ ในส่วนอินเฟส และควอเดรอเจอร์ตามลำดับ สามารถแสดงแสดงแสดงความสัมพันธ์ได้ตามสมการ 3.21 และ 3.22 ดังนี้

$$I_{k',l,\mathrm{Re}}=\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s}\sqrt{p_{k'}}\,\alpha_{k',l}[\{b_{k',I}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})\cos(\omega_c t+\theta_{k',l})-b_{k',Q}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})$$
$$\cdot\sin(\omega_c t+\theta_{k',l})\}a_{k'}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})]dt$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{p_{k'}}\,\alpha_{k',l}\Bigg[\{\cos(\theta_{k',l}-\theta_{k,l^{(m)}})\cdot\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s}b_{k',I}^{i}\cdot a_{k'}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})dt\}$$
$$-\{\sin(\theta_{k',l}-\theta_{k,l^{(m)}})\cdot\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s}b_{k',Q}^{i}\cdot a_{k'}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})dt\}\Bigg] \tag{3.35}$$

จากสมการที่ 3.35 ในพจน์ของการอินทิเกรต $\int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s}a_{k'}(t-\tau_{k',l})a_k(t-\tau_{k,l^{(m)}})dt$ คือ ค่าอัตสหสัมพันธ์ (Auto correlation) [7]

$$R_{k',l}(\tau_{k',l})=\int_0^{\tau}a_{k'}(t-\tau_{k',l})a_1(t-\tau_{k,l^{(m)}})dt \tag{3.36}$$

และ

$$\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})=\int_{\tau}^{T_s}a_{k'}(t-\tau_{k',l})a_1(t-\tau_{k,l^{(m)}})dt \tag{3.37}$$

ดังนั้นสามารถจัดรูปสมการ 3.35 ได้ใหม่เป็น

$$I_{k',l,\mathrm{Re}}=\frac{1}{2}\sqrt{p_{k'}}\,\alpha_{k',l}[\cos(\theta_{k',l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l})+b_{k'',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}$$
$$-\{\sin(\theta_{k',l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{k',Q}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l})+b_{k',Q}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}] \tag{3.38}$$

และส่วนควอเดรอเจอร์ เท่ากับ

$$I_{k',l,\mathrm{Im}} = \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \sqrt{p_{k'}}\alpha_{k',l}[\{b_{k',I}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})\cos(\omega_c t+\theta_{k',l}) - b_{k',Q}(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})$$
$$\cdot \sin(\omega_c t+\theta_{k',l})\}a_k(t-\tau_{k'}-\tau_{k',l})(-1)\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})]dt$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{p_{k'}}\alpha_{k',l}[(-1)\sin(\theta_{k',l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}$$
$$+\{\cos(\theta_{k',l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{k',Q}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',Q}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\} \quad (3.39)$$

สัญญาณแทรกสอดที่เกิดขึ้นระหว่างสัญลักษณ์ $I_{k,l,\mathrm{Re}}$ และ $I_{k,l,\mathrm{Im}}$ สามารถแสดงได้ตามสมการในส่วนอินเฟส ดังนี้เมื่อ $k' \neq k$

$$I_{k,l,\mathrm{Re}} = \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \sqrt{p_k}\alpha_{k,l}[\{b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l}) - b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l})$$
$$\cdot \sin(\omega_c t+\theta_{k,l})\}a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})]dt$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{p_k}\alpha_{k,l}[\cos(\theta_{k,l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{k,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{k,l})\}$$
$$-\{\sin(\theta_{k,l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{1,Q}^{-1}R_{1,l}(\tau_{k,l}) + b_{1,Q}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{k,l})\}] \quad (3.40)$$

และในส่วนควอเดรอเจอร์

$$I_{k,l,\mathrm{Im}} = \int_{\tau_{k,l^{(m)}}}^{\tau_{k,l^{(m)}}+T_s} \sqrt{p_k}\alpha_{k,l}[\{b_{k,I}(t-\tau_k-\tau_{k,l})\cos(\omega_c t+\theta_{k,l}) - b_{k,Q}(t-\tau_k-\tau_{k,l})$$
$$\cdot \sin(\omega_c t+\theta_{k,l})\}a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l})(-1)\sin(\omega_c t+\theta_{k,l^{(m)}})a_k(t-\tau_k-\tau_{k,l^{(m)}})]dt$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{p_k}\alpha_{k,l}[(-1)\sin(\theta_{k,l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{k,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{k,l})\}$$
$$+\{\cos(\theta_{k,l}-\theta_{k,l^{(m)}})\{b_{1,Q}^{-1}R_{1,l}(\tau_{k,l}) + b_{1,Q}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{k,l})\}] \quad (3.41)$$

