

บทที่ 4

เวฟเล็ต

4.1 บทนำ

ในบทนี้จะทำการกล่าวถึงคณิตศาสตร์ของเวฟเล็ต และทฤษฎีของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด (Multiresolution analysis: MRA) ซึ่งเป็นพื้นฐานของการกำเนิดสเกลลิงฟังก์ชัน และเวฟเล็ตฟังก์ชัน การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย การแปลงกลับเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย โดยจะทำการอธิบายกระบวนการการสร้างและลักษณะของฟังก์ชันฟิลเตอร์แบงก์ (Filter Banks) และกล่าวถึงผลตอบแทนของอิมพัลส์ของเวฟเล็ตตระกูลต่างๆ [16]

4.2 ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต

ในทฤษฎีของฟูเรียร์จะทำการวิเคราะห์คลื่นโดยกระจายสัญญาณหรือฟังก์ชันในเทอมของคลื่นไซน์ (Sine wave) หรือเอ็กโพเนนเชียล ซึ่งเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนของความถี่ ส่วนในทฤษฎีของเวฟเล็ตการวิเคราะห์สัญญาณหรือฟังก์ชันจะทำการวิเคราะห์โดยทำการกระจายคลื่นหรือฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของคลื่นย่อยๆ ที่เรียกว่า เวฟเล็ต (Wavelet) ซึ่งเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนเวลาและความถี่ไปพร้อมๆ กัน โดยเวฟเล็ตสามารถนำมาใช้ในการกระจายอนุกรมของสัญญาณได้ในลักษณะเดียวกันที่ใช้ออนุกรมฟูเรียร์ในการแทนสัญญาณนั้นคือ สัญญาณหรือฟังก์ชัน $f(t)$ สามารถเขียนในรูปของ Linear Combination ได้โดย

$$f(t) = \sum_l a_l \psi_l(t) \quad (4.1)$$

เมื่อ l เป็นดัชนีจำนวนเต็มของอนุกรม
 a_l เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจาย
 $\psi_l(t)$ เป็นเซตของฟังก์ชันคลื่นเวฟเล็ต

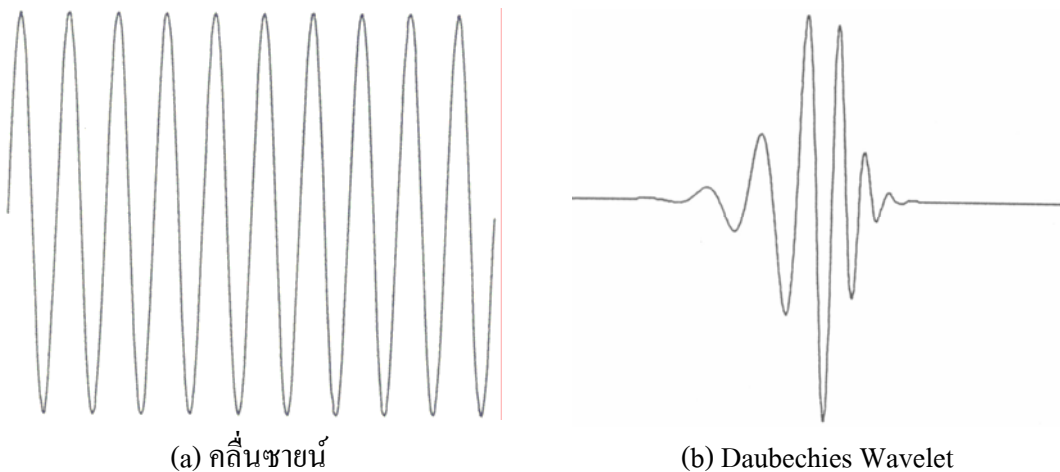
เซตของฟังก์ชันถูกเรียกว่า Basis และถ้าฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) มีลักษณะเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) จะได้ผลคูณภายใน (Inner Product) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t) \psi_l(t) dt = 0 \quad k \neq l \quad (4.2)$$

และสัมประสิทธิ์ a_k สามารถหาได้โดยการหาผลคูณภายในดังสมการที่ 4.3

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t) \psi_k(t) dt \quad (4.3)$$

เมื่อพิจารณาคลิ้นเวฟเลต $\psi(t)$ จะหมายถึงคลิ้นสัญญาณเล็กๆที่เหมาะสมสำหรับเป็นเซตฟังก์ชันพื้นฐานของฟังก์ชันสเปซ (function spaces) ซึ่งเป็นคลิ้นที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นๆ และมีแอมพลิจูดลดลงสู่ศูนย์อย่างรวดเร็วเมื่อ $t \rightarrow \pm\infty$ (local support ในโดเมนเวลา) ดังรูปที่ 4.1 (b) และพื้นที่สุทธิของรูปคลิ้นเท่ากับศูนย์หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับฟูเรียร์ที่ประกอบด้วยคลิ้นโคไซน์ (cosine) และไซน์ (sine) ดังรูปที่ 4.1 (a) ซึ่งมีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ต (local support) ในโดเมนความถี่แต่จะไม่มีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ตในโดเมนเวลา ส่วนเวฟเลตจะมีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ตทั้งในโดเมนความถี่และเวลา ดังนั้นเวฟเลตจึงสามารถแทนฟังก์ชันที่มีลักษณะขดแหลมหรือมีลักษณะเป็นขอบ nonstationary หรือเหตุการณ์ที่เปลี่ยนไปตามเวลา ด้วยเทอมของ basis function



รูปที่ 4.1 แสดงรูปคลื่นไซน์ และ Daubechies Wavelet

ในการสร้างเซตเวฟเลตนั้น คลื่นเวฟเลตถูกเปลี่ยนแปลงรูปร่างโดยการยืดขยาย (dilation) เปลี่ยนความถี่ และการเลื่อน (translation) ในแกนเวลาอีกด้วย ซึ่งคุณสมบัติทั้งหมดนี้เป็นส่วนหนึ่งของแนวคิดของกระบวนการการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด การวิเคราะห์แบบนี้เป็นการกระจายรายละเอียดของสัญญาณจะถูกกระจายไปที่ความถี่ต่างๆและตำแหน่งต่างๆ

4.2.1 การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด (Multiresolution Analysis)

การวิเคราะห์ความละเอียดหลายระดับนั้นเริ่มจากการนิยามฟังก์ชันสเปซที่มีการทับซ้อนระหว่างกัน โดยถ้ากำหนดสัญลักษณ์ $f_j(t)$ แทนฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกกระจายไปที่ระดับความละเอียด j และที่ระดับความละเอียด $j+1$ รายละเอียดจะถูกแทนด้วย $d_j(t)$ ซึ่งเมื่อรวมเข้ากับ j จะได้ฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกกระจายไปที่ระดับความละเอียด $j+1$ นั่นคือ

