บทที่ 3
บีสไปลน์
(B-Spline)

3.1 บทนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงบีสไปลน์ ซึ่งเป็นสมการที่ใช้แทนเส้นโค้ง (Curve Representation) แบบพาราเมตริกซ์ (Parametric Form) คือสามารถแทนเส้นโค้งในพิกัด x, y ได้ด้วยพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว นอกจากนี้บีสไปลน์ยังมีคุณสมบัติที่สำคัญมากมาย ดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป [13-14]

3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ (B-Spline Basis Functions)

3.2.1 นิยามของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์

ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์สามารถหาได้หลายวิธี เช่น วิธี divided difference ของอนุกรมกำลัง วิธี blossoming และวิธี recurrence formula โดย deBoor, Cox และ Mansfield [14] ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธี recurrence formula เนื่องจากเป็นวิธีที่สะดวกในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์

ให้ $U = \{u_0, ..., u_m\}$ คือ knot vector และเป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าไม่ลดลงหรือ $u_i \le u_{i+1}$ เมื่อ $i = 0, ..., m-1$ และ u_i คือ knot

ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ลำดับที่ i ซึ่งมีดีกรี p $(order = p+1)$ สามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ $N_{i,p}(u)$ ซึ่งถูกนิยามด้วยสมการ

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & , u_i \le u \le u_{i+1} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \tag{3.1}$$

<u>หมายเหตุ</u>

- $N_{i,0}(u)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดที่มีค่าเท่ากับหนึ่งในช่วงพารามิเตอร์ $u \in [u_i, u_{i+1})$
- สำหรับ $p > 0$ สามารถหา $N_{i,p}(u)$ ได้จากการบวกแบบเชิงเส้นของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี $p-1$ สองฟังก์ชัน

- จากสมการที่ 3.1 ถ้ามีค่าเป็น $\frac{0}{0}$ นิยามให้มีผลลัพธ์เป็น 0
- เรียกช่วง $[u_i, u_{i+1})$ ว่า knot span ลำดับที่ i ซึ่งอาจมีขนาดเป็นศูนย์ก็ได้
- การคำนวณหาค่าฟังก์ชันที่ดีกรี p สามารถพิจารณาจากแผนภูมิดังนี้

$$\begin{array}{cccc}
N_{0,0} & & & \\
N_{1,0} & N_{0,1} & & \\
N_{2,0} & N_{1,1} & N_{0,2} & \\
N_{3,0} & N_{2,1} & N_{1,2} & N_{0,3} \\
N_{4,0} & N_{3,1} & N_{2,2} & N_{1,3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $U = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = 1\}$ และ $p = 2$ ให้คำนวณหาฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 0, 1 และ 2

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0 \qquad -\infty < u < \infty$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{3,0} = N_{4,0} = 0 \qquad -\infty < u < \infty$$

$$N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 \qquad -\infty < u < \infty$$

$$N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{2,1} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{u-1}{1-1} N_{3,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{4,0} = 0 \qquad -\infty < u < \infty$$

$$N_{0,2} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = \begin{cases} (1-u)^2 & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u(1-u) & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,1} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,1} = \begin{cases} u^2 & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้

$U=\{u_0=0,u_1=0,u_2=0,u_3=1,u_4=2,u_5=3,u_6=4,u_7=4,u_8=5,u_9=5,u_{10}=5\}$

และ $p=2$ คำนวณหาฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 0, 1 และ 2

$$N_{0,0}=N_{1,0}=0 \qquad -\infty<u<\infty$$

$$N_{2,0}=\begin{cases}1 & 0\le u<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{3,0}=\begin{cases}1 & 1\le u<2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

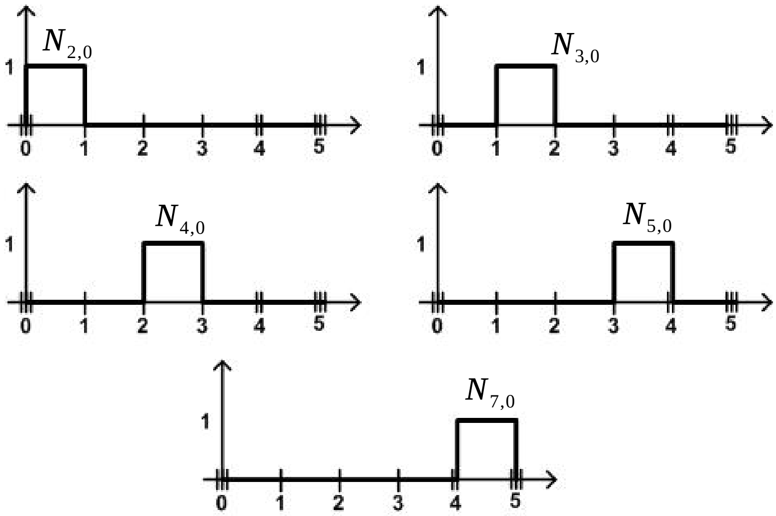
$$N_{4,0}=\begin{cases}1 & 2\le u<3\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{5,0}=\begin{cases}1 & 3\le u<4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{6,0}=0 \qquad -\infty<u<\infty$$

$$N_{7,0}=\begin{cases}1 & 4\le u<5\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{8,0}=N_{9,0}=0 \quad -\infty<u<\infty$$



