ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

สูตรทั่วไปของการแจกแจงความเข้มของสัญญาณ การแจกแจงแบบนาคากามิ

สูตรทั่วไปของการแจกแจงความเข้มของสัญญาณ การแจกแจงแบบ Nakagami

การแจกแจงแบบนาคากามิเสนอแนวคิดและหลักการทั่วไปของการศึกษาด้านความเข้มของสัญญาณและเกิดการเฟดดิงของสัญญาณ วิธีการได้มาของการแจกแจงนี้ได้มาจากทดลองย่านความถี่สูง การแจกแจงแบบนี้จะเหมาะกับชั้นบรรยากาศไอโอโนสเฟียร์ และโทรโพสเฟียร์สามารถยืนยันได้ว่ามาจาการทดลองและการสังเกต โดยทฤษฎีของการแจกแจงแบบล็อคนอร์มัลเป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงแบบนาคากามิ นอกจากนี้วิธีการที่นำเสนอจะปรับปรุงเป็นสูตรทั่วไปในการอธิบายการแจกแจงแบบอื่นๆ สุดท้ายแสดงความสัมพันธ์แบบอื่นๆ กับการแจกแจงแบบนาคากามิด้วยสูตรของ m และอธิบายค่าตัวแปรเสริมของการแจกแจงแบบนาคากามิ

ก.1 บทนำ

ปัจจุบันวิศวกรสื่อสารได้ศึกษาและเน้นความสำคัญรายละเอียดไม่เพียงแต่ด้านความเข้มของสัญญาณ แต่จะมุ่งเน้นผลของการเฟดของสัญญาณทางสถิติ ซึ่งมีการศึกษาทดลองไว้เป็นจำนวนมากและรองรับด้วยทฤษฎีทางด้านความเข้มของสัญญาณภายใต้การเกิดเฟดดิงของสัญญาณซึ่งได้มีการอธิบายการแจกแจงด้านความเข้มของสัญญาณ ดังนี้

การแจกแจงแบบรายย์เลย์

$$p(R) = \frac{2}{R}\exp(-R^2/\Omega) \qquad (ก.1)$$

โดยที่ $\Omega = < R^2 >$ เป็นค่าเฉลี่ยของ R^2 ซึ่งค้นพบโดย Lord Rayleigh [3] และการทดลองของ Pawsey [3] พิสูจน์ด้วยการทดลองยืนยันการแจกแจงแบบรายย์เลย์ในโหมดของการแจกแจง และการกระจายคลื่น

การแจกแจงแบบล็อคนอร์มัล

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} e^{-(x-x)^2/2\sigma^2{}_X} \qquad (ก.2)$$

โดยที่ x คือความเข้มของสัญญาณในเทอมเดซิเบล (dB) ค้นพบโดย Grosskopf [3] ซึ่งได้มาจากการสังเกตในช่วงเวลาที่นานๆ โดยมีค่าทางทฤษฎีสนับสนุนได้ว่าเป็นการแจกแจงซึ่งมีคุณสมบัติของล็อกการิทึมของจำนวนเต็มบวกค่าต่างๆกัน และการแจกแจงแบบ m ได้นำเสนอโดยนาคากามิซึ่งอธิบายการแจกแจงของสัญญาณในเทอมของค่าเฉลี่ยความเข้มของสัญญาณ ซึ่งอธิบายการศึกษาของ Grosskopf และใช้ได้ในช่วงที่กว้างกว่า มีสมการดังนี้

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} e^{-(m/\Omega)R^2} \qquad (ก.3)$$

โดยที่ $\Omega = < R^2 >$ และ

$$m = \frac{\left(\overline{R^2}\right)^2}{\overline{\left(R^2 - \overline{R^2}\right)^2}} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{ก.4})$$

เมื่อ m เป็นค่าส่วนกลับของค่านอร์มัลไลซ์ของแวเรียนซ์ของ R^2 ซึ่งต้นพบโดยนาคากามิ โดยใช้ในช่วงกว้างของการทดลองย่านความถี่สูง และซึ่งได้ยืนยันผลการศึกษาโดย Wambeck และ Ross [3] โดยการค้นพบนี้ทำให้ยืนยันได้ว่า การแจกแจงแบบรายย์เลย์เหมือนการแจกแจงแบบนาคากามิ เมื่อ $m = 1$ และแสดงได้ในรูปแบบดังนี้

$$p(R) = \frac{2R}{\sigma} e^{-\left(R^2 + R_0^2\right)/\sigma} I_0\left(\frac{2RR_0}{\sigma}\right) \quad (\text{ก.5})$$

