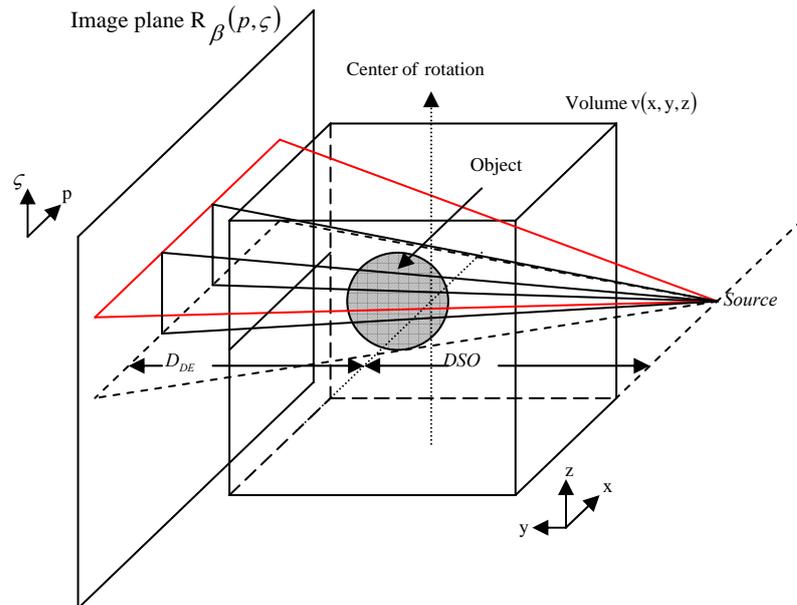


บทที่ 4

ทฤษฎีการปรับปรุงการสร้างภาพตัดขวางชนิดลำแสงกรวยกรณี หลอดเอ็กซ์เรย์อยู่ที่ตำแหน่งใดๆ

4.1 บทนำ



รูปที่ 4.1 วัตถุซึ่งอยู่บนระบบแกน (x, y, z) ได้รับเอ็กซ์เรย์จากหลอดเอ็กซ์เรย์แบบลำแสงกรวย เกิดเป็นข้อมูลโปรเจกชันบนระบบแกนของตัวรับภาพ (p, ζ)

จากทฤษฎีการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวยในบทที่ 3 สรุปได้ว่าสมการการสร้างภาพตัดขวางสำหรับวัตถุ 3 มิติแบบลำแสงกรวยของเฟลด์แคมป์ หรือ ฟิเตอร์แบ็คโปรเจกชัน 3 มิติ คือ[13]

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{Dso^2}{(Dso - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R(p, \zeta, \beta) h\left(\frac{(Dso)t}{Dso - s} - p\right) \frac{Dso}{\sqrt{Dso^2 + p^2 + \zeta^2}} dp d\beta \quad (4.1)$$

โดยที่ $g(x, y, z)$ คือ ข้อมูลเชิงปริมาตรของการสร้างภาพตัดขวาง

Dso คือ ระยะห่างจากหลอดเอ็กซ์เรย์ถึงวัตถุตามแนวแกน z

β คือ มุมที่หลอดเอ็กซ์เรย์หมุนไปเมื่อเทียบกับแกน y

$R(p, \zeta, \beta)$ คือ ข้อมูลโปรเจกชันเชิงปริมาตร

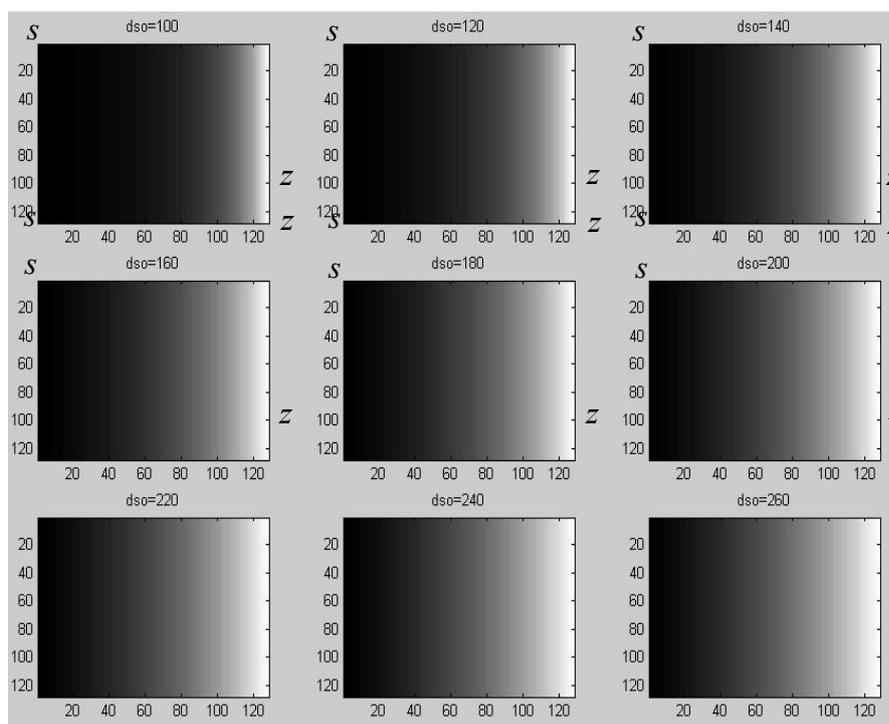
t, s คือ ตำแหน่งบนแกนหมุน (t, s) ซึ่งเกิดจากการหมุนของหลอดเอ็กซ์เรย์

4.2 ฟังก์ชันน้ำหนักในสมการสร้างภาพตัดขวางสำหรับวัตถุ 3 มิติแบบลำแสงกรวยของเฟลด์แคมป์

จากสมการที่ (4.1) ของเฟลด์แคมป์ข้างต้น เทอม $\frac{Dso^2}{(Dso-s)^2}$ สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันน้ำหนักได้ดังนี้

