

บทที่ 3

เส้นโค้งบีสไพล์

3.1 เส้นโค้งแบบสไปล์

เส้นโค้งแบบ Spline คือเส้นโค้งที่มีลักษณะแบ่งออกเป็นช่วงๆ ซึ่งสมการของเส้นในแต่ละส่วนสามารถแสดงได้โดยสมการของโพลิโนเมียลอันดับที่ n โดยสมการของเส้นโค้ง Spline ในแต่ละช่วงจะมีสมการดังนี้ [15]

$$\begin{aligned}x(u) &= a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \\y(u) &= b_2 u^2 + b_1 u + b_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

ตัวแปร a_2 , a_1 , a_0 , b_2 , b_1 และ b_0 นั้นจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่เป็นค่าคงที่ โดยจะเป็นค่าของจุดควบคุมบนเส้นโค้งแบบ Spline ซึ่งจะมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเส้นโค้งหากว่าตำแหน่งของจุดควบคุมมีการเปลี่ยนแปลง

3.2 เส้นโค้งแบบบีสไพล์

สำหรับเส้นโค้งแบบ B-Spline นี้จะมีลักษณะเช่นเดียวกับเส้นโค้งแบบ Spline คือเป็นเส้นโค้งที่สร้างเส้นโค้งย่อยๆ ในแต่ละช่วงแต่ลักษณะเด่นของเส้นโค้งแบบ B-Spline นั้นคือการเปลี่ยนแปลงค่าของสัมประสิทธิ์หรือก็คือการย้ายตำแหน่งของจุดควบคุมนั้นจะส่งผลกระทบต่อรูปร่างของเส้นโค้งเฉพาะในบริเวณใกล้เคียงจุดควบคุมเท่านั้นซึ่งเรียกคุณสมบัตินี้ว่า local support ซึ่งคุณสมบัตินี้ช่วยให้เส้นโค้งแบบ B-Spline สามารถทำการเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ง่ายเนื่องจากสามารถทำการแก้ไขรูปร่างของส่วนโค้งในบริเวณใกล้เคียงจุดควบคุมจุดใดจุดหนึ่งได้โดยไม่ส่งผลกระทบต่อรูปร่างของเส้นโค้งโดยรวมทั้งหมด

โดยเส้นโค้งย่อยเหล่านี้จะถูกสร้างโดยการใช้โพลิโนเมียลอันดับที่ n โดยค่า n นี้จะมีผลกระทบต่อความเรียบของเส้นโค้งที่สร้างขึ้น โดยการตรวจสอบความเรียบของเส้นโค้งนั้นสามารถทำได้โดยการหาค่าอนุพันธ์ของสมการเส้นโค้งที่สร้างขึ้น

3.3 การสร้างเส้นโค้งแบบบีสไปพล์โดยใช้ Knot Vector

กระบวนการใช้ Knot Vector นั้นจะเป็นกระบวนการในลักษณะที่มีการวนทำซ้ำๆเพื่อที่จะทำการประมาณค่าของจุดต่างๆบนเส้นโค้งในแต่ละช่วง โดยวิธีการนี้ถูกคิดค้นโดย Boehm โดยค่าของ Knot Vector จะมีลักษณะดังนี้

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{L+2n-2}\}$$

โดย n คือ ลำดับ (order) ของสมการเส้นโค้ง ส่วนค่าต่างๆภายใน Knot Vector จะมีค่าได้หลายค่าโดยค่าบางค่าอาจซ้ำกันหรือค่าทั้งหมดใน Knot Vector อาจมีค่าแตกต่างกันหมดก็ได้

หากสมมติให้ Knot Vector u_i มีค่าเป็น $u_i = u_0, \dots, u_{L+2n-2}$ ค่าของ Knot Vector ที่มีผลต่อรูปร่างรูปร่างของเส้นโค้งที่คือ Knot Vector ในช่วง $[u_{n-1}, \dots, u_{L+n-1}]$ โดยเรียกค่าในช่วงนี้ว่า Domain Knot หากค่าของ Knot Vector ลำดับใดๆในช่วง Domain Knot มีค่าที่ซ้ำกันหรือ $u_i = u_{i+r-1}$ ซึ่งค่า r คือค่าจำนวนการซ้ำกันของค่าบน Domain Knot หากค่าบน Domain Knot ไม่มีการซ้ำกันเลยค่า r จะเท่ากับ 1 และค่า L คือค่าจำนวนช่วงของ Domain Knot ซึ่งสมการความสัมพันธ์ของค่า L และ r จะเป็นดังนี้

$$\sum_{i=n-1}^{L+n-1} r_i = L + 1 \quad (3.2)$$

3.4 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปพล์ (B-Spline Basis Functions)