3.2 การหาสมรรถนะของระบบ

เนื่องจากในการวิเคราะห์สมรรถนะของระบบจะอยู่ในรูปของกำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน ดังนั้นจะต้องคำนวณหาค่ากำลังของสัญญาณต่างๆ ในการหาค่ากำลังสัญญาณจะหาได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$Var[B] = E[B^2] - E^2[B] \quad (3.42)$$

เนื่องจากเป็นสัญญาณรบกวนเกาส์ ซึ่งจะมีค่ากลางเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ $\left(E^2[B]=0\right)$ ดังนั้นกำลังงานของสัญญาณจึงเท่ากับ

$$Var[B] = E[B^2] \tag{3.43}$$

และค่าความแปรปรวนของระบบในส่วนของอินเฟส และควอเดรอเจอร์ จะมีค่าเท่ากัน $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ [5] เพราะฉะนั้น ในการหาค่ากำลังงานของสัญญาณจึงหาเฉพาะส่วนอินเฟสหรือควอเดรอเจอร์ และกำหนดให้ผู้ใช้งานรายที่ 1 $(k=1)$ เป็นผู้ใช้งานอ้างอิง

3.2.1 กำลังงานของสัญญาณผู้ใช้งานจริง

กำหนดให้ $f_c T_s >> 1$ และ $b_{1,I} = b_{1,Q} = 1$ และพจน์สองเท่าของความถี่จะไม่ถูกนำมาคำนวณ [8] ดังนั้นจากสมการ 3.25 และ 3.33 จะได้

$$\begin{aligned} A_{1,I} &= \sum_{m=1}^{M} \alpha_{1,m} \left(\frac{\sqrt{p_1}}{2} \alpha_{1,l^{(m)}} b_{1.I} T_s \right) \\ &= \frac{\sqrt{p_1}}{2} \sum_{m=1}^{M} \alpha_{1,l^{(m)}}^2 T_s \end{aligned} \tag{3.44}$$

และนำมายกกำลังสองเพื่อใช้หาค่ากำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนจะได้

$$A_{1,I}^2 = \frac{P}{4} T_s^2 \left(\sum_{m=1}^{M} \alpha_{1,l^{(m)}}^2 \right)^2 \tag{3.45}$$

3.2.2 กำลังงานของสัญญาณรบกวนเกาส์ขาวแบบบวก

จากสมการที่ 3.29 นำมาหาค่าความแปรปรวนได้ดังต่อไปนี้

$$\xi_I = \int_0^{T_s} \tilde{n}(t) a_1(t) \cos(\omega_c t) dt$$

$$E[\xi_I] = E\left[\int_0^{T_s} \tilde{n}(t) a_1(t) \cos(\omega_c t) dt \right] = \int_0^{T_s} E[\tilde{n}(t)] a_1(t) \cos(\omega_c t) dt = 0 \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} E\left[\xi_I^2\right] &= E\left[\int_0^{T_s} \tilde{n}(t) a_1(t) \cos(\omega_c t) dt \int_0^{T_s} \tilde{n}(s) a_1(s) \cos(\omega_c s) ds \right] \\ &= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} E\left[\tilde{n}(t)\tilde{n}(s)\right] a_1(t) \cos(\omega_c t) a_1(s) \cos(\omega_c s) dt ds \\ &= \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} \xi(t-s) a_1(t) \cos(\omega_c t) a_1(s) \cos(\omega_c s) dt ds \\ &= \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} a_1^2(t) \cos^2(\omega_c t) dt \\ &= \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} (1) \left(\frac{1 + \cos 2\omega_c t}{2} \right) dt \\ &= \frac{N_0}{4} T_s \end{aligned} \tag{3.47}$$

3.2.3 กำลังงานของสัญญาณแทรกสอดที่เกิดขึ้นระหว่างผู้ใช้งาน

จากสมการ 3.38 ให้ θ_k คือมุมเฟสที่มีคุณสมบัติเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอกรูป (uniform) ในช่วง $[0,2\pi)$ และ $k' > 1$ ดังนั้น

$$I_{k',\mathrm{Re}} = \frac{\sqrt{p_{k'}}}{2}\alpha_{1,l^{(m)}}\sum_{k=2}^{K}\sum_{l=1}^{L}[\cos(\theta_{k'})\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}$$
$$-\sin(\theta_{k'})\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}]$$

