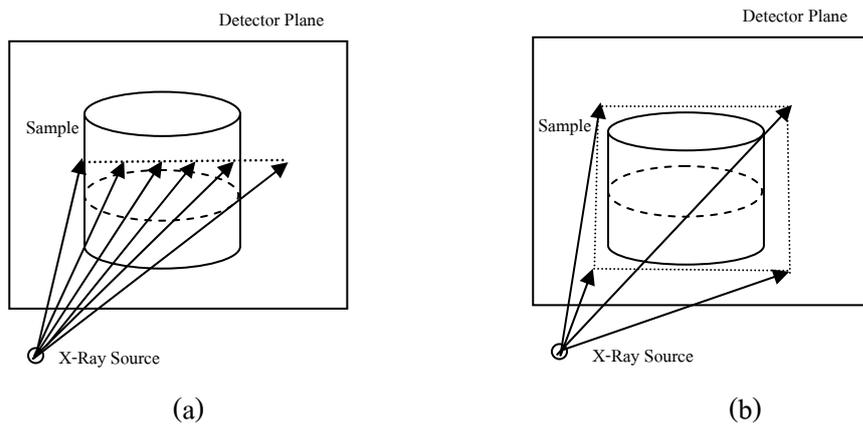


# บทที่ 3

## ทฤษฎีการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย

### 3.1 บทนำ

ขั้นตอนการคำนวณที่ใช้ในการสร้างภาพตัดขวางแบบกรวยในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีของเฟลแคมป์ (Feldkamp cone-beam) ซึ่งเป็นการวิเคราะห์ทางเดินลำแสงแบบกรวย หรือ 3 มิติ โดยหลักการของเฟลแคมป์นั้น มาจากการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของทางเดินลำแสงแบบพัด (Fan-beam) หรือแบบ 2 มิติ ดังรูปที่ 3.1 ดังนั้นในบทนี้จึงขอกกล่าวถึงทฤษฎีทางเรขาคณิตและการสร้างภาพตัดขวางจากโปรเจกชันแบบพัดก่อน ต่อจากนั้นจึงเป็นการวิเคราะห์เรขาคณิตและการสร้างภาพตัดขวางจากจากโปรเจกชันแบบกรวย



รูปที่ 3.1 เส้นทางเดินของลำแสง (a) แบบพัด และ (b) แบบกรวย

### 3.2 การสร้างภาพตัดขวางจากโปรเจกชันแบบพัด

การวิเคราะห์เรขาคณิตของทางเดินลำแสงแบบพัด จะขึ้นอยู่กับลักษณะทางกายภาพของหัววัดเอ็กซ์เรย์โดยตรง ในที่นี้เราจะกล่าวถึง หัววัดเอ็กซ์เรย์แบบระนาบโค้ง และหัววัดเอ็กซ์เรย์แบบระนาบตรง ผลดังกล่าวทำให้ทางเดินของลำแสงแบบพัดแบ่งได้เป็น 2 รูปแบบคือ[11][12]

#### 3.2.1 มุมระหว่างเส้นลำแสงเท่ากัน (Equiangular ray)

กำหนดให้  $R_p(s)$  เป็นข้อมูลโปรเจกชันแบบพัด (Fan projection) ดังรูปที่ 3.2 ซึ่ง  $\beta$  เป็นมุมที่ทำกับแกน  $y$  พิจารณาเส้นลำแสง  $\overline{SA}$  ถ้าข้อมูลโปรเจกชันถูกสร้างจากทางเดินลำแสงเป็นแบบขนาน ดังนั้นเส้นลำแสง  $\overline{SA}$  จะเป็นเส้นลำแสงเส้นหนึ่งของโปรเจกชัน  $P_\theta(t)$  ซึ่งมุม  $\theta$  และระยะ  $t$  สามารถเขียนได้เป็น





ผลมาจากเส้นลำแสง SA การโปรเจกชันแบบขนาน  $P_\theta(t)$  ซึ่งทำให้เกิดโปรเจกชันแบบพัด  $R_\beta(\gamma)$  สมการที่ (3.6) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.7)$$