3.4.1 นิยามของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปพล์

ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปพล์สามารถหาได้หลายวิธี เช่น วิธี divided difference ของอนุกรมกำลัง วิธี blossoming และวิธี recurrence formula โดย deBoor, Cox และ Mansfield ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธี recurrence formula เนื่องจากเป็นวิธีที่สะดวกในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์[16]

ให้ $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ คือ knot vector และเป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าไม่ลดลงหรือ $u_i \leq u_{i+1}$ เมื่อ $i = 0, \dots, m-1$ และ u_i คือ knot

ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปพล์ลำดับที่ i ซึ่งมีดีกรี p ($order = p + 1$) สามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ $N_{i,p}(u)$ ซึ่งถูกนิยามด้วยสมการดังนี้

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & , u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

หมายเหตุ

- $N_{i,0}(u)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดที่มีค่าเท่ากับหนึ่งในช่วงพารามิเตอร์ $u \in [u_i, u_{i+1})$
- สำหรับ $p > 0$ สามารถหา $N_{i,p}(u)$ ได้จากการบวกแบบเชิงเส้นของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนดีกรี $p-1$ สองฟังก์ชัน
- จากสมการที่ 3.1 ถ้ามีค่าเป็น $\frac{0}{0}$ นิยามให้มีผลลัพธ์เป็น 0
- เรียกช่วง $[u_i, u_{i+1})$ ว่า knot span ลำดับที่ i ซึ่งอาจมีขนาดเป็นศูนย์ก็ได้
- การคำนวณหาค่าฟังก์ชันที่ดีกรี p สามารถพิจารณาจากแผนภูมิดังนี้

$$\begin{array}{cccc}
 N_{0,0} & & & \\
 N_{1,0} & N_{0,1} & & \\
 N_{2,0} & N_{1,1} & N_{0,2} & \\
 N_{3,0} & N_{2,1} & N_{1,2} & N_{0,3} \\
 N_{4,0} & N_{3,1} & N_{2,2} & N_{1,3} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $U = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = 1\}$ และ $p = 2$ ให้คำนวณหาฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนดีกรี 0, 1 และ 2

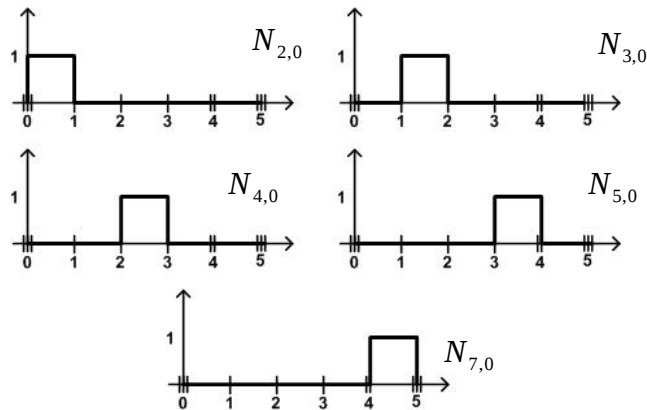
$$\begin{array}{ll}
 N_{0,0} = N_{1,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{2,0} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} & \begin{array}{l} 0 \leq u < 1 \\ otherwise \end{array} \\
 N_{3,0} = N_{4,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
 N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u \\ 0 \end{cases} & \begin{array}{l} 0 \leq u < 1 \\ otherwise \end{array} \\
 N_{2,1} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,0} = \begin{cases} u \\ 0 \end{cases} & \begin{array}{l} 0 \leq u < 1 \\ otherwise \end{array} \\
 N_{3,1} = \frac{u-1}{1-1} N_{3,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{4,0} = 0 & -\infty < u < \infty
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
N_{0,2} &= \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = \begin{cases} (1-u)^2 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{1,2} &= \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u(1-u) & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{u-0}{1-0} N_{2,1} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,1} = \begin{cases} u^2 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้

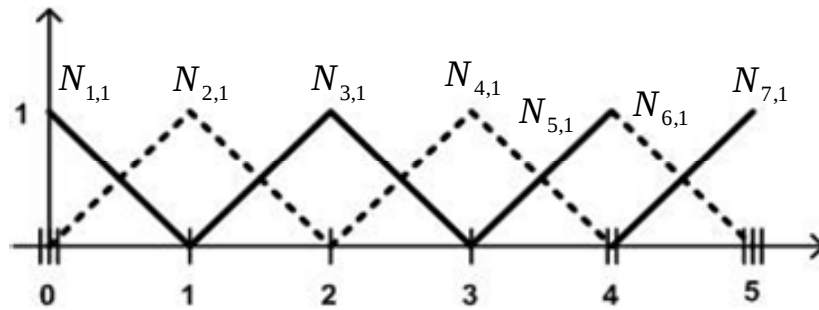
$U = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 3, u_6 = 4, u_7 = 4, u_8 = 5, u_9 = 5, u_{10} = 5\}$ และ $p = 2$ คำนวณหาฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนด์กรี 0, 1 และ 2