รูปที่ 3.1 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 0 เมื่อ $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

$$N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 \qquad -\infty < u < \infty$$

$$N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & 0 \le u < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{2,1} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{2-u}{2-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & 0 \le u < 1 \\ 2-u & 1 \le u < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{u-1}{2-1} N_{3,0} + \frac{3-u}{3-2} N_{4,0} = \begin{cases} u-1 & 1 \le u < 2 \\ 3-u & 2 \le u < 3 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

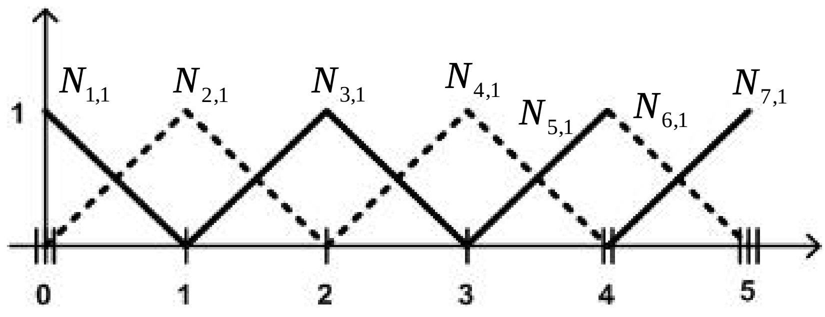
$$N_{4,1} = \frac{u-2}{3-2} N_{4,0} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,0} = \begin{cases} u-2 & 2 \le u < 3 \\ 4-u & 3 \le u < 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{5,1} = \frac{u-3}{4-3} N_{5,0} + \frac{4-u}{4-4} N_{6,0} = \begin{cases} u-3 & 3 \le u < 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{6,1} = \frac{u-4}{4-4} N_{6,0} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,0} = \begin{cases} 5-u & 4 \le u < 5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{7,1} = \frac{u-4}{5-4} N_{7,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,0} = \begin{cases} u-4 & 4 \le u < 5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$N_{8,1} = \frac{u-5}{5-5} N_{8,0} + \frac{5-u}{5-5} N_{9,0} = 0 \qquad -\infty < u < \infty$$



รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 1 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

$$N_{0,2} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = (1-u)^2 \qquad 0 \le u < 1$$

$$N_{1,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{2-u}{2-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u - \frac{3}{2}u^2 & 0 \le u < 1 \\ \frac{1}{2}(2-u)^2 & 1 \le u < 2 \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \frac{u-0}{2-0} N_{2,1} + \frac{3-u}{3-1} N_{3,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2 & 0 \le u < 1 \\ -\frac{3}{2} + 3u - u^2 & 1 \le u < 2 \\ \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 \le u < 3 \end{cases}$$

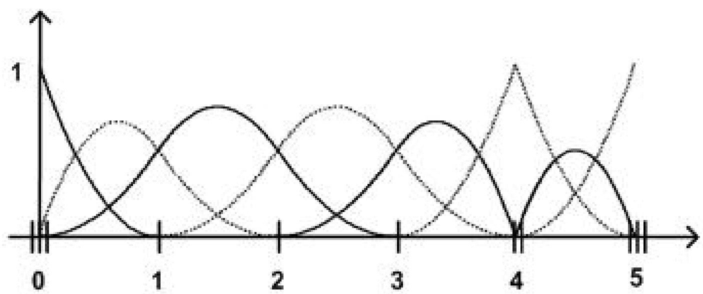
$$N_{3,2} = \frac{u-1}{3-1} N_{3,1} + \frac{4-u}{4-2} N_{4,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-1)^2 & 1 \le u < 2 \\ -\frac{11}{2} + 5u - u^2 & 2 \le u < 3 \\ \frac{1}{2}(4-u)^2 & 3 \le u < 4 \end{cases}$$

$$N_{4,2} = \frac{u-2}{4-2} N_{4,1} + \frac{4-u}{4-3} N_{5,1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(u-2)^2 & 2 \le u < 3 \\ -16 + 10u - \frac{3}{2}u^2 & 3 \le u < 4 \end{cases}$$

$$N_{5,2} = \frac{u-3}{4-3} N_{5,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{6,1} = \begin{cases} (u-3)^2 & 3 \le u < 4 \\ (5-u)^2 & 4 \le u < 5 \end{cases}$$

$$N_{6,2} = \frac{u-4}{5-4} N_{6,1} + \frac{5-u}{5-4} N_{7,1} = 2(u-4)(5-u) \qquad 4 \le u < 5$$

$$N_{7,2} = \frac{u-4}{5-4} N_{7,1} + \frac{5-u}{5-5} N_{8,1} = (u-4)^2 \qquad 4 \le u < 5$$



รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 2 เมื่อ $U = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

3.2.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์

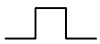
คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์เหล่านี้ สามารถกำหนดคุณสมบัติทางเรขาคณิตของเส้นโค้งบีสไปลน์และพื้นผิวบีสไปลน์ได้ กำหนดให้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์มีดีกรี p และมี knot vector $U = \{u_0, \ldots, u_m\}$

1. $N_{i,p}(u) = 0$ เมื่อ $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ เรียกคุณสมบัตินี้ว่าเป็น Local support สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังนี้

$$\begin{array}{lllllll}
N_{1,0} & \nwarrow & & & & & \\
N_{2,0} & \leftarrow & N_{1,1} & \nwarrow & & & \\
 & \nwarrow & & & & & \\
N_{3,0} & \leftarrow & N_{2,1} & \leftarrow & N_{1,2} & \nwarrow & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & & \\
N_{4,0} & \leftarrow & N_{3,1} & \leftarrow & N_{2,2} & \leftarrow & N_{1,3}
\end{array}$$

พบว่า $N_{1,3}$ เกิดจากผลรวมของ $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}, N_{4,0}$ นั่นคือ $N_{1,3} \neq 0$ เมื่อ $u \in [u_1, u_5)$

2. ในช่วง knot span, $[u_j, u_{j+1})$ ใดๆ จะมี $N_{i,p}$ ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด $p+1$ ฟังก์ชัน คือ $N_{j-p,p}, \ldots, N_{j,p}$ เช่น บนช่วง $[u_3, u_4)$ จะมีฟังก์ชันที่ดีกรี 0 ซึ่งมีค่าไม่เป็นศูนย์เพียง 1 ฟังก์ชัน คือ $N_{3,0}$ จะได้ว่าฟังก์ชันที่ดีกรี 3 และมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ได้แก่ $N_{0,3}, \ldots, N_{3,3}$



u_3 u_4

$$\begin{array}{lllllll}
N_{2,0} & & & & & & \\
N_{3,0} & \rightarrow & N_{2,1} & \rightarrow & N_{1,2} & \rightarrow & N_{0,3} \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
N_{4,0} & & N_{3,1} & \rightarrow & N_{2,2} & \rightarrow & N_{1,3} \\
 & & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & N_{3,2} & \rightarrow & N_{2,3} \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & N_{3,3}
\end{array}$$

3. $N_{i,p}(u) \geq 0$ สำหรับทุกค่า i, p และ $u\,(u \geq 0)$

4. สำหรับช่วง knot span, $[u_j, u_{j+1})$ ใดๆ ได้ $\sum_{j=i-p}^{i} N_{j,p}(u) = 1$

5. อนุพันธ์ของ $N_{i,p}(u)$ จะถูกนิยามในแต่ละช่วง knot span และที่ knot ใดๆ $N_{i,p}(u)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึง $p-k$ เมื่อ k เป็นจำนวน knot ที่มีค่าซ้ำกัน

ตัวอย่างที่ 3.3 ให้ $p=2$, $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ และ $u=5/2$ (ดูรูปที่ 3.3) ได้ $i=4$ ดังนั้น $u\in[u_4,u_5)$ จะหา $N_{i,2}(u)\geq 0$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} N_{4,0}\left(\tfrac{5}{2}\right) & N_{3,1}\left(\tfrac{5}{2}\right) & N_{2,2}\left(\tfrac{5}{2}\right) \\ & N_{4,1}\left(\tfrac{5}{2}\right) & N_{3,2}\left(\tfrac{5}{2}\right) \\ & & N_{4,2}\left(\tfrac{5}{2}\right) \end{array}$$

แทน $u=5/2$ ในผลลัพธ์ที่ได้จากตัวอย่างที่ 3.2 จะได้

$$\begin{array}{lll} N_{4,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=1 & & \\ N_{3,1}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{2} & N_{4,1}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{2} & \\ N_{2,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{8} & N_{3,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{6}{8} & N_{4,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{8} \end{array}$$