พารามิเตอร์ในฟังก์ชัน  $h$  สามารถกระจายได้เป็น

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = r \cos(\beta - \phi) \cos \gamma - (r \sin(\beta - \phi) + D) \sin \gamma \quad (3.8)$$

ให้  $L$  เป็นระยะห่างระหว่างแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์  $S$  ถึงจุด  $(x, y)$  หรือ  $(r, \phi)$  ในระบบแกนเชิงขั้ว และแทนด้วยจุด  $C$  ในรูป 3.3 ซึ่ง  $L$  เป็นฟังก์ชันของตัวแปร 3 ตัวคือ  $r, \phi, \beta$  กำหนดให้  $\gamma'$  เป็นมุมของเส้นลำแสงที่ผ่านจุดนี้  $(r, \phi)$  จะสามารถแสดงได้ว่า

$$L \cos \gamma' = D + r \sin(\beta - \phi), \quad L \sin \gamma' = r \cos(\beta - \phi) \quad (3.9)$$

$$L(r, \phi, \beta) = \sqrt{[D + r \sin(\beta - \phi)]^2 + [r \cos(\beta - \phi)]^2} \quad (3.10)$$

และ

$$r' = \tan \left[ \frac{r \cos(\beta - \phi)}{D + r \sin(\beta - \phi)} \right] \quad (3.11)$$

นำสมการ (3.9) แทนใน (3.8) ได้

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = L \sin(\gamma' - \gamma) \quad (3.12)$$

และนำไปแทนใน (3.7) จะได้

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) h(L \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.13)$$

สำหรับฟังก์ชัน  $h(L \sin(\gamma' - \gamma))$  เป็นเทอมของการฟิลเตอร์ในรูปของ  $h(t)$  ซึ่งเป็นเทอมการแปลงกลับฟูเรียร์ของ  $|\omega|$  ในโดเมนความถี่

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (3.14)$$

เพราะฉะนั้น

$$h(L \sin \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega L \sin \gamma} d\omega \quad (3.15)$$

กำหนด  $\omega'$  ใหม่เป็น

$$\omega' = \frac{\omega L \sin \gamma}{\gamma} \quad (3.16)$$

สมการที่ (3.15) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$h(L \sin \gamma) = \left[ \frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\omega'| e^{2\pi\omega' \gamma} d\omega' = \left[ \frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right]^2 h(\gamma) \quad (3.17)$$

สมการที่ (3.13) เขียนได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} R_\beta(\gamma) g(\gamma' - \gamma) D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.18)$$

โดยที่

$$g(\gamma) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma}{\sin \gamma} \right]^2 h(\gamma) \quad (3.19)$$

ดังนั้นสมการที่ (3.18) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{L^2} Q_\beta(\gamma') d\beta \quad (3.20)$$

โดยที่

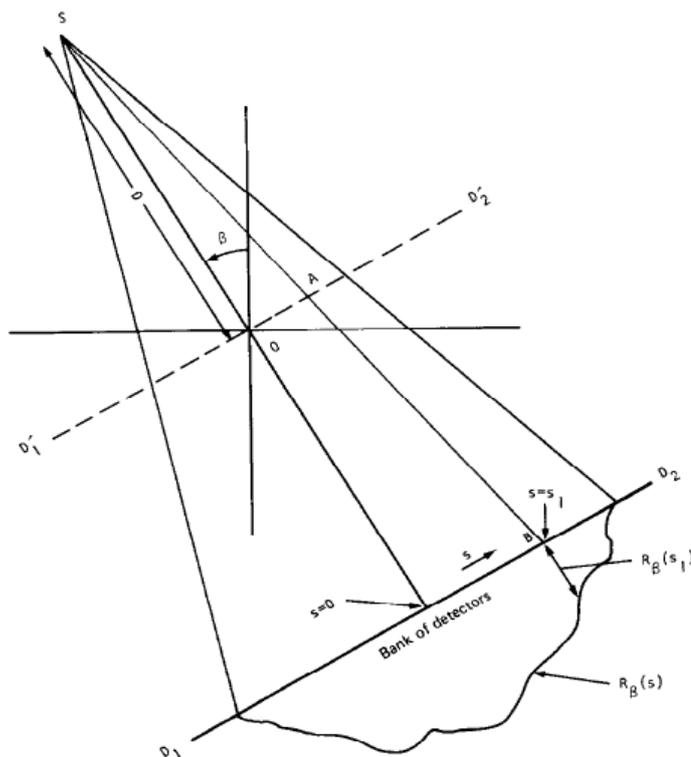
$$Q_\beta(\gamma) = R_\beta(\gamma') * g(\gamma) \quad (3.21)$$