$$\begin{aligned}
N_{0,0} = N_{1,0} = 0 & \quad -\infty < u < \infty & N_{5,0} = \begin{cases} 1 & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & & N_{6,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty \\
N_{3,0} = \begin{cases} 1 & 1 \leq u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & & N_{7,0} = \begin{cases} 1 & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{4,0} = \begin{cases} 1 & 2 \leq u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & & N_{8,0} = N_{9,0} = 0 \quad -\infty < u < \infty
\end{aligned}$$



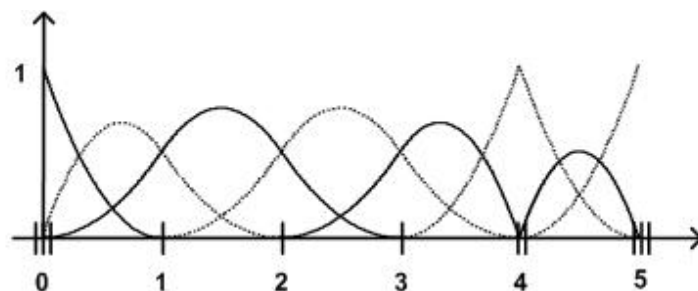
รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนด์กรี 0 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

$$\begin{aligned}
N_{0,1} &= \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 & -\infty < u < \infty \\
N_{1,1} &= \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{2,1} &= \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{2-u}{2-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & 0 \leq u < 1 \\ 2-u & 1 \leq u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{3,1} &= \frac{u-1}{2-1} N_{3,0} + \frac{3-u}{3-2} N_{4,0} = \begin{cases} u-1 & 1 \leq u < 2 \\ 3-u & 2 \leq u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{4,1} &= \frac{u-2}{3-2} N_{4,0} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,0} = \begin{cases} u-2 & 2 \leq u < 3 \\ 4-u & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{5,1} &= \frac{u-3}{4-3} N_{5,0} + \frac{4-u}{4-4} N_{6,0} = \begin{cases} u-3 & 3 \leq u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{6,1} &= \frac{u-4}{4-4} N_{6,0} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,0} = \begin{cases} 5-u & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{7,1} &= \frac{u-4}{5-4} N_{7,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,0} = \begin{cases} u-4 & 4 \leq u < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
N_{8,1} &= \frac{u-5}{5-5} N_{8,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{9,0} = 0 & -\infty < u < \infty
\end{aligned}$$



รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี 1 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

$$\begin{aligned}
N_{0,2} &= \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = (1-u)^2 & 0 \leq u < 1 \\
N_{1,2} &= \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{2-u}{2-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u - \frac{3}{2}u^2 & 0 \leq u < 1 \\ \frac{1}{2}(2-u)^2 & 1 \leq u < 2 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \frac{u-0}{2-0} N_{2,1} + \frac{3-u}{3-1} N_{3,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & 0 \leq u < 1 \\ -\frac{3}{2} + 3u - u^2 & 1 \leq u < 2 \\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 \leq u < 3 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \frac{u-1}{3-1} N_{3,1} + \frac{4-u}{4-2} N_{4,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-1)^2 & 1 \leq u < 2 \\ -\frac{11}{2} + 5u - u^2 & 2 \leq u < 3 \\ \frac{1}{2}(4-u)^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \frac{u-2}{4-2} N_{4,1} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-2)^2 & 2 \leq u < 3 \\ -16 + 10u - \frac{3}{2}u^2 & 3 \leq u < 4 \end{cases} \\
N_{5,2} &= \frac{u-3}{4-3} N_{5,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{6,1} = \begin{cases} (u-3)^2 & 3 \leq u < 4 \\ (5-u)^2 & 4 \leq u < 5 \end{cases} \\
N_{6,2} &= \frac{u-4}{5-4} N_{6,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,1} = 2(u-4)(5-u) & 4 \leq u < 5 \\
N_{7,2} &= \frac{u-4}{5-4} N_{7,1} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,1} = (u-4)^2 & 4 \leq u < 5
\end{aligned}$$