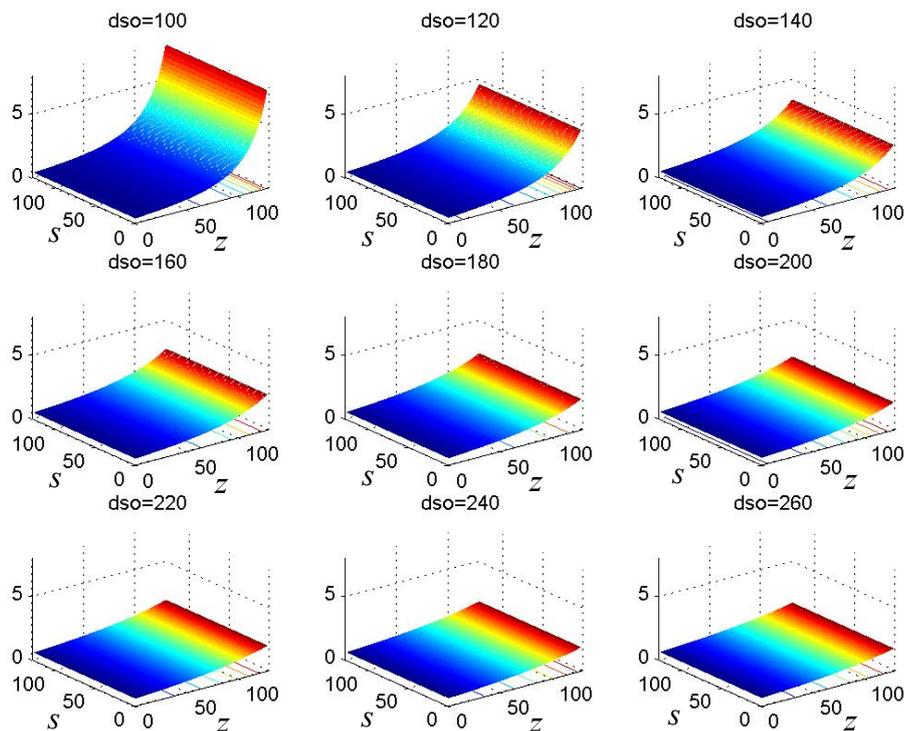
$$W_{dist}(s, z) = \frac{Dso^2}{(Dso-s)^2} \quad (4.2)$$

โดยที่ $W_{dist}(s, z)$ แทนฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะห่าง (Distance weight) ซึ่งเป็นระยะตามแนวแกน z ฟังก์ชันดังกล่าวเมื่อนำมาพล็อตกราฟตามระดับความเข้มจะได้ผลดังรูปข้างล่าง โดยแกนนอนแทนระยะห่างตามแนวแกน z แกนตั้งแทนด้วยระยะ s ในแต่ละกราฟย่อยเป็นการแสดงผลในแต่ละค่า Dso เริ่มจากน้อยไปมาก ส่วนระดับความเข้มในกราฟที่ความเข้มมากหมายถึงค่าน้ำหนักมาก ความเข้มน้อยค่าน้ำหนักมีค่าน้อย[13]



รูปที่ 4.2 ค่าฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะห่างซึ่งเปลี่ยนแปลงตามค่าระยะ z ในแต่ละค่า Dso

กราฟความเข้มของฟังก์ชันน้ำหนักดังรูปที่ 4.2 สามารถพล็อตในรูปแบบ 3 มิติ ได้ดังรูปที่ 4.3



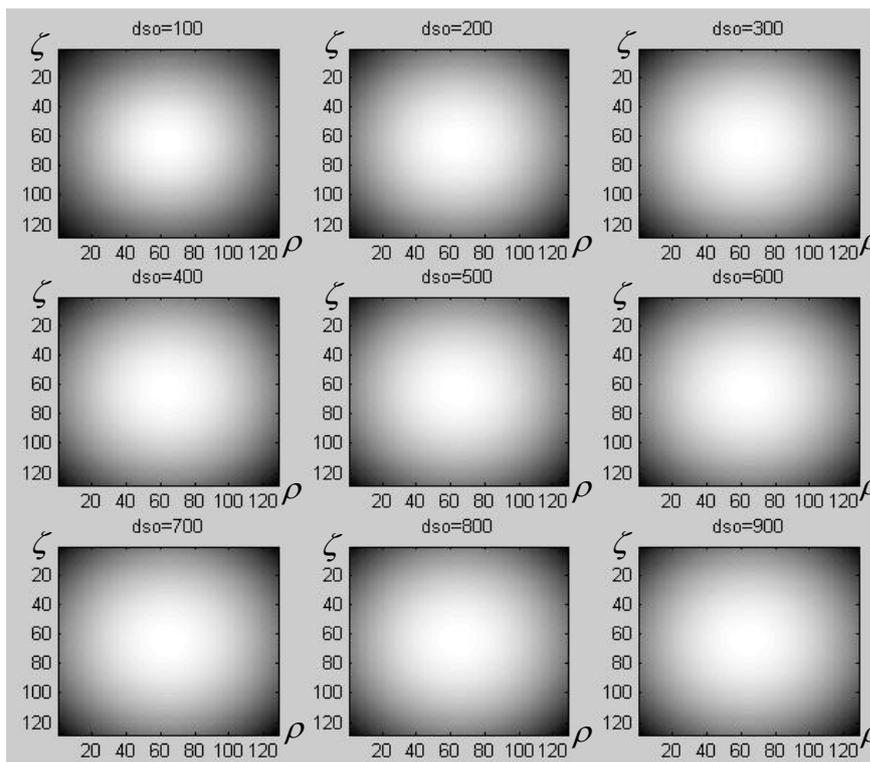
รูปที่ 4.3 กราฟความเข้มของฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะที่แสดงในรูปแบบ 3 มิติ

กราฟที่ 4.2 และ 4.3 แสดงให้เห็นว่าค่าฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะจะมีค่าลดลงตามแนวแกน z และจะมีความเป็นเชิงเส้นที่ระยะ Dso ที่มีค่ามาก

จากสมการที่ (4.1) ของเฟลด์แคมป์ข้างต้น เทอม $\frac{Dso}{\sqrt{Dso^2 + p^2 + \zeta^2}}$ สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันน้ำหนักได้ดังนี้

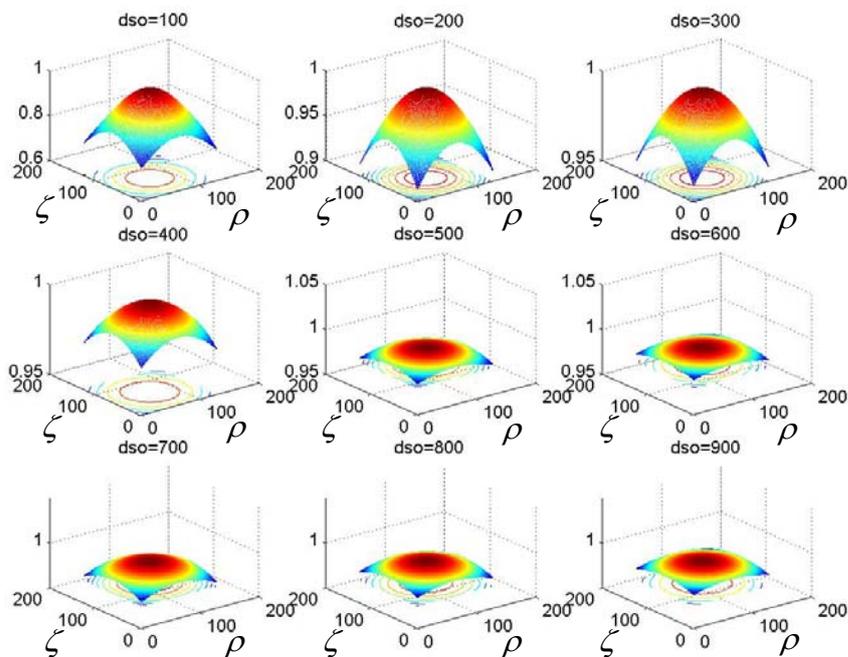
$$W_{\cos}(p, \zeta) = \frac{Dso}{\sqrt{Dso^2 + p^2 + \zeta^2}} \quad (4.3)$$