และ 
$$R'_\beta(\gamma') = R_\beta(\gamma) \cdot D \cdot \cos \gamma \tag{3.22}$$

สมการที่ (3.20) ถึง (3.22) เป็นสมการที่ใช้สร้างภาพตัดขวางจากโปรเจกชันแบบพัดเมื่อมุมระหว่างเส้นลำแสงมีค่าเท่ากัน

**3.2.2 ระยะระหว่างเส้นลำแสงเท่ากัน (Equally space collinear detectors)**

กำหนดให้  $R_\beta(s)$  เป็นข้อมูลโปรเจกชันแบบพัด โดยที่มุมภายในระหว่างเส้นลำแสงมีระยะห่างเท่าๆกัน

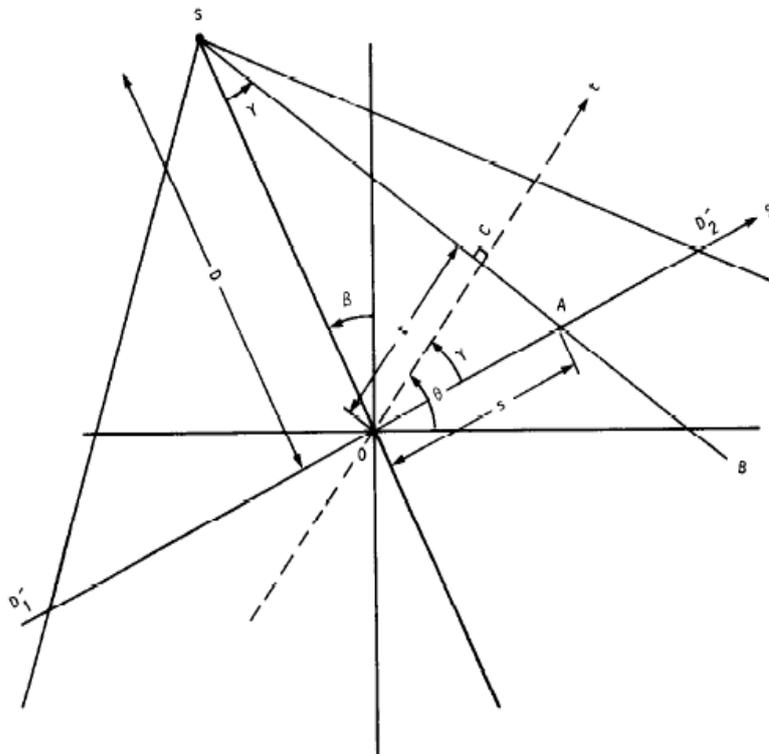


รูปที่ 3.4 ข้อมูลโปรเจกชันเมื่อวิเคราะห์ทางเดินลำแสงแบบพัดที่มีระยะระหว่างเส้นรังสีเท่ากัน

จากรูปที่ 3.4 ให้  $\overline{D_1'D_2'}$  เป็นแกนเสมือนของหัววัดเอ็กซ์เรย์ ซึ่งตัดผ่านจุดหมุนหรือจุดกำเนิด  $O$  ถ้าให้เส้นลำแสงจากแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์ไปยังฉากรับ  $\overline{SB}$  ซึ่งกระทบจุด  $A$  บนแกนสมมติ  $\overline{D_1'D_2'}$  จะเห็นได้ว่าลักษณะทางเรขาคณิตจะเป็นเช่นเดียวกันกับเส้นลำแสงที่ไปกระทบจุด  $B$  บนแกน  $\overline{D_1D_2}$  ของแกนหัววัดเอ็กซ์เรย์จริง และจากรูปที่ 3.5 พิจารณาเส้นลำแสง  $\overline{SA}$  พบว่าระยะ  $s$  จะเท่ากับระยะ  $\overline{OA}$  ถ้าสมมติข้อมูลโปรเจกชันที่ได้เป็นแบบขนาน เส้นลำแสง  $\overline{SA}$  ก็คือเส้นลำแสงที่ตำแหน่ง  $t$  ทำมุม  $\theta$  ของโปรเจกชัน  $P_\theta(t)$  ดังนั้นสมการความสัมพันธ์ระหว่าง  $\beta$  กับ  $t$  ของลำแสงขนานสามารถเขียนได้เป็น