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \quad (4.4)$$

ซึ่งฟังก์ชันในสมการที่ 4.4 จะเป็นฟังก์ชันที่มีรายละเอียดเข้าใกล้ $f(t)$ มากกว่าแทนฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด j และสัญญาณ $f(t)$ จะสร้างกลับคืนเมื่อรวมรายละเอียดที่ระดับความละเอียดต่างๆไปจนถึงอนันต์หรือ $j \rightarrow \infty$ ซึ่งจะได้

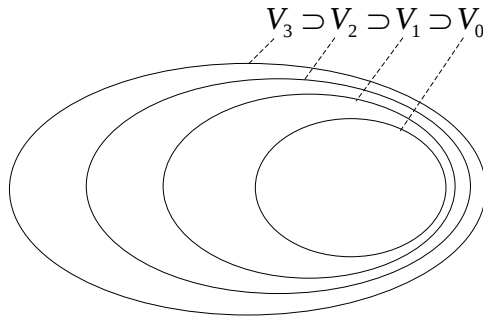
$$f(t) = f_j(t) + \sum_{k=j}^{\infty} d_k(t) \quad (4.5)$$

การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดจะครอบคลุมถึงการแสดงความละเอียด ในแต่ละระดับไปพร้อมๆกัน จากสมการที่ 4.5 จะเห็นว่าฟังก์ชันถูกกระจายออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วน background และส่วนของรายละเอียด ในทำนองเดียวกันจะสามารถดูสเปซของฟังก์ชันนั้นก็คือ Square integral: $L^2(R)$ ซึ่งประกอบไปด้วยลำดับของสเปซย่อย W_k และ V_j รวมไปถึงการประมาณค่าของ $f(t)$ ที่ระดับความละเอียด j คือ $f_j(t)$ ใน V_j และรายละเอียด $d_k(t)$ ใน W_k

การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียดของ $L^2(R)$ ได้นิยามลำดับของสเปซย่อย V_j โดยที่ Z เป็นเซตของจำนวนเต็มดังนี้

- (1) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R)$
- (2) $\cap_j V_j = \{0\}, \overline{\cup_j V_j} = L^2(R)$
- (3) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
- (4) $f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t-k) \in V$
- (5) มีฟังก์ชัน $\varphi(t)$ และ $\varphi(t-k)$ ซึ่งเป็นออร์โธนอนอร์มัล (orthonormal basis) อยู่ใน V_0

จากนิยามข้อที่ (1) สเปซย่อย V_j จะเป็นสับเซตของสเปซย่อย V_{j+1} ดังรูปที่ 4.2 หรือถ้าพิจารณาในโดเมนเวลา ฟังก์ชันที่ถูกประมาณใน V_{j+1} คือสมการที่ 4.4



รูปที่ 4.2 แสดงสเปซย่อย V_j ใน $L^2(R)$ ตามนิยามของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด

และความแตกต่างของการประมาณฟังก์ชันใน V_j และ V_{j+1} คือรายละเอียด $d_j(t)$ ซึ่งอยู่ใน W_j ดังนั้นจะได้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (4.6)$$

เมื่อ $\oplus$ แทนการบวกเชิงตั้งฉากและ W_j ถูกเรียกว่าสเปซของรายละเอียดหรือ Complementary subspace และจะตั้งฉากกับ V_j โดยใช้สัญลักษณ์ $V_j \perp W_j$ ซึ่งหมายความว่าผลคูณภายในของแต่ละส่วน (element) ใน V_j กับแต่ละส่วนใน W_j จะมีค่าเป็นศูนย์ แต่เมื่อมองที่สเปซย่อย จะได้

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (4.7)$$

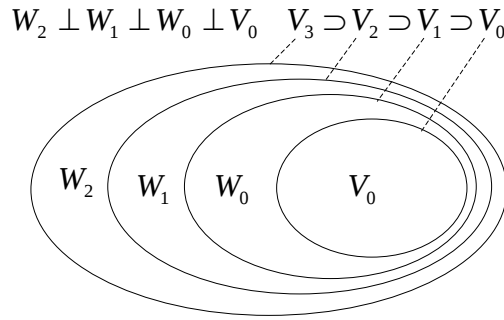
เมื่อแทนสมการที่ 4.7 ในสมการที่ 4.6 จะได้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} \quad (4.8)$$

และเมื่อกระจาย V_{j+1} ไปอีกจะได้

$$V_{j+1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_{j-J} \oplus V_{j-1} \quad (4.9)$$

จากสมการที่ 4.9 สามารถแสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(R)$ ได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(R)$

นิยามข้อที่ (2) ฟังก์ชันจะถูกประมาณที่ระดับความละเอียดที่หยาบที่สุดคือที่ระดับ $j \rightarrow -\infty$ จะได้ว่า $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = 0$ ในทางกลับกันเมื่อเพิ่มรายละเอียดจนถึงที่ระดับความละเอียดอนันต์จะได้สัญญาณกลับคืนมานั้นคือ $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j \rightarrow L^2(R)$

นิยามข้อที่ (3) สเปซ V_j ถูกสเกลหรือขยายจากสเปซ V_0 เนื่องจากที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะเก็บรายละเอียดที่สูงกว่าที่ระดับความละเอียด j ดังนั้นความถี่ฟังก์ชันใน V_{j+1} จะมีค่าเป็นสองเท่าของฟังก์ชันใน V_j หมายความว่าถ้ามีฟังก์ชัน $f(t)$ ในสเปซย่อย V_j แล้วจะมี $f(2t)$ อยู่ใน V_{j+1}

นิยามข้อที่ (4) ถ้าสเปซย่อย V_0 มีฟังก์ชัน $f(t)$ แล้วฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกเลื่อนคือ $f(t-k)$ ซึ่งจะเลื่อนด้วยค่าจำนวนเต็ม k และจะเก็บอยู่ใน V_0 ด้วย

นิยามข้อที่ (5) มีฟังก์ชันพื้นฐาน $\phi(t)$ ซึ่งเรียกว่าสเกลลิงฟังก์ชัน (scaling function) และรวมถึงสเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกเลื่อนคือ $\phi(t-k)$ อยู่ใน V_0 และแต่ละฟังก์ชัน จะมีคุณสมบัติที่เป็นออร์โธนอร์มัล

4.2.2 สเกลลิงฟังก์ชัน (Scaling Function)

จากแนวความคิดของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด จะสามารถนิยามสเกลลิงฟังก์ชัน $\phi_k(t)$ และเซตของสเกลลิงฟังก์ชันถูกนิยามในเทอมของการเลื่อนของการสเกลลิงฟังก์ชันซึ่งจะได้

$$\phi_k(t) = (t-k) \quad k \in Z \in L^2 \quad (4.10)$$

เมื่อ Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม จากสมการที่ 4.10 ขนาดของสเปซย่อยใน L^2 ถูกกำหนดโดยเซตของสเกลลิงฟังก์ชันคือ

$$V_0 = \text{Span}\{\phi_k(t)\} \quad (4.11)$$

โดยค่า k จะมีค่าตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$ โดยหากค่าทุกค่าบนฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นสมาชิกของฟังก์ชันสเปซ V_0 แล้วจะสามารถแสดงค่าของ $f(t)$ ได้ในเทอมของผลรวมเชิงเส้นของ $\phi_k(t)$ ได้ดังนี้

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \quad (4.11)$$

การเพิ่มขนาดของฟังก์ชันสเปซสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรเวลา (t) โดยที่ ฟังก์ชันสเปซย่อยที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดจะใช้สัญลักษณ์

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (4.12)$$

ดังนั้นขนาดของสเปซย่อยในสมการที่ 4.11 จะกลายเป็น

$$V_j = \text{Span}_k \{\phi_k(2^j t)\} = \text{Span}_k \{\phi_{j,k}(t)\} \quad (4.13)$$

ถ้า $f(t) \in V_j$ และ $k \in Z$ แล้วจะสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(t)$ ได้ดังสมการที่ 4.14

$$f(t) = \sum_k a_k (2^j t - k) \quad (4.14)$$

สำหรับทุกค่าที่ $j > 0$ ขนาดของสเปซย่อยจะกว้างขึ้น เป็นเหตุให้ $\phi_{j,k}(t)$ แคบลงและมีลำดับชั้นในการเลื่อนเล็กลง ดังนั้นจึงสามารถแทนสัญญาณได้ละเอียดมากขึ้น สำหรับที่ค่า $j < 0$ ความกว้างของสเปซย่อยจะแคบลง สเกลลิงฟังก์ชัน $\phi_{j,k}(t)$ มีขนาดกว้างขึ้นและมีลำดับชั้นในการเลื่อนกว้างขึ้นเป็นเหตุให้สามารถแทนสัญญาณได้ไม่ละเอียด

จากกฎข้อที่ (3) ของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด สเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะมีความถี่เป็นสองเท่าของสเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด j ดังนั้นจะสามารถนิยามสเกลลิงฟังก์ชัน $\phi(t)$ ที่อยู่ใน V_0 ในรูปแบบของการรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ $\phi(2t)$ ที่ถูกเลื่อนใน V_1 ได้ดังนี้

$$\phi(t) = \sum_n h_0(k) \sqrt{2} \phi(2t - k) \quad (4.15)$$

โดยที่ $h_0(k)$ เป็นสัมประสิทธิ์ตัวกรองความถี่บางครั้งที่เรียกว่าตัวกรองสเกลลิง (scaling filter) และ $\sqrt{2}$ เป็นตัวนอร์มไลซ์ เพื่อให้สเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกสเกลด้วย 2 ยังคงเป็น Norm Function สมการนี้เรียกว่า Refinement เนื่องจาก $\{\phi_{j,k}(t)\}$ เป็นออร์โธโนมัล ดังนั้นสัมประสิทธิ์ $\{h_0(k)\}$ สามารถหาได้จากการคำนวณผลคูณภายใน (สมมติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง) จะได้

$$h_0(k) = \langle \phi_{1k}, \phi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt \quad (4.16)$$

จากสมการนี้จะสามารถหาคุณสมบัติบางอย่างของสัมประสิทธิ์ $\{h_0(k)\}$ ได้ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการที่ 4.15 โดยใช้คุณสมบัติของสเกลลิงฟังก์ชัน ที่มีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่ง $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \right)$ จะได้

$$\sum_k h_0(k) = \sqrt{2} \quad (4.17)$$

ในทางตรงกันข้ามถ้าคูณทั้งสองข้างของสมการที่ 4.15 ด้วย $\phi(t - l)$ แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t - l) dt &= 2 \sum_k \sum_{k'} h_0(k) h_0(k') \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t - k') \phi(2t - 2l - k) dt \\ &= \sum_k h_0(k) h_0(k + 2l) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ใช้คุณสมบัติออร์โธกอนัล (orthogonal) ของสเกลลิงฟังก์ชันจะได้

$$\sum_k h_0(k) h_0(k + 2l) = 0, \quad l \neq 0$$

$$\sum_k h_0(k) h_0(k + 2l) = \delta, \quad l = 0$$

นั่นคือ

$$\sum_k h_0^2(k) = 1, \quad l = 0 \quad (4.19)$$

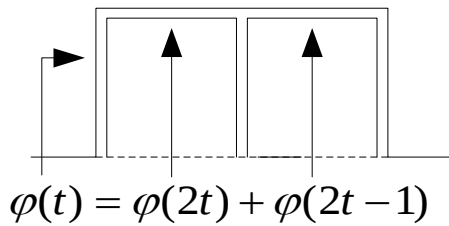
ตัวอย่างของสเกลลิงฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดคือสเกลลิงฟังก์ชันแบบ Haar (Haar scaling function) ซึ่ง
เป็นพัลส์ขนาด 1 หน่วยดังรูปที่ 4.4(a) จะเห็นว่า $\phi(2t)$ สามารถใช้ในการสร้างฟังก์ชัน ได้โดย

$$\phi(t) = h_0(0)\sqrt{2}\phi(2t) + h_0(1)\sqrt{2}\phi(2t-1) \quad (4.20)$$

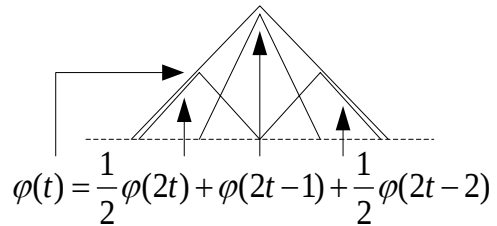
ดังนั้น $h_0(n)$ ในสมการที่ 4.20 จะต้องมามีค่า $h_0(0)=1/\sqrt{2}$ และ $h_0(1)=1/\sqrt{2}$ และตัวอย่างที่ 2
ดังรูปที่ 4.4(b) เป็นสเกลลิงฟังก์ชันแบบสามเหลี่ยม (triangle scaling function) หรือสไปลน์อันดับที่
1 (first order spline) สามารถสร้าง $\phi(t)$ ได้โดย

$$\phi(t) = h_0(0)\frac{1}{2}\phi(2t) + h_0(1)\phi(2t-1) + h_0(2)\frac{1}{2}\phi(2t-2) \quad (4.21)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ ที่เป็นไปตามสมการที่ 4.21 คือ $h_0(0)=1/2\sqrt{2}$, $h_0(1)=1/\sqrt{2}$ และ
 $h_0(2)=1/2\sqrt{2}$



