บทที่ 2

การลงทะเบียนภาพและการแปลงทางเรขาคณิต

(Image Registration and Geometric Transform)

2.1 บทนำ

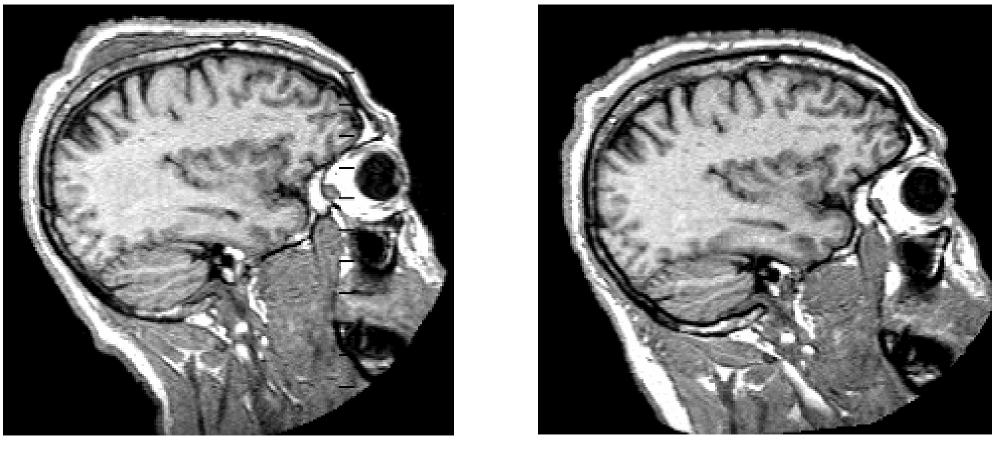
การลงทะเบียนภาพ (Image Registration) เป็นกระบวนการในการจัดวางภาพตั้งแต่สองภาพขึ้นไปลงบนระนาบเดียวกันอย่างสอดคล้อง เพื่อพิจารณารายละเอียดรวมทั้งตำแหน่งของวัตถุบนภาพทั้งหมดได้ในขณะเดียวกัน ด้วยเหตุนี้การลงทะเบียนภาพจึงถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์ผลภาพทางการแพทย์เช่น การวิเคราะห์การเจริญเติบโตของเนื้อเยื่อมะเร็งเป็นต้น

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงประเภทของการลงทะเบียนภาพ วิธีในการลงทะเบียนภาพที่มีอยู่ในปัจจุบัน การแปลงทางเรขาคณิต และค่าที่ไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิต

2.2 ประเภทของการลงทะเบียนภาพ

2.2.1 วัตถุชนิดเดียวกันและถ่ายภาพด้วยวิธีเดียวกัน (Intraobject-Intramodality Registration)

เป็นการลงทะเบียนภาพจากวัตถุชนิดเดียวกันและถ่ายภาพด้วยวิธีเดียวกัน ซึ่งดังตัวอย่างเป็นรูปที่ถ่ายศีรษะของผู้ป่วยที่ได้จากเครื่อง MRI ที่ถ่ายต่างเวลากัน



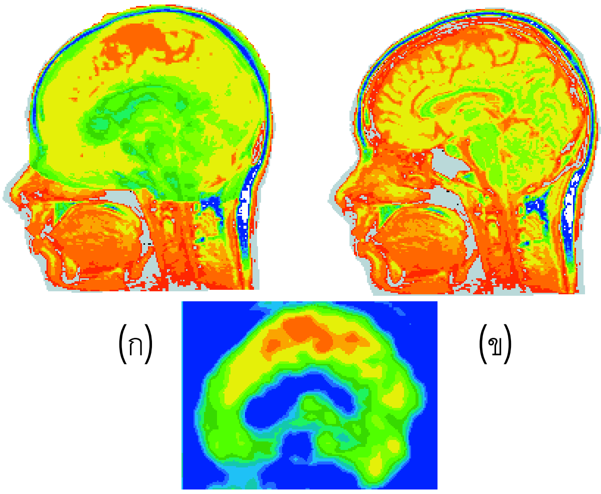
(ก) (ข)

รูปที่ 2.1 (ก) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วย

(ข) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วยหลังจาก 6 สัปดาห์

2.2.2 **วัตถุชนิดเดียวกันแต่ถ่ายภาพต่างวิธีกัน** (Intraobject-Intermodality Registration)

เป็นการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายวัตถุชนิดเดียวกัน แต่ถ่ายภาพต่างวิธีกันซึ่งดังตัวอย่าง เป็นการลงทะเบียนภาพที่ได้จากเครื่อง MRI กับ เครื่อง SPECT แล้วนำทั้งสองภาพมาซ้อนทับกัน