$$E[I_{k',\mathrm{Re}}^2] = \left(\frac{\sqrt{P}}{2}\right)^2 E[\alpha_{1,l^{(m)}}^2]\cdot\sum_{k=2}^{K}\sum_{l=1}^{L}E[(\cos(\theta_{k'})\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}$$
$$-\sin(\theta_{k'})\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\})^2]$$
$$= \frac{P}{4}E[\alpha_{1,l^{(m)}}^2]\cdot\sum_{k=2}^{K}\sum_{l=1}^{L}\Big\{E[\cos^2(\theta_{k'})]\cdot E[\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}]^2$$
$$-2E[\cos(\theta_{k'})\cdot\sin(\theta_{k'})]E[b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})]$$
$$+E[\sin^2(\theta_{k'})]E[\{b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\}^2]\Big\}$$

เมื่อ $E\left[\left(b_{k',I}^{-1}R_{k',l}(\tau_{k',l}) + b_{k',I}^{0}\hat{R}_{k',l}(\tau_{k',l})\right)^2\right] = \frac{2T^2}{3N}$ จาก [7] และ $E[\alpha_{1,l^{(m)}}^2] = \Omega_{1,l^{(m)}}$ ดังนั้นแทนค่าความสัมพันธ์ จะได้

$$= \frac{P}{4}\cdot\sum_{k=2}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2T_s^2}{3N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2T_s^2}{3N}\right)\right]\cdot\Omega_{1,l^{(m)}}$$
$$= \frac{PT_s^2}{6N}\sum_{k=2}^{K}\sum_{l=1}^{L}\Omega_{l^{(m)}}$$

โดยที่ $\Omega_l = \Omega_0 e^{-l\delta}$ และ $q(L,\delta) = \sum_{l=1}^{L}e^{-l\delta} = \frac{1-e^{-l\delta}}{1-e^{-\delta}}$ ดังนั้น

$$= \frac{PT_s^2}{6N}\Omega_0(K-1)\sum_{l=1}^{L}e^{-l\delta}$$
$$= \frac{PT_s^2}{6N}\Omega_0(K-1)q(L,\delta) \qquad (3.48)$$

โดยที่ Ω_0 คือ ค่าเฉลี่ยกำลังสัญญาณในวิถีที่ 1

δ คือ อัตราการลดทอนของกำลังสัญญาณ

3.2.4 กำลังงานของสัญญาณแทรกสอดระหว่างผู้ใช้งาน

จากสมการ 3.40 เมื่อ $k \neq k'$ มีค่าเท่ากับ 1 นำมาหาค่าความแปรปรวนได้ดังต่อไปนี้

$$I_{k,\mathrm{Re}} = \frac{1}{2}\sqrt{p_k}\alpha_{k,l}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq l^{(m)}}}^{L}[\cos(\theta_k)\{b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{1,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{1,l})\}$$

$$-\sin(\theta_k)\{b_{1,Q}^{-1}R_{1,l}(\tau_{1,l}) + b_{1,Q}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{1,l})\}]$$

$$E[I_{k,\mathrm{Re}}^2] = \frac{P}{4}E[\alpha_{1,l}^2]\sum_{\substack{l=1\\ l\neq l^{(m)}}}^{L}\Big\{E[\cos^2(\theta_k)]\cdot E[\{b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{1,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{1,l})\}]^2$$

$$-2E[\cos(\theta_k)\cdot\sin(\theta_k)]E[b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{1,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{1,l})]$$

$$+E[\sin^2(\theta_k)]E[\{b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{1,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{1,l})\}^2]\Big\}$$

เมื่อ $E\left[\left(b_{1,I}^{-1}R_{1,l}(\tau_{1,l}) + b_{1,I}^{0}\hat{R}_{1,l}(\tau_{1,l})\right)^2\right] = \frac{T^2}{N}$ จาก [7], [8] และ $E[\alpha_{1,l}^2] = \Omega_0 e^{-l\delta}$ โดยที่ $l > 1$ ดังนั้นแทนค่าความสัมพันธ์ จะได้

$$= \frac{P}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{T_s^2}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{T_s^2}{N}\right)\right]\sum_{\substack{l=2\\ l\neq l^{(m)}}}^{L}\Omega_0 e^{-l\delta}$$

$$= \frac{PT_s^2}{4N}\Omega_0\{q(L,\delta) - 1\} \tag{3.49}$$

ดังนั้นกำลังงานของสัญญาณรบกวนรวมทั้งหมดของระบบจากสมการ 3.25, 3.47, 3.48 และ 3.49 จึงมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_T^2 = \left(E[\xi^2] + E[I_{k'}^2] + E[I_k^2]\right)\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m}$$

$$= \left(\frac{N_0 T_s}{4} + \frac{E_b T_s}{3N}(K-1)\Omega_0 q(L,\delta) + \frac{E_b T_s}{2N}\Omega_0\{q(L,\delta) - 1\}\right)\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m}$$

$$= E_b T_s \Omega_0\left(\frac{N_0}{4E_b\Omega_0} + \frac{(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta) - 1}{2N}\right)\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m} \tag{3.50}$$