$$t = s \cos \gamma, \quad \theta = \beta + \gamma$$

$$t = \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}}, \quad \theta = \beta + \tan^{-1} \frac{s}{D} \tag{3.23}$$



รูปที่ 3.5 เรขาคณิตของทางเดินลำแสงแบบพัดที่มีระยะระหว่างเส้นรังสีเท่ากัน

โดยที่มุม \$AOC\$ เท่ากันกับมุม \$OSC\$ และ \$D\$ คือระยะระหว่างแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์ \$S\$ ถึงจุดกำเนิด \$O\$ จากสมการโปรเจกชันแบบขนานที่ (2.14) และสมการที่ (3.23) สามารถเขียนสมการการสร้างภาพตัดขวางได้เป็น

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_{-\tan^{-1}(S_m/D)}^{2\pi - \tan^{-1}(S_m/D)} \int_{-S_m}^{S_m} P_{\beta+\gamma} \left( \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \cdot h \left( r \cos \left( \beta + \tan^{-1} \left( \frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \tag{3.23}$$

โดยที่ 
$$dt d\theta = \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \tag{3.25}$$

จากสมการที่ (3.23)  $s_m$  คือค่าที่มากที่สุดของ  $s$  ของแต่ละโปรเจกชันซึ่งมีเท่ากับ  $t_m$  ของโปรเจกชันแบบขนาน ส่วนค่าขอบเขต  $-\tan^{-1}(s_m/D)$  และ  $2\pi - \tan^{-1}(s_m/D)$  เป็นมุมอยู่ในช่วง 0 ถึง 360 องศา เขียนความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลโปรเจกชันแบบตัดกับแบบขนานได้เป็น

$$R_\beta(s) = p_{\beta+\gamma} \left( \frac{sD}{\sqrt{D^2 - s^2}} \right) \quad (3.26)$$

แทน โปรเจกชันแบบตัด  $R_\beta(s)$  ในสมการ (3.24) จะได้ว่า

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-s_m}^{s_m} R_\beta(s) \cdot h \left( r \cos \left( \beta + \tan^{-1} \left( \frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right) \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (3.27)$$

ตัวแปรในเทอมของฟิลเตอร์  $h$  เขียนใหม่ได้เป็น

$$r \cos \left( \beta + \tan^{-1} \left( \frac{s}{D} \right) - \phi \right) - \frac{sD}{\sqrt{D^2 + s^2}} = r \cos(\beta - \phi) \frac{D}{\sqrt{D^2 - s^2}} - (D + r \sin(\beta - \phi)) \frac{s}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (3.28)$$

เพื่อให้ง่ายในการนำไปใช้งานจริง จึงกำหนดตัวแปรขึ้นใหม่  $U$  ซึ่งเป็นค่าอัตราส่วนระยะสำหรับแต่ละพิกเซล  $(x, y)$  หรือ ระยะ  $SP$  กับระยะจากแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์  $S$  ถึงจุดกำเนิด  $O$  ดังแสดงในรูปที่ 3.6 และแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{\overline{SO} + \overline{OP}}{D} = \frac{D + r \sin(\beta - \phi)}{D} \quad (3.29)$$

ตัวแปรใหม่อีกตัวหนึ่งคือ  $s'$  ซึ่งกำหนดขึ้นสำหรับการหาค่าของ  $s$  ของเส้นรังสีที่ผ่านพิกเซล  $(r, \phi)$  และแสดงความสัมพันธ์ได้เป็น



$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-S_m}^{S_m} R_\beta(s) \cdot h \left[ (s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] \frac{D^3}{(D^2 + s^2)^{3/2}} ds d\beta \quad (3.33)$$