โดยที่ $W_{\cos}(p, \zeta)$ แทนฟังก์ชันน้ำหนักแบบโคไซน์ (Cosine weight) ซึ่งจะกระจายบนแกนของตัวรับภาพ (p, ζ) ฟังก์ชันดังกล่าวเมื่อนำมาพล็อตกราฟตามระดับความเข้มจะได้ผลดังรูปข้างล่าง โดยแกนอนแทนระยะห่างตามแนวแกน ζ แกนตั้งแทนด้วยระยะ p ในแต่ละกราฟย่อยเป็นการแสดงผลในแต่ละค่า Dso เริ่มจากน้อยไปมาก ส่วนระดับความเข้มในกราฟที่ความเข้มมากหมายถึงค่าน้ำหนักมาก ความเข้มน้อยค่าน้ำหนักมีค่าน้อย



รูปที่ 4.4 ค่าฟังก์ชันน้ำหนักแบบโคไซน์ซึ่งจะกระจายบนแกนของตัวรับภาพ ρ, ζ ในแต่ละค่า D_{so}

กราฟความเข้มของฟังก์ชันน้ำหนักดังรูปที่ 4.4 สามารถพล็อตในรูปแบบ 3 มิติ ได้ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 กราฟความเข้มของฟังก์ชันน้ำหนักโคไซน์ที่แสดงในรูปแบบ 3 มิติ

กราฟที่ 4.4 และ 4.5 แสดงให้เห็นว่าค่าฟังก์ชันน้ำหนักโคไซน์จะมีค่าค่อยๆลดลงจากจุดศูนย์กลางของระนาบรับภาพตามรัศมีของวงกลมที่มากขึ้น แต่ที่ค่า D_{so} มาก การเปลี่ยนแปลงค่าของฟังก์ชันน้ำหนักโคไซน์ดังกล่าวจะมีผลน้อย

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดหมุนของหลอดเอ็กซ์เรย์ (t, s) ซึ่งเทียบกับพิกัดของวัตถุ (x, y, z) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} t &= x \cos \beta + y \sin \beta \\ s &= -x \sin \beta + y \cos \beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3 ขั้นตอนการคำนวณการสร้างตัดขวางแบบลำแสงกรวยของเฟลด์แคมป์หรือฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน 3 มิติ (Normal Feldcamp)

จากสมการของเฟลด์แคมป์ข้างต้น สามารถนำมาสรุปเป็นขั้นตอนของฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน 3 มิติ ได้ดังต่อไปนี้ [13][14]

1. นำข้อมูลโปรเจกชัน $R(p, \zeta, \beta)$ มาคูณด้วยฟังก์ชันน้ำหนักแบบโคไซน์ $\frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}}$ แทนผลการคูณด้วย $R'(p, \zeta, \beta)$

$$R'(p, \zeta, \beta) = R(p, \zeta, \beta) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}} \quad (4.5)$$

2. คอนโวลูชันโปรเจกชัน $R'(p, \zeta, \beta)$ กับฟิลเตอร์ที่เราออกแบบไว้ $h(p)$ ในที่นี้แทนผลลัพธ์ของการคอนโวลูชันด้วยฟังก์ชัน $Q(p, \zeta, \beta)$

$$Q(p, \zeta, \beta) = R'(p, \zeta, \beta) * h(p) \quad (4.6)$$

3. คำนวณค่าพิกัด t, s บนแกนหมุนของหลอดเอ็กซ์เรย์ จากแต่ละค่าพิกัด x, y, z บนแกนวัตถุ เพื่อนำไปใช้ในขั้นตอนที่ 4.

$$\begin{aligned} t &= x \cos \beta + y \sin \beta \\ s &= -x \sin \beta + y \cos \beta \end{aligned} \quad (4.7)$$

4. นำ $Q(p, \zeta, \beta)$ มาคูณด้วยฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะ $\frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2}$ แล้วทำการโปรเจกชันกลับด้วยการอินทิเกรตครบรอบ ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือค่าความเข้มของแต่ละพิกเซลบนแกน 3 มิติของวัตถุที่เราต้องการ

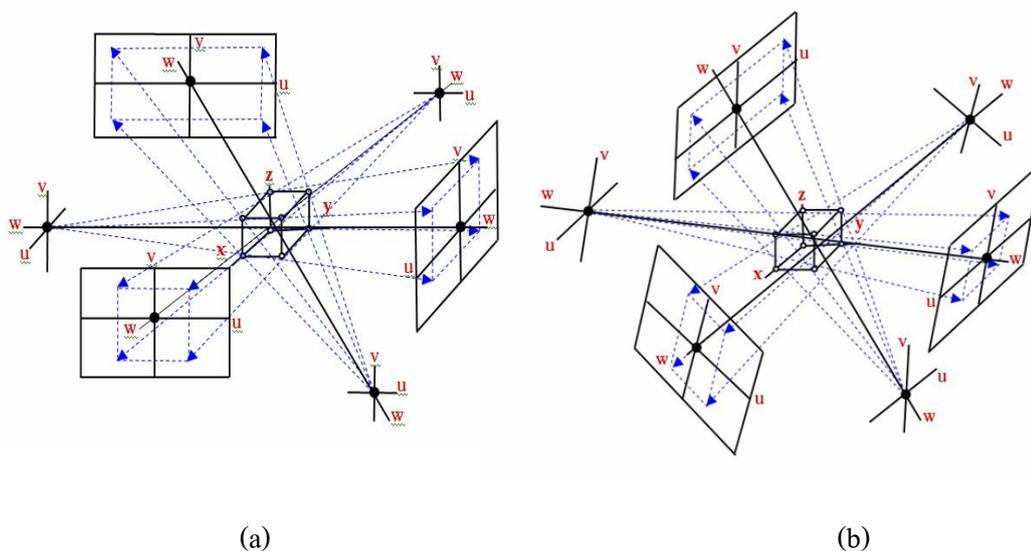
$$g(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} Q(p, \zeta, \beta) d\beta \quad (4.8)$$