โดยที่ $P = \frac{E_s}{T_s}$ และ E_s คือ พลังงานสัญญาณต่อสัญลักษณ์ซึ่งมีค่าเป็นสองเท่าของพลังงานสัญญาณบิต $(E_s = 2E_b)$ ดังนั้นค่าอัตราส่วนกำลังสัญญาณต่อกำลังสัญญาณรบกวนที่เครื่องรับ [5] แทนค่าสมการ 3.45 และ 3.50 ดังนั้นค่ากำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนของระบบจึงเท่ากับ

$$SNR = \frac{A^2}{\sigma_T^2} \tag{3.51}$$

$$= \frac{E_b T_s}{2}\cdot\left(\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,l^{(m)}}^2\right)^2\cdot\frac{1}{E_b T_s\Omega_0}\cdot\left(\frac{N_0}{4E_b\Omega_0} + \frac{(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta)}{2N}\right)^{-1}\left(\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{N_0}{2E_b\Omega_0} + \frac{2(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta) - 1}{N}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\Omega_0}\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m} \tag{3.52}$$

กำหนดให้ S เป็นตัวแปรสุ่ม [1] เท่ากับ $S = \frac{1}{\Omega_0}\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m}$ ดังนั้นจัดรูปสมการ 3.52 ใหม่ได้เป็น

$$SNR = Y.S = \left(\frac{N_0}{2E_b\Omega_0} + \frac{2(K-1)q(L,\delta)}{3N} + \frac{q(L,\delta)-1}{N}\right)^{-1}.\frac{1}{\Omega_0}\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m} \qquad (3.53)$$

3.3 การวิเคราะห์การเกิดอัตราความผิดพลาดบิตของระบบ

ในงานวิจัยนี้การวิเคราะห์อัตราความผิดพลาดบิตของระบบจะแสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นในการเกิดความผิดพลาดบิต

3.3.1 ความน่าจะเป็นในการเกิดความผิดพลาดบิตของกำลังสัญญาณ

กำหนดให้สัญญาณเอาท์พุตที่เครื่องรับเรคใช้เทคนิคการรวมอัตราส่วนสูงสุด (MRC) ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของผลรวมการลดทอนของขนาด [5] ที่มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\rho = \sum_{l=1}^{L}\alpha_l^2 \qquad (3.54)$$

เมื่อ α_l สอดคล้องกับการแจกแจงของแบบจำลองช่องสัญญาณนาคากามิ โดยมีฟังก์ชั่นความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability Density Function ; pdf) แสดงได้ตามสมการดังนี้ [9]

$$p(\rho) = \left(\frac{m_T}{\Omega_T}\right)^{m_T}\frac{\rho^{m_T-1}}{\Gamma(m_T)}\exp\left(-\frac{m_T}{\Omega_T}\rho\right) \qquad (3.55)$$

โดยที่ m_l คือ การแจกแจงของขนาดในช่องสัญญาณในวิถีที่ l และมีค่าเท่ากับอัตราส่วนของค่าโมเมนต์อันดับสองยกกำลังสองต่อความแปรปรวน

Ω_l คือ โมเมนต์อันดับที่สองมีค่าเท่ากับ $E[\alpha_l^2]$

$\Gamma(m)$ คือ ฟังชั่นแกมมา

ค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดขณะใดๆของสัญญาณต่อสัญญาณรบกวนสามารถแสดงได้เป็น [4]

$$P_e(S) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, YS\right)}{2\sqrt{\pi}} \qquad (3.56)$$

เนื่องจากพจน์ S เป็นค่าที่ไม่เจาะจงซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\Omega_0}\sum_{m=1}^{M}\alpha_{1,m}$ ดังนั้นจึงต้องหาค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดบิตเฉลี่ย (Average error probability) ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$\overline{P}_e = \int_0^{\infty} P_e(S)\,p(S)\,dS \tag{3.57}$$