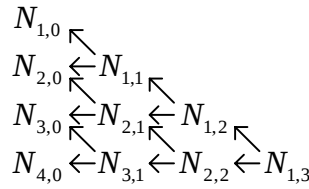


รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

3.4.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์

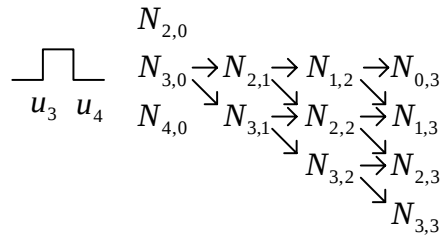
คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์เหล่านี้ สามารถกำหนดคุณสมบัติทางเรขาคณิตของเส้นโค้งบีสไปลอน์และพื้นผิวบีสไปลอน์ได้ กำหนดให้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์มีดีกรี p และมี knot vector $U = \{u_0, \dots, u_m\}$

1. $N_{i,p}(u) = 0$ เมื่อ $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ เรียกคุณสมบัตินี้ว่าเป็น Local support สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังนี้



พบว่า $N_{1,3}$ เกิดจากผลรวมของ $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}, N_{4,0}$ นั่นคือ $N_{1,3} \neq 0$ เมื่อ $u \in [u_1, u_5)$

2. ในช่วง knot span, $[u_j, u_{j+1})$ ใดๆ จะมี $N_{i,p}$ ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด $p+1$ ฟังก์ชัน คือ $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$ เช่น บนช่วง $[u_3, u_4)$ จะมีฟังก์ชันที่ดีกรี 0 ซึ่งมีค่าไม่เป็นศูนย์เพียง 1 ฟังก์ชันคือ $N_{3,0}$ จะได้ว่าฟังก์ชันที่ดีกรี 5 และมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ได้แก่ $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$



3. $N_{i,p}(u) \geq 0$ สำหรับทุกค่า i, p และ $u (u \geq 0)$

4. สำหรับช่วง knot span, $[u_j, u_{j+1})$ ใดๆ ได้ $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(u) = 1$

5. อนุพันธ์ของ $N_{i,p}(u)$ จะถูกนิยามในแต่ละช่วง knot span และที่ knot ใดๆ $N_{i,p}(u)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึง $p-k$ เมื่อ k เป็นจำนวน knot ที่มีค่าซ้ำกัน

ตัวอย่างที่ 3.3 ให้ $p = 2$, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ และ $u = 5/2$ (ดังรูปที่ 3.5) ได้ $i = 4$ ดังนั้น $u \in [u_4, u_5)$ จะหา $N_{i,2}(u) \geq 0$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} N_{4,0}(\frac{5}{2}) & N_{3,1}(\frac{5}{2}) & N_{2,2}(\frac{5}{2}) \\ & N_{4,1}(\frac{5}{2}) & N_{3,2}(\frac{5}{2}) \\ & & N_{4,2}(\frac{5}{2}) \end{array}$$

แทน $u = 5/2$ ในผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างที่ 3.2 จะได้

$$\begin{array}{ccc} N_{4,0}(\frac{5}{2}) = 1 & & \\ N_{3,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & N_{4,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & \\ N_{2,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} & N_{3,2}(\frac{5}{2}) = \frac{6}{8} & N_{4,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} \end{array}$$

จะสังเกตได้ว่า ที่ใดที่กริดรวมของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์มีค่าเท่ากับหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3.4 ให้ $p = 2$, $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ และ $u = 5/2$ ให้หา $N_{3,2}(\frac{5}{2})$ สามารถหา $N_{3,2}(\frac{5}{2})$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} N_{3,0}(\frac{5}{2}) = 0 & & \\ N_{4,0}(\frac{5}{2}) = 1 & N_{3,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & \\ N_{5,0}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{4,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & N_{3,2}(\frac{5}{2}) = \frac{6}{8} \end{array}$$

และสามารถหา $N_{4,2}(\frac{5}{2})$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} N_{4,0}(\frac{5}{2}) = 1 & & \\ N_{5,0}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{4,1}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} & \\ N_{6,0}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{5,1}(\frac{5}{2}) = 0 & N_{4,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8} \end{array}$$

3.4.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์

ให้ $N_{i,p}^{(k)}(u)$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ k ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอน์

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p} - u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \quad (3.4)$$

หรือ

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad (3.5)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1 \\ a_{k,0} &= \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1} - u_i} \\ a_{k,j} &= \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1} - u_{i+j}}, \quad j = 1, \dots, k-1 \\ a_{k,k} &= \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} \end{aligned}$$

หมายเหตุ

จากสมการที่ 3.5

- $k \leq p$
- ถ้าตัวหารเป็นศูนย์ นิยามให้มีค่าเท่ากับ 0

3.5 ทฤษฎีเส้นโค้งบีสไปลอน์

3.5.1 นิยามของเส้นโค้งบีสไปลอน์

สมการเส้นโค้งบีสไปลอน์ดีกรี p สามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i, \quad a < u < b \quad (3.6)$$

