

ภาคผนวก ง

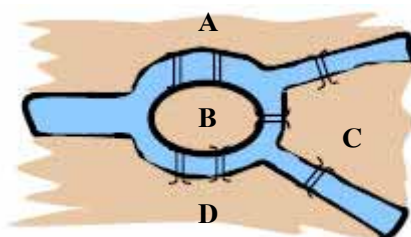
เนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

1. ความรู้เบื้องต้นของกราฟ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีประโยชน์มาก ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหามากมายที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน โดยการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์ และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ช่วยในการแก้ปัญหา

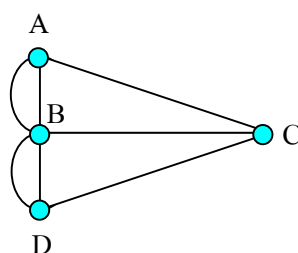
ประวัติของทฤษฎีกราฟ

การศึกษากราฟที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นเนื้อหาในวิชาทฤษฎีกราฟ ซึ่งมีประวัติความเป็นมาดังนี้ ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นจากความพยายามในการตอบปัญหาปริศนา (puzzle) ต่าง ๆ ปัญหาหนึ่งที่รู้จักกันดีสำหรับผู้ศึกษาทฤษฎีกราฟ คือปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก (The Königsberg Bridges Problem) ปัญหานี้มีอยู่ว่าในเมืองคอนิกส์เบิร์ก มีเกาะ 2 เกาะ และมีสะพานอยู่ 7 สะพาน ซึ่งเชื่อมเกาะ 2 เกาะ นี้ไปยังฝั่งของแม่น้ำพรีเกิล (Pregel River) ดังรูป โดยแทนเกาะด้วย B และ C และแทนฝั่งด้วย A และ D



ปัญหามีอยู่ว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่ชาวเมืองคอนิกส์เบิร์กคนหนึ่งจะเริ่มต้นเดินทางจากเกาะหรือฝั่งใดฝั่งหนึ่งโดยผ่านทุกเกาะและทุกฝั่ง และข้ามสะพานแต่ละแห่งเพียงครั้งเดียวเท่านั้นจนครบทุกสะพาน แล้วจะต้องกลับมาอยู่ที่จุดเริ่มต้น

ปริศนานี้ไม่มีผู้ใดตอบได้จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ได้ตีพิมพ์บทความตอบปริศนานี้ว่า เป็นไปไม่ได้ ออยเลอร์แก้ปัญหานี้โดยการจำลองปัญหาด้วยการใช้จุดแทนเกาะ B เกาะ C ฝั่ง A และฝั่ง D และใช้เส้นเชื่อมแทนสะพานดังนั้นรูปแบบจำลองที่แทนปัญหานี้สามารถเขียนได้ดังรูป



แนวทางการตอบปัญหานี้ของ ออยเลอร์ คือการดูจากรูปแบบจำลองข้างต้น เขาพบว่า การเริ่มต้นเดินจากจุดใด ๆ แล้วจะต้องเดินผ่านทุก ๆ เส้น ๆ ละ 1 ครั้ง แล้วกลับมาที่เดิมเป็นไปไม่ได้

เพราะว่าถ้าต้องเดินจากจุดใด ๆ แล้วต้องผ่านทุกเส้น ๆ ละ 1 ครั้ง นั่นต้องมีเงื่อนไขว่า ไม่ว่าจะเริ่มต้นจากจุดใดจะต้องมีการเดินทางเข้าจุดนั้นเสมอโดยเส้นที่ต่างกัน เมื่อเป็นเช่นนี้จำนวนเส้นที่ออกจากจุดแต่ละจุดต้องเป็นจำนวนคู่ ซึ่งจากรูปแบบที่แทนปัญหาดังรูปข้างต้น จะพบว่าไม่มีจุดใดเลยที่มีจำนวนเส้นออกจากจุดเป็นจำนวนคู่

ปัญหาสะพานคอนิกเบิร์ก ได้รับการยกย่องว่าเป็นปัญหาเริ่มต้นของการก่อกำเนิดทฤษฎีกราฟออยเลอร์ซึ่งเป็นผู้แก้ปัญหาดังกล่าวจึงได้รับการยกย่องว่าเป็น “บิดาของวิชาทฤษฎีกราฟ”