แทนสมการ 3.55 และ 3.56 ลงในสมการ 3.57 จะได้

$$\begin{aligned}\overline{P}_e &= \int_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, YS\right)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_T}{\Omega_T}\right)^{m_T} \frac{S^{m_T-1}}{\Gamma(m_T)}\exp\left(-\frac{m_T}{\Omega_T}\right)dS \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(m_T)}\left(\frac{m_T}{\Omega_T}\right)^{m_T}\int_0^{\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}, YS\right)S^{m_T-1}\exp\left(-\frac{m_T}{\Omega_T}S\right)dS\end{aligned} \tag{3.58}$$

จาก [11] สามารถหาความสัมพันธ์ของฟังก์ชั่นแกมมาได้

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1}e^{-\beta x}\Gamma(\nu,\alpha x)dx = \frac{\alpha^{\nu}\Gamma(\mu+\nu)}{\mu(\alpha+\beta)^{\mu+\beta}}\,{}_2F_1\left(1,\mu+\nu;\mu+1;\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) \tag{3.59}$$

เมื่อกำหนดให้ $[\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>0, \mathrm{Re}(\mu)>0, \mathrm{Re}(\mu+\nu)>0], \nu=\frac{1}{2}, \alpha=Y, \mu=m_T, \beta=\frac{m_T}{\Omega_T}$

ดังนั้นสามารถจัดรูปสมการที่ 3.58 ใหม่ได้เป็น

$$\overline{P}_e = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(m_T)}\left(\frac{m_T}{\Omega_T}\right)^{m_T}\frac{\sqrt{Y}\Gamma\left(m_T+\frac{1}{2}\right)}{m_T\left(Y+\frac{m_T}{\Omega_T}\right)^{m_T+\frac{1}{2}}}\times{}_2F_1\left(1, m_T+\frac{1}{2}; m_T+1; \frac{m_T}{Y\Omega_T+m_T}\right) \tag{3.60}$$

เมื่อ $\Omega_T = \Omega_0 q(L,\delta)$ โดยที่ $q(L,\delta)=\sum_{l=0}^{L-1}e^{-l\delta}=\frac{1-e^{-l\delta}}{1-e^{-\delta}}$ และ $m_T=\sum_{l=0}^{L-1}m_l = m_l L$ แทนค่า m_T และ Ω_T ลงในสมการที่ 3.60 สุดท้ายค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดบิตเฉลี่ย จึงมีค่าตามสมการดังนี้

$$\begin{aligned}\overline{P}_e = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\Gamma(m_l L)}\cdot\left(\frac{m_l L}{\Omega_0 q(L,\delta)}\right)^{m_l L}\times\Bigg\{&\frac{\sqrt{Y}\Gamma(m_l+\frac{1}{2})}{m_l L\left(Y+\frac{m_l L}{\Omega_0 q(L,\delta)}\right)^{m_l L+\frac{1}{2}}} \\ &\times{}_2F_1\left(1, m_l L+\frac{1}{2}; m_l L+1; \frac{m_l L}{Y\Omega_0 q(L,\delta)+m_l L}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.61}$$

3.3.2 ความน่าจะเป็นในการเกิดความผิดพลาดสัญลักษณ์ของกำลังสัญญาณ

การโมดูเลตแบบคิวพีเอสเค จะโมดูเลตสัญญาณข้อมูล 2 บิต/สัญลักษณ์ ดังนั้นสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความผิดพลาดระหว่างสัญลักษณ์กับค่าความผิดพลาดบิตได้ดังนี้ [12]

$$\begin{aligned}\overline{P}_s &= 1-(1-\overline{P}_e)^2 \\ &= 2\overline{P}_e - \overline{P}_e^2\end{aligned} \tag{3.62}$$

ในการวิจัยนี้จะสมมติให้ค่าสัญญาณกำลังงานต่อสัญญาณรบกวนมีค่าสูงมากๆ เนื่องจากเป็นคุณสมบัติที่ต้องการในระบบการโมดูเลตแบบคิวพีเอสเค [14] ดังนั้นสมการ 3.62 จึงเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\overline{P}_s = 2\overline{P}_e \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}\overline{P}_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\Gamma(m_l L)}\cdot\left(\frac{m_l L}{\Omega_0 q(L,\delta)}\right)^{m_l L}\times\Bigg\{&\frac{\sqrt{Y}\Gamma(m_l+\frac{1}{2})}{m_l L\left(Y+\frac{m_l L}{\Omega_0 q(L,\delta)}\right)^{m_l L+\frac{1}{2}}} \\ &\times {}_2F_1\left(1, m_l L+\frac{1}{2}; m_l L+1; \frac{m_l L}{Y\Omega_0 q(L,\delta)+m_l L}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.64}$$