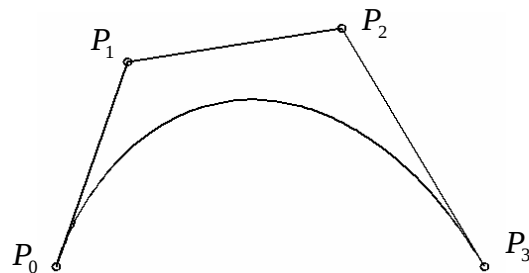
เมื่อ $\{P_i\}$ คือเซตของจุดควบคุม (Control point)
 $n+1$ คือจำนวนจุดควบคุม
 $\{N_{i,p}(u)\}$ คือเซตของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี p และกำหนดให้ knot vector เป็นแบบ nonperiodic (nonuniform) ซึ่งมี knot เป็นจำนวน $m+1$ โดย

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}$$

กำหนดให้ $a=0, b=1$ และเรียกพื้นที่ปิดที่เกิดจาก $\{P_i\}$ ว่า Control point polygon

ขั้นตอนในการหาค่าบนเส้นโค้งบีสไปไลน์ที่พารามิเตอร์ u ใดๆ มีดังนี้

1. หาว่า u อยู่ในช่วงของ knot span ไດ
2. หาค่าฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปไลน์ดีกรี p ที่ u นั้นๆ
3. คูณผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 2 กับจุดควบคุมตามสมการที่ 3.5



รูปที่ 3.4 เส้นโค้งบีสไปไลน์ดีกรี 5 เมื่อ $U = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$

ตัวอย่างที่ 3.5 จากตัวอย่างที่ 3.5 ซึ่งมี $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$, $u = 5/2$ และ $p = 2$

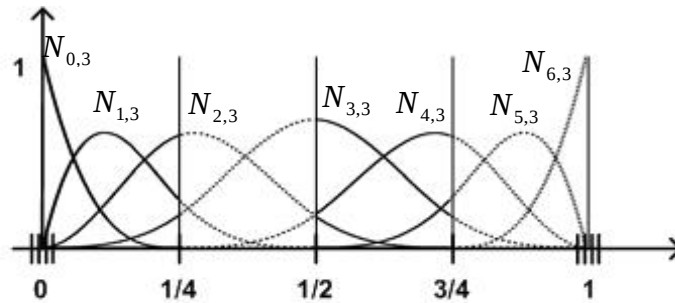
ได้ $u \in [u_4, u_5)$ และ $N_{2,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8}$ $N_{3,2}(\frac{5}{2}) = \frac{6}{8}$ $N_{4,2}(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8}$

จะได้

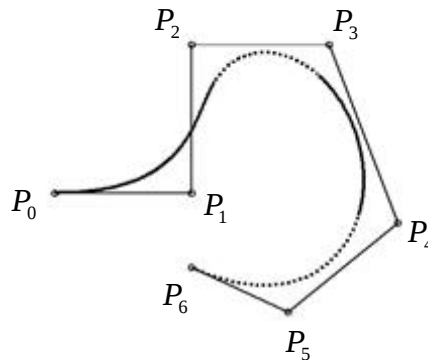
$$C(\frac{5}{2}) = \frac{1}{8}P_2 + \frac{6}{8}P_3 + \frac{1}{8}P_4$$

3.5.2 คุณสมบัติของเส้นโค้งบีสไปล์

1. ถ้า $n = p$ และ $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ แล้ว $C(u)$ คือ Bezier curve
2. $C(u)$ เป็น piecewise polynomial curve เนื่องจาก $N_{i,p}(u)$ เป็น piecewise polynomial function และดีกรี p , จุดควบคุม $n+1$, knot จำนวน $m+1$ สัมพันธ์กันด้วยสมการ $m = n + p + 1$
5. $C(0) = P_0$ และ $C(1) = P_n$
4. คุณสมบัติที่ไม่แปรผันต่อการแปลงแบบแอฟฟายน์ (Affine Invariance) คือ สามารถทำการแปลงแบบแอฟฟายน์เส้นโค้งได้โดยทำการแปลงกับจุดควบคุมได้เช่นกัน
5. คุณสมบัติ Strong convex hull คือ เส้นโค้งจะถูกกำหนดให้อยู่ภายในจุดควบคุม (control point polygon) หรือพื้นที่ที่เกิดจากจุดควบคุมดังรูปที่ 3.7 นั่นคือ ถ้า $u \in [u_i, u_{i+p})$ เมื่อ $p \leq i < m - p - 1$ แล้ว $C(u)$ จะถูกควบคุมโดย $P_{i-p}, \dots, P_i$ ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากคุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปล์ $N_{j,p}(u) = 0$ ที่ $j < i - p$ และ $j > i$ เมื่อ $u \in [u_i, u_{i+1})$
6. คุณสมบัติ Local modification scheme คือ หากทำการเปลี่ยนตำแหน่ง P_i จะมีผลให้ $C(u)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงเฉพาะช่วง $[u_i, u_{i+p+1})$ พิจารณารูปที่ 3.8 เนื่องจาก $N_{i,p}(u) = 0$ เมื่อ $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$