จะสังเกตได้ว่า ที่ดีกรีใดๆผลรวมของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์มีค่าเท่ากับหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3.4 ให้ $p=2$, $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ และ $u=5/2$ ให้หา $N_{3,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)$
สามารถหา $N_{3,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} N_{3,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=0 & & \\ N_{4,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=1 & N_{3,1}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{2} & \\ N_{5,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=0 & N_{4,1}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{2} & N_{3,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{6}{8} \end{array}$$

และสามารถหา $N_{4,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} N_{4,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=1 & & \\ N_{5,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=0 & N_{4,1}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{2} & \\ N_{6,0}\left(\tfrac{5}{2}\right)=0 & N_{5,1}\left(\tfrac{5}{2}\right)=0 & N_{4,2}\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{8} \end{array}$$

3.2.3 **อนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์**

ให้ $N_{i,p}^{(k)}(u)$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ k ของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p\left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p}-u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right) \tag{3.2}$$

หรือ

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = \frac{p!}{(p-k)!}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} N_{i+j,p-k} \tag{3.3}$$

เมื่อ

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{k,0} = \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1}-u_i}$$

$$a_{k,j} = \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1}-u_{i+j}} \qquad , j = 1,\ldots,k-1$$

$$a_{k,k} = \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1}-u_{i+k}}$$

หมายเหตุสมการที่ 3.2

- $k \le p$
- ถ้าตัวหารเป็นศูนย์ นิยามให้มีค่าเท่ากับ 0

3.3 **เส้นโค้งบีสไปลน์**

3.3.1 **นิยามของเส้นโค้งบีสไปลน์**

สมการเส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี p สามารถนิยามได้ด้วยสมการ

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) P_i \qquad , a < u < b \tag{3.4}$$

เมื่อ $\{P_i\}$ คือเซตของจุดควบคุม (control point)

$n+1$ คือจำนวนจุดควบคุม

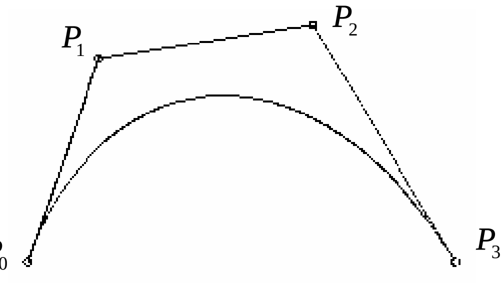
$\{N_{i,p}(u)\}$ คือเซตของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี p และกำหนดให้ knot vector เป็นแบบ nonperiodic (nonuniform) ซึ่งมี knot เป็นจำนวน $m+1$ โดย

$$U=\left\{\underbrace{a,\ldots,a}_{p+1},u_{p+1},\ldots,u_{m-p-1},\underbrace{b,\ldots,b}_{p+1}\right\}$$

กำหนดให้ $a=0, b=1$ และเรียกพื้นที่ปิดที่เกิดจาก $\{P_i\}$ ว่า Control point polygon

ขั้นตอนในการหาค่าบนเส้นโค้งบีสไปลน์ที่พารามิเตอร์ u ใดๆ มีดังนี้

1. หาว่า u อยู่ในช่วงของ knot span ใด
2. หาค่าฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี p ที่ u นั้นๆ
3. คูณผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 2 กับจุดควบคุมตามสมการที่ 3.4



รูปที่ 3.4 เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 3 เมื่อ $U=\{0,0,0,0,1,1,1,1\}$

ตัวอย่างที่ 3.5 จากตัวอย่างที่ 3.3 ซึ่งมี $U=\{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$, $u=5/2$ และ $p=2$ ได้ $u\in[u_4,u_5)$ และ $N_{2,2}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{8}$ $N_{3,2}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{6}{8}$ $N_{4,2}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{8}$
จะได้

$$C\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{1}{8}P_2+\tfrac{6}{8}P_3+\tfrac{1}{8}P_4$$

3.3.2 **คุณสมบัติของเส้นโค้งบีสไปลน์**

1. ถ้า $n = p$ และ $U = \{0,\ldots,0,1,\ldots,1\}$ แล้ว $C(u)$ คือ Bezier curve [19]