(a) Haar (same as ϕ_{D2})



(b) Triangle (same as ϕ_{S1})

รูปที่ 4.4 Haar และ Triangle Scaling Function

4.2.3 ฟังก์ชันเวฟเล็ต (Wavelet function)

เมื่อพิจารณาสเปซย่อย $\{W_j\}$ ซึ่งเป็น detail spaces และแต่ละสเปซจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน
จากสมการที่ 4.9

$$V_{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k$$

$$V_1 = V_0 + W$$

และให้ $j \rightarrow \infty$ จะได้

$$L^2 = V_0 + W_0 + W_1 + \dots \quad (4.22)$$

$$L^2(R) = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k$$

จากสมการที่ 4.22 จะสามารถกระจาย $L^2(R)$ เป็นการบวกเชิงตั้งฉากของสเปซย่อย $\{W_j\}$ ซึ่งหมายความว่า

$$\langle \phi_{j,k}(t) | \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_R \phi_{j,k}(t) \cdot \psi_{j,k}(t) dt = 0 \quad (4.22)$$

ในสเปซย่อย $\{W_j\}$ จะบรรจุฟังก์ชันพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}(t)\}_k$ โดยที่ $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ ดังนั้น L^2 จะมีออร์โธนอร์มัล $\{\psi_{j,k}(t)\}_k$ ซึ่งถูกเรียกว่าเวฟเล็ต และเวฟเล็ต $\psi_{j,k}(t)$ ทั้งหมดจะถูกสร้างจากฟังก์ชัน $\psi(t)$ โดยการเลื่อนและการสเกล ซึ่งเรียกฟังก์ชัน $\psi(t)$ ว่า เวฟเล็ตแม่ (mother wavelet) หรือฟังก์ชันพื้นฐาน เพราะว่า $\psi(t - k)$ อยู่ใน W_0 และ $W_0 \subset V_1$ ดังนั้น $\psi(t)$ สามารถเขียนในแบบของ linear combination ของฟังก์ชันพื้นฐานจะได้

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \phi(2t - n) \quad (4.23)$$

สมการนี้ถูกเรียกว่าสมการเวฟเล็ต (wavelet equation) และจากคุณสมบัติของ $\{\psi_{j,k}(t)\}$ ที่เป็นออร์โธนอร์มัล ดังนั้นสัมประสิทธิ์ $\{h_1(n)\}$ สามารถหาได้โดยการคำนวณผลคูณภายใน

$$h_1(n) = \langle \phi_n, \psi \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \phi(2t - n) dt \quad (4.24)$$

จากสมการที่ 4.23 จะสามารถหาคุณสมบัติบางอย่างของสัมประสิทธิ์ $\{h_1(n)\}$ ได้ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการที่ 4.23 โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันเวฟเล็ต ที่มีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับศูนย์หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ จะได้

$$\sum_n h_1(n) = 0 \quad (4.25)$$

โดยที่ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ มีความสัมพันธ์กันดังสมการที่ 4.26

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(1-n) \quad (4.26)$$

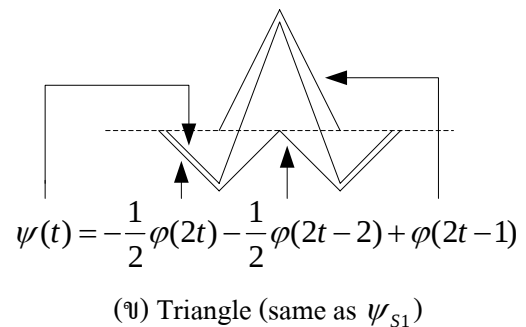
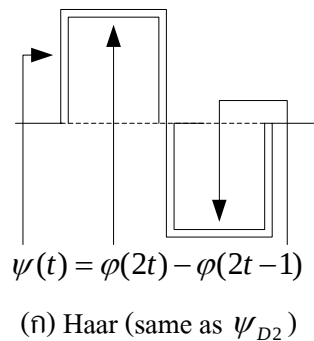
ตัวอย่างของเวฟเลตฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดคือ Haar wavelet function ดังรูปที่ 4.5(a) จะเห็นว่า $\phi(2t)$ สามารถใช้ในการสร้างฟังก์ชัน $\psi(t)$ ได้โดย

$$\psi(t) = h_1(0)\sqrt{2}\phi(2t) + h_1(1)\phi\sqrt{2}(2t-1) \quad (4.27)$$

ดังนั้น $h_1(n)$ ในสมการที่ 4.27 จะต้องมามีค่า $h_0(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_1(1) = -1/\sqrt{2}$ และตัวอย่างที่ 2 เป็น triangle wavelet function (first order spline) ดังรูปที่ 4.5 (b) สามารถสร้าง $\phi(t)$ ได้โดย

$$\psi(t) = \frac{1}{2}h_1(0)\phi(2t) + h_1(1)\phi(2t-1) + \frac{1}{2}h_1(2)\phi(2t-2) \quad (4.28)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $h_1(n)$ ในสมการที่ 4.28 คือ $h_1(0) = 1/2\sqrt{2}$, $h_1(1) = 1/2\sqrt{2}$ และ $h_1(2) = 1/2\sqrt{2}$



รูปที่ 4.5 แสดง Haar และ triangle function

4.3 ระบบเวฟเลตแบบอโทกอนัล เซมิอโทกอนัล และไบอโทกอนัล

4.3.1 ระบบเวฟเลตแบบอโทกอนัลและไบอโทกอนัล

เซตของฟังก์ชัน $f_k(t)$ ใดๆที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชันสเปซ S จะสามารถทำการเขียนได้ในรูปของผลรวมเชิงเส้นดังนี้

$$g(t) = \sum_k a_k f_k(t) \quad (4.43)$$

เมื่อ k เป็นเซตของจำนวนเต็ม (Z) และ t, a เป็นเซตของจำนวนจริง ($L^2 R$) นิยามค่าผลคูณภายในฟังก์ชันสเปซ S ด้วย $\langle f(t), g(t) \rangle$ และค่าอนอร์มสามารถเขียนแทนได้ด้วย $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ และ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ใน $L^2 R$