และ

$$p(R) = \frac{2R}{\sqrt{\alpha\beta}} e^{-\left(R^2/2\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)} I_0\left[\frac{R^2}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\right] \quad (\text{ก.6})$$

ค้นพบโดย Nakagami กับ Sasaki [3] ตามลำดับ สำหรับในทางทฤษฎีเรียกปัญหาที่พบว่าการแทรกแซงแบบสุ่ม ซึ่งเป็นปัญหาหลักของการเฟดของสัญญาณ ในทางวิศวกรรมสื่อสารแล้วเรียกว่า การแจกแจงแบบ n และการแจกแจงแบบ q ตามลำดับ นอกจากนี้แล้ว Nakagami Wada และ Fujimura [3] ได้พิสูจน์ว่าการแจกแจงแบบ m จะเป็นผลเฉลยทั่วไปในการแก้ปัญหาทางเวกเตอร์สุ่ม นอกจากนี้แล้วการแจกแจงแบบนาคากามิ m สามารถอธิบายการแจกแจงแบบ n และ q ได้ดี และมีความเหมาะสมโดยที่การแจกแจงแบบ m จะเป็นฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint distribution) ของตัวแปร 2 ค่า และเป็นไปตามการแจกแจงแบบ m

ก.2 การได้มาซึ่งการแจกแจงแบบ *m* และคุณสมบัติพื้นฐาน

ก.2.1 การได้มาซึ่งการแจกแจงแบบ *m*

ก.2.1.1 ช่วงเวลาของการสังเกต

การสังเกตผลของการเฟดดิงของสัญญาณตามลำพัง ตัวอย่างเช่น การไม่คิดผลของการเฟดดิงอย่างช้าๆ ระยะเวลาของการสังเกตควรจะเลือกให้เหมาะสม เนื่องจากผลของเฟดดิงอย่างช้าๆ จะมีลักษณะเด่น เมื่อเวลาในการศึกษามีค่ามากๆ ดังนั้นในทางสถิติควรจะเลือกช่วงเวลาให้มีค่าน้อยๆ ซึ่งทางปฏิบัติต้องพยายามเลือกช่วงเวลาให้เหมาะสม และความยาวของช่วงเวลานี้จะขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น ความถี่ เส้นทาง ช่วงเวลาในวันนั้นๆ หลังจากทำการศึกษาแล้วจะพบว่าในการทดลองหนึ่งๆ ค่าเวลาที่เหมาะสมคือ 3-7 นาที

ก.2.1.2 เครื่องมือ

ในการทดลองใช้สายอากาศแบบตั้งซึ่งมีความยาว 1.5 เมตร และเอาต์พุตที่ได้จะมีการขยาย การบีบอัดตัวแบบล็อค และการดีเทคชันขอบด้วยแผ่นเบี่ยงเบน (deflecting plate) ของหลอดรังสีแคโทด (Cathode ray tube) ซึ่งจะมีการเคลื่อนตำแหน่งของจุดบนจอฟลูออเรสเซนต์ ซึ่งก็คือการแปรผันของสัญญาณ และทำการบันทึกบนแผ่นของจอภาพด้านหน้าของจอ และการแจกแจงแบบนี้ได้มาจากการวัดค่าความหนาแน่นของน้ำยาเคลือบฟิล์มของแผ่น ซึ่งจะได้ค่าคงตัวทางเวลามีค่ามากที่สุดเท่ากับ 2 ms ตัวอย่างผลการสังเกตและการทดลองแสดงดังตาราง

ตารางที่ ก.1 ผลการสังเกตและการทดลองของนาคากามิ

สถานี	ระยะทาง (km)	สัญญาณ	ความถี่ (kHz)	วันที่	จำนวนแผ่น	จำนวนแผ่น m<0.5
Changehum	1,500	JMP2	10,065	Apr.1941	34	0
Pulau	3,200	JRAK	11,740	Oct.1941	15	0
San Francisco	3,240	KNY/	19,080	Nov.1940-Oct 1941	67	1
		KGEN/	9,670	Oct.1941	17	0
		KWU	15,355	Oct.1941	14	0
Berlin	8,900	DFZ	20,020	Apr.1941	19	0
Taipei	2,200	JIB	10,535	Oct-Dec 1941	265	0