แนวคิดของทฤษฎีกราฟ

ในชีวิตประจำวัน กิจกรรมที่คนเราทำอยู่เป็นประจำนั้น ก็เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในการดำเนินชีวิตหลายปัญหาสามารถสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมแทนปัญหา ซึ่งทำให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น แล้วแก้ปัญหาโดยการหาคำตอบจากแบบจำลอง จากนั้นจึงนำคำตอบที่ได้จากแบบจำลองมาอธิบายผลที่เกิดขึ้นจากปัญหาจริง

ปัญหาที่ซับซ้อนบางปัญหาเราสามารถจำลองปัญหาโดยใช้จุดและเส้นช่วยในการแก้ปัญหาให้ง่ายขึ้นได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 คณะกรรมการนักเรียนโรงเรียนแห่งหนึ่งแบ่งการทำงานออกเป็น 4 ฝ่าย ได้แก่ ฝ่ายบริหาร ฝ่ายการเงิน ฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น ฝ่ายกิจกรรม แต่ละฝ่ายอาจจะมีกรรมการร่วมกัน โดยประธานนักเรียนได้กำหนดว่าแต่ละฝ่ายจะต้องมีการประชุมสัปดาห์ละ 1 ครั้ง ซึ่งในการจัดการประชุมได้จัดเวลาในช่วงเช้าของวัน จันทร์ พุธ และ ศุกร์ นักเรียนคิดว่าผู้ที่มีหน้าที่ในการจัดการประชุมจะใช้วิธีการจัดอย่างไร โดยที่กรรมการทุกคนสามารถร่วมประชุมได้ ถ้ากำหนดคณะกรรมการแต่ละฝ่ายมีคณะกรรมการร่วมกันดังนี้

ฝ่ายบริหาร และฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

ฝ่ายการเงิน และฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

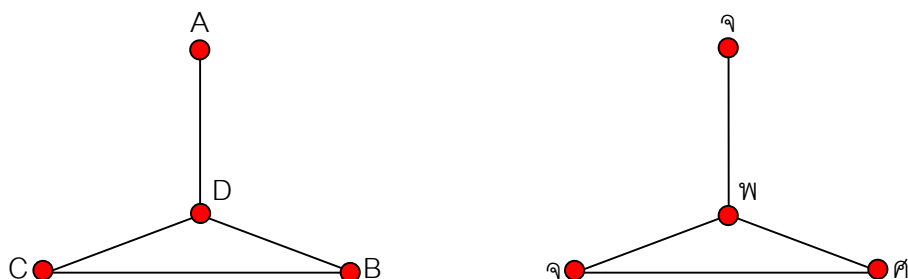
ฝ่ายการเงิน และฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น มีกรรมการร่วมกัน

ฝ่ายหัวหน้าระดับชั้น และฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

แนวคิด สร้างรูปจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้

- A แทนฝ่ายบริหาร
- B แทนฝ่ายการเงิน
- C หัวหน้าระดับชั้น
- D แทนฝ่ายกิจกรรม

เส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด ใดๆ แทนความสัมพันธ์สองฝ่าย มีกรรมกรร่วมกัน ดังนั้นรูปแบบจำลองที่แบบสถานการณ์



รูปที่ 1 แสดงถึงคณะกรรมการทั้ง 4 ฝ่าย

รูปที่ 2 ตารางแสดงการประชุม โดยกำหนดวันจันทร์ พุธ และศุกร์

ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร

สมจิต สมใจ สมคิด สมบูรณ์ และสมชาย สมัครเข้าทำงานตามความสามารถของบุคคลในบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีงานว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง ซึ่งความสามารถของบุคคลทั้ง 5 คน มีดังนี้

สมจิต มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

สมใจ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3

สมคิด มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 1 และ 2

สมบูรณ์ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

สมชาย มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 2 และ 5

ให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่บุคคลทั้ง 5 คน ได้รับเข้าทำงานในบริษัทนี้ทั้งหมด

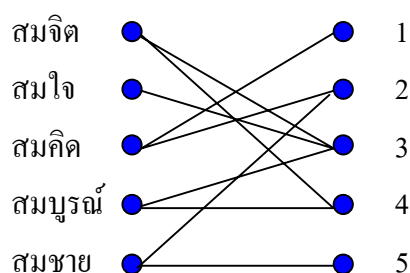
แนวคิด สร้างรูปจำลองแทนสถานการณ์โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ

กลุ่มที่ 1 แทนคน

กลุ่มที่ 2 แทนงาน

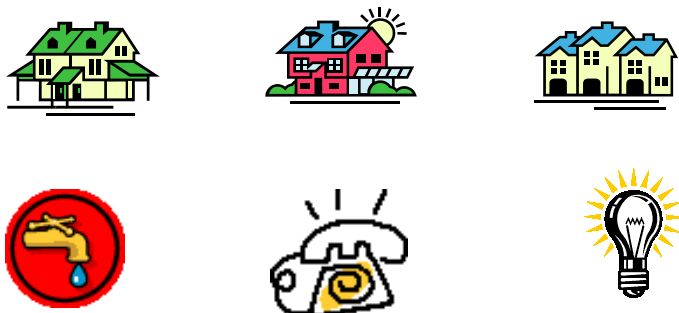
เส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด แทนความสามารถของคนที่กับงาน

เขียนรูปได้ดังนี้



จากรูปจำลองพบว่า เป็นไปไม่ได้ว่า ทั้ง 5 คน จะได้รับเข้าทำงาน เพราะ สมจิต สมใจ และ สมบูรณ์ 2 คนนี้ ทำงานได้เพียง 2 งาน คือ งาน 3 และ 4 จึงมีคนหนึ่งคนใดไม่ได้เข้าทำงาน

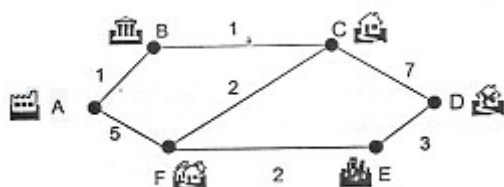
ตัวอย่างที่ 3 มีบ้าน 3 หลัง ซึ่งแต่ละหลังต้องการสาธารณูปโภค 3 อย่าง คือ น้ำ ไฟฟ้า และ โทรศัพท์ ถ้าต้องการติดตั้งสาธารณูปโภคเป็นแบบวางท่อใต้ดิน ให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่การต่อสาธารณูปโภคทั้งสามอย่าง มายังบ้าน 3 หลังโดยไม่ให้แนวท่อของเครื่องสาธารณูปโภคนั้นทับกัน



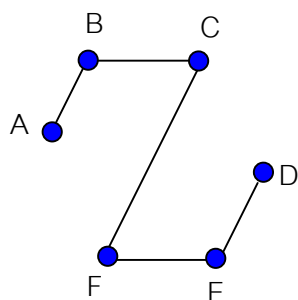
ตอบ เป็นไปไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4 สถานการณ์น้ำท่วมในภาคกลาง เป็นผลให้ถนนหลายสายได้รับความเสียหาย ความช่วยเหลือของรัฐบาลไม่สามารถส่งข้าวของเครื่องใช้ไปถึงหมู่บ้านที่ได้รับผลกระทบจากเหตุการณ์ครั้งนี้ ดังนั้นเจ้าที่ที่มีส่วนเกี่ยวข้องต้องทำการช่วยเหลือซ่อมแซมถนนที่ถูกตัดขาดเป็นการด่วน ดังนั้นจะเลือกซ่อมถนนเส้นทางใดจึงใช้เวลาน้อยที่สุด

ให้นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ดังกล่าวโดยสมมตินักเรียนเป็นเจ้าหน้าที่ในการช่วยเหลือ นักเรียนจะเลือกซ่อมถนนเส้นทางใดบ้างที่ใช้เวลาน้อยที่สุดและถนนที่ซ่อมนั้นต้องผ่านทุกหมู่บ้านในเมืองนั้นๆ ที่ได้รับความเดือดร้อน เมื่อกำหนดแผนผังของเมืองที่ถูกน้ำท่วมดังรูปแบบจำลอง (ตัวเลขที่กำกับเส้นแทนระยะเวลาในการซ่อมแซมถนนระหว่างหมู่บ้านสองหมู่บ้านใด)