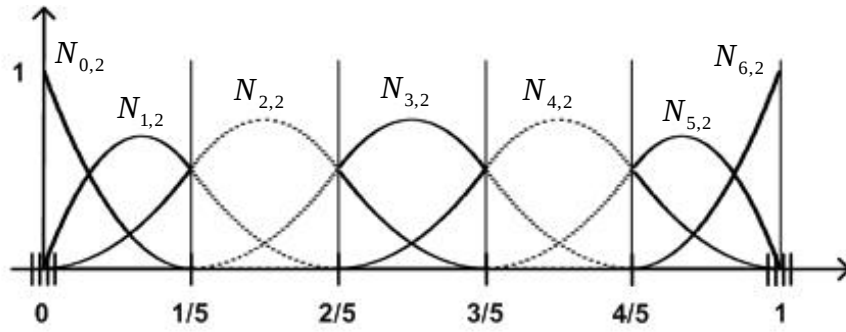


(a)

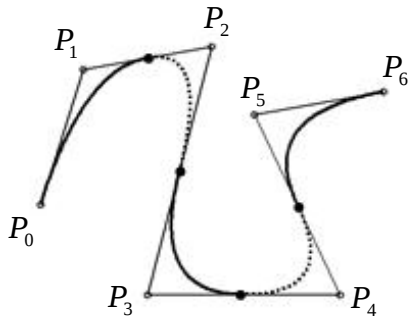


(b)

- รูปที่ 3.5 (a) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปล์ดีกรี 5 เมื่อ $U = \{0, 0, 0, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1, 1, 1\}$
 (b) เส้นโค้งบีสไปล์ดีกรี 5 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปล์รูปที่ 3.5 (a)

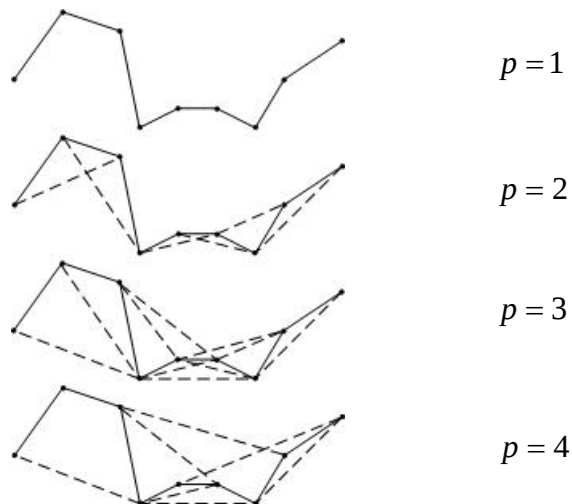


(a)

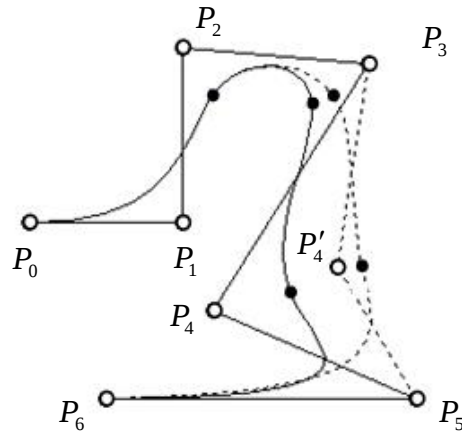


(b)

รูปที่ 3.6 (a) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1\}$
 (b) เส้นโค้งบีสไปลอนดีกรี 2 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลอนรูปที่ 3.6 (a)



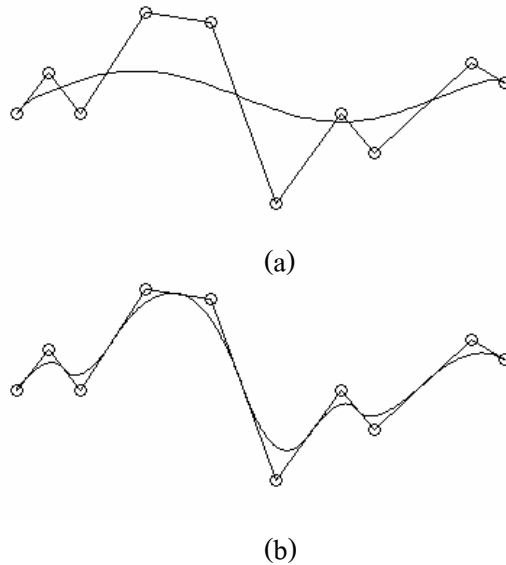
รูปที่ 3.7 คุณสมบัติ Convex hull ของเส้นโค้งบีสไปลอน