ก.2.1.3 การได้มาของฟังก์ชันการแจกแจง

จากผลการทดลองนำไปแสดงความสัมพันธ์ด้วยกราฟในแกนล็อก-ล็อก ซึ่งก็คือพิกัดที่หนึ่ง และพิกัดที่สอง ซึ่งแทนด้วยเส้นตรงที่มีความชันเป็นค่า m ต่างๆ ซึ่งแสดงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$p(x) = \exp\left[m\left(1 + \frac{2x}{m} - e^{2x/m} \right) \right] \qquad (ก.7)$$

โดยที่ x คือ ความเข้มของสัญญาณเป็นเดซิเบล

M คือ $20\log_{10} e = 8.686$

ทำการนอร์มัลไลซ์สมการที่ (ก.7) แล้วแปลงเป็น เดซิเบล จะได้

$$p(x) = \frac{2m^m}{M\Gamma(m)} \exp\left[m\left(\frac{2x}{M} - e^{2x/m} \right) \right] \qquad \text{(ก.8)}$$

จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่ามีค่า m ที่เป็นไปตามเงื่อนไขคือ

$$m \geq \frac{1}{2} \qquad \text{(ก.9)}$$

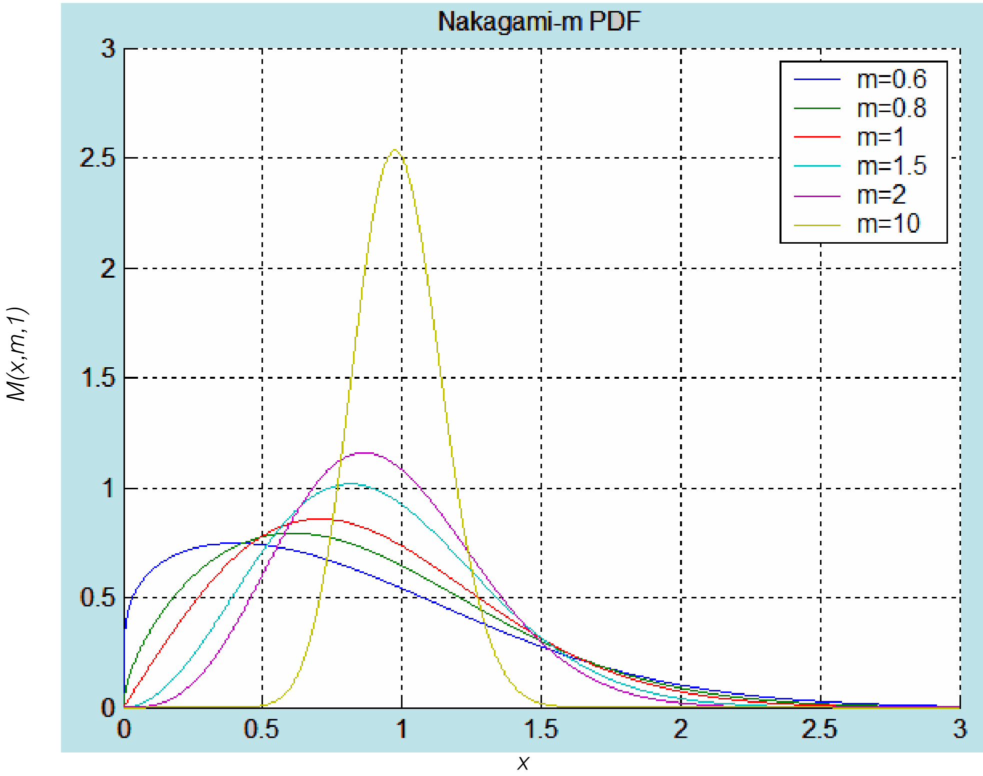
โดยการแปลงจาก $e^{x/M} = X = R/\Omega^{1/2}$ ซึ่ง $\Omega = \left\langle R^2 \right\rangle$ เป็นค่าเฉลี่ยของค่ากำลังสองของความเข้มของสัญญาณ สุดท้ายจะได้การแจกแจงดังนี้

$$p(x) = \frac{2m^m x^{2m-1} e^{-mx^2}}{\Gamma(m)} = M(x, m, 1) \qquad \text{(ก.10)}$$