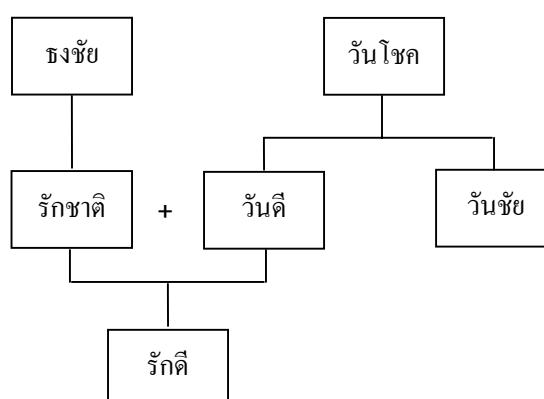


แนวคิด จากรูปจำลอง เส้นทางที่สามารถ ซ่อมแซมได้ โดยใช้เวลาน้อยที่สุด



ตัวอย่างที่ 5 มีปัญหาว่าวันโชคเป็นพ่อของวันชัย วันชัยเป็นน้องของรักดี ชงชัยเป็นพ่อของรักชาติ รักชาติเป็นสามีของวันดี วันดีมีน้องชายคนเดียวคือวันชัย ให้นักเรียนพิจารณาว่า วันโชค ชงชัย รักชาติ เป็นอะไรกับรักดี

แนวคิด ให้จุดแทนคน เส้นแทนความสัมพันธ์



วันโชค เป็นตา ของรักดี

ชงชัย เป็นปู่ ของรักดี

รักชาติ เป็นพ่อ ของรักดี

จากตัวอย่างที่กล่าวมา นักเรียนจะเห็นได้ว่าการแทนสถานการณ์ โดยใช้จุดและเส้นเป็นแบบจำลองที่ง่ายในการจำลองปัญหาซึ่งเน้นความสัมพันธ์ระหว่างคน สัตว์ สิ่งของ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ

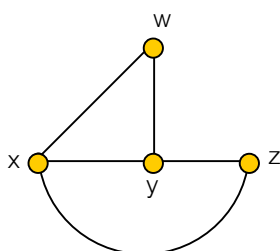
บทนิยาม 1

กราฟ G ประกอบด้วย $V(G)$ และ $E(G)$ ซึ่ง

$V(G)$ คือ เซตของจุดเรียกว่า **จุด(vertex)** โดย มีอย่างน้อย 1 จุด

$E(G)$ คือ เซตของเส้นเรียกว่า **เส้น(edge)** โดยที่เส้นแต่ละเส้นนี้เชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ใน $V(G)$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดกราฟ S ดังรูป



จะได้ว่า $V(S)$ คือ $\{w, x, y, z\}$

$E(S)$ คือ $\{wx, wy, xy, xz, yz\}$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดกราฟ G ดังรูป

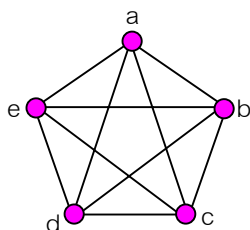


จะได้ว่า $V(G)$ คือ $\{u\}$

$E(G)$ คือ ไม่มี

เราเรียกกราฟที่มีจุด 1 จุดว่า **กราฟซัด(trivial graph)**

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดกราฟ T ดังรูป



จะได้ว่า $V(T)$ คือ $\{a, b, c, d, e\}$

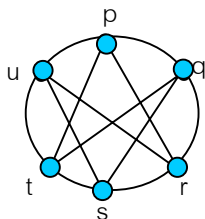
$E(T)$ คือ $\{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$

บทนิยาม 2

จุดยอด u และ v ของกราฟเป็น **จุดยอดประชิด(adjacent vertices)** ก็ต่อเมื่อมีเส้นระหว่างจุดทั้งสอง

เส้นเชื่อมประชิด ของกราฟเกิดกับ **ตกกระทบ(incident) จุดยอด v ถ้าจุดยอด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม**

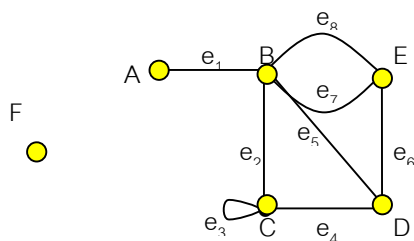
ตัวอย่างที่ 9 กำหนดกราฟ ดังรูป จงหาจุดอื่น ๆ ในกราฟ ประชิดกับจุดใดบ้าง หรือตกกระทบกับเส้นใดบ้าง



วิธีทำ

จุด p ประชิดกับจุด q, r, t, u	และเส้นเชื่อมประชิดคือ pq, pr, pt, pu
จุด u ประชิดกับจุด p, r, s, t	และเส้นเชื่อมประชิดคือ up, ur, us, ut
จุด q ประชิดกับจุด p, r, t, s	และเส้นเชื่อมประชิดคือ qp, qr, qt, qs
จุด r ประชิดกับจุด q, s, u, p	และเส้นเชื่อมประชิดคือ rq, rs, ru, rp
จุด s ประชิดกับจุด r, t, u, q	และเส้นเชื่อมประชิดคือ sr, st, su, sq
จุด t ประชิดกับจุด s, u, q, p	และเส้นเชื่อมประชิดคือ ts, tu, tq, tp