โดย $f_k(t)$ เป็นฟังก์ชันแบบออร์ทोगอนัลถ้า $\langle f_k(t), g_k(t) \rangle = 0$ สำหรับทุกค่าที่ k ไม่เท่ากับ 1 และหาก

$$\langle f_k(t), g_k(t) \rangle = \delta(k-l)$$

$$\delta(k-l) = \begin{cases} 1 & \text{if } k=l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases} \quad (4.44)$$

การคำนวณค่าของ a_k สามารถทำได้จาก

$$g(t) = \sum_k a_k f_k(t)$$

$$\int g(t) f_k(t) dt = \int f_k(t) \left(\sum_k a_k f_k(t) \right) dt \quad (4.45)$$

$$\int g(t) f_k(t) dt = a_k \quad \text{or} \quad \langle g(t), f_k(t) \rangle = a_k$$

4.3.2 ระบบเวฟเลตแบบไบออร์ทोगอนัล

ระบบเวฟเลตแบบไบออร์ทोगอนัลมีคุณสมบัติดังนี้ ฟังก์ชันมูลฐานในสับฟังก์ชันสเปซ V^j และ W^j จะไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากรวมทั้งสับฟังก์ชันสเปซ V^j และ W^j ก็จะไม่มีความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากซึ่งกันและกันด้วย แต่ค่าคู่อดซับฟังก์ชันสเปซ (Dual sub function space) ของ V^j และ W^j ($\tilde{V}^j$ และ $\tilde{W}^j$) จะตั้งฉากกับสับฟังก์ชันสเปซ W^j และ V^j ตามลำดับดังนี้

$$V_j \perp \tilde{W}_j \quad \text{and} \quad W_j \perp \tilde{V}_j$$

$$V_j + W_j = V_{j+1} \quad \text{and} \quad \tilde{V}_j + \tilde{W}_j = \tilde{V}_{j+1} \quad (4.46)$$

และเมื่อทำการพิจารณาฟังก์ชันมูลฐานของสับฟังก์ชันสเปซ V^j และ W^j จะได้คุณสมบัติดังนี้

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\
\langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{j,l}(t) \rangle &= \delta(k-l) \\
\langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{j,l}(t) \rangle &= 0 \\
\langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

โดย j, k, l เป็นค่าจำนวนเต็มและ ค่า $\phi_{j,k}$ และ $\psi_{j,l}$ คือค่า Primal basis ส่วนค่า $\tilde{\phi}_{j,k}$ และ $\tilde{\psi}_{j,l}$ เรียกว่า Dual basis function

4.3.3 ระบบเวฟเลตแบบเซมีโอโทโกนัล

การพิจารณาซัพฟังก์ชันสเปซ V_0 ที่มีเซตฟังก์ชันมูลฐาน $\phi(t-k)$ ซึ่งไม่มีคุณสมบัติตั้งฉากซึ่งกันและกัน ส่วน W_0 มีเซตฟังก์ชันมูลฐาน $\psi(t-l)$ โดยระบบเวฟเลตแบบไบโอโทโกนัล จะมีคุณสมบัติดังนี้

$$V_0 \perp W_0 \quad \text{and} \quad V_0 \oplus W_0 = V_1 \tag{4.48}$$

โดยเซตของฟังก์ชันใน $\phi(t-k)$ และ $\psi(t-l)$ ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดยเงื่อนไขนี้เป็นจริงที่ทุกระดับความละเอียดหากคุณสมบัติ $V_j \perp W_j$ and $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ ยังคงเป็นจริงและ $\psi(2^{j_1}t-l_1)$ กับ $\psi(2^{j_2}t-l_2)$ จะมีคุณสมบัติตั้งฉากซึ่งกันและกันที่ทุก $j_1 \neq j_2$ หรืออาจกล่าวได้ว่าที่ระดับความละเอียดเดียวกันเวฟเลตแบบเซมีโอโทโกนัลจะไม่มีคุณสมบัติตั้งฉากซึ่งกันและกัน

4.4 ตระกูลของออร์โธโกนัลเวฟเลต

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่าสัญญาณหรือฟังก์ชันสามารถกระจายในรูปแบบของการรวมเชิงเส้น (linear combination) ซึ่งมีเวฟเลตเป็นฟังก์ชันพื้นฐานได้ แต่เวฟเลตยังสามารถแบ่งย่อยตามลักษณะคุณสมบัติเชิงตั้งฉากออกเป็น 4 ประเภทใหญ่ๆ คือ

(1) ออร์โธโกนัลเวฟเลต (Orthogonal Wavelet) เวฟเลตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็นออร์โธโกนัลจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in \mathbb{Z}$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายใน (inner product) ของเวฟเลตจะเป็นหนึ่งเมื่อเป็นเวฟเลตที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น

(2) เซมิออร์โธกอนัลเวฟเลต (Semi-orthogonal Wavelet) เวฟเลตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็น เซมิออร์โธกอนัลจะมีเงื่อนไข

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = 0 \quad j \neq l \quad ; j, l, k, m \in \mathbb{Z}$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายในของเวฟเลตจะเป็นศูนย์เมื่อเป็นเวฟเลตที่ระดับความละเอียดต่างกันและจะเป็นศูนย์หรือหนึ่งก็ได้ถ้าเป็นเวฟเลตที่ระดับความละเอียดเดียวกัน

(3) นอนออร์โธกอนัลเวฟเลต (Nonorthogonal Wavelet) เวฟเลตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็นนอนออร์โธกอนัลหมายถึงเวฟเลตที่ไม่เป็นเซมิออร์โธกอนัล

(4) ไบออร์โธกอนัลเวฟเลต (Bi-orthogonal Wavelet) เวฟเลตพื้นฐาน $\{\psi_{j,k}\}$ ที่เป็นไบออร์โธกอนัลจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in \mathbb{Z}$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายในของเวฟเลตกับ dual basis: $\tilde{\psi}_{l,m}$ จะเป็นหนึ่งเมื่ออยู่ที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้นนอกจากนั้นจะเป็นศูนย์