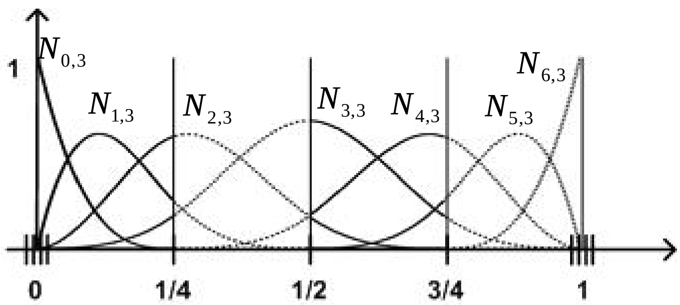
2. $C(u)$ เป็น piecewise polynomial curve เนื่องจาก $N_{i,p}(u)$ เป็น piecewise polynomial function และดีกรี p, จุดควบคุม $n+1$, knot จำนวน $m+1$ สัมพันธ์กันด้วยสมการ $m = n + p + 1$

3. $C(0) = P_0$ และ $C(1) = P_n$

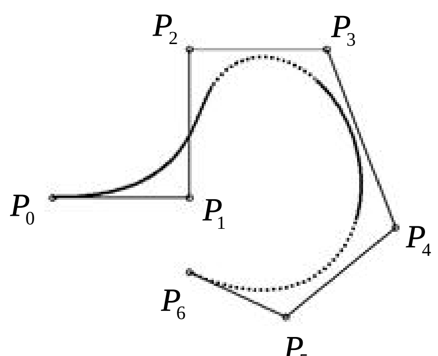
4. คุณสมบัติที่ไม่แปรผันต่อการแปลงแบบแอฟไฟน์ (Affine Invariance) คือ สามารถทำการแปลงแบบแอฟไฟน์เส้นโค้งได้โดยทำการแปลงกับจุดควบคุมได้เช่นกัน

5. คุณสมบัติ Strong convex hull คือ เส้นโค้งจะถูกกำหนดให้อยู่ภายในจุดควบคุม (control point polygon) หรือพื้นที่ที่เกิดจากจุดควบคุมดังรูปที่ 3.7 นั่นคือ ถ้า $u \in [u_i, u_{i+p})$ เมื่อ $p \le i < m - p - 1$ แล้ว $C(u)$ จะถูกควบคุมโดย $P_{i-p},\ldots,P_i$ ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากคุณสมบัติของฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ $N_{j,p}(u) = 0$ ที่ $j < i - p$ และ $j > i$ เมื่อ $u \in [u_i, u_{i+1})$

6. คุณสมบัติ Local modification scheme คือ หากทำการเปลี่ยนตำแหน่ง P_i จะมีผลให้ $C(u)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงเฉพาะช่วง $[u_i, u_{i+p+1})$ พิจารณารูปที่ 3.8 เนื่องจาก $N_{i,p}(u) = 0$ เมื่อ $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$



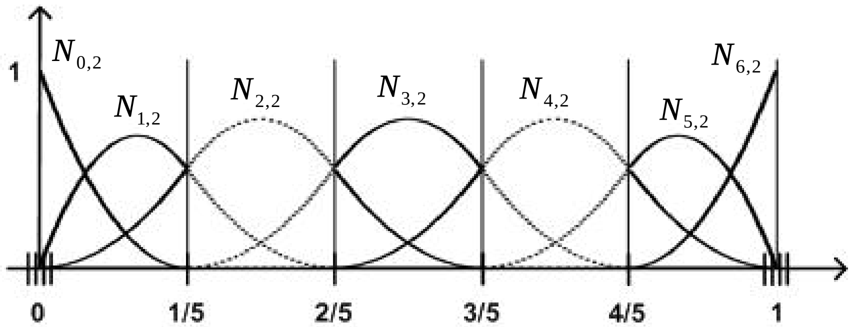
(ก)



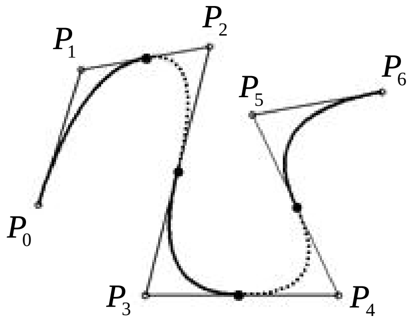
(ข)

รูปที่ 3.5 (ก) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 3 เมื่อ $U = \left\{0,0,0,0,\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},1,1,1,1\right\}$

(ข) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 3 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์รูปที่ 3.5 (ก)