ตัวอย่างที่ 10 จากกราฟ G ดังรูป

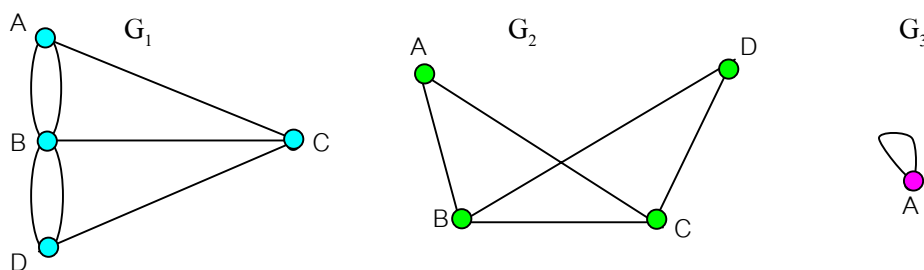


$V(G)$ คือ	{A, B, C, D, E, F}
$E(G)$ คือ	{AB, BC, CC, BD, BE, EB, ED, CD}
จะได้ว่าจุด D ประชิดกับจุด	B, C, E
เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุด C	BC, CC, CD
จุด B ประชิดกับจุดใด	A, C, D, E
จุด E ตกกระทบกับเส้นใด	EB, EB, ED
จุด F ประชิดกับจุดใดและตกกระทบกับเส้นใด	ไม่ประชิด และไม่มีเส้นเชื่อมใดในกราฟ

บทนิยาม 3

- เส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน เราเรียกว่า **วงวน(loop)**
- เส้นตั้งแต่ 2 เส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดคู่เดียวกัน เราเรียกว่า **เส้นหลายชั้น (multiple edges)**
- กราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้นและไม่มีวงวน เราเรียกว่า **กราฟเชิงเดียว (single graph)**

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดกราฟ G_1 , G_2 และ G_3 ดังรูป



กราฟใดเป็นกราฟเชิงเดียว กราฟหลายชั้น กราฟวงวน พร้อมทั้งบอกเหตุผล

วิธีทำ

G_1 เป็น เส้นหลายชั้น เพราะมีเส้นตั้งแต่ 2 เส้นเชื่อมจุดคู่เดียวกัน

G_2 เป็น กราฟเชิงเดียว เพราะเป็นกราฟที่ไม่มีเส้นหลายชั้น และไม่มีวงวน

G_3 เป็น วงวน เพราะเส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน

2. ระดับชั้น (degree)

บทนิยามที่ 4 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G

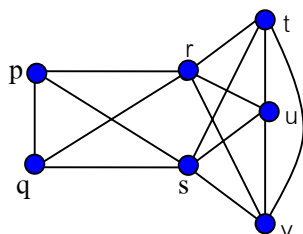
ระดับชั้น (degree) ของ u ใน G คือ จำนวนของเส้นที่ตกกระทบกับจุด u เขียนแทนด้วย $\deg(u)$

เรากล่าวว่า u เป็นจุดคู่ (even vertex) ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ u เป็นจำนวนคู่

u เป็นจุดคี่ (odd vertex) ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ u เป็นจำนวนคี่

u เป็นจุดเอกเทศ (isolated vertex) ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ u เป็น 0

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดกราฟดังรูป



จะได้ว่า

$\deg(p) = \dots 3 \dots$ ดังนั้น p เป็น..จุดคี่....

$\deg(q) = \dots 3 \dots$ ดังนั้น q เป็น..จุดคี่....

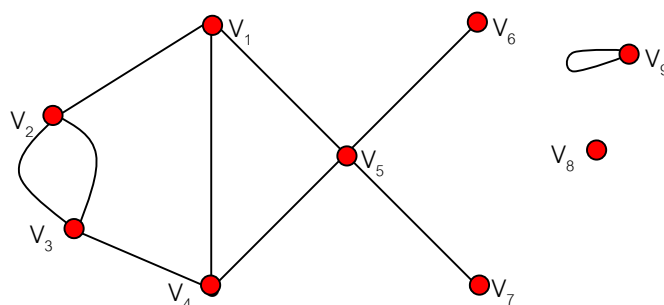
$\deg(r) = \dots 5 \dots$ ดังนั้น r เป็น..จุดคี่....