ดังนั้นจะเห็นว่าเวฟเลตที่ได้กล่าวในตอนต้นของบทนี้เป็นออร์โธกอนัลเวฟเลต ซึ่งเมื่อพิจารณาฟังก์ชันพื้นฐานของออร์โธกอนัลเวฟเลต หรือที่เรียกว่าออร์โธนอร์มัลเวฟเลตยังสามารถแบ่งตามลักษณะของฟังก์ชันพื้นฐานได้อีก ซึ่งตระกูลออร์โธนอร์มัลเวฟเลตที่สำคัญได้แก่ Daubechies, Symmlet และ Coiflet โดยที่เวฟเลตตระกูล Daubechies มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ Asymmetric เวฟเลตตระกูล Symmlet มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ Least Asymmetric และเวฟเลตตระกูล Coiflet มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ nearly Symmetric นอกจากนี้แต่ละตระกูลยังสามารถแบ่งตามลักษณะความราบเรียบของฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งกำหนดโดยค่าของ Number of Vanishing Moments (NVM) โดยที่ Daubechies Wavelet จะนิยามโดย

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.43)$$

หรือมองในสเปซฟูเรียร์จะได้

$$\left. \frac{d^l \tilde{\psi}(\omega)}{d\omega^l} \right|_{\omega=0} = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.44)$$

ถ้าค่า l มากขึ้นจะทำให้ฟังก์ชันพื้นฐานมีความราบเรียบมากขึ้น ตัวอย่างของฟังก์ชันพื้นฐานของออร์โธนอร์มัลเวฟเล็ตทั้งฟังก์ชันพื้นฐานสเกลลิงและฟังก์ชันพื้นฐานเวฟเล็ต

แต่ในการประยุกต์ใช้งานนั้น ส่วนใหญ่จะไม่ใช้สเกลลิงฟังก์ชัน หรือเวฟเล็ตฟังก์ชัน โดยตรงแต่จะใช้สัมประสิทธิ์ผลตอบสนองอิมพัลส์ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ จากเงื่อนไขของ $h_0(n)$ ในสมการที่ 4.17 และสมการที่ 4.19 จะสามารถหาสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ NVM=2 ได้คือ

$$\begin{aligned} h_0(0) + h_0(1) &= \sqrt{2} \\ h_0^2(0) + h_0^2(1) &= 1 \end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $h_0(0) = h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ ซึ่งเป็น $h_0(n)$ ของเวฟเล็ตตระกูล Daubechies NVM=2 และจากสมการที่ 4.26 จะได้ $h_1(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_1(1) = -1/\sqrt{2}$

4.5 เวฟเล็ตแบบปีสไปลอน์

เวฟเล็ตแบบปีสไปลอน์นั้นสามารถสร้างได้จากการนำฟังก์ชันมูลฐานของปีสไปลอน์มาใช้เป็นสเกลลิงฟังก์ชัน โดยการนำเวฟเล็ตแบบปีสไปลอน์มาทำการกระจาย (Decomposition) และรวมกลับ (Reconstruction) ข้อมูลจะสามารถอธิบายได้ดังนี้ [17]

4.5.1 การกระจายและรวมกลับของข้อมูล

การกระจายและรวมกลับของข้อมูลนั้นจะแสดงความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันมูลฐานของข้อมูลในแต่ละระดับความละเอียด

โดยจากทฤษฎีของการวิเคราะห์ที่ความละเอียดหลายระดับทำให้เราทราบว่าหากมีฟังก์ชันสเปซซึ่งภายในมีซับฟังก์ชันสเปซที่ซ้อนทับกันอยู่แล้วจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันสเปซและซับฟังก์ชันสเปซที่ซ้อนทับกันอยู่ภายในได้ว่า $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$ โดยผลต่างของสมาชิกในแต่ละฟังก์ชันสเปซและซับฟังก์ชันสเปซจะคำนวณได้จาก

$$V_{j+1} = V_j + W_j \quad \text{และ} \quad V_j = V_{j-1} + W_{j-1} \quad (4.44)$$

โดยจากสมการสามารถอธิบายได้ว่าหากมีฟังก์ชัน $f(t)$ ใดๆที่อยู่ฟังก์ชันสเปซ V_{j+1} แล้วฟังก์ชันนั้นย่อมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมระหว่างฟังก์ชันที่อยู่ในฟังก์ชันสเปซ V_j และ W_j ได้ ในทำนองเดียวกันหากมีฟังก์ชัน $f(t)$ ใดๆที่อยู่ฟังก์ชันสเปซ V_j แล้วฟังก์ชันนั้นย่อมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมระหว่างฟังก์ชันที่อยู่ในฟังก์ชันสเปซ V_{j-1} และ W_{j-1} ได้เช่นเดียวกัน

4.5.2 การย่อและขยายของฟังก์ชันมูลฐาน

ฟังก์ชันมูลฐานซึ่งก็คือสเกลลิงฟังก์ชันซึ่งอยู่ในฟังก์ชันสเปซที่ V_j และเวฟเลตฟังก์ชันซึ่งอยู่ในฟังก์ชันสเปซที่ W_j นั้นสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Phi_j &= [\phi_{j,0}(t), \phi_{j,1}(t), \dots, \phi_{j,v(j)-1}(t)] \\ \Psi_j &= [\psi_{j,0}(t), \psi_{j,1}(t), \dots, \psi_{j,w(j)-1}(t)]\end{aligned}\tag{4.44}$$

โดย Φ_j คือ เวกเตอร์แถวของสเกลลิงฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ j

Ψ_j คือ เวกเตอร์แถวของเวฟเลตฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ j

v_j คือ ค่าขนาดมิติของฟังก์ชันสเปซ V_j

w_j คือ ค่าขนาดมิติของฟังก์ชันสเปซ W_j

ส่วนค่าขนาดมิติของฟังก์ชันสเปซที่ V_{j+1} นั้นจะมีขนาดเท่ากับผลรวมของขนาดของฟังก์ชันสเปซ V_j และค่าขนาดมิติของฟังก์ชันสเปซ W_j ซึ่งก็คือ

$$V(j+1) = V(j) + W(j)\tag{4.44}$$

เนื่องจากฟังก์ชันสเปซ V_j นั้นมีซับฟังก์ชันสเปซย่อยซ้อนทับอยู่ภายในดังนั้นเพื่อให้สมการของความสัมพันธ์ระหว่างสเกลลิงฟังก์ชันในฟังก์ชันสเปซที่ระดับความละเอียดต่างๆสามารถเขียนได้ง่ายขึ้นเราจึงทำการสมมุติตัวแปรตัวหนึ่งโดยให้ชื่อว่า P_j โดยที่ตัวแปร P_j จะทำหน้าที่ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์แถวของสเกลลิงฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ j (Φ_j) และ $j-1$ (Φ_{j-1}) โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Phi_{j-1}(t) = \Phi_j(t)P_j\tag{4.44}$$