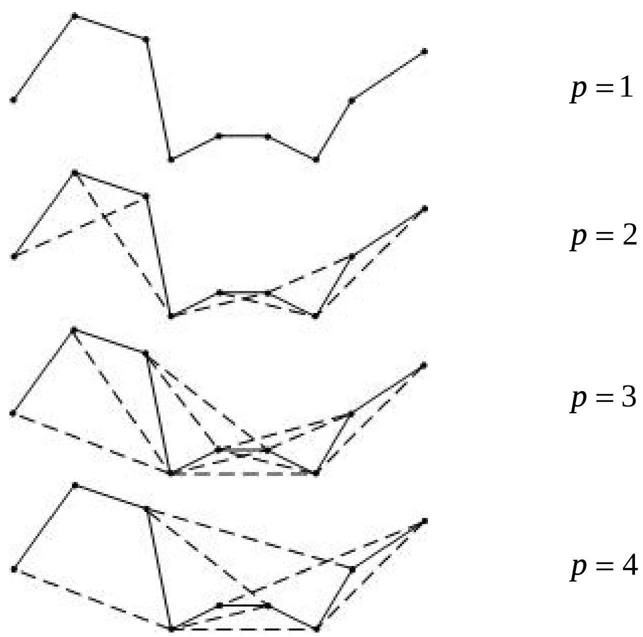


(ก)

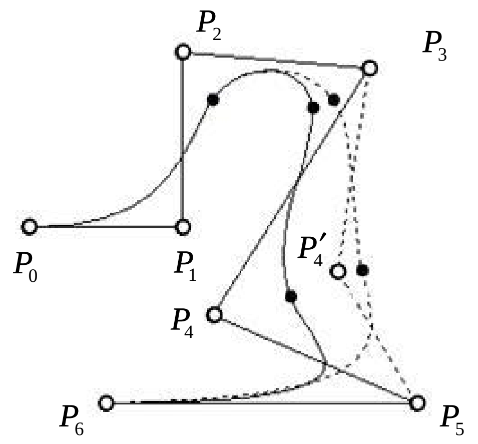


(ข)

รูปที่ 3.6 (ก) ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์ดีกรี 2 เมื่อ $U = \left\{0,0,0,\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{5},\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5},1,1,1\right\}$
(ข) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 2 โดยใช้ฟังก์ชันพื้นฐานบีสไปลน์รูปที่ 3.6 (ก)



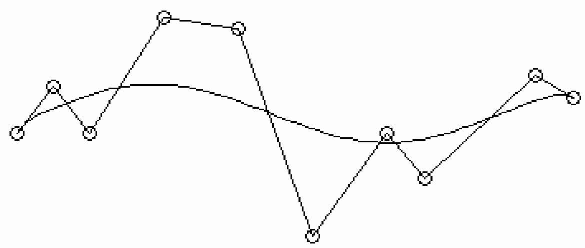
รูปที่ 3.7 คุณสมบัติ Convex hull ของเส้นโค้งบีสไปลน์



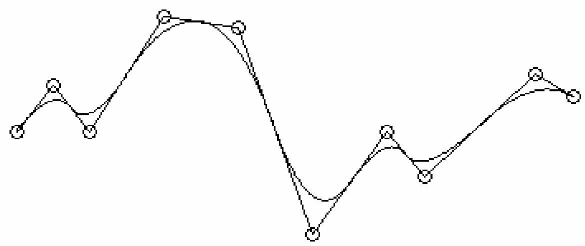
รูปที่ 3.8 เส้นโค้งบีสไปลน์ โดย $U = \{0,0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4},1,1,1,1\}$ เมื่อทำการเคลื่อนย้ายจุด P_4 ไปยังจุด P_4' พบว่าเส้นโค้งจะเปลี่ยนเฉพาะช่วง $\left[\frac{1}{4},1\right)$

7. เส้นโค้งบีสไปลน์สามารถปรับปรุงวิธีการประมาณค่าได้โดยวิธีการแทรก knot หรือ degree elevation และพบว่ายิ่งดีกรีมีค่าน้อย เส้นโค้งบีสไปลน์จะยิ่งชิดจุดควบคุม (control point polygon) มากขึ้น ดังรูปที่ 3.9 และ 3.10

8. $C(u)$ มีคุณสมบัติความต่อเนื่อง (Continuity) และสามารถหาอนุพันธ์ได้ (differentiability)



(ก)

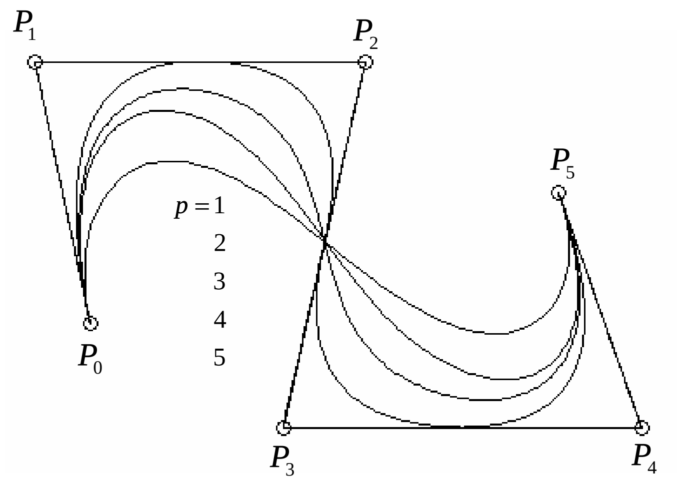


(ข)