5. นอร์มอลไลซ์ค่า $g(x, y, z)$ ที่ได้จากข้อ 4 จากข้อมูลทั้งปริมาตร

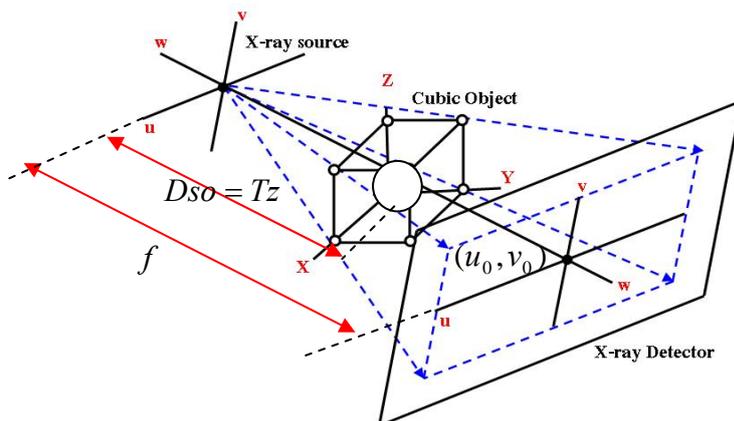
$$g'(x, y, z) = c \cdot g(x, y, z) \quad (4.9)$$

4.4 เวกเตอร์ของระบบเอ็กซ์เรย์ที่ใช้สำหรับการหาค่าตัวแปรการปรับทิศทาง

ขั้นตอนการสร้างภาพตัดขวางชนิดลำแสงกรวยข้างต้น มาจากการพิสูจน์ทางทฤษฎีในบทที่ 3 ซึ่งอยู่บนพื้นฐานที่ว่า แกนของ หลอดเอ็กซ์เรย์ วัตถุ และหัววัดเอ็กซ์เรย์จะต้องมีจุดศูนย์กลาง (ในที่นี้คือจุดกำเนิดของแกน) ร่วมกัน หรือสามารถลากเส้นผ่านจุดกำเนิดของระบบแกนทั้ง 3 ระบบข้างต้นได้เป็นแนวเส้นตรงเดียวกัน ในกรณีที่มีการวางตำแหน่งของวัตถุไม่ถูกต้อง หรือการวางตำแหน่งของหลอดเอ็กซ์เรย์มีความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงดังรูปที่ 4.6 ซึ่งจะมีผลทำให้แกนของวัตถุไม่ได้ถูกวางไว้ในแนวเดียวกันกับหลอดเอ็กซ์เรย์และหัววัดเอ็กซ์เรย์ และเมื่อนำข้อมูลโปรเจกชันแบบกรวยดังกล่าวมาใช้ในขั้นตอนการคำนวณฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติ ดังที่แสดงในหัวข้อ 4.2 ผลของภาพตัดขวางที่ได้จะไม่ถูกต้อง ในหัวข้อนี้จึงได้นำเสนอวิธีการปรับปรุงขั้นตอนการคำนวณฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันแบบ 3 มิติของข้อมูลที่ได้มาจากการวางตำแหน่งที่ไม่เป็นแนวกันดังกล่าว เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ภาพตัดขวางแบบ 3 มิติที่ต้องการ



รูปที่ 4.6 ระบบแกนของหลอดเอ็กซ์เรย์ (u, v, w) และระบบแกนโลก (x, y, z) (a) ที่อยู่ในแนวเดียวกัน (b) ไม่อยู่ในแนวเดียวกัน



รูปที่ 4.7 ระบบแกนของหลอดเอ็กซ์เรย์ (u, v, w) และระบบแกนโลก (x, y, z)

จากรูปที่ 4.7 ข้อมูลภาพโปรเจกชันแบบ 2 มิติ ที่หัววัดเอ็กซ์เรย์รับได้ วางตัวอยู่บนแกน (u, v, w) ส่วนจุดตำแหน่งของวัตถุวางตัวอยู่บนแกนโลก (x, y, z) ความสัมพันธ์ทั้ง 2 แกนในระบบโฮโมจีเนียสสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

โดยที่ M คือตัวแปรการปรับทิศทาง ซึ่งเป็นเมตริกที่แสดงความสัมพันธ์ของแกนโลกและแกนของหลอดเอ็กซ์เรย์ และ M สามารถกระจายได้ดังนี้

$$M = K[I_3 | O_3] \begin{bmatrix} R & -T \\ O_3^T & I \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

นำ สมการ (4.11) แทนในสมการ (4.10) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = K[I_3 | O_3] \begin{bmatrix} R & -T \\ O_3^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

เมตริก K ในสมการที่ (4.12) เป็นพารามิเตอร์ภายใน (Intrinsic parameter) ที่เกี่ยวข้องกับการปรับขนาดภาพ (image scaling) โดยที่

$$K = \begin{bmatrix} f \cdot a & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f \cdot b & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

จากรูปที่ 4.7 f คือความยาวของโฟกัสของโปรเจกชัน ซึ่งหมายถึงคือระยะระหว่างหลอดเอ็กซ์เรย์ไปยังกึ่งกลางหัววัดเอ็กซ์เรย์ซึ่งเป็นระนาบที่ใช้รับภาพ a และ b คือ ตัวคูณในการแปลงหน่วยพิกเซลเป็นหน่วยความยาวจริง ส่วน (u_0, v_0) แทนจุดกึ่งกลางหัววัดเอ็กซ์เรย์หรือกึ่งกลางของระนาบภาพซึ่งในรูปที่ 4.7 ระบบแกน (u, v) เทียบเท่ากับระบบแกน (ρ, ζ) ในรูปที่ 4.1

เมตริก R และ T เป็นพารามิเตอร์ภายนอก (Extrinsic parameter) ของหลอดเอ็กซ์เรย์ เมตริก R แสดงถึงแกนการหมุนไปของหลอดเอ็กซ์เรย์ (u, v, w) เมื่อเทียบกับแกนโลก (x, y, z) โดยที่การหมุนรอบแกนของ x, y และ z ก็คือ เกิดการกว้างออก (pan) เอียง (tilt) และกลิ้ง (roll) ตามลำดับ เมตริก T เป็นเมตริกที่บ่งบอกถึงการเลื่อนแกนของหลอดเอ็กซ์เรย์ (u, v, w) ไปจากแกนโลก (x, y, z) หรือเขียนแทนได้เป็น (Tx, Ty, Tz)