โดยขนาดของ P_j จะมีขนาดเป็น $v(j) \times v(j+1)$

ในทำนองเดียวกันสำหรับการหาความสัมพันธ์ระหว่างเวฟเลตฟังก์ชันและสเกลลิงฟังก์ชันในฟังก์ชันสเปซที่ระดับความละเอียดต่าง ๆ นั้นเราจะทำการสมมติตัวแปรตัวหนึ่งโดยให้ชื่อว่า Q_j โดยที่ตัวแปร Q_j จะทำหน้าที่ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์แถวของสเกลลิงฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ j (Φ_j) และเวฟเลตฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ $j-1$ (Ψ_{j-1}) โดยสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Psi_{j-1}(t) = \Phi_j(t)Q_j \quad (4.44)$$

เมื่อนำสมการความสัมพันธ์ระหว่าง Φ_j กับ Φ_{j-1} และ Ψ_{j-1} มาทำการยุบรวมกันจะได้สมการรวมที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Φ_j กับ Φ_{j-1} และ Ψ_{j-1} ได้ดังนี้

$$[\Phi_{j-1}(t)|\Psi_{j-1}(t)] = \Phi_j(t)[P_j|Q_j] \quad (4.44)$$

โดย $[P_j|Q_j]$ นั้นเรียกว่าเมตริกซ์สังเคราะห์ ซึ่งสร้างขึ้นโดยการนำเมตริกซ์ P_j และ Q_j มาทำการเรียงต่อกัน ขนาดของเมตริกซ์ $[P_j|Q_j]$ จะมีค่าเป็น $v(j) \times v(j)$

4.5.3 สมการการกระจายและรวมกลับของข้อมูล

การรวมกลับข้อมูลนั้นคือการรวมฟังก์ชันใดๆที่อยู่ในฟังก์ชันสเปซที่ความละเอียดระดับต่ำให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่อยู่ในฟังก์ชันสเปซที่ความละเอียดระดับสูงกว่า

โดยหากกำหนดให้ C_j คือ เวกเตอร์แถวของค่าสัมประสิทธิ์ของสเกลลิงฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ j และกำหนดให้ D_j คือ เวกเตอร์แถวของค่าสัมประสิทธิ์ของเวฟเลตฟังก์ชันที่ความละเอียดระดับ j จากข้อกำหนดนี้เราสามารถทำการเขียนสมการ $V_j = V_{j-1} + W_{j-1}$ ใหม่ได้ดังสมการนี้

$$V_j = V_{j-1} + W_{j-1} \quad (4.44)$$

$$\Phi_j(t)C_j = \Phi_{j-1}(t)C_{j-1} + \Psi_{j-1}(t)D_{j-1}$$

ทำการแทนสมการ $\Phi_{j-1}(t) = \Phi_j(t)P_j$ และ $\Psi_{j-1}(t) = \Phi_j(t)Q_j$ ลงไปจะได้ว่า

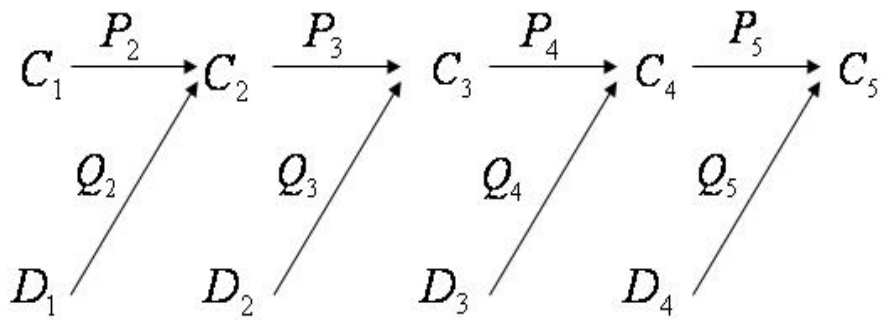
$$\Phi_j(t)C_j = \Phi_j(t)P_jC_{j-1} + \Phi_j(t)Q_jD_{j-1} \quad (4.44)$$

$$\Phi_j(t)C_j = \Phi_j(t)(P_jC_{j-1} + Q_jD_{j-1})$$

จากสมการสามารถเขียนได้ว่า $C_j = (P_j C_{j-1} + Q_j D_{j-1})$ หรืออาจเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$C_j = [P_j | Q_j] \begin{bmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

จากสมการที่ได้นี้เราจะได้สมการของการรวมกลับของข้อมูลที่ความละเอียดระดับ $j-1$ มายังที่ความละเอียดระดับ j



รูปที่ 4.6 ภาพแสดงการรวมกลับของข้อมูลที่ความละเอียดระดับต่ำมายังความละเอียดระดับสูงกว่า

ในส่วนของการกระจายข้อมูลนั้นคือการเขียนฟังก์ชันใดๆที่อยู่ในฟังก์ชันสเปซที่ความละเอียดระดับ สูงให้อยู่ในรูปของผลรวมของฟังก์ชันในฟังก์ชันสเปซที่ความละเอียดระดับต่ำกว่า ซึ่งการสร้างสมการของการรวมกลับนี้จะคำนวณจากสมการของการรวมกลับ

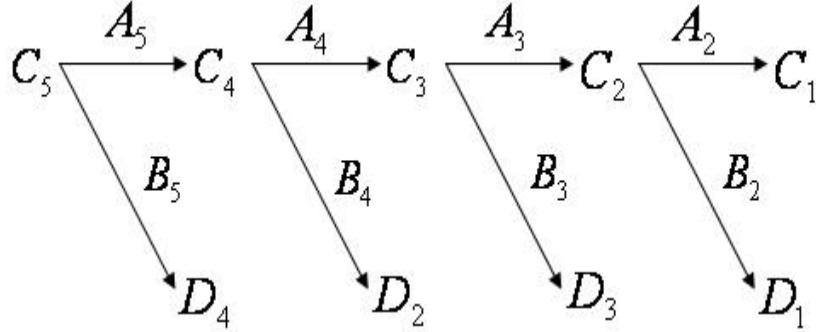
$$C_j = [P_j | Q_j] \begin{bmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$[P_j | Q_j]^{-1} C_j = \begin{bmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix}$$

หากกำหนดให้ $[P_j | Q_j]^{-1} = \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix}$ เราจะสามารถทำการเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} C_{j-1} \\ D_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} C_j \quad (4.44)$$

สมการที่ได้นี้เรียกว่าสมการการรวมกลับ โดยเมตริกซ์ A_j และ C_{j-1} จะมีขนาด $v(j-1) \times v(j)$ และเมตริกซ์ B_j และ D_{j-1} จะมีขนาด $w(j-1) \times v(j)$



รูปที่ 4.7 ภาพแสดงการกระจายข้อมูลจากความละเอียดระดับสูงไปยังความละเอียดระดับต่ำกว่า