รูปที่ 3.9 เส้นโค้งบีสไปลน์

(ก) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 9 โดย $U = \{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

(ข) เส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี 2 และ $U = \{0,0,0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8},1,1,1\}$



รูปที่ 3.10 เส้นโค้งบีสไปลน์ที่ดีกรีต่างๆกันโดยใช้จุดควบคุมเดียวกัน

3.3.3 **อนุพันธ์ของเส้นโค้งบีสไปลน์**

ให้ $C^{(k)}(u)$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ k ของ $C(u)$

$$C^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}^{(k)}(u)P_i \tag{3.5}$$

หา $C'(u)$ โดยกำหนดค่า u ที่ต้องการหา

เมื่อ $$C(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)P_i$$

$$U = \left\{ \underbrace{0,\ldots,0}_{p+1}, u_{p+1},\ldots,u_{m-p-1}, \underbrace{1,\ldots,1}_{p+1} \right\}$$

แทนสมการที่ 3.2 ในสมการที่ 3.5 ได้

$$
\begin{aligned}
C'(u) &= \sum_{i=0}^{n} N'_{i,p}(u)P_i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{p}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)-\frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u)\right)P_i \\
&= \left(p\sum_{i=-1}^{n-1}N_{i+1,p-1}(u)\frac{P_{i+1}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right)-\left(p\sum_{i=0}^{n}N_{i+1,p-1}(u)\frac{P_i}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right) \\
&= p\frac{\overbrace{N_{0,p-1}(u)P_0}}{\underbrace{u_p-u_0}_{0}}+p\sum_{i=0}^{n-1}N_{i+1,p-1}(u)\frac{\left(P_{i+1}-P_i\right)}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}-p\frac{\overbrace{N_{n+1,p-1}(u)P_n}}{\underbrace{u_{n+p+1}-u_{n+1}}_{0}}
\end{aligned}
$$

จากนิยามเรากำหนดให้ $\frac{0}{0}=0$

ได้

$$C'(u)=p\sum_{i=0}^{n-1}N_{i+1,p-1}(u)\frac{\left(P_{i+1}-P_i\right)}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}N_{i+1,p-1}(u)Q_i \tag{3.6}$$

เมื่อ

$$Q_i = p\frac{P_{i+1}-P_i}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}$$

3.4 การประมาณเส้นโค้งด้วยบีสไปลน์

3.4.1 การกำหนดค่าพารามิเตอร์ $(\bar{u}_k)$

กำหนดให้เซตของข้อมูล $\{Q_k\},\ k=0,\ldots,n$ กำหนดให้ $\bar{u}_k$ เป็นพารามิเตอร์สำหรับ Q_k และให้ $U=\{u_0,\ldots,u_m\}$ จะได้ระบบสมการเชิงเส้น $n+1$ ตัวแปรจำนวน $n+1$ สมการที่ 3.7

$$Q_k = C(\bar{u}_k)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\bar{u}_k)P_i \tag{3.7}$$

พารามิเตอร์ที่นิยมใช้ทั่วไปมีดังนี้

1. Equally Spaced

$$\bar{u}_0 = 0 \qquad \bar{u}_n = 1$$
$$\bar{u}_k = \frac{k}{n} \qquad k = 1,\ldots,n-1 \tag{3.8}$$

วิธีนี้ไม่เหมาะกับข้อมูลที่มีระยะห่างระหว่างจุดไม่เท่ากันทั้งหมด

2. Chord Length

กำหนดให้ d เป็นความยาวทั้งหมด

$$d = \sum_{k=1}^{n} |Q_k - Q_{k-1}|$$

เมื่อ

$$\bar{u}_0 = 0 \qquad \bar{u}_n = 1$$
$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} \qquad k = 1,\ldots,n-1 \tag{3.9}$$

วิธีนี้นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายและเป็นพารามิเตอร์ที่เหมาะสำหรับเส้นโค้งทุกชนิด ไม่ว่าจะเป็นเส้นโค้งเปิดหรือเส้นโค้งปิด

3. Centripetal method

กำหนดให้ $$d = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}$$

เมื่อ

$$\bar{u}_0 = 0 \qquad \bar{u}_n = 1$$
$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d} \qquad k = 1,\ldots,n-1 \tag{3.10}$$

วิธีนี้ให้ผลดีสำหรับข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว

4. Area parameter

กำหนดให้ Center: $$C = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Q_k$$

และ Area: $a = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|Q_k \times Q_{k-1}\right|$

เมื่อ

$$\bar{u}_0 = 0 \qquad \bar{u}_n = 1$$
$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\left|Q_k \times Q_{k-1}\right|}{a} \; k = 1,\dots,n-1 \tag{3.11}$$

พารามิเตอร์แบบนี้ เหมาะกับเส้นโค้งที่มีลักษณะปิด และมีคุณสมบัติที่ไม่ผันแปรเมื่อถูกแปลงแบบแอฟไฟน์

3.4.2 Knot vector

Knot vector มีวิธีการกำหนดหลายรูปแบบ เราสนใจเฉพาะแบบที่เป็น non-periodic (หรือ clamped หรือ open) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$U = \{u_0,\dots,u_m\} = \left\{\underbrace{a,\dots,a}_{p+1}, u_{p+1},\dots,u_{m-p-1}, \underbrace{b,\dots,b}_{p+1}\right\} \tag{3.12}$$

เมื่อ $n = m - p - 1$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้ $a = 0$ และ $b = 0$ เช่นเมื่อ $p = 2, n = 6$ จะได้ $U = 1/5\{0\,0\,0\,1\,2\,3\,4\,5\,5\,5\}$

3.4.3 **หาจุดควบคุมจากการประมาณเส้นโค้งบีสไปลน์ด้วยวิธี** Least Squares

สมมติให้มีข้อมูล $p \geq 1, n \geq p$ และ $Q_0,\dots,Q_m \; (m > n)$ จะหาเส้นโค้งบีสไปลน์ดีกรี p แบบ Non-rational ได้จากสมการ

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)P_i \qquad , a < u < b \tag{3.13}$$

ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

- $Q_0 = C(0) = P_0$ และ $Q_m = C(1) = P_n$
- ที่จุดของข้อมูล Q_k อื่นๆจะถูกประมาณและมีผลรวมของค่าผิดพลาดกำลังสองเป็น

$$e^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \left| Q_k - C(\bar{u}_k) \right|^2 \qquad (3.14)$$

ค่าผิดพลาด e^2 จะมีค่าน้อยที่สุดขึ้นกับจำนวนของจุดควบคุมที่เป็นตัวแปรจำนวน $n+1$ ตัวแปร และ $\{\bar{u}_k\}$ ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่ได้คำนวณไว้แล้ว
กำหนดให้

$$R_k = Q_k - N_{0,p}(\bar{u}_k)Q_0 - N_{n,p}(\bar{u}_k)Q_m \qquad , k = 1,\ldots,m-1$$

จากสมการที่ 3.14

$$\begin{aligned} e^2 &= \sum_{k=1}^{m-1} \left| Q_k - C(\bar{u}_k) \right|^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \left| R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left(R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \right) \cdot \left(R_k - \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left[R_k R_k - 2\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot (R_k P_i) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \right) \right] \end{aligned}$$

หา e^2 ที่น้อยที่สุดโดยหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน e^2 เทียบกับ P_l เมื่อ $l = 1,\ldots,n-1$ ได้

$$\frac{\partial e^2}{\partial P_l} = \sum_{k=1}^{m-1} \left(-2N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k + 2N_{l,p}(\bar{u}_k) \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,p}(\bar{u}_k) P_i \right) \qquad (3.15)$$

ให้สมการที่ 3.15 เป็นศูนย์ จะได้

$$-\sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) N_{i,p}(\bar{u}_k) \cdot P_i = 0 \qquad (3.16)$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot N_{i,p}(\bar{u}_k) \right) \cdot P_i = \sum_{k=1}^{m-1} N_{l,p}(\bar{u}_k) \cdot R_k \qquad (3.17)$$

จากสมการที่ 3.17 เป็นสมการเชิงเส้น 1 สมการที่ประกอบด้วยตัวแปรคือ $P_1,\dots,P_{n-1}$ ฉะนั้นให้ $l=1,\dots,n-1$ จะได้ระบบสมการที่มีสมการทั้งหมด $n-1$ สมการซึ่งมีตัวแปร $n-1$ ตัวแปร และสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\left(N^T N\right)P = R \tag{3.18}$$

$$P = \left(N^T N\right)^{-1} R \tag{3.19}$$

เมื่อ N เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m-1)\times(n-1)$

$$N = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \cdots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix}$$

และ R เป็นคอลัมน์เวคเตอร์ขนาด $(n-1)$

$$R = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \cdots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \end{bmatrix}$$

และ

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

ฉะนั้นเราสามารถหาค่า $\left(P_x\ P_y\ P_z\right)$ ได้จากสมการที่ 3.19 เมื่อทราบเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ และ $\left(R_x\ R_y\ R_z\right)$