$\deg(s) = \dots 5 \dots$ ดังนั้น s เป็น..จุดคี่....

$\deg(u) = \dots 4 \dots$ ดังนั้น u เป็น..จุดคู่....

$\deg(t) = \dots 4 \dots$ ดังนั้น t เป็น..จุดคู่....

$\deg(v) = \dots 4 \dots$ ดังนั้น v เป็น..จุดคู่....

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดกราฟ G_1 ดังรูป

จะได้ระดับชั้นของจุด V_1 ถึง V_9

$$\deg(V_1) = \dots 3 \dots \deg(V_2) = \dots 3 \dots$$

$$\deg(V_3) = \dots 3 \dots \deg(V_4) = \dots 3 \dots$$

$$\deg(V_5) = \dots 4 \dots \deg(V_6) = \dots 1 \dots$$

$$\deg(V_7) = \dots 1 \dots \deg(V_8) = \dots 0 \dots$$

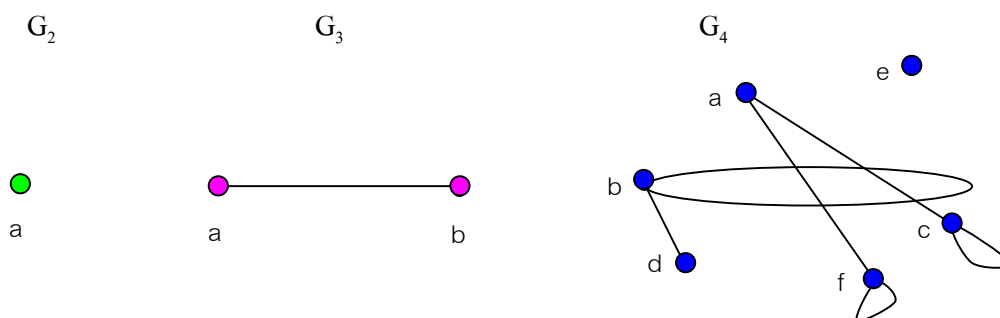
$$\deg(V_9) = \dots 2 \dots$$

เราเรียก จุด V_8 ที่มีระดับชั้น 0 ว่าจุดเอกเทศ (isolated vertex)

เราเรียก จุด V_6 และ V_7 ที่มีระดับชั้น 1 ว่าจุดปลาย (end vertex)

หมายเหตุ จุดที่มีวงวน 1 วงวนระดับชั้นของจุดนั้นเป็น 2

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \sum_{i=1}^9 \deg(v_i) &= \deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_9) \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 1 + 1 + 0 + 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดกราฟ G_2, G_3, G_4 ดังรูป

จากกราฟที่กำหนดจะได้ตารางแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกระดับชั้นของทุก ๆ จุดและจำนวนเส้นของกราฟ G_1, G_2, G_3, G_4 ในตัวอย่างที่ 13-14

กราฟ	จำนวนเส้น	ผลบวกของระดับชั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ	จำนวนจุดที่	จำนวนจุดคู่
G_1	10	20	6	3
G_2	0	0	0	1
G_3	1	2	2	0
G_4	6	12	4	2

ข้อสังเกต

1. ผลบวกของระดับชั้นของทุก ๆ จุดในกราฟ จะมีค่าเท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้นใช่หรือไม่
2. จำนวนจุดที่ในกราฟใด ๆ จะเป็นจำนวนคู่ใช่หรือไม่

ทฤษฎีบท 1

ผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ $= 2 \times$ จำนวนเส้น

ทฤษฎีบท 2

จำนวนจุดที่ในกราฟต้องเป็นจำนวนคู่

สรุป

จากที่กล่าวมา จะพบว่า มีลักษณะที่น่าสนใจบางอย่างเกี่ยวกับกราฟ ดังนี้

1. ผลรวมของดีกรีของจุดทุกจุดในกราฟเท่ากับ 2 เท่าของจำนวนเส้นในกราฟ
2. ผลรวมของดีกรีของจุดทุกจุดในกราฟต้องเป็นจำนวนคู่
3. จำนวนจุดที่ทั้งหมดในกราฟต้องเป็นจำนวนคู่