รูปที่ 3.8 เส้นโค้งบีสไปลอน์ โดย $U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$ เมื่อทำการเคลื่อนย้ายจุด P_4 ไปยังจุด P_4' พบว่าเส้นโค้งจะเปลี่ยนเฉพาะช่วง $[\frac{1}{4}, 1)$

7. เส้นโค้งบีสไปลอน์สามารถปรับปรุงวิธีการประมาณค่าได้โดยวิธีการแทรก knot หรือ degree elevation และพบว่ายิ่งดีกรีมีค่าน้อย เส้นโค้งบีสไปลอน์จะยิ่งชิดจุดควบคุม (control point polygon) มากขึ้น ดังรูปที่ 3.9 และ 3.10

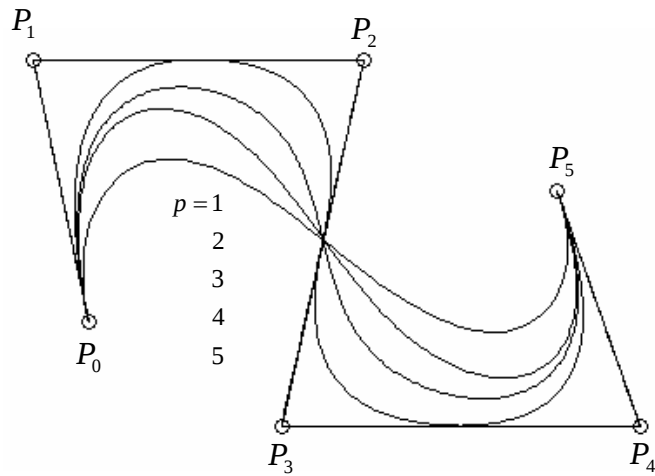
8. $C(u)$ มีคุณสมบัติความต่อเนื่อง (Continuity) และสามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiability)



รูปที่ 3.9 เส้นโค้งบีสไปลอน์

(a) เส้นโค้งบีสไปลอน์ดีกรี 9 โดย $U = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

(b) เส้นโค้งบีสไปลอน์ดีกรี 2 และ $U = \{0, 0, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1, 1, 1\}$



รูปที่ 3.10 เส้นโค้งบีสไปลอนี่ที่ดีกรีต่างกันโดยใช้จุดควบคุมเดียวกัน

3.5.3 อนุพันธ์ของเส้นโค้งบีสไปลอนี่

ให้ $C^{(k)}(u)$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ k ของ $C(u)$

$$C^{(k)} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(u) P_i \quad (3.6)$$

หา $C'(u)$ โดยกำหนดค่า u ที่ต้องการหา

เมื่อ
$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i$$

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

แทนสมการที่ 3.5 ในสมการที่ 3.6 ได้

$$\begin{aligned}
C'(u) &= \sum_{i=0}^n N'_{i,p}(u) P_i \\
&= \sum_{i=0}^n \left(\frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \right) P_i \\
&= \left(p \sum_{i=-1}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_{i+1}}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) - \left(p \sum_{i=0}^n N_{i+1,p-1}(u) \frac{P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \right) \\
&= p \underbrace{\frac{N_{0,p-1}(u) P_0}{u_p - u_0}}_0 + p \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{(P_{i+1} - P_i)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} - p \underbrace{\frac{N_{n+1,p-1}(u) P_n}{u_{n+p+1} - u_{n+1}}}_0
\end{aligned}$$

จากนิยามเรากำหนดให้ $\frac{0}{0} = 0$

ได้

$$C'(u) = p \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) \frac{(P_{i+1} - P_i)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i+1,p-1}(u) Q_i \quad (3.7)$$

เมื่อ

$$Q_i = p \frac{P_{i+1} - P_i}{u_{i+p+1} - u_{i+1}}$$

3.6 การประมาณเส้นโค้งด้วยบีสไปไลน์

3.6.1 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ ($\bar{u}_k$)

กำหนดให้เซตของข้อมูล $\{Q_k\}$, $k = 0, \dots, n$ กำหนดให้ $\bar{u}_k$ เป็นพารามิเตอร์สำหรับ Q_k และให้ $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น $n+1$ ตัวแปรจำนวน $n+1$ ดังสมการที่ 3.8

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \quad (3.8)$$

พารามิเตอร์ที่นิยมใช้ทั่วไปมีดังนี้

1. Equally Spaced

$$\begin{aligned}\bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \frac{k}{n} & k &= 1, \dots, n-1\end{aligned}\tag{3.9}$$