ในการหาค่าเมตริก M เราจะทำการแทนค่าจุดตำแหน่งของวัตถุ $X = [x \ y \ z \ 1]^T$ ซึ่งเป็นจุดบนแกนโลกที่เราทราบค่า และแทนจุดของภาพ 2 มิติ $[u \ v]^T$ ซึ่งอยู่บนแกนหลอดเอ็กซ์เรย์แทนค่าในสมการ (4.10) ผลที่ได้คือ [15][16]

$$\begin{bmatrix} \alpha u \\ \alpha v \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha u \\ \alpha v \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + m_{14} \\ m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + m_{24} \\ m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + m_{34} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

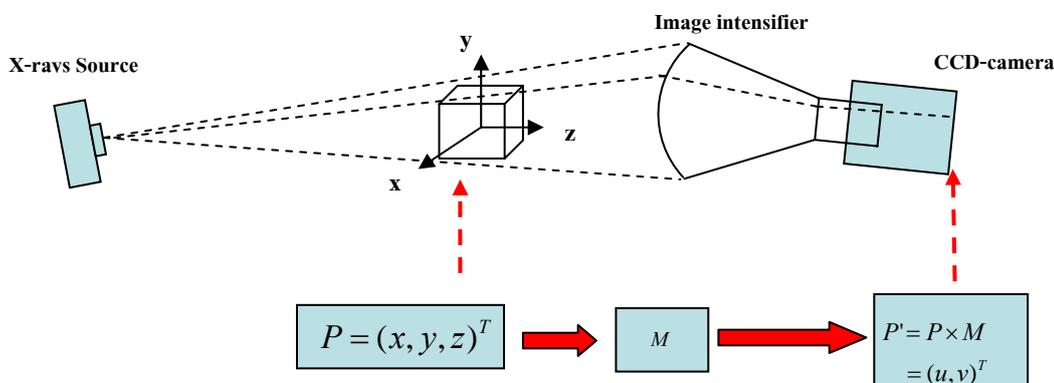
ทำการนอร์มอลไลซ์ให้สมาชิกที่ 3 เป็น 1 เราจะได้สมการ

$$\begin{aligned} u(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + m_{34}) &= m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z + m_{14} \\ v(m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z + m_{34}) &= m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z + m_{24} \end{aligned} \quad (4.16)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการเชิงเส้น 2 สมการสำหรับจุดของแต่ละตำแหน่งวัตถุ 3 มิติหนึ่งจุดและจุดในภาพ 2 มิติที่สอดคล้องกัน ทำการเขียนสมการ (4.16) ใหม่ในรูปของเมตริกได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ux & -uy & -uz & -u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 & -vx & -vy & -vz & -v \\ & & & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & & & & & & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{34} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.17)$$

หรือ $AM = 0 \quad (4.18)$



รูปที่ 4.8 ผังความสัมพันธ์ของค่าพิกัดบนแกนวัตถุ (x, y, z) ซึ่งถูกแปลงเป็นค่าพิกัดบนแกนของระนาบรับภาพผ่านตัวแปรการแปลง M

ถ้า n เป็นจำนวนจุดของแต่ละตำแหน่งวัตถุทั้งหมด เมตริก A จะมีขนาดเป็น $2n \times 12$ ในการหาค่าเมตริก M จะต้องนำเมตริก A มาทำการแยกแบบค่าเดี่ยว หรือ SVD (Single value decomposition) เพื่อที่จะจัดเมตริก A ให้อยู่ในรูป $A = UDV^T$ และจะได้ว่าคอลัมน์สุดท้ายของเมตริก V คือค่าเมตริก M

เมื่อได้เมตริก M แล้วขั้นตอนต่อไปทำการแยกพารามิเตอร์ภายใน จาก

$$M = [KR | -KRT] = [A|b] \quad (4.19)$$

และจะได้ว่า $T = -A^{-1}b$ ส่วนการหาค่าเมตริก R จะต้องทำการแยกเมตริก A ให้อยู่ในรูปผลคูณของ 2 เมตริก คือ เมตริก K และ R โดยใช้วิธีการแยกแบบคิวอาร์ (QR Decomposition)

เมื่อพิจารณาในระบบเอ็กซ์เรย์ที่หลอดเอ็กซ์เรย์อยู่ที่ตำแหน่งใดๆ เมตริก M ดังกล่าวคือตัวแปรการปรับทิศทาง ความสัมพันธ์ของค่าพิกัดบนแกนวัตถุ (x, y, z) ซึ่งถูกแปลงเป็นค่าพิกัดบนแกนของระนาบรับภาพผ่านตัวแปรการปรับทิศทางสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.8 และแสดงได้ว่า

$$[\rho \quad \zeta]^T = M[x \quad y \quad z]^T \quad (4.20)$$

และสังเกตได้ว่าการวางตัวของหลอดเอ็กซ์เรย์ที่ตำแหน่งใดๆ มีผลให้

1. จุดกึ่งกลางของระนาบรับภาพ จากเดิมบนระบบแกน (ρ, ζ) ที่พิกัด $(0,0)$ เปลี่ยนเป็นที่พิกัด (u_0, v_0) ดังนั้นค่าพิกัด ρ และ ζ ค่าใหม่จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - u_0 \\ \zeta' &= \zeta - v_0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

2. ระยะ D_{so} ที่เปลี่ยนไปไม่คงที่เหมือนกับกรณีปกติ ซึ่งค่า D_{so} ใหม่จะมีค่าเท่ากับระยะ Tz หรือเป็นระยะห่างจากหลอดเอ็กซ์เรย์ถึงกึ่งกลางวัตถุ และเป็นพารามิเตอร์ภายนอกที่ได้จากการแยกจากเมตริก M ดังนั้นค่า D_{so} ใหม่จะกลายเป็น

$$D_{so} = Tz \quad (4.22)$$

4.5 การปรับปรุงขั้นตอนการคำนวณการสร้างภาพตัดขวางแบบลำแสงกรวยของ

เฟลด์แคมป์ (Modified Feldcamp)

จากหัวข้อ 4.2 ซึ่งเป็นขั้นตอนของฟิลเตอร์เบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปกติ การปรับปรุงขั้นตอนการคำนวณดังกล่าว จะใช้การวิเคราะห์เรขาคณิตของระบบเอ็กซ์เรย์ที่ใช้สำหรับการหาค่าตัวแปรการปรับทิศทางในหัวข้อที่ 4.3 ซึ่งแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนหลักคือ

1. ขั้นตอนการหาค่าตัวแปรการปรับทิศทางหรือเมตริก M วัตถุที่ถูกนำมาสร้างภาพตัดขวางจะต้องมีตำแหน่งที่ใช้เป็นจุดอ้างอิงหรือรู้ระยะห่างจริงอย่างน้อย 6 ตำแหน่ง เมื่อนำวัตถุดังกล่าวไปเอ็กซ์เรย์ และได้ภาพโปรเจกชันมา ภาพโปรเจกชันในแต่ละมุม β ที่หลอดเอ็กซ์เรย์หมุนไปจะนำมาคำนวณหาตัวแปรการปรับทิศทาง หรือแทนด้วย $M(\beta)$ จากนั้นจะทำการแยกเอาพารามิเตอร์ภายในของแต่ละ $M(\beta)$ ได้แก่ค่า (u_0, v_0) แทนจุดกึ่งกลางค่าใหม่ของระนาบภาพ และพารามิเตอร์ภายนอก Tz ซึ่งจะนำมาคำนวณเพื่อหาค่า D_{so} ค่าใหม่

2. ขั้นตอนการสร้างภาพตัดขวาง โดยปรับปรุงจากฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปกติ ร่วมกับตัวแปรการปรับทิศทางและการพารามิเตอร์ที่ได้จากข้อ 1.

ขั้นตอนการสร้างภาพตัดขวางสร้างภาพตัดขวางแบบค่าแสงกรวยของเฟลด์แคมป์แบบปรับปรุงแสดงได้ดังนี้

1. หาค่า D_{so} ค่าใหม่ของแต่ละมุม β ที่หลุดเอ็กซ์เรย์หมุนไป จากสมการที่ (4.22) จะได้ว่า

$$D_{so}(\beta) = Tz(\beta) \quad (4.23)$$

2. หาค่า ρ และ ζ ค่าใหม่ ดังสมการที่ (4.21) ซึ่งก็คือ

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - u0 \\ \zeta' &= \zeta - v0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

3. นำข้อมูลโปรเจกชัน $R(p', \zeta', \beta)$ มาคูณด้วยฟังก์ชันน้ำหนักแบบโคไซน์ $\frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta'^2 + \rho'^2}}$ แทนผลการคูณด้วย $R'(p', \zeta', \beta)$

$$R'_\beta(p', \zeta', \beta) = \frac{D_{so}(\beta)}{\sqrt{D_{so}^2(\beta) + \zeta'^2 + \rho'^2}} R_\beta(p', \zeta', \beta) \quad (4.25)$$

4. คอนโวลูชันโปรเจกชัน $R'(p', \zeta', \beta)$ กับฟิลเตอร์ที่เราออกแบบไว้ $h(p)$ ในที่นี้แทนผลลัพธ์ของการคอนโวลูชันด้วยฟังก์ชัน $Q(p', \zeta', \beta)$

$$Q(p', \zeta', \beta) = R'(p', \zeta', \beta) * h(p) \quad (4.26)$$

5. นำตัวแปรการปรับทิศทาง $M(\beta)$ มาคูณสำหรับทุกๆค่าพิกัด x, y, z บนแกนของวัตถุ ผลที่ได้คือค่าพิกัด u, v บนแกนของระนาบโปรเจกชันภาพ

$$[u \ v]^T = M(\beta)[x \ y \ z]^T \quad (4.27)$$

6. หาค่าระยะ s จากสมการที่ 4.7 เพื่อใช้ในฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะในข้อ 7.

$$s = -x \sin \beta + y \cos \beta \quad (4.28)$$

7. นำค่าฟังก์ชัน u, v ที่ได้ในข้อ 5 มาแทนฟังก์ชัน $Q(u, v, \beta)$ ในข้อ 4. จากนั้นนำค่า $Q(u, v, \beta)$ ด้วยฟังก์ชันน้ำหนักตามระยะ $\frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2}$ แล้วทำการ โปรเจกชันกลับด้วยการอินทิเกรตครบรอบ ผลลัพธ์ที่ได้คือค่าความเข้มของแต่ละพิกเซลบนแกน 3 มิติของวัตถุที่เราต้องการ

$$g(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}(\beta)^2}{(D_{so}(\beta) - s)^2} Q(u, v, \beta) d\beta \quad (4.29)$$

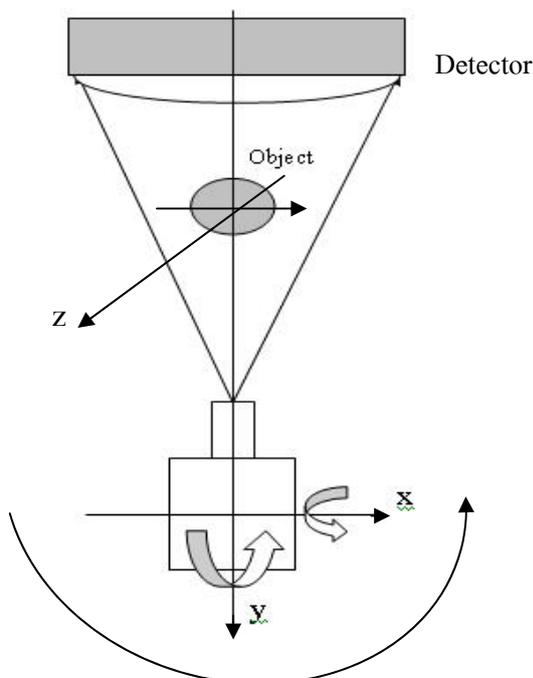
8. นอร์มอลไลซ์ค่า $g(x, y, z)$ ที่ได้จากข้อ 7 จากข้อมูลทั้งปริมาตร