(ก) (ข)

(ค)

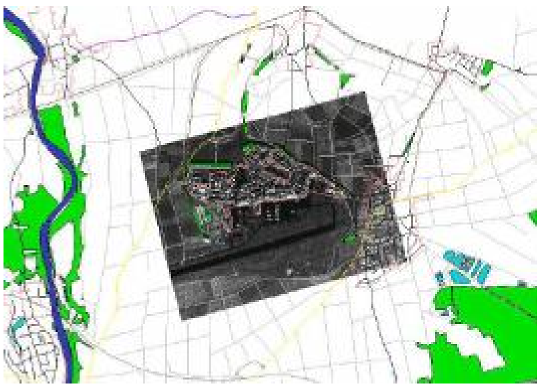
รูปที่ 2.2 (ก) แสดงภาพผลลัพธ์ของการลงทะเบียนภาพ MRI และ SPECT [1]

(ข) แสดงภาพถ่าย MRI ของศีรษะผู้ป่วย

(ค) แสดงภาพถ่าย SPECT ของศีรษะผู้ป่วย

2.2.3 **วัตถุต่างชนิดกัน** (Interobject Registration)

เป็นการลงทะเบียนภาพจากภาพถ่ายวัตถุต่างชนิดกัน และถ่ายภาพต่างวิธีกัน ซึ่งดังตัวอย่าง แสดงภาพถ่ายทางอากาศบนภาพแผนที่



รูปที่ 2.3 แสดงภาพผลลัพธ์ของการลงทะเบียนภาพถ่ายทางอากาศและแผนที่

2.3 วิธีลงทะเบียนภาพ

เราสามารถจำแนกวิธีลงทะเบียนภาพได้หลายแบบด้วยกัน [1-2] ในที่นี้เราแบ่งวิธีการลงทะเบียนภาพได้เป็น 4 วิธีตามคุณลักษณะของภาพที่นำมาใช้ลงทะเบียน ได้แก่

2.3.1 **วิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้จุดควบคุม** (Control-point based registration)

วิธีการลงทะเบียนภาพแบบใช้จุดควบคุม จะใช้จุดที่สอดคล้องกันระหว่างจุดบนภาพทั้งสองภาพในการลงทะเบียนและเรียกจุดเหล่านั้นว่าแลนมาร์ค ดังนั้นความแม่นยำของการลงทะเบียนภาพจึงขึ้นอยู่กับความถูกต้องของแลนมาร์คที่หาได้

แลนมาร์คอาจจะเป็นจุดซึ่งเป็นคุณสมบัติของวัตถุหรือไม่ใช่ก็ได้ เช่น ในภาพทางการแพทย์จะมีแลนมาร์ค เช่น จุดบนอวัยวะหรือขอบของกระดูกเป็นคุณสมบัติของวัตถุ หรือแลนมาร์คที่ได้จากการเอาแหล่งกำเนิดแสงติดไว้ที่ตัวผู้ป่วยตามจุดต่างๆหรือทำเครื่องหมายไว้ที่ตัวผู้ป่วย เป็นแลนมาร์คซึ่งไม่ใช่คุณสมบัติของวัตถุโดยตรง และวิธีที่ได้มาซึ่งแลนมาร์คนั้นมีหลายวิธี เช่น การหาแลนมาร์คด้วยมือหรือการกำหนดจุดซึ่งจำเป็นต้องอาศัยความแม่นยำและความรู้เกี่ยวกับภาพชนิดนั้นๆ เช่นการหาแลนมาร์คในภาพทางการแพทย์เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีการหาแลนมาร์คแบบอัตโนมัติหรือกึ่งอัตโนมัติ เช่นจุดเปลี่ยนโค้ง หรือจุดมุมของรูป [3] และจุดที่มีค่าความโค้งสูงสุด [4]

จากนั้นสามารถหาเมตริกซ์ของการแปลงได้จากการหาความสัมพันธ์ระหว่างแลนมาร์คบนภาพที่หนึ่งกับภาพที่สอง เช่นในภาพที่มีความสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้นสามารถหาเมตริกซ์ของการแปลงได้จากการประมาณค่าเฉลี่ยของค่าผิดพลาดกำลังสอง (Mean Square Error : MSE)

2.3.2 **วิธีลงทะเบียนภาพแบบโมเมนต์** (Moment based registration)