สำหรับฟังก์ชัน  $h$  เป็นเทอมของการฟิลเตอร์ในรูปของ  $h(t)$  ซึ่งเป็นเทอมการแปลงกลับฟูเรียร์ของ  $|\omega|$  ในโดเมนความถี่

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (3.34)$$

ดังนั้น

$$h \left[ (s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega (s' - s)(UD / \sqrt{D^2 + s^2})} d\omega \quad (3.35)$$

กำหนด  $\omega'$  ใหม่เป็น

$$\omega' = \omega \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (3.36)$$

สมการที่ (3.35) สามารถเขียนได้เป็น

$$h \left[ (s' - s) \frac{UD}{\sqrt{D^2 + s^2}} \right] = \frac{D^2 + s^2}{U^2 D^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega'| e^{2\pi(s' - s)\omega'} d\omega' \quad (3.37)$$

$$= \frac{D^2 + s^2}{U^2 D^2} h(s' - s) \quad (3.38)$$

สมการที่ (3.33) เขียนได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\beta(s) g(s' - s) \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} ds d\beta \quad (3.39)$$

โดยที่ 
$$g(s) = \frac{1}{2}h(s) \quad (3.40)$$

ดังนั้นสมการที่ (3.39) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} Q_\beta(s') d\beta \quad (3.41)$$

โดยที่ 
$$Q_\beta(s) = R'_\beta(s) * g(s) \quad (3.42)$$

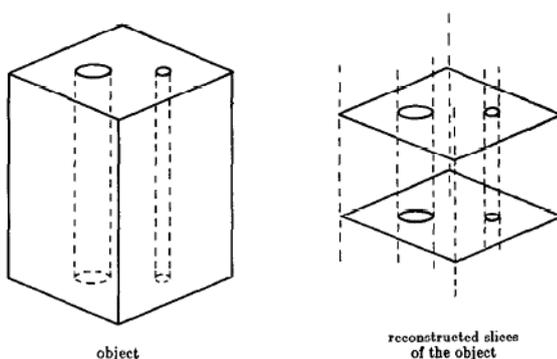
และ 
$$R'_\beta(s) = R_\beta(s) \cdot \frac{D}{\sqrt{D^2 + s^2}} \quad (3.43)$$

สมการที่ (3.41) ถึง (3.43) เป็นสมการที่ใช้สร้างภาพตัดขวางจากโปรเจกชันแบบพัดเมื่อระยะระหว่างเส้นลำแสงมีค่าเท่ากัน

### 3.3 การสร้างภาพตัดขวางแบบกรวย (Cone-beam reconstruction)

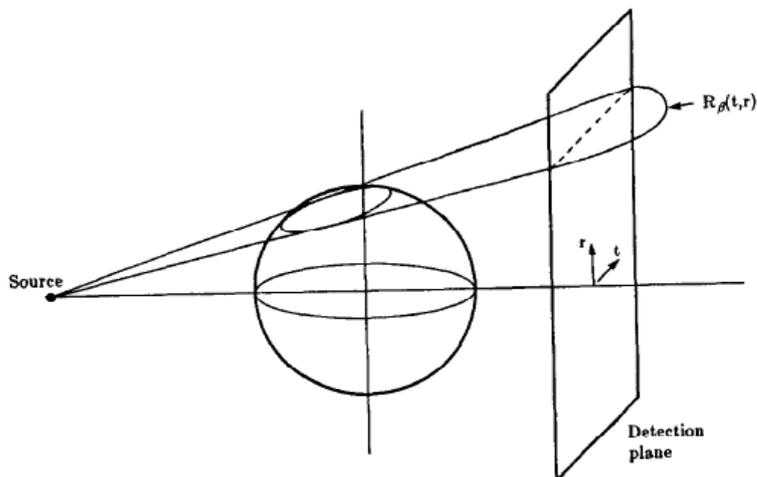
การสร้างภาพตัดขวางของวัตถุแบบ 3 มิติ สามารถทำได้โดยการสร้างภาพตัดขวางของวัตถุแบบ 2 มิติที่หลายๆสไลด์จากสไลด์ปลายล่างสุดของวัตถุจนถึงบนสุดแล้วนำมารวมกันดังรูปที่