4.6 การสร้างพื้นผิว 3 มิติจากความละเอียดหลายระดับ

4.6.1 บทนำ

การสร้างพื้นผิว 3 มิตินั้นจะทำการสร้างโดยใช้ Tensor Product เป็นข้อมูลเบื้องต้น โดยคุณสมบัติของพื้นผิว 3 มิติจะขึ้นอยู่กับ Tensor Product ที่นำมาใช้ซึ่งการสร้างพื้นผิว 3 มิติโดยส่วนมากมักนำฟังก์ชันของบีสไปลงมาเป็นฟังก์ชันมูลฐาน เนื่องจากมีคุณสมบัติหลายประการ เช่นคุณสมบัติ Local Support นั่นคือการแก้ไขเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจุดควบคุม (Control Point) จุดใดจุดหนึ่งบนพื้นผิวจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเฉพาะที่บริเวณจุดนั้นโดยไม่กระทบต่อภาพพื้นผิวโดยรวมและการควบคุมลักษณะความโค้งของพื้นผิวในส่วนต่างๆสามารถทำได้ง่าย [18]

4.6.2 การสร้างพื้นผิว 3 มิติแบบ B-Spline โดยการใช้ Tensor Product

Tensor Product ของการสร้างพื้นผิว 3 มิติแบบ B-Spline นั้นมีลักษณะดังนี้

$$S(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{L_1+n-1} \sum_{p=0}^{L_2+n-1} d_{p,q} N_p^{n_1}(x_1) N_q^{n_2}(x_2) \quad (4.45)$$

โดย $S(x_1, x_2)$ เป็นพื้นผิว B-Spline ที่ทิศทาง x_1, x_2 ที่อันดับ n_1, n_2 ตามลำดับ $N_p^{n_1}(x_1) N_q^{n_2}(x_2)$ เป็นฟังก์ชันมูลฐานของ B-Spline ของ x_1, x_2 ที่อันดับ n_1, n_2 ตามลำดับ

$d_{p,q}$ เป็น Control Mesh ของ p, q

ขั้นตอนการคำนวณค่า $S(x_1, x_2)$ นั้นเริ่มจากการคำนวณค่า $d_{p,q}$ โดยใช้สมการดังนี้

$$d_{p,q} = \sum_{q=0}^{L_2+n_2-1} d_{p,q} N_q^{n_2}(x_2) \quad (4.46)$$

หลังจากนั้นจึงนำค่า $d_{p,q}$ ที่ได้มาทำการคำนวณค่า $S(x_1, x_2)$ ต่อไปโดยใช้สมการดังนี้

$$S(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{L_1+n_1-1} d_{p,q} N_q^{n_1}(x_1) \quad (4.47)$$

โดยพื้นผิว 3 มิติที่ได้จากฟังก์ชันมูลฐานของ B-Spline จะมีคุณสมบัติเด่นเหมือนกับเส้นโค้ง B-Spline นั่นคือมีคุณสมบัติ Local Support และ Convex Hull ทำให้พื้นผิว 3 มิติที่ได้สามารถนำมาทำการแก้ไขรูปร่างได้ง่ายตามต้องการ

4.6.3 พื้นผิว 3 มิติแบบ B-Spline ที่ความละเอียดหลายระดับ

กระบวนการสร้างพื้นผิว 3 มิติแบบ B-Spline ที่ความละเอียดหลายระดับนั้นสามารถทำได้โดยวิธีการ Standard Tensor Product และวิธีการ Non Standard Tensor Product

4.6.3.1 วิธี Standard Tensor Product

โดยกระบวนการนี้จะทำการแปลงค่าในเมตริกซ์ของ Control Mesh ทุกๆหลักจากระดับความละเอียดสูงไปที่ระดับความละเอียดต่ำไปเรื่อยๆจนถึงระดับความละเอียดที่ต่ำสุดกำหนดให้

$$\begin{aligned} V_j &= \text{span} \{ \phi_{j,k}(x_1) \} & W_j &= \text{span} \{ \psi_{j,k'}(x_1) \} \\ V_j' &= \text{span} \{ \phi_{j,k}(x_2) \} & W_j' &= \text{span} \{ \psi_{j,k'}(x_2) \} \end{aligned}$$

โดยจะได้ Tensor Product ดังนี้

$$V_m \times V_m = V_0 \times V_0 \oplus \sum_{j=0}^{m-1} V_0 \times W_j \oplus \sum_{j=0}^{m-1} W_j \times V_0 \oplus \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} W_j \times W_j \quad (4.48)$$

4.6.3.2 วิธี Non Standard Tensor Product

กระบวนการของวิธี Non Standard Tensor Product นี้จำทำการแปลงค่าในเมตริกซ์ของ Control Mesh ทุกๆแถวไปที่ระดับความละเอียดที่ต่ำกว่า 1 ระดับก่อนแล้วจึงทำการแปลงค่าทุกๆหลักไปที่ระดับต่ำอีกทีแล้วค่อยทำสลับกันไปจนเสร็จ

โดยเมตริกซ์ของ Control Mesh ที่ทำการแปลงค่าจะเป็นดังนี้

$$\begin{pmatrix} V_{m-1} \times V_{m-1} & V_{m-1} \times W_{m-1} \\ W_{m-1} \times V_{m-1} & W_{m-1} \times W_{m-1} \end{pmatrix}$$

ซึ่งคำนวณได้โดย

$$\begin{aligned} V_m \times V'_m &= V_0 \times V'_0 \oplus \sum_{j=1}^m (V_j \times V'_j - V_{j-1} \times V'_{j-1}) \\ V_m \times V'_m &= V_0 \times V'_0 \oplus \sum_{j=1}^m (V_{j-1} \times W'_{j-1} \oplus V'_{j-1} \times W_{j-1} \oplus W_{j-1} \times W'_{j-1}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

โดยสมการของพื้นผิวที่ความละเอียดระดับ j และ j-1 เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} S_{j,i}(x_1, x_2) &= \Phi_j(x_1) C_{j,i} (\Phi_i(x_2))^T \\ S_{j-1,i-1}(x_1, x_2) &= \Phi_{j-1}(x_1) C_{j-1,i-1} (\Phi_{i-1}(x_2))^T + \Phi_1(x_1) D_{j-1,i-1}^1 (\Phi_{i-1}(x_2))^T + \\ &\quad \Psi_{j-1}(x_1) D_{j-1,i-1}^2 (\Phi_{i-1}(x_2))^T + \Psi_{j-1}(x_1) D_{j-1,i-1}^3 (\Psi_{i-1}(x_2))^T \end{aligned} \quad (4.50)$$