หลักการของวิธีการลงทะเบียนภาพแบบโมเมนต์ จะพิจารณาความสัมพันธ์ของภาพจากคุณสมบัติพื้นฐานของภาพและไม่อาศัยมนุษย์ช่วยในการลงทะเบียนภาพ

เนื่องจากค่าระดับเทา (Gray level) และคุณสมบัติเชิงเรขาคณิตของภาพนั้น ถูกกำหนดลักษณะโดยจุดศูนย์กลางมวล (Center of Gravity) แกนหลัก (Principal Axis) และค่าโมเมนต์อื่นๆ [5-8]

ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ของการแปลง (เลื่อน หมุน ย่อ ขยาย เป็นต้น) ของการแปลงสำหรับภาพมาตรฐาน สามารถคำนวณได้จากการคำนวณโมเมนต์แบบนอร์มอไลซ์ (Normalizing Moments) ในแต่ละภาพ เนื่องจากค่าโมเมนต์แบบนอร์มอไลซ์นี้มีคุณสมบัติที่ไม่แปรผันของภาพ

สำหรับประสิทธิภาพของวิธีการลงทะเบียนภาพแบบนี้ จะไวต่อสัญญาณรบกวนอย่างมาก กล่าวคือ ค่าโมเมนต์และพารามิเตอร์สำหรับการแปลงที่คำนวณได้จากภาพที่มีสัญญาณรบกวนจะมีความผิดพลาดแปรผันตามขนาดของสัญญาณรบกวน เป็นผลให้วิธีลงทะเบียนภาพแบบนี้ไม่นิยมใช้ในการลงทะเบียนภาพมากนักและถูกจำกัดให้ใช้กับภาพที่มีรูปทรงอย่างง่ายเท่านั้น

2.3.3 **วิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้ขอบภาพ** (Edge-based registration)

วิธีลงทะเบียนภาพแบบนี้นิยมใช้กับภาพที่มีขอบภาพชัดเจน และไม่สนใจข้อมูลอื่นบนภาพยกเว้นขอบภาพเท่านั้น

โดยขั้นตอนของการหาขอบภาพสามารถทำได้หลายวิธี เช่นเทมเพลทแมชชิ่ง (Template matching) หรือซีโร่ครอสซิ่ง (Zero Crossing) เป็นต้น อย่างไรก็ตามการหาขอบภาพที่มีสัญญาณรบกวนอาจทำได้ไม่ง่ายนัก

หลังจากนั้นก็เข้าสู่กระบวนการในการลงทะเบียน เช่น วิธี ICP (Iterative Closet Points) หรือซูปเปอร์เคริฟ (Super-Curve) [9] จากนั้นคำนวณหาค่าผิดพลาด โดยใช้ค่าต่ำสุดของค่าเฉลี่ยของค่าผิดพลาดกำลังสอง (Minimum Mean Square Error) หรือการเปรียบเทียบระดับความเข้มสี (Intensity) ของพิกเซลที่เป็นขอบภาพ

แต่เนื่องจากความไม่สมบูรณ์ของข้อมูลที่ได้ หรือขอบภาพที่ได้ไม่ถูกต้องทำให้กระบวนการลงทะเบียนผิดพลาดได้ กล่าวคือค่าที่คำนวณได้อาจจะให้ค่าผิดพลาดน้อยสุดในช่วงหนึ่ง (Local minimum) ไม่ใช่ค่าที่ผิดพลาดน้อยสุดจริงๆ (Global minimum) ดังนั้นผลของการลงทะเบียนจึงผิดพลาด จึงต้องอาศัยกระบวนการในการหาจุดที่เป็นค่าผิดพลาดน้อยสุดจริงๆ จึงจะช่วยแก้ปัญหาข้างต้นได้

อย่างไรก็ตามวิธีลงทะเบียนภาพแบบใช้ขอบภาพ นับว่าเป็นวิธีที่แพร่หลายเนื่องจากขอบภาพเป็นข้อมูลพื้นฐานของภาพ

2.3.4 **วิธีลงทะเบียนภาพแบบพิจารณาความเหมือนกันของภาพ** (Optimization of a similarity measurement)

หลักการของวิธีลงทะเบียนภาพแบบพิจารณาความเหมือนกันของภาพคือ จะไม่ดึงคุณสมบัติใดๆของภาพ แต่จะทำการแปลงภาพๆหนึ่งและทำการวัดความเหมือนของภาพทั้งสอง และจะทำการแปลงภาพนั้นอีกจนกว่าภาพทั้งสองจะเหมือนกันที่สุด

การวัดความเหมือนