

บทที่ 4

เวฟเล็ต

4.1 บทนำ

ในบทนี้จะอธิบายคณิตศาสตร์ของเวฟเล็ต โดยจะกล่าวถึงการวิเคราะห์แบบหลายระดับ ความละเอียด (Multiresolution analysis: MRA) ซึ่งเป็นพื้นฐานของการกำเนิดสเกลลิงฟังก์ชัน และเวฟเล็ตฟังก์ชัน การแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย การแปลงกลับเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย โดยจะพิจารณาในลักษณะของ ฟิลเตอร์แบงก์ (Filter Banks) และกล่าวถึงผลตอบสนองอิมพัลส์ของการแปลงเวฟเล็ตตระกูลออร์โธนอร์มัล

4.2 ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงเวฟเล็ต

คลื่นถูกนิยามให้เป็นฟังก์ชันที่มีการออสซิลเลทในโดเมนเวลาหรือสเปซ เช่น คลื่นไซน์ (Sine wave) เป็นต้น ส่วนเวฟเล็ตก็เป็นคลื่นเช่นกัน ในการวิเคราะห์สัญญาณหรือฟังก์ชันเช่นการวิเคราะห์ฟูเรียร์ ซึ่งเป็นการวิเคราะห์คลื่นโดยกระจายสัญญาณหรือฟังก์ชันในเทอมของไซน์หรือเอ็กโพเนนเชียล ซึ่งเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนความถี่ ส่วนการวิเคราะห์เวฟเล็ตเป็นการวิเคราะห์สัญญาณในโดเมนเวลาและความถี่ไปพร้อมๆกัน เวฟเล็ตสามารถนำมาใช้ในการกระจายอนุกรมของสัญญาณ ในลักษณะเดียวกันที่ใช้อนุกรมฟูเรียร์ในการแทนสัญญาณนั้นคือ สัญญาณหรือฟังก์ชัน $f(t)$ สามารถเขียนในรูปของ **Linear Combination [1,2]** ได้โดย

$$f(t) = \sum_l a_l y_l(t) \quad (41)$$

เมื่อ l เป็นดัชนีจำนวนเต็มของอนุกรม
 a_l เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจาย
 $y_l(t)$ เป็นเซตของฟังก์ชันจำนวนจริง

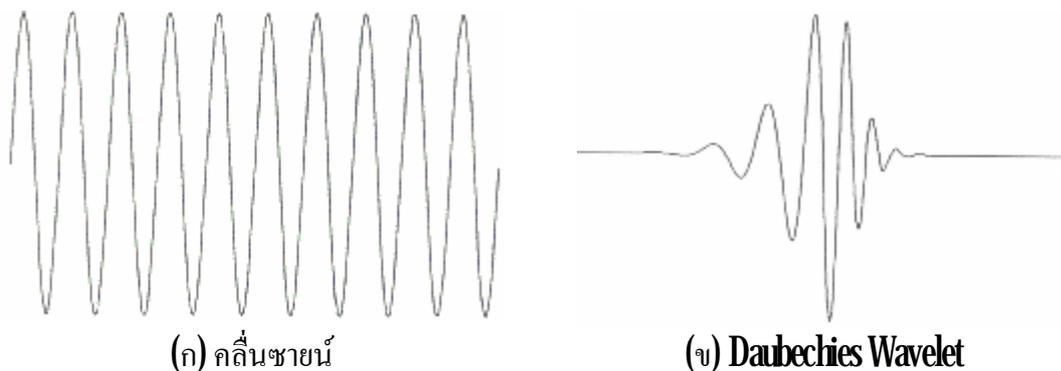
เซตของฟังก์ชันถูกเรียกว่า **Basis** และถ้าฟังก์ชันพื้นฐาน (basis function) มีลักษณะเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) จะได้ผลคูณภายใน (Inner Product) เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\langle y_k(t), y_l(t) \rangle = \int y_k(t) y_l(t) dt = 0 \quad k \neq l \quad (42)$$

และสัมประสิทธิ์ a_k สามารถหาได้โดยการหาผลคูณภายในดังสมการที่ 43

$$a_k = \langle f(t), y_k(t) \rangle = \int f(t) y_k(t) dt \quad (43)$$

เมื่อพิจารณาคลื่นเวฟเล็ด $y(t)$ จะหมายถึงคลื่นสัญญาณเล็กๆที่เหมาะสมสำหรับเป็นเซตฟังก์ชันพื้นฐานของสเปซฟังก์ชัน (**function spaces**) ซึ่งเป็นคลื่นที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นๆ และมีแอมพลิจูดลดลงสู่ศูนย์อย่างรวดเร็วเมื่อ $t \rightarrow \pm\infty$ (**local support** ในโดเมนเวลา) ดังรูปที่ 41 (จ) และพื้นที่สุทธิของรูปคลื่นเท่ากับศูนย์หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 0$ เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับฟูเรียร์ที่ประกอบด้วยคลื่นโคไซน์ (**cosine**) และไซน์ (**sine**) ดังรูปที่ 41 (ก) ซึ่งมีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ต (**local support**) ในโดเมนความถี่แต่จะไม่มีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ตในโดเมนเวลา ส่วนเวฟเล็ดจะมีคุณสมบัติโลคอลซัพพอร์ตทั้งในโดเมนความถี่และเวลา ดังนั้นเวฟเล็ดจึงสามารถแทนฟังก์ชันที่มีลักษณะขดแหลมหรือมีลักษณะเป็นขอบ **nonstationary** หรือเหตุการณ์ที่เปลี่ยนไปตามเวลา ด้วยเทอมของ **basis function** ที่มีนัยสำคัญสูงกว่า **Fourier Basis** ซึ่งจากคุณสมบัติดังกล่าวสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการบีบอัดสัญญาณได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 41 แสดงรูปคลื่นไซน์ และ Daubechies Wavelet

ในการสร้างเซตเวฟเล็ด คลื่นเวฟเล็ดจะถูกยืดขยาย (**dilation**) หรือเปลี่ยนความถี่ และคลื่นเวฟเล็ดที่ถูกยืดขยายยังถูกเลื่อน (**translation**) ในแกนเวลาอีกด้วย ซึ่งคุณสมบัติทั้งสองอย่างเป็นส่วนหนึ่งของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด การวิเคราะห์แบบนี้เป็นการกระจายรายละเอียดของสัญญาณจะถูกกระจายไปที่ความถี่ต่างๆและตำแหน่งต่างๆเปรียบเหมือนเสียงดนตรีที่ถูกกระจายเป็นตัวโน้ตบนเส้นของระดับเสียง

4.21 การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด(Multiresolution Analysis)

ถ้ากำหนดสัญลัษณ์ $f_j(t)$ แทนฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกกระจายไปที่ระดับความละเอียด j และที่ระดับความละเอียด $j+1$ รายละเอียดจะถูกแทนด้วย $d_j(t)$ ซึ่งเมื่อรวมเข้ากับ j จะได้ฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกกระจายไปที่ระดับความละเอียด $j+1$ นั่นคือ

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \quad (44)$$

ซึ่งฟังก์ชันในสมการที่ 44 จะเป็นฟังก์ชันที่มีรายละเอียดเข้าใกล้ $f(t)$ มากกว่าแทนฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด j และสัญญาณ $f(t)$ จะสร้างกลับคืนเมื่อรวมรายละเอียดที่ระดับความละเอียดต่างๆไปจนถึงอนันต์หรือ $j \rightarrow \infty$ ซึ่งจะได้

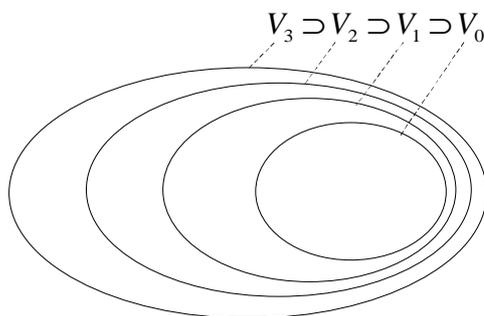
$$f(t) = f_j(t) + \sum_{k=j}^{\infty} d_k(t) \quad (45)$$

การวิเคราะห์หลายระดับความละเอียดจะครอบคลุมถึงการแสดงความละเอียด ในแต่ละระดับไปพร้อมๆกัน จากสมการที่ 45 จะเห็นว่าฟังก์ชันถูกกระจายออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วน **background** และส่วนของรายละเอียด ในทำนองเดียวกันจะสามารถดูสเปซของฟังก์ชันนั้นก็คือ **Square integral: $L^2(R)$** ซึ่งประกอบไปด้วยลำดับของสเปซย่อย W_k และ V_j รวมไปถึงการประมาณค่าของ $f(t)$ ที่ระดับความละเอียด j คือ $f_j(t)$ ใน V_j และรายละเอียด $d_k(t)$ ใน W_k

การวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียดของ $L^2(R)$ ได้นิยามลำดับของสเปซย่อย V_j โดยที่ Z เป็นเซตของจำนวนเต็มดังนี้

- (1) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(R)$
- (2) $\bigcap_j V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_j V_j} = L^2(R)$
- (3) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$
- (4) $f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t-k) \in V$
- (5) มีฟังก์ชัน $j(t)$ และ $j(t-k)$ ซึ่งเป็นออร์โธโนมัล (**orthonormal basis**) อยู่ใน V_0

จากนิยามข้อที่ (1) สเปซย่อย V_j จะเป็นสับเซตของสเปซย่อย V_{j+1} ดังรูปที่ 42 หรือถ้าพิจารณาในโดเมนเวลา ฟังก์ชันที่ถูกประมาณใน V_{j+1} คือสมการที่ 44



รูปที่ 42 แสดงสเปซย่อย V_j ใน $L^2(\mathbb{R})$ ตามนิยามของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด

และความแตกต่างของการประมาณฟังก์ชันใน V_j และ V_{j+1} คือรายละเอียด $d_j(t)$ ซึ่งอยู่ใน W_j ดังนั้นจะได้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (46)$$

เมื่อ \oplus แทนการบวกเชิงตั้งฉากและ W_j ถูกเรียกว่าสเปซของรายละเอียดหรือ **Complementary subspace** และจะตั้งฉากกับ V_j โดยใช้สัญลักษณ์ $V_j \perp W_j$ ซึ่งหมายความว่าผลคูณภายในของแต่ละส่วน (**element**) ใน V_j กับแต่ละส่วนใน W_j จะมีค่าเป็นศูนย์ แต่เมื่อมองที่สเปซย่อย จะได้

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (47)$$

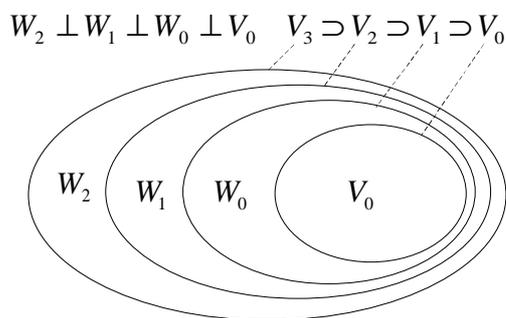
เมื่อแทนสมการที่ 47 ในสมการที่ 46 จะได้

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} \quad (48)$$

และเมื่อกระจาย V_{j+1} ไปอีกจะได้

$$V_{j+1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_{j-j} \oplus V_{j-1} \quad (49)$$

จากสมการที่ 49 สามารถแสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(\mathbb{R})$ ได้ดังรูปที่ 43



รูปที่ 43 แสดงสเปซย่อย W_j ใน $L^2(\mathbb{R})$

นิยามข้อที่ (2) ฟังก์ชันจะถูกประมาณที่ระดับความละเอียดที่หยาบที่สุดคือที่ระดับ $j \rightarrow -\infty$ จะได้ว่า $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = 0$ ในทางกลับกันเมื่อเพิ่มรายละเอียดจนถึงที่ระดับความละเอียดอนันต์จะได้สัญญาณกลับคืนมานั้นคือ $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

นิยามข้อที่ (3) สเปซ V_j ถูกสเกลหรือขยายจากสเปซ V_0 เนื่องจากที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะเก็บรายละเอียดที่สูงกว่าที่ระดับความละเอียด j ดังนั้นความถี่ฟังก์ชันใน V_{j+1} จะมีค่าเป็นสองเท่าของฟังก์ชันใน V_j หมายความว่าถ้ามีฟังก์ชัน $f(t)$ ในสเปซย่อย V_j แล้วจะมี $f(2t)$ อยู่ใน V_{j+1}

นิยามข้อที่ (4) ถ้าสเปซย่อย V_0 มีฟังก์ชัน $f(t)$ แล้วฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกเลื่อนคือ $f(t-k)$ ซึ่งจะเลื่อนด้วยค่าจำนวนเต็ม k และจะเก็บอยู่ใน V_0 ด้วย

นิยามข้อที่ (5) มีฟังก์ชันพื้นฐาน $j(t)$ ซึ่งเรียกว่าสเกลลิงฟังก์ชัน (scaling function) และรวมถึงสเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกเลื่อนคือ $j(t-k)$ อยู่ใน V_0 และแต่ละฟังก์ชัน จะมีคุณสมบัติที่เป็นออร์โธนอร์มัล

4.2.2 สเกลลิงฟังก์ชัน (Scaling Function)

จากแนวความคิดของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด จะสามารถนิยามสเกลลิงฟังก์ชัน $j_k(t)$ และเซตของสเกลลิงฟังก์ชันถูกนิยามในเทอมของการเลื่อนของการสเกลลิงฟังก์ชันซึ่งจะได้

$$j_k(t) = (t-k) \quad k \in Z \in L^2 \quad (410)$$

เมื่อ Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม จากสมการที่ 410 ขนาดของสเปซย่อยใน L^2 ถูกกำหนดโดยเซตของสเกลลิงฟังก์ชันคือ

$$V_0 = \overline{\text{Span}_k \{j_k(t)\}} \quad (411)$$

เครื่องหมาย **over bar** แทนช่วงปิดของสเปซ จากนิยามข้อที่ (3) และนิยามข้อที่ (4) ของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด จะสามารถนิยามการสเกลของสเกลลิงฟังก์ชันหรือการเปลี่ยนความถี่ของสเกลลิงฟังก์ชัน โดย

$$j_{j,k}(t) = 2^{j/2} j(2^j t - k) \quad (412)$$

ดังนั้นขนาดของสเปซย่อยในสมการที่ 411 จะกลายเป็น

$$V_j = \overline{\text{Span}_k \{j_k(2^j t)\}} = \overline{\text{Span}_k \{j_{j,k}(t)\}} \quad (413)$$

ถ้า $f(t) \in V_j$ และ $k \in Z$ แล้วจะสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(t)$ ได้ดังสมการที่ 414

$$f(t) = \sum_k a_k(2^j t - k) \quad (414)$$

สำหรับทุกค่าที่ $j > 0$ ขนาดของสเปซย่อยจะกว้างขึ้น เป็นเหตุให้ $j_{j,k}(t)$ แคบลงและมีลำดับชั้นในการเลื่อนเล็กลง ดังนั้นจึงสามารถแทนสัญญาณได้ละเอียดมากขึ้น สำหรับที่ค่า $j < 0$ ความกว้างของสเปซย่อยจะแคบลง สเกลลิงฟังก์ชัน $j_{j,k}(t)$ มีขนาดกว้างขึ้นและมีลำดับชั้นในการเลื่อนกว้างขึ้นเป็นเหตุให้สามารถแทนสัญญาณได้ไม่ละเอียด

จากกฎข้อที่ (3) ของการวิเคราะห์แบบหลายระดับความละเอียด สเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด $j+1$ จะมีความถี่เป็นสองเท่าของสเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับความละเอียด j ดังนั้นจะสามารถนิยามสเกลลิงฟังก์ชัน $j(t)$ ที่อยู่ใน V_0 ในรูปแบบของการรวมเชิงเส้น (**linear combination**) ของ $j(2t)$ ที่ถูกเลื่อนใน V_1 ได้ดังนี้

$$j(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} j(2t - n) \quad (415)$$

โดยที่ $h_0(n)$ เป็นสัมประสิทธิ์ตัวกรองความถี่บางครั้งจะเรียกว่าตัวกรองสเกลลิง (**scaling filter**) และ $\sqrt{2}$ เป็นตัวนอร์มอลไลซ์ เพื่อให้สเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกสเกลด้วย 2 ยังคงเป็นนอร์มฟังก์ชัน (**norm function**) สมการนี้เรียกว่า **dilation equation** เนื่องจาก $\{j_{j,k}(t)\}$ เป็นออร์โธโนมัล ดังนั้น

สัมประสิทธิ์ $\{h_0(n)\}$ สามารถหาได้จากการคำนวณผลคูณภายใน (สมมติว่า j เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง) จะได้ว่า

$$h_0(n) = \langle j_{1n}, j \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} j(t) j(2t-n) dt \quad (416)$$

จากสมการนี้จะสามารถหาคุณสมบัติบางอย่างของสัมประสิทธิ์ $\{h_0(n)\}$ ได้ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการที่ 415 โดยใช้คุณสมบัติของสเกลลิงฟังก์ชัน ที่มีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับหนึ่ง $\left(\int_{-\infty}^{\infty} j(t) dt = 1 \right)$ จะได้ว่า

$$\sum_n h_0(n) = \sqrt{2} \quad (417)$$

ในทางตรงกันข้ามถ้าคูณทั้งสองข้างของสมการที่ 415 ด้วย $j(t-l)$ แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} j(t) j(t-l) dt &= 2 \sum_n \sum_{n'} h_0(n) h_0(n') \int_{-\infty}^{\infty} j(2t-n) j(2t-2l-n) dt \\ &= \sum_n h_0(n) h_0(n+2l) \end{aligned} \quad (418)$$

ใช้คุณสมบัติออร์โธกอนัล (orthogonal) ของสเกลลิงฟังก์ชันจะได้

$$\sum_n h_0(n) h_0(n+2l) = 0, \quad l \neq 0$$

$$\sum_n h_0(n) h_0(n+2l) = d, \quad l = 0$$

นั่นคือ

$$\sum_n h_0^2(n) = 1, \quad l = 0 \quad (419)$$

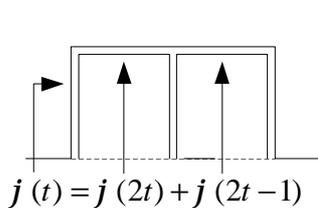
ตัวอย่างของสเกลลิงฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดคือสเกลลิงฟังก์ชันแบบ Haar (Haar scaling function) ซึ่งเป็นพัลส์ขนาด 1 หน่วยดังรูปที่ 44(ก) จะเห็นว่า $j(2t)$ สามารถใช้ในการสร้างฟังก์ชัน ได้โดย

$$j(t) = h_0(0)\sqrt{2}j(2t) + h_0(1)\sqrt{2}j(2t-1) \quad (420)$$

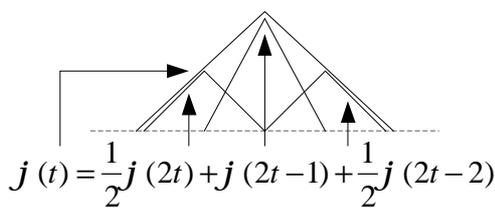
ดังนั้น $h_0(n)$ ในสมการที่ 420 จะต้องมีค่า $h_0(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ และตัวอย่างที่ 2 ดังรูปที่ 44(ข) เป็นสเกลลิงฟังก์ชันแบบสามเหลี่ยม (triangle scaling function) หรือสไปลน์อันดับที่ 1 (first order spline) สามารถสร้าง $j(t)$ ได้โดย

$$j(t) = h_0(0)\frac{1}{2}j(2t) + h_0(1)j(2t-1) + h_0(2)\frac{1}{2}j(2t-2) \quad (421)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ ที่เป็นไปตามสมการที่ 421 คือ $h_0(0) = 1/2\sqrt{2}$, $h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_0(2) = 1/2\sqrt{2}$



(ก) Haar (same as j_{D2})



(ข) Triangle (same as j_{S1})

รูปที่ 4.4 Haar และ Triangle Scaling Function

4.2.3 ฟังก์ชันเวฟเล็ต (Wavelet function)

เมื่อพิจารณาสเปซย่อย $\{W_j\}$ ซึ่งเป็น detail spaces และแต่ละสเปซจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน จากสมการที่ 49

$$V_{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k$$

และให้ $j \rightarrow \infty$ จะได้

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^j W_k \quad (422)$$

จากสมการที่ 422 จะสามารถกระจาย $L^2(\mathbb{R})$ เป็นการบวกเชิงตั้งฉากของสเปซย่อย $\{W_j\}$ และในสเปซย่อย $\{W_j\}$ จะบรรจุฟังก์ชันพื้นฐาน $\{y_{j,k}(t)\}_k$ โดยที่ $y_{j,k}(t) = 2^{j/2}y(2^j t - k)$

ดังนั้น L^2 จะมีออร์โธนอร์มัล $\{y_{j,k}(t)\}_k$ ซึ่งถูกเรียกว่าเวฟเล็ต และเวฟเล็ต $y_{j,k}(t)$ ทั้งหมดจะถูกสร้างจากฟังก์ชัน $y(t)$ โดยการเลื่อนและการสเกล ซึ่งเรียกฟังก์ชัน $y(t)$ ว่า เวฟเล็ตแม่ (**mother wavelet**) หรือฟังก์ชันพื้นฐาน เพราะว่า $y(t-k)$ อยู่ใน W_0 และ $W_0 \subset V_1$ ดังนั้น $y(t)$ สามารถเขียนในแบบของ **linear combination** ของฟังก์ชันพื้นฐานจะได้

$$y(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} j(2t-n) \quad (423)$$

สมการนี้ถูกเรียกว่าสมการเวฟเล็ต (**wavelet equation**) และจากคุณสมบัติของ $\{y_{j,k}(t)\}$ ที่เป็นออร์โธนอร์มัล ดังนั้นสัมประสิทธิ์ $\{h_1(n)\}$ สามารถหาได้โดยการคำนวณผลคูณภายใน

$$h_1(n) = \langle j_n, y \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) j(2t-n) dt \quad (424)$$

จากสมการที่ 423 จะสามารถหาคุณสมบัติบางอย่างของสัมประสิทธิ์ $\{h_1(n)\}$ ได้ โดยการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการที่ 423 โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันเวฟเล็ต ที่มีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับศูนย์หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = 0$ จะได้

$$\sum_n h_1(n) = 0 \quad (425)$$

โดยที่ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ มีความสัมพันธ์กันดังสมการที่ 426 [15-16]

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(1-n) \quad (426)$$

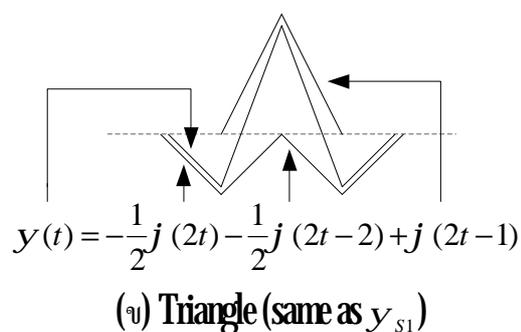
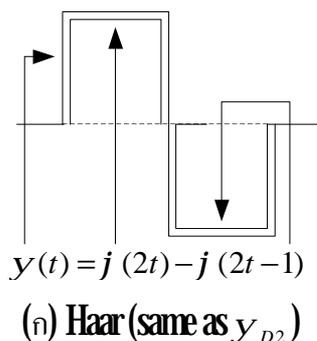
ตัวอย่างของเวฟเล็ตฟังก์ชันที่ง่ายที่สุดคือ **Haar wavelet function** ดังรูปที่ 45(ก) จะเห็นว่า $j(2t)$ สามารถใช้ในการสร้างฟังก์ชัน $y(t)$ ได้โดย

$$y(t) = h_1(0) \sqrt{2} j(2t) + h_1(1) j(\sqrt{2}(2t-1)) \quad (427)$$

ดังนั้น $h_1(n)$ ในสมการที่ 427 จะต้องมีค่า $h_0(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_1(1) = -1/\sqrt{2}$ และตัวอย่างที่ 2 เป็น **triangle wavelet function (first order spline)** ดังรูปที่ 45(ข) สามารถสร้าง $j(t)$ ได้โดย

$$y(t) = \frac{1}{2}h_1(0)j(2t) + h_1(1)j(2t-1) + \frac{1}{2}h_1(2)j(2t-2) \quad (428)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $h_1(n)$ ในสมการที่ 428 คือ $h_1(0) = 1/2\sqrt{2}$, $h_1(1) = 1/2\sqrt{2}$ และ $h_1(2) = 1/2\sqrt{2}$



รูปที่ 45 แสดง Haar และ triangle function

4.3 การแปลงเวฟเลตแบบเต็มหน่วย

จากความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์การกระจายเวฟเลตที่ระดับสเกลต่ำในทอมของการกระจายระดับการสเกลสูงสามารถหาได้โดยใช้สมการสเกลลิงฟังก์ชัน หรือสมการที่ 415 นั่นคือ

$$j(t) = \sum_n h_0(n)\sqrt{2}j(2t-n)$$

ถ้าสเกลและเลื่อนตัวแปรเวลา t ด้วย k จะได้

$$\begin{aligned} j(2^j t - k) &= \sum_n h_0(n)\sqrt{2}j(2^j t - k - n) \\ &= \sum_n h_0(n)\sqrt{2}j(2^{j+1}t - 2k - n) \end{aligned} \quad (429)$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $m = 2k + n$ จะได้

$$j(2^j t - k) = \sum_m h_0(m-2k)\sqrt{2}j(2^{j+1}t - m) \quad (430)$$

ดังนั้นสเปซ V_j จะกลายเป็น

$$V_j = \overline{\text{Span}\{2^{j/2}j(2^j t - k)\}} \quad (4.31)$$

แล้วสัญญาณ $f(t) \in V_{j+1}$ จะกลายเป็น

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{(j+1)/2} j (2^{j+2} t - k) \quad (4.32)$$

ที่ระดับความละเอียดต่ำกว่า **1** ระดับ และใช้เวฟเล็ตฟังก์ชันแทนรายละเอียดหรือ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ จะได้

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{j/2} j (2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{j/2} y(2^j t - k) \quad (4.33)$$

ซึ่ง $2^{j/2}$ เป็นตัวนอร์มอลไลต์ เพื่อให้สเกลลิงฟังก์ชันที่ถูกสเกลด้วย 2^j ยังคงเป็น **norm function** ที่การสเกลต่างๆ ถ้า $j_{j,k}(t)$ และ $y_{j,k}(t)$ เป็นออร์โธนอร์มัล สัมประสิทธิ์ของการสเกลที่ระดับ j หาได้โดยผลคูณภายใน

$$c_j(k) = \langle f(t), j_{j,k}(t) \rangle = \int f(t) 2^{j/2} j (2^j t - k) dt \quad (4.34)$$

แทนสมการที่ **4.30** ลงในสมการที่ **4.34** จะได้

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m - 2k) \int f(t) 2^{(j+1)/2} j (2^{j+1} t - m) dt \quad (4.35)$$

เมื่อพิจารณาในเทอมที่อินทิเกรตในสมการที่ **4.35** ซึ่งเป็นผลคูณภายในของ $f(t)$ กับสเกลลิงฟังก์ชันที่ระดับการสเกล $j+1$ นั่นคือ

$$c_{j+1}(m) = \int f(t) 2^{(j+1)/2} j (2^{j+1} t - m) dt \quad (4.36)$$

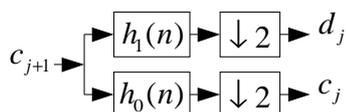
ดังนั้นจะได้

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (437)$$

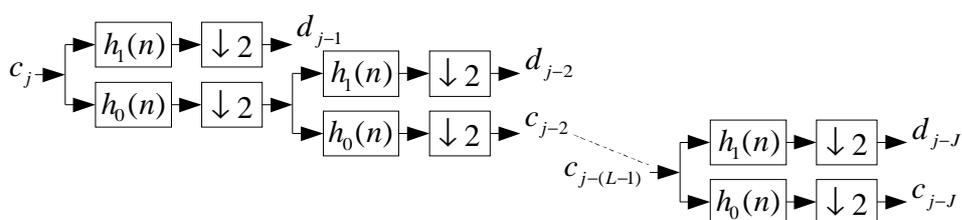
และสัมประสิทธิ์เวฟเล็ท $d_j(k)$ หาได้ในลักษณะเดียวกันกับ $c_j(k)$ จะได้

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (438)$$

โดยที่ $c_j(k)$ ในสมการที่ 437 คือสัมประสิทธิ์สเกลลิงและ $d_j(k)$ ในสมการที่ 438 คือสัมประสิทธิ์เวฟเล็ท และการคำนวณหาค่า $c_j(k)$ และ $d_j(k)$ เรียกว่าการแปลงเวฟเล็ทแบบดิสครีท ซึ่ง h_0 และ h_1 ในสมการที่ 437 และสมการที่ 438 เป็นผลตอบสนองอิมพัลซ์ ดังนั้นในการแปลงเวฟเล็ทจากระดับความละเอียด $j+1$ ไปยังระดับความละเอียด j จะสามารถอธิบายด้วย **Two-Band Analysis Filter Bank** ได้ดังรูปที่ 46 และการแปลงเวฟเล็ทแบบเต็มหน่วยจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด J จะสามารถแสดงในรูปของ **Octave Band Analysis Filter Bank** ได้ดังรูปที่ 47

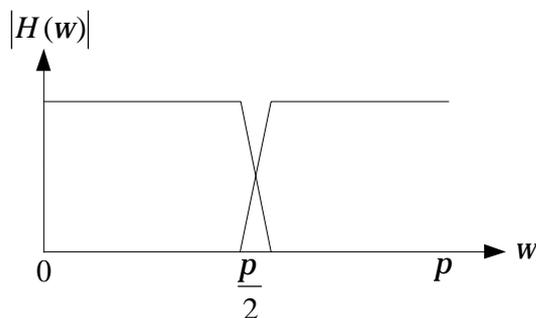


รูปที่ 46 แสดง **Two-band Analysis Filter Bank** ของการแปลงเวฟเล็ทจากระดับความละเอียด $j+1$ ไปยังระดับความละเอียด j



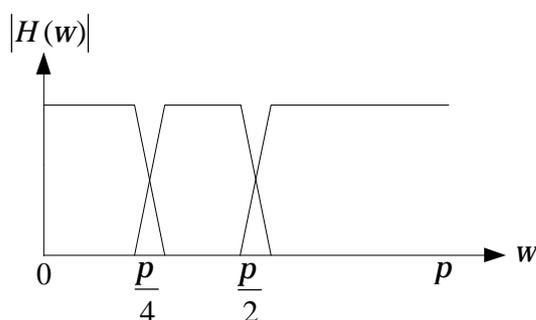
รูปที่ 47 แสดง **Two-Band Analysis Filter Bank** ของการแปลงเวฟเล็ทจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j+J$

โดยที่ $\downarrow 2$ แทนการลดอัตราสุ่ม (**down sampling**) ด้วยสองเท่า h_0 เป็นการกรองความถี่ต่ำผ่าน (**lowpass filter**) และ h_1 เป็นการกรองความถี่สูงผ่าน (**highpass filter**) ดังนั้นจะสามารถแสดงช่วงความถี่ (**Frequency Band**) ของการแปลงเวฟเล็ทในรูปที่ 48 ได้ดังนี้



รูปที่ 48 ช่วงความถี่ (Frequency Bands) ของการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j-1$

เมื่อพิจารณาการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j-2$ หมายความว่าช่วงความถี่ในรูปที่ 48 ช่วงของความถี่ต่ำจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ช่วง คือความถี่ต่ำและความถี่สูง ดังนั้นช่วงความถี่ในรูปที่ 48 จะถูกเปลี่ยนดังรูปที่ 49



รูปที่ 49 ช่วงความถี่ของการแปลงเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j-2$

4.4 การแปลงกลับเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วย

สัมประสิทธิ์ที่ได้จากการแปลงเวฟเล็ตแบบเต็มหน่วยในรูปที่ 47 คือ $\{d_{j-1}(k)\}, \{d_{j-2}(k)\}$ ไปจนถึง $\{d_{j-J}(k)\}$ และ $\{C_{j-J}(k)\}$ สามารถนำมาสร้างกลับได้อย่างสมบูรณ์ (Perfect reconstruction) ซึ่งการสร้างสัญญาณกลับคืนสามารถทำได้โดยการรวมกันของสัมประสิทธิ์สเกลลิงและสัมประสิทธิ์เวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดต่ำไปยังที่ระดับความละเอียดสูง ซึ่งถ้าพิจารณาสัญญาณที่ถูกแทนในระดับความละเอียด $j+1$ สัญญาณสามารถเขียนในเทอมของสเกลลิงฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f(t) = \sum_m c_{j+1}(m) 2^{(j+1)/2} j (2^{j+1}t - m) \quad (439)$$

ถ้ามองจากระดับความละเอียดต่ำกว่า **1** ระดับแล้วจะเหมือนกับได้รวมรายละเอียดโดยใช้เวฟเล็ตฟังก์ชันหรือ $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ จะได้

$$f(t) = \sum_k c_j(m) 2^{j/2} j (2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{j/2} y(2^j t - k) \quad (440)$$

เพราะว่าทุกฟังก์ชันเป็นออร์โธนอร์มัล ดังนั้นถ้าคูณสมการที่ **440** ด้วย $j (2^{j+1}t - m)$ แล้วอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} \int f(t) 2^{(j+1)/2} j (2^{j+1}t - m) dt &= \sum_k c_j(k) 2^{(j+1)/2} 2^{j/2} \int j (2^{j+1}t - m) j (2^j t - k) dt \\ &+ \sum_k d_j(k) 2^{(j+1)/2} 2^{j/2} \int j (2^{j+1}t - m) y(2^j t - k) dt \end{aligned}$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = 2^{j+1}t - k$ จะได้

$$\begin{aligned} \int f(t) 2^{(j+1)/2} j (2^{j+1}t - m) dt &= \sum_k c_j(k) \sqrt{2} \int j (2u - (m - 2k)) j (u) du \\ &+ \sum_k d_j(k) \sqrt{2} \int j (2u - (m - 2k)) y(u) du \end{aligned} \quad (441)$$

จากสมการที่ **416** $h_0(n) = \langle j_n, j \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} j(t) j(2t - n) dt$ และจากสมการที่ **424** $h_1(n) = \langle j_n, y \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) j(2t - n) dt$ ดังนั้นเทอมขวามือของสมการที่ **441** จะกลายเป็น

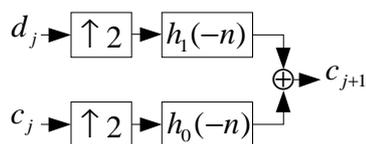
$$\sqrt{2} \int j (2u - (m - 2k)) j (u) du = h_0(m - 2k)$$

$$\sqrt{2} \int j (2u - (m - 2k)) y(u) du = h_1(m - 2k)$$

และแทนสมการที่ **436** ลงในสมการที่ **441** จะได้

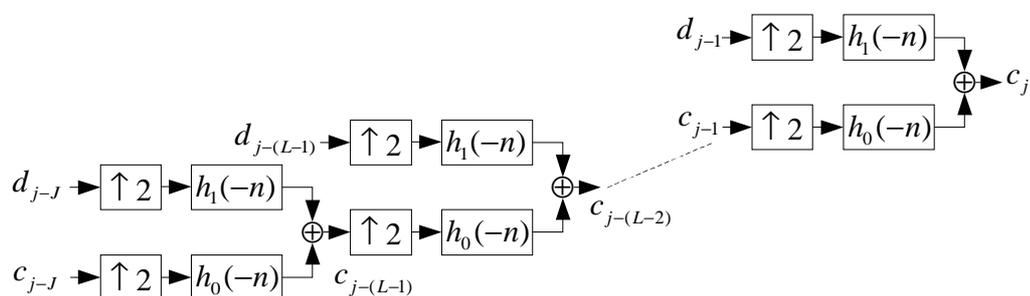
$$c_{j+1}(m) = \sum_k c_j(k) h_0(m - 2k) + \sum_k d_j(k) h_1(m - 2k) \quad (442)$$

จากสมการที่ 442 สามารถแสดงในรูปของ **Two-Band Synthesis Filter Bank** ได้ดังรูปที่ 410



รูปที่ 410 แสดง **Two-Band Synthesis Filter Bank** ของการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด j ไปยังระดับความละเอียด $j+1$

โดยที่ $\uparrow 2$ แทนเพิ่มอัตราสุ่ม (**up sampling**) ด้วยสองและการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด $j-J$ ไปยังระดับความละเอียด j สามารถแสดงเป็น **Octave-Band Synthesis Filter Bank** ได้ดังรูปที่ 411



รูปที่ 411 แสดง **Octave-Band Synthesis Filter Bank** ของการแปลงกลับเวฟเล็ตจากระดับความละเอียด $j-J$ ไปยังระดับความละเอียด j

45 ตระกูลของออร์โธโกนัลเวฟเล็ต

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นว่าสัญญาณหรือฟังก์ชันสามารถกระจายในรูปแบบของการรวมเชิงเส้น (**linear combination**) ซึ่งมีเวฟเล็ตเป็นฟังก์ชันพื้นฐานได้ แต่เวฟเล็ตยังสามารถแบ่งย่อยตามลักษณะคุณสมบัติเชิงตั้งฉากออกเป็น 4 ประเภทใหญ่ๆ คือ

(1) ออร์โธโกนัลเวฟเล็ต (**Orthogonal Wavelet**) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{y_{j,k}\}$ ที่เป็นออร์โธโกนัลจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle y_{j,k}, y_{l,m} \rangle = d_{j,l} d_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in Z$$

หมายความว่า ผลของการผลคูณภายใน (inner product) ของเวฟเล็ตจะเป็นหนึ่งเมื่อเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้น

(2) เซมิออร์โธกอนัลเวฟเล็ต (Semi-orthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{y_{j,k}\}$ ที่เป็น เซมิออร์โธกอนัลจะมีเงื่อนไข

$$\langle y_{j,k}, y_{l,m} \rangle = 0 \quad j \neq l \quad ; j, l, k, m \in Z$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายในของเวฟเล็ตจะเป็นศูนย์เมื่อเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดต่างกันและจะเป็นศูนย์หรือหนึ่งก็ได้ถ้าเป็นเวฟเล็ตที่ระดับความละเอียดเดียวกัน

(3) นอนออร์โธกอนัลเวฟเล็ต (Nonorthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{y_{j,k}\}$ ที่เป็นนอนออร์โธกอนัลหมายถึงเวฟเล็ตที่ไม่เป็นเซมิออร์โธกอนัล

(4) ไบออร์โธกอนัลเวฟเล็ต (Bi-orthogonal Wavelet) เวฟเล็ตพื้นฐาน $\{y_{j,k}\}$ ที่เป็นไบออร์โธกอนัลจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\langle y_{j,k}, \tilde{y}_{l,m} \rangle = d_{j,l} d_{k,m} \quad ; j, l, k, m \in Z$$

หมายความว่า ผลของการคูณภายในของเวฟเล็ตกับ dual basis: $\tilde{y}_{l,m}$ จะเป็นหนึ่งเมื่ออยู่ที่ระดับความละเอียดเดียวกันและตำแหน่งเดียวกันเท่านั้นนอกจากนั้นจะเป็นศูนย์

ดังนั้นจะเห็นว่าเวฟเล็ตที่ได้กล่าวในตอนต้นของบทนี้เป็นออร์โธกอนัลเวฟเล็ต ซึ่งเมื่อพิจารณาฟังก์ชันพื้นฐานของออร์โธกอนัลเวฟเล็ต หรือที่เรียกว่าออร์โธนอร์มัลเวฟเล็ตยังสามารถแบ่งตามลักษณะของฟังก์ชันพื้นฐานได้อีก ซึ่งตระกูลออร์โธนอร์มัลเวฟเล็ตที่สำคัญได้แก่ Daubechies, Symplet และ Coiflet โดยที่เวฟเล็ตตระกูล Daubechies มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ Asymmetric เวฟเล็ตตระกูล Symplet มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ Least Asymmetric และเวฟเล็ตตระกูล Coiflet มีฟังก์ชันพื้นฐานในลักษณะ nearly Symmetric นอกจากนี้แต่ละตระกูลยังสามารถแบ่งตามลักษณะความราบเรียบของฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งกำหนดโดยค่าของ Number of Vanishing Moments (NVM) [15-16] โดยที่ Daubechies Wavelet จะนิยามโดย

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^l y(t) dt = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (443)$$

หรือมองในสเปซฟูเรียร์จะได้

$$\left. \frac{d^l \tilde{y}(w)}{dw^l} \right|_{w=0} = 0 \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (44)$$

ถ้าค่า l มากขึ้นจะทำให้ฟังก์ชันพื้นฐานมีความราบเรียบมากขึ้น ตัวอย่างของฟังก์ชันพื้นฐานของออร์โธโนมัลเวฟเล็ตทั้งฟังก์ชันพื้นฐานสเกลลิงและฟังก์ชันพื้นฐานเวฟเล็ต

แต่ในการประยุกต์ใช้งานนั้น ส่วนใหญ่จะไม่ใช้สเกลลิงฟังก์ชัน หรือเวฟเล็ตฟังก์ชัน โดยตรงแต่จะใช้สัมประสิทธิ์ผลตอบสนองอิมพัลซ์ $h_0(n)$ และ $h_1(n)$ จากเงื่อนไขของ $h_0(n)$ ในสมการที่ 417 และสมการที่ 419 จะสามารถหาสัมประสิทธิ์ $h_0(n)$ NVM=2 ได้คือ

$$\begin{aligned} h_0(0) + h_0(1) &= \sqrt{2} \\ h_0^2(0) + h_0^2(1) &= 1 \end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $h_0(0) = h_0(1) = 1/\sqrt{2}$ ซึ่งเป็น $h_0(n)$ ของเวฟเล็ตตระกูล Daubechies NVM=2 และจากสมการที่ 426 จะได้ $h_1(0) = 1/\sqrt{2}$ และ $h_1(1) = -1/\sqrt{2}$