ตัวอย่างที่ 15 ถ้ากราฟ G มีเส้น 20 เส้น และดีกรีของทุก ๆ จุดใน G เป็น 4 จงหาว่ากราฟ G มีจำนวนจุดเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ} &= 2 \times \text{จำนวนเส้นในกราฟ } G \\
 4 \times \text{จำนวนจุด} &= 2 \times 20 \\
 \text{จำนวนจุด} &= \frac{2 \times 20}{4}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟ G มีจำนวนจุด 10 จุด

ตัวอย่างที่ 16 ถ้ากราฟ H มีเส้น 30 เส้น และมีจุดที่มีดีกรี 2 อยู่ 12 จุด นอกนั้นเป็นเป็นดีกรี 3 จงหาว่ากราฟ H มีจำนวนของจุดเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \text{ผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ} &= 2 \times \text{จำนวนเส้นในกราฟ } H \\
 (2 \times \text{จำนวนจุดดีกรี 2}) + (3 \times \text{จำนวนจุดดีกรี 3}) &= 2 \times 30 \\
 (2 \times 12) + (3 \times \text{จำนวนจุดดีกรี 3}) &= 60 \\
 3 \times \text{จำนวนจุดดีกรี 3} &= 60 - 24 \\
 \text{จำนวนจุดดีกรี 3} &= 36 / 3 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟ H มีจำนวนจุด $12 + 12 = 24$ จุด

ตัวอย่างที่ 17 ถ้าจุดในกราฟ G มีดีกรี 3 หรือ 4 เท่านั้น และ $|V(G)| = 12$, $|E(G)| = 20$ จงหาจำนวนจุดที่มีดีกรี 3 และดีกรี 4

วิธีทำ

ให้ X แทนจำนวนจุดที่มีดีกรี 3 ในกราฟ G

$$\begin{aligned}
 \text{ผลรวมของดีกรี 4 ในกราฟ } G \text{ มี} &= 12 - X \\
 3X + 4(12 - X) &= 2 \times 20 \\
 -X + 48 &= 40 \\
 X &= 8
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนจุดในกราฟ G ที่มีดีกรี 3 จำนวนจุด 8 จุด และ ดีกรี 4 จำนวนจุด 4 จุด

3. วิธีและวัฏจักร

บทนิยามที่ 5 แนวเดิน(Walk) W ในกราฟ G คือลำดับจำกัดของจุดและเส้นสลับกันของกราฟ G ดังนี้ $W: v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ ซึ่งเส้น e_i มีจุดปลายคือ v_{i-1} และ v_i สำหรับ $1 \leq i \leq n$

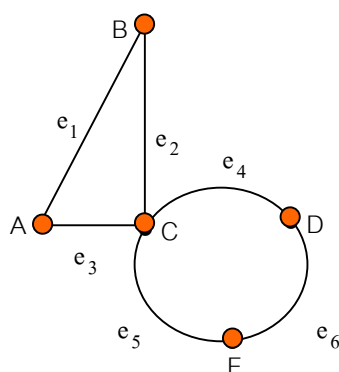
ดังนั้น แนวเดิน $v_0 - v_n$ ถ้าแนวเดิน W เริ่มต้นที่จุด v_0 และจบที่จุด v_n เราเรียกจุด v_0 ว่า **จุดเริ่มต้น (origin)** และจุด v_n ว่า **จุดปลาย (terminus)** โดยที่จุด v_0 และ v_n อาจเป็นจุดเดียวกันได้ และเรียกจุด $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ ว่า **จุดภายใน(internal)** และเรียกจำนวนเส้นในแนวเดิน $v_0 - v_n$ ซึ่งเท่ากับ n ว่า **ความยาว (length)** ของแนวเดิน $v_0 - v_n$

บทนิยามที่ 6 ให้ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G และ W เป็นแฉกเดินใน G โดยที่

$W: v$ (ซึ่งไม่มีความยาว $= 0$)

เราเรียกแฉกเดิน W ที่ไม่มีเส้น ($n = 0$) ว่า **แฉกเดินซัด** (trivial walk)

ตัวอย่างที่ 18 จงพิจารณารูปต่อไปนี้



จะได้แฉกเดิน $A - D$ คือ

A, e_3, C, e_4, D มีความยาว...2...หรือ

$A, e_1, B, e_2, C, e_4, D$ มีความยาว...3...หรือ

$A, e_3, C, e_5, E, e_6, D$ มีความยาว...3...หรือ

$A, e_1, B, e_2, C, e_5, E, e_6, D$ มีความยาว...4...