โดยความสัมพันธ์ระหว่าง $M(x, m, 1)$ และตัวแปรสุ่ม (x) แสดงได้ดังรูปที่ ก.1 และสมการที่ 10 จัดรูปใหม่ได้ว่า

$$p(R) = \frac{2m^m R^{2m-1} e^{-(m/\Omega)R^2}}{\Gamma(m)\Omega^m} = M(R, m, \Omega) \qquad \text{(ก.11)}$$

โดยสมการที่ 11 เป็นการรวมกรณีที่เป็นการแจกแจงแบบเกาส์เซียนข้างเดียว เมื่อ $m = 0.5$ และการแจกแจงแบบราย์เลย์เมื่อ $m = 1$ ตามลำดับ



รูปที่ ก.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง $M(x,m,1)$ และตัวแปรสุ่ม (x)

ก.3 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบ *m*

ก.3.1 ค่ามากที่สุดของ $M_Z(x,m,0)$

$$p(0)=\frac{2m^m}{M\Gamma(m)e^m}=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{2m}{\pi}} \tag{ก.12}$$

ที่ $x=0$ หรือ $R=\Omega^{1/2}$

จากสมการที่ ก.12 ถ้า $x \le M$ ทำให้ $M_z(x,m,0)$ มีค่าเข้าใกล้การแจกแจงแบบล็อกนอร์มัล

$$p(x)=\frac{1}{M}\sqrt{\frac{2m}{\pi}}\exp\left[-2m\left(\frac{x}{M}\right)^2\right] \tag{ก.13}$$

นอกจากนี้ $M_z(x,m,0)$ สามารถแสดงได้ในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$p(\tau)=\frac{2m^m}{M\Gamma(m)}\exp\left[m\left(\frac{2(\tau-\tau_0)}{M}-\exp(2(\tau-\tau_0)/M)\right)\right]=u_\tau(\tau,m,\tau_0) \tag{ก.14}$$

โดยที่ τ และ τ_0 เป็นความเข้มของสัญญาณใน dB และ $R = \Omega^{1/2}$ ซึ่งมีความเข้มเป็น 1 และฟังก์ชันการแจกแจงรวม จะกำหนดดังนี้

$$M(x,m) = \int_{-\infty}^{x} M_z(x,m,0)dx \tag{ก.15}$$

สมการฟังก์ชันคุณลักษณะ

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u_z(x,m,0)e^{-2x}dx = \frac{\Gamma\left(m - \frac{M}{2}z\right)}{\Gamma(m)} m^{\left(\frac{M}{2}\right)^z} \tag{ก.16}$$

โมเมนต์และแวเรียนซ์

$$\overline{R^n} = \frac{\Gamma\left(m + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(m)}\left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{n}{2}}, \overline{R^{2n}} = \left(\frac{\Omega}{m}\right)^n \left(m + \overline{n-1}\right)\left(m + \overline{n-2}\right)...m \tag{ก.17}$$

$$V\left(R^2\right) = \frac{\Omega^2}{m}, V(R) = \Omega\left[1 - \left(\frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{m}\Gamma(m)}\right)^2\right] \cong \frac{\Omega}{5m} \tag{ก.18}$$

โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
สำหรับโมเมนต์และแวเรียนซ์จัดรูปในหน่วย dB แสดงได้ดังนี้

$$\bar{x} = \frac{M}{2}\{\varphi(m) - \log_e m\} \tag{ก.19}$$

$$\overline{x^2} = \left(\frac{M}{2}\right)^2 \{\varphi(m) - \log_e m\}^2 + \varphi(m) \tag{ก.20}$$

$$\overline{x^3} = \left(\frac{M}{2}\right)^3 \left\{[\varphi(m) - \log_e m]^3 + 3\varphi(m)[\varphi(m) - \log_e m] + \varphi''(m)\right\} \tag{ก.21}$$

โดยที่ $\varphi(x), \varphi(x)'$ และ $\varphi(x)''$ คือ ฟังก์ชันแกมมาลำดับที่สอง แกมมาลำดับที่สาม และแกมมาลำดับที่สี่ ตามลำดับ

ก.3.2 ตัวแปรเสริม *m*

ตัวแปรเสริม m แสดงได้ในพจน์ดังนี้

$$m = \frac{\Omega^2}{V\left(R^2\right)} = \frac{1}{V_N\left(R^2\right)} \qquad (ก.22)$$

โดย $V_N\left(R^2\right)$ คือ นอร์มัลไลซ์แวเรียนซ์ของ R^2 ดังนั้น m คือส่วนกลับค่านอร์มัลไลซ์แวเรียนซ์ของ R^2 ความสัมพันธ์ในการเฟดของสัญญาณในช่วง $N(P)$ หรือ $X_2 - X_1$

$$P = \int_{-\infty}^{x_1} M_Z\left(x, m, 0\right)dx = \int_{x_2}^{\infty} M_Z\left(x, m, 0\right)dx \qquad (ก.23)$$

จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขได้ว่า

$$N\left(P\right) = 10\left(\frac{1}{m} + 0.2\right)\log_{10}\frac{1}{P} + 1.5dB, \left(m < 8\right) \qquad (ก.24)$$

จะเห็นได้ว่า $N(P)$ เป็นสัดส่วนเชิงเส้นกับ $1/m$ หรือรูปร่างเฟดดิง (Fading figure)

ภาคผนวก ข

โปรแกรม

1. โปรแกรมการทำงานของระบบแสดงผลการวิเคราะห์ค่ากำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน

1.1 ส่วนของการกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ

```
clear all;
clc;
K = 30;                      % กำหนดผู้ใช้งานในระบบ
m = [0.5,0.75,1,2,3];        % ค่าตัวแปรการแจกแจงแบบนาคากามิเอ็ม
M = m(5);                    % กำหนดค่าตัวแปรการแจกแจงแบบนาคากามิเอ็ม
l = [2 3 4 5 6 8];           % จำนวนสาขาเครื่องรับเรค
L = l(1);                    % กำหนดค่าจำนวนสาขาเครื่องรับเรค
delta = [0 0.2 0.4 0.6 0.8]; % ค่าตัวแปรอัตราการลดทอนสัญญาณที่ยังเดินทาง
                               มายังเครื่องรับ
d = delta(5);                % กำหนดค่าตัวแปรอัตราการลดทอนสัญญาณ
q = Q(L,d);                  % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นคิว
N = 127;                     % กำหนดค่าอัตราการขยายประมวลผล
Ebdb = [0:1:30];             % กำหนดค่าอัตราส่วนกำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณ
                               รบกวน dB
%################################################################################%
```

1.2 การคำนวณของโปรแกรมเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในการเกิดความผิดพลาดบิตเฉลี่ย จากสมการที่ 3.64

```
for i = 1:31
  Eb = 10^(Ebdb(i)/10);      % เปลี่ยนค่าอัตราส่วนกำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณ
                               รบกวนเป็น mW
  b(i) = ZigmaQ(K,q,N,Eb);   % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นซิกม่า
end
A1 = 1/(sqrt(pi));
A2 = (Gamma(M*L))^(-1);
A3 = ((M*L)/q)^(M*L);
```

```
for i = 1:31
   A4_1 = sqrt(b(i))*Gamma((M*L)+0.5);
   A4_2 = (b(i)+((M*L)/q))^((M*L)+0.5);
   A4_3 = M*L*A4_2;
   A4(i) = A4_1/A4_2;
end

for i = 1:31
   x1 = M*L;
   x2 = (b(i)*q)+x1;
   x(i) = x1/x2;
   A5(i) = Hyper(x1,0.5,x(i));       % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นไฮเปอร์
end

for i = 1:31
   A(i) = A1*A2*A3*A4(i)*A5(i);
end
%################################################################################%
```

1.3 การแสดงผล

```
figure(1);
semilogy(Ebdb,P,'kv-.');
grid on;
axis([0 30 10^-6 10^0]);
legend('L = 2','L = 4','L = 5','L = 6','L = 8');
ylabel('\bf\itAverage Symbol Error Probability');
xlabel('\bf\it\bfSNR(dB)');
hold on;
```