3.7



รูปที่ 3.7 การสร้างภาพตัดขวางของวัตถุแบบ 3 มิติ

ในการสร้างภาพตัดขวางที่มีทางเดินลำแสงแบบกรวย จะใช้การวิเคราะห์เช่นเดียวกันกับทางเดินลำแสงแบบพัด ดังหัวข้อที่ 3.2.2 คือแทนทางเดินแสงแบบพัดที่ทำมุมเอียงกับระนาบ  $(x, y)$  ของภาพแต่ละสไลด์ซึ่งมีจุดหมุนอยู่ที่ตำแหน่งของแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์ ดังรูปที่ 3.8



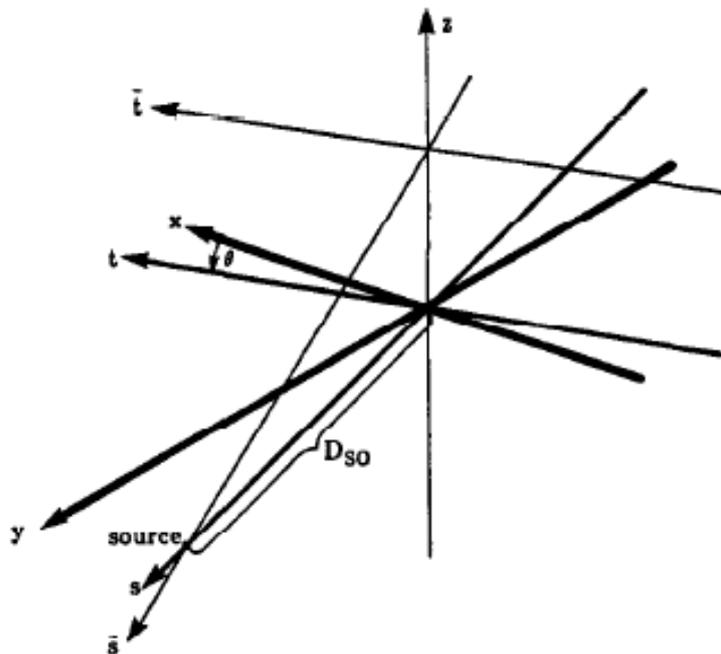
รูปที่ 3.8 การวิเคราะห์ทางเดินแสงแบบกรวยในรูปแบบทางเดินแสงแบบพัด

ข้อดีของการฉายรังสีแบบกรวยคือลดเวลาที่ผู้ป่วยจะได้รับปริมาณรังสี เนื่องจากในแต่ละมุมจะฉายเอ็กซ์เรย์เพียงครั้งเดียว จากรูปที่ 3.8  $R_B(t, r)$  เป็นโปรเจกชันที่ได้จากหัววัดเอ็กซ์เรย์ซึ่งถูกวางเรียงเป็นระนาบ 2 มิติ และโปรเจกชัน  $R_B(t, r)$  นี้เป็นฟังก์ชันของมุม  $\beta$  และตำแหน่งบนระนาบ 2 มิติ  $(t, r)$

### 3.3.1 โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติ

การวิเคราะห์โปรเจกชันของวัตถุ 3 มิติ จะกำหนดระบบแกนเป็น 2 ส่วน คือระบบแกนของแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์และลำแสง  $(t, s, r)$  และระบบแกนของวัตถุ  $(x, y, z)$  ซึ่งความสัมพันธ์กันจากการหมุนดังรูปที่ 3.9 การหมุนจะมี 2 รูปแบบ แบบแรกจะเหมือนกับการวิเคราะห์ในแบบ 2 มิติ ซึ่งก็คือมุม  $\theta$  ของแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์ที่หมุนรอบแกน  $z$  ของแกนวัตถุ ซึ่งทำให้เกิดแกนหมุน  $(t, s, z)$  ส่วนการหมุนรูปแบบที่ 2 คือการหมุนของระนาบลำแสง  $(t, s)$  ที่เป็นรูปพัดรอบแกน  $t$  เป็นมุมเท่ากับ  $\gamma$  ความสัมพันธ์ของการหมุนทั้ง 2 แบบดังกล่าวสามารถเขียนในรูปของสมการเมตริกได้เป็น

$$\begin{bmatrix} t \\ s \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.44)$$