$$g'(x, y, z) = c \cdot g(x, y, z) \quad (4.30)$$

4.6 การจำลองการฉายเอ็กซ์เรย์เมื่อหลอดเอ็กซ์เรย์อยู่ที่ตำแหน่งใดๆและใช้ขั้นตอนการ

คำนวณการสร้างภาพตัดขวางแบบลำแสงกรวยของเฟลด์แคมป์ที่ปรับปรุงแล้ว

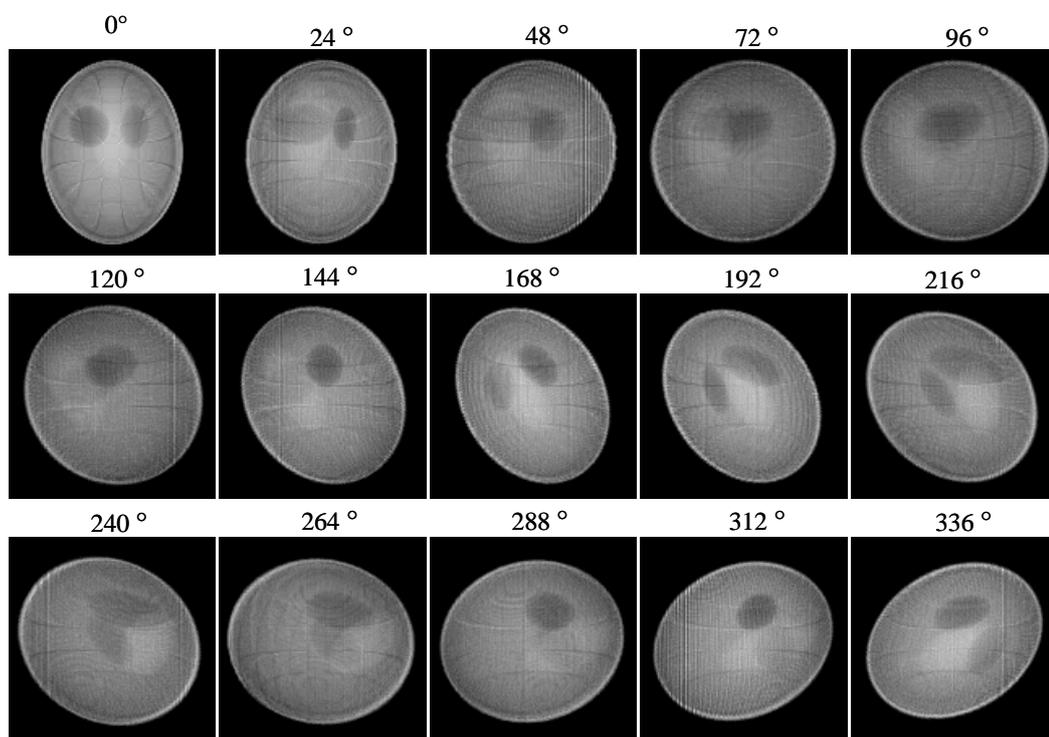
การจำลองรูปแบบของการฉายเอ็กซ์เรย์ที่มุมใดๆ โดยใช้โมเดลของเชฟโลแกน (Shepp-Logan) แบบ 3 มิติ เป็นวัตถุ การเปลี่ยนทิศทางของหลอดเอ็กซ์เรย์ จะถูกกำหนดให้มีค่าต่างๆกันตามตำแหน่งที่หลอดเอ็กซ์เรย์หมุนไป โดยการเปลี่ยนทิศทางดังกล่าวจะกำหนดเป็นมุมเทียบกับแกน x, y ส่วนแกน z คือแกนที่หลอดเอ็กซ์เรย์หมุนรอบเพื่อใช้เก็บภาพโปรเจกชัน ดังแสดงรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.9 การเปลี่ยนทิศทางบนแกน x, y, z ของหลอดเอ็กซ์เรย์ที่ใช้กับแบบจำลองในการฉายเอ็กซ์เรย์

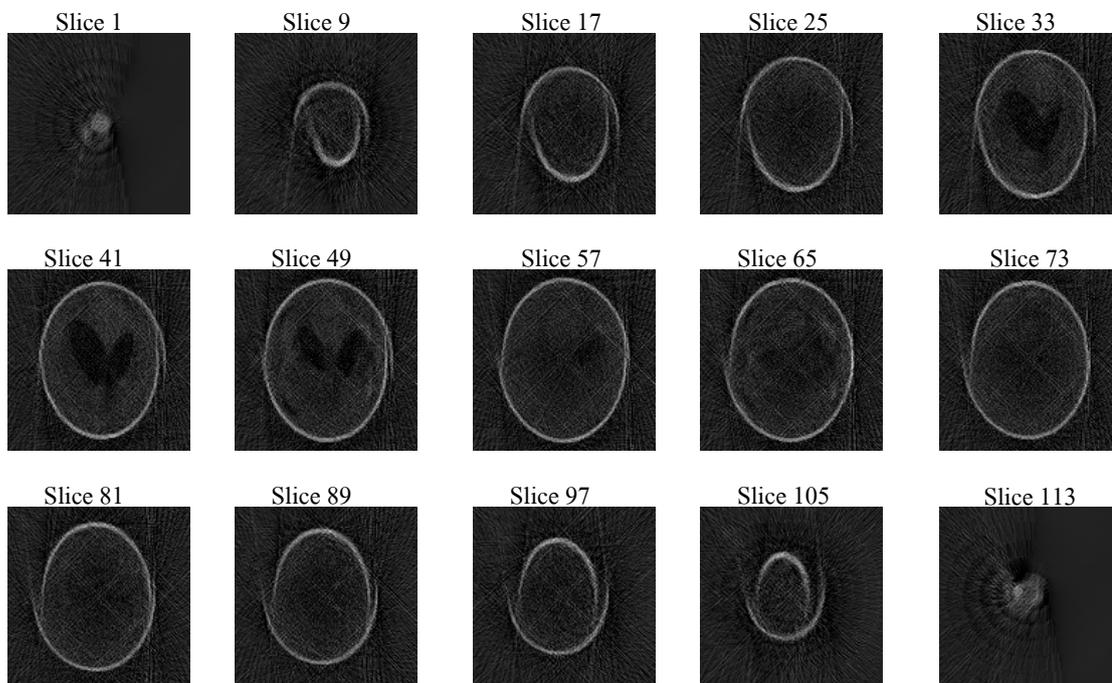
ตารางที่ 4.1 การเปลี่ยนทิศทางบนแกน x, y เมื่อหลอดเอ็กซ์เรย์หมุนรอบแกน z 360 องศา

rotate z-axis degree	rotate x-axis degree	rotate y-axis degree
0	0	0
24	4	4
48	8	8
72	12	12
96	16	16
120	20	20
144	24	24
168	28	28
192	32	32
216	36	36
240	40	40
264	44	44
288	48	48
312	52	52
336	56	56
360	60	60

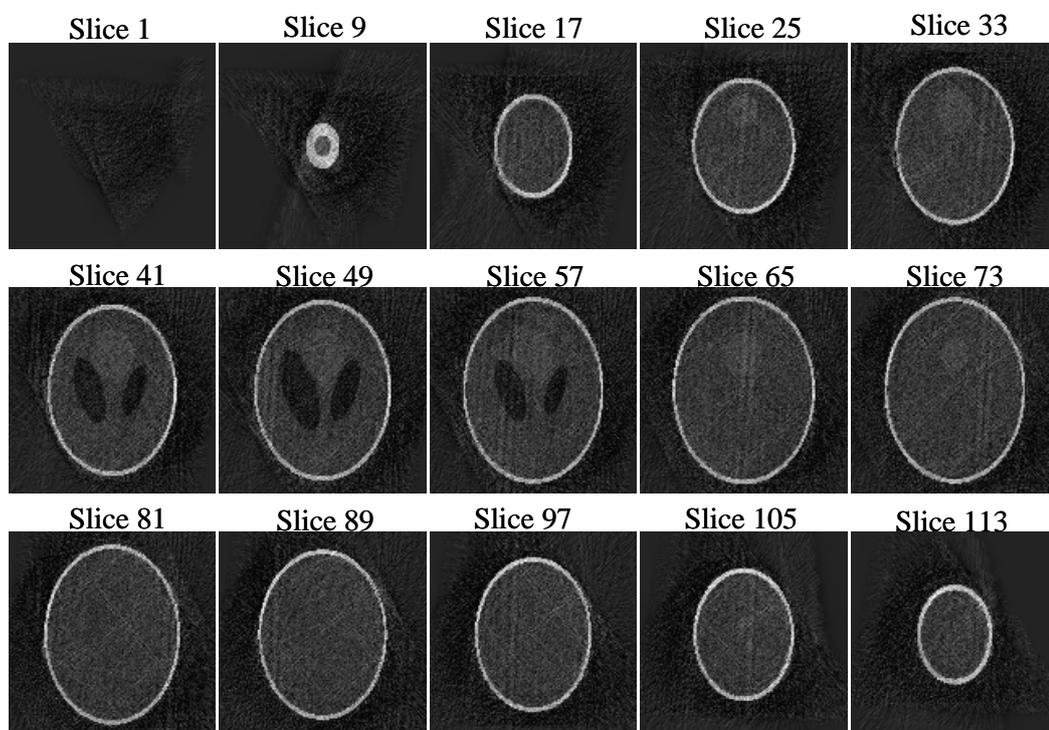


รูปที่ 4.10 ตัวอย่างภาพ โปรเจกชันเมื่อหลอดเอ็กซ์เรย์มีการเปลี่ยนทิศทางบนแกน x และแกน y จาก 0-60 องศา และมุมในการเก็บภาพโปรเจกชันจาก 0-360 องศา

ตัวอย่างภาพโปรเจกชันแสดงดังรูปที่ 4.6 เมื่อได้ข้อมูลภาพโปรเจกชันมาจากนั้นทำการสร้างภาพตัดขวางโดยขั้นตอนสร้างภาพตัดขวางแบบลำแสงกรวยของเฟลด์แคมป์แบบปกติ และแบบปรับปรุงแล้วผลที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.7 และ 4.8

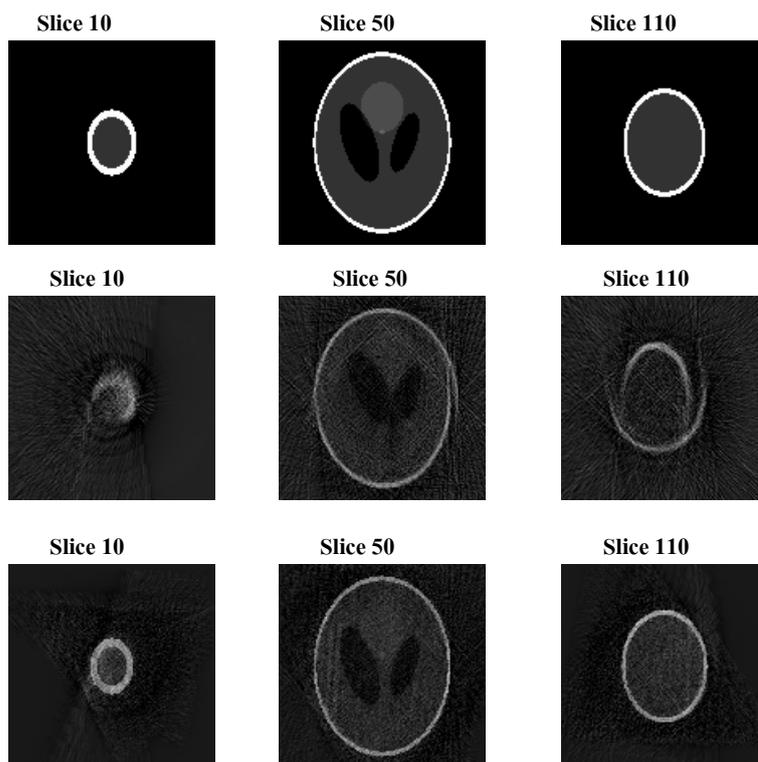


รูปที่ 4.11 แสดงภาพตัดขวางโดยใช้ขั้นตอนแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปกติ



รูปที่ 4.12 แสดงภาพตัดขวางโดยใช้ขั้นตอนแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปรับปรุงแล้ว

จากรูปที่ 4.7 เป็นภาพตัดขวางที่เกิดจากการใช้วิธีแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปกติ จะเห็นว่าภาพตัดขวางมีสิ่งปลอมปนแบบดาวัว (Bull's eye artifact) ซึ่งเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นเสมอเมื่อหลอดเอ็กซเรย์ไม่ได้อยู่นิ่งขณะเดียวกันกับระนาบของหัววัดหรือระนาบของภาพ เมื่อเทียบกับภาพที่ 4.8 เป็นภาพตัดขวางที่เกิดจากการใช้วิธีแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปรับปรุงแล้ว จะเห็นว่าสิ่งปลอมปนนั้นหายไป และเมื่อนำภาพตัดขวางของ ทั้ง 2 กรณีมาเทียบกับภาพต้นฉบับ สามารถแสดงได้รูปที่ 4.9



รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบภาพตัดขวางของรูปต้นฉบับ, ภาพตัดขวางวิธีแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติ แบบปกติ, ภาพตัดขวางวิธีแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติ แบบปรับปรุง

เมื่อนำภาพตัดขวางทั้ง 2 กรณีมาหาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าเฉลี่ยกำลังสองทั้งก่อนปริมาตรจะได้ผลดังนี้

$$MSE = \frac{\iiint [o(x, y) - o'(x, y)]^2 dx dy dz}{\iiint o(x, y)^2 dx dy dz} \times 100\% \quad (4.31)$$

ภาพตัดขวางโดยใช้ขั้นตอนแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปกติ $MSE = 49.862\%$

ภาพตัดขวางโดยใช้ขั้นตอนแบ็คโปรเจกชัน 3 มิติแบบปรับปรุง $MSE = 35.885\%$