2. โปรแกรมการทำงานของระบบแสดงผลการเปลี่ยนแปลงจำนวนผู้ใช้งานในระบบ

2.1 ส่วนของการกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ

```
clear all;
clc;
K = [10:10:100];              % กำหนดผู้ใช้งานในระบบตั้งแต่ 10 ถึง 100
m = [0.5,0.75,1,2,3];         % ค่าตัวแปรการแจกแจงแบบนาคากามิเอ็ม
M = m(3);                     % กำหนดค่าตัวแปรการแจกแจงแบบนาคากามิเอ็ม
l = [2 3 4 5 6 8];            % จำนวนสาขาเครื่องรับเรค
L = l(5);                     % กำหนดค่าจำนวนสาขาเครื่องรับเรค
delta = [0 0.2 0.4 0.6 0.8];  % ค่าตัวแปรอัตราการลดทอนสัญญาณที่ยังเดินทาง
                                มายังเครื่องรับ
d = delta(2);                 % กำหนดค่าตัวแปรอัตราการลดทอนสัญญาณ
q = Q(L,d);                   % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นคิว
N = 127;                      % กำหนดค่าอัตราการขยายประมวลผล
Eb = 30;                      % กำหนดค่าอัตราส่วนกำลังงานสัญญาณต่อสัญญาณ
                                รบกวน dB
%##############################################################################%
```

2.2 การคำนวณของโปรแกรมเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในการเกิดความผิดพลาดบิตเฉลี่ย จากสมการที่ 3.64

```
for i = 1:10
  b(i) = ZigmaQ(K(i),q,N,Eb);          % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นซิกม่า
end
A1 = 1/(sqrt(pi));
A2 = (Gamma(M*L))^(-1);
A3 = ((M*L)/q)^(M*L);

for i = 1:10
  A4_1 = sqrt(b(i))*Gamma((M*L)+0.5);
  A4_2 = (b(i)+((M*L)/q))^((M*L)+0.5);
  A4_3 = M*L*A4_2;
```

```
    A4(i) = A4_1/A4_2;
end

for i = 1:10
    x1 = M*L;
    x2 = (b(i)*q)+x1;
    x(i) = x1/x2;
    A5(i) = Hyper(x1,0.5,x(i));            % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นไฮเปอร์
end

for i = 1:10
  A(i) = A1*A2*A3*A4(i)*A5(i);
end
%##################################################################################%
```

2.3 การแสดงผล

```
figure(2);
semilogy(K,P,'ks-.');
grid on;
axis([10 100 10^-8 10^-1]);
legend('m = 0.5','m = 1','m = 2','m = 3');
ylabel('\bf\itAverage Bit Error Probability');
xlabel('\bf\it\bfUser');
hold on;
```

3. โปรแกรมย่อย

3.1 ฟังก์ชั่น Q

```
% Q calculate the parameter between L and d
% L -- branch of RAKE receiver L
% d -- power loss d
% Calculate parameter
function qpara = Q(L,delta)
qpara = 0;
for i = 0:(L-1)
   qpara = qpara+exp(-i*delta);
end
```

3.2 ฟังก์ชั่นซิกม่า

```
function z = ZigmaQ(K,q,N,Eb)
z1 = (q-1)/N;
z2 = (2*(K-1)*q)/(3*(N));
z3 = 1/(2*Eb);
z =(z1+z2+z3)^(-1);
```

3.3 Hyper(p,q,x) function

```
function h = Hyper(p,q,x)
h1 = p/(x^p);
h2 = (1-x)^(-q);
h3 = BETAINC(x,p,q);            % เรียกใช้งานฟังก์ชั่นเบต้า
h = h1*h2*h3;
```

ภาคผนวก ค

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

1. เกรียงวุฒิ จรภักดี, กอบชัย เดชหาญ, **“การวิเคราะห์สมรรถนะของระบบ DS-QPSK CDMA โดยใช้ช่องสัญญาณการจางแบบนาคากามิ,”** วิศวสารลาดกระบัง, ปีที่ 22, ฉบับที่ 4, หน้า 57-62, ธันวาคม, 2548.