รูปที่ 3.9 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบแกนหมุนของแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์และลำแสง  $(t, s, r)$   
รอบระบบแกนวัตถุ  $(x, y, z)$

โปรเจกชันแบบขนานของวัตถุ 3 มิติ  $f$  มีสมการคือ

$$P_{\theta,r}(t, r) = \int_{-s_m}^{s_m} f(t, s, r) ds \quad (3.45)$$

จากสมการที่ (3.45) โปรเจกชันเป็นฟังก์ชันของ 4 ตัวแปรคือ  $(t, \theta)$  จะเป็นตัวแปรสำหรับระบุขนาดและทิศทางของระบบแกน  $x-y$  ส่วนตัวแปร  $(r, \gamma)$  จะระบุขนาดและทิศทางของระบบแกน  $s-z$  ระบบที่ใช้ทางเดินลำแสงแบบกรวย แหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์จะถูกหมุนด้วยมุมเท่ากับ  $\beta$  และข้อมูลโปรเจกชันถูกแทนด้วย  $R_\beta(p', \zeta')$  ในการหาสมการการสร้างภาพกลับแบบกรวยในขั้นแรกจะกำหนดให้

$$p = \frac{p' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad \zeta = \frac{\zeta' D_{SO}}{D_{SO} + D_{DE}} \quad (3.46)$$

ตัวแปร  $D_{SO}$  แทนระยะระหว่างแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์ถึงจุดกึ่งกลางของวัตถุ (จุดกึ่งกลางของการหมุน) ส่วน  $D_{DE}$  แทนระยะจากจุดกึ่งกลางของวัตถุถึงหัววัดเอ็กซ์เรย์ และจากสมการโปรเจกชันแบบขนาน จะได้ว่า

$$t = p \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + p^2}} \quad (3.47)$$

$$\theta = \beta + \tan^{-1}(p / D_{so}) \quad (3.48)$$

โดยที่  $t$  และ  $\theta$  บอกถึงตำแหน่งบนเส้นรังสีแบบพัดที่เอียง และจะได้ว่า

$$r = \zeta \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2}} \quad (3.49)$$

$$\gamma = \tan^{-1}(\zeta / D_{so}) \quad (3.50)$$

โดยที่  $r$  และ  $\lambda$  บอกถึงตำแหน่งการเอียงของลำแสงแบบพัด

### 3.3.2 การสร้างภาพตัดขวางแบบกรวยของเฟลด์แคมป์

การสร้างภาพตัดขวางแบบกรวยของเฟลด์แคมป์ก็คือการทำฟิลเตอร์เบ็คโปรเจกชันแบบ 2 มิติ บนแต่ละระนาบพัดที่เอียงไปบนลำแสงแบบกรวย (แต่ละระดับบนแกน  $z$  หรือ  $\zeta$ ) จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มารวบรวมและสร้างกลับเป็นภาพตัดขวางแบบ 3 มิติ

เริ่มแรกจะพิจารณาสมการการสร้างภาพกลับแบบพัดสำหรับที่ตำแหน่ง  $(r, \phi)$  ใดๆ

$$g(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{U^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_\beta(p) h(p' - p) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.51)$$

$$p' = \frac{D_{so} r \cos(\beta - \phi)}{D_{so} + r \sin(\beta - \phi)} \quad h(p) = \int_{-w}^w |\omega| e^{j\omega p} d\omega \quad (3.52)$$

$$U(r, \phi, \beta) = \frac{D_{so} + r \sin(\beta - \phi)}{D_{so}} \quad (3.53)$$

เขียนสมการความสัมพันธ์  $(r, \phi)$  ให้อยู่ในระบบโคออร์ดิเนตการหมุน  $(t, s)$  ได้คือ

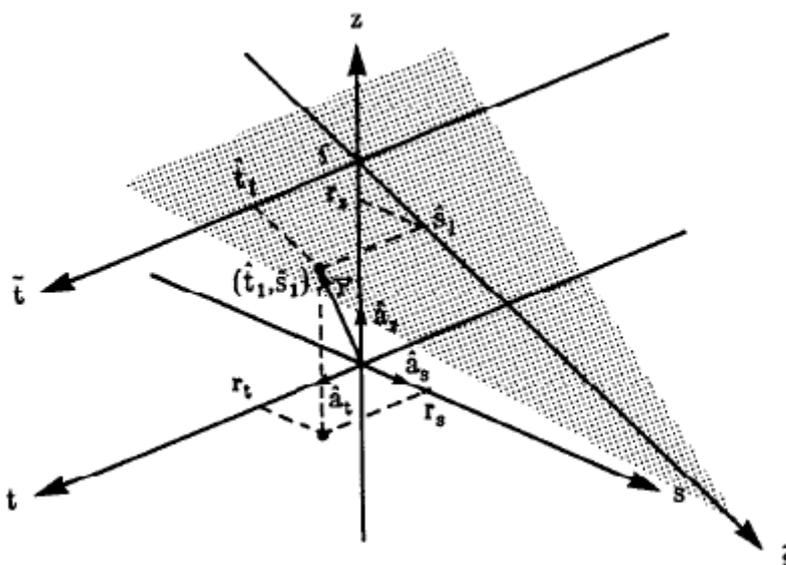
$$t = x \cos \beta + y \sin \beta \quad s = y \cos \beta - x \sin \beta \quad (3.54)$$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (3.55)$$

$$p' = \frac{D_{so} - t}{D_{so} - s} \quad U(x, y, z) = \frac{D_{so} - s}{D_{so}} \quad (3.56)$$

สมการการสร้างภาพตัดขวางแบบพัดเขียนได้เป็น

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(p) h\left(\frac{D_{so} - t}{D_{so} - s} - p\right) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.57)$$



รูปที่ 3.10 ระบบแกน  $(t', s')$  และแสดงตำแหน่งจุดภายในวัตถุซึ่งสัมพันธ์กับระนาบเอียงรูปพัดของลำแสง

จากรูปที่ 3.10 กำหนดแกน  $(t', s')$  ขึ้นใหม่ เพื่อสำหรับกำหนดตำแหน่งของจุดของการสร้างภาพตัดขวางกลับ ซึ่งเป็นไปตามระนาบพัดที่เอียง และเพราะผลของการเปลี่ยนขนาดทั้งระยะจากแหล่งกำเนิดเอ็กซ์เรย์  $D_{so}$  และการเปลี่ยนขนาดมุม  $\beta$  ดังนั้นระยะ  $D_{so}$  ใหม่จึงเขียนได้เป็น

$$D_{so}'^2 = D_{so}^2 + \zeta^2 \quad (3.58)$$

ดังนั้นการเพิ่มขึ้นของมุมเล็กๆ  $d\beta'$  กลายเป็น

$$D_{so}d\beta = D'_{so}d\beta' \quad dB' = \frac{d\beta D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2}} \quad (3.59)$$

แทนตัวแปรจากสมการที่ (3.59) ใน (3.56) จะได้เป็น

$$g(t', s') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}'^2}{(D_{so}' - s')^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta'}(p, \zeta) h\left(\frac{D_{so}' - \tilde{t}}{D_{so}' - \tilde{s}} - p\right) \frac{D_{so}'}{\sqrt{D_{so}'^2 + p'^2}} dp d\beta' \quad (3.60)$$

ในการที่เปลี่ยนแกนกลับไปเป็นแกนดั้งเดิม  $(t, s, z)$  สามารถแทนค่ากลับได้เป็น

$$\tilde{t} = t, \quad \frac{\tilde{s}}{D_{so}'} = \frac{s}{D_{so}}, \quad \frac{\zeta}{D_{so}'} = \frac{z}{D_{so} - s} \quad (3.61)$$

และแทนค่าจากสมการ (3.58) และ (3.59) จะได้ว่า

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D_{so}^2}{(D_{so} - s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(p, \zeta) h\left(\frac{D_{so} - t}{D_{so} - s} - p\right) \frac{D_{so}}{\sqrt{D_{so}^2 + \zeta^2 + p^2}} dp d\beta \quad (3.62)$$

สมการที่ (3.62) เป็นสมการการสร้างภาพตัดขวางสำหรับระนาบเอียงรูปพัดใดๆของลำแสงแบบกรวยของเฟลด์แคมป์