วิธีนี้ไม่เหมาะกับข้อมูลที่มีระยะห่างระหว่างจุดไม่เท่ากันทั้งหมด

2. Chord Length

กำหนดให้ d เป็นความยาวทั้งหมด

$$d = \sum_{k=1}^n |Q_k - Q_{k-1}|$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} & k &= 1, \dots, n-1\end{aligned}\tag{3.10}$$

วิธีนี้นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายและเป็นพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับเส้นโค้งทุกชนิด ไม่ว่าจะเป็นเส้นโค้งเปิดหรือเส้นโค้งปิด

3. Centripetal method

กำหนดให้

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d} & k &= 1, \dots, n-1\end{aligned}\tag{3.11}$$

วิธีนี้ให้ผลดีสำหรับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว

4. Area parameter

กำหนดให้ Center:
$$C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q_k$$

และ Area:
$$a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |Q_k \times Q_{k-1}|$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \bar{u}_n &= 1 \\ \bar{u}_k &= \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k \times Q_{k-1}|}{a} \quad k=1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

โดยพารามิเตอร์แบบนี้ เหมาะกับเส้นโค้งที่มีลักษณะปิด และมีคุณสมบัติที่ไม่ผันแปรเมื่อถูกแปลงแบบแอฟฟายน์

3.6.2 Knot vector

Knot vector มีวิธีการกำหนดหลายรูปแบบ เราสนใจเฉพาะแบบที่เป็น non-periodic (หรือ clamped หรือ open) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$U = \{u_0, \dots, u_m\} = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (3.13)$$

เมื่อ $n = m - p - 1$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้ $a = 0$ และ $b = 0$ เช่นเมื่อ $p = 2, n = 6$ จะได้

$$U = 1/5\{0001234555\}$$

3.6.3 หาจุดควบคุมจากการประมาณเส้นโค้งบีสไปลงด้วยวิธี Least Squares Error

สมมติให้มีข้อมูล $p \geq 1, n \geq p$ และ $Q_0, \dots, Q_m$ ($m > n$) จะหาเส้นโค้งบีสไปลงดีกรี p แบบ Non-rational ได้จากสมการ

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad , a < u < b \quad (3.14)$$

ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

- $Q_0 = C(0) = P_0$ และ $Q_m = C(1) = P_n$
- ที่จุดของข้อมูล Q_k อื่นๆจะถูกประมาณและมีผลรวมของค่าผิดพลาดกำลังสองเป็น

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2 \quad (3.15)$$

ค่าผิดพลาด ε^2 จะมีค่าน้อยที่สุดขึ้นกับจำนวนของจุดควบคุมที่เป็นตัวแปรจำนวน $n+1$ ตัวแปร และ $\{\bar{u}_k\}$ ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่ได้คำนวณไว้แล้ว กำหนดให้

$$R_k = Q_k - N_{0,p}(\bar{u}_k)Q_0 - N_{n,p}(\bar{u}_k)Q_m, \quad k = 1, \dots, m-1$$

จากสมการที่ 3.15

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \left| R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left(R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \cdot \left(R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left[R_k R_k - 2 \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot (R_k P_i) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \right] \end{aligned}$$

หา ε^2 ที่น้อยที่สุดโดยหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน ε^2 เทียบกับ P_l เมื่อ $l = 1, \dots, n-1$ ได้

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial P_l} = \sum_{k=1}^{m-1} \left(-2N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k + 2N_{l,p}(\bar{u}_k) \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \right) \quad (3.16)$$

ให้สมการที่ 3.16 เป็นศูนย์ จะได้

$$-\sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot P_i = 0 \quad (3.17)$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot N_{i,p}(\bar{u}_k) \right) \cdot P_i = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k \quad (3.18)$$

จากสมการที่ 3.18 เป็นสมการเชิงเส้น 1 สมการที่ประกอบด้วยตัวแปรคือ $P_1, \dots, P_{n-1}$ ฉะนั้นให้ $l=1, \dots, n-1$ จะได้ระบบสมการที่มีสมการทั้งหมด $n-1$ สมการซึ่งมีตัวแปร $n-1$ ตัวแปร และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$(N^T N)P = R \quad (3.19)$$

$$P = (N^T N)^{-1} R \quad (3.20)$$

เมื่อ N เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m-1) \times (n-1)$

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix}$$

และ R เป็นคอลัมน์เวกเตอร์ขนาด $(n-1)$

$$R = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \end{bmatrix}$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

ฉะนั้นเราสามารถหาค่า $(P_x \ P_y \ P_z)$ ได้จากสมการที่ 3.20 เมื่อทราบเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และ $(R_x \ R_y \ R_z)$