ข้อสังเกต

จุดและเส้นในแฉกเดินอาจเกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันได้

บทนิยามที่ 7 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G

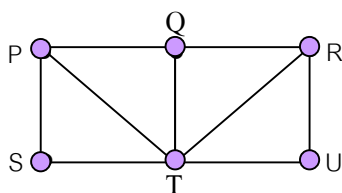
เรากล่าวว่าแฉกเดิน $u - v$ เป็นแฉกเดินปิด (closed walk) เมื่อ $u = v$

และ แฉกเดิน $u - v$ เป็นแฉกเดินเปิด (open walk) เมื่อ $u \neq v$

บทนิยามที่ 8

- ถ้าเส้นในแฉกเดิน $u - v$ ไม่ซ้ำกัน เรากล่าวว่าแฉกเดิน $u - v$ เป็นรอยเดิน (trail)
- ถ้าจุดในแฉกเดิน $u - v$ ไม่ซ้ำกัน เรากล่าวว่าแฉกเดิน $u - v$ เป็นวิถี (path)

ตัวอย่างที่ 19 พิจารณารูปกราฟต่อไปนี้ เป็นรอยเดินหรือวิถีหรือไม่เพราะเหตุใด



พิจารณากำหนดลำดับแนวดิน S – U ต่อไปนี้

ลำดับ S, P, Q, T, P, Q, R, U

ไม่เป็นรอยเดินเพราะ...เส้น PQ ซ้ำ.....

ไม่เป็นวิถีเพราะ.....จุดซ้ำ P, Q

ลำดับ S, P, T, Q, R, T, U

.....เป็นรอยเดิน เพราะเส้นไม่ซ้ำ.....

.....ไม่เป็นวิถี เพราะจุดซ้ำ.....

ลำดับ S, P, T, Q, R, U

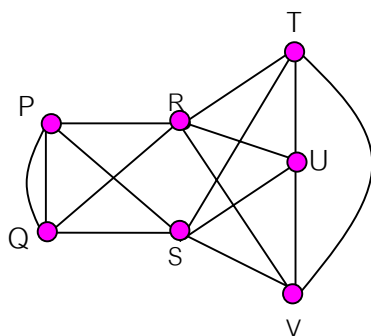
.....เป็นรอยเดิน

.....เป็นวิถี.....

บทนิยามที่ 9

- เราเรียกรอยเดินปิดที่ไม่ใช่แนวดินชื่อว่า วงจร (circuit)
- เราเรียกวงจรที่มีจุดเริ่มต้น และจุดภายในไม่ซ้ำกันว่า วัฏจักร (cycle)

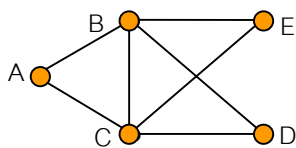
ตัวอย่างที่ 20 กำหนดกราฟ ดังรูป



พิจารณา ลำดับต่อไปนี้

ลำดับ P, R, V, U, R, Q, P	เป็นวงจร เพราะ ใช้เส้นไม่ซ้ำ ไม่เป็น วัฏจักร เพราะใช้ R ซ้ำ
ลำดับ P, Q, S, T, R, U, S, P	เป็นวงจร เพราะ ใช้เส้นไม่ซ้ำ ไม่เป็นวัฏจักร เพราะใช้ S ซ้ำ
ลำดับ P, S, V, T, R, P	เป็นวงจร เพราะ ใช้เส้นไม่ซ้ำ เป็นวัฏจักร เพราะใช้จุดไม่ซ้ำ
ลำดับ P, R, U, S, Q, P	เป็นวงจร เพราะ ใช้เส้นไม่ซ้ำ เป็นวัฏจักร เพราะใช้จุดไม่ซ้ำ
ลำดับ P, Q, R, U, R, P	ไม่เป็นวงจร เพราะ ใช้เส้น RU, UR ซ้ำ ไม่เป็นวัฏจักร เพราะใช้ R ซ้ำ

ตัวอย่างที่ 21 จากกราฟที่กำหนดให้



1. A, B, C, A เป็นวัฏจักรที่มีความยาว 3
2. A, B, E, C, D, B, A เป็นแนวนเดินที่มีความยาวเท่ากับ 6 แต่ไม่เป็นวัฏจักร เพราะ จุด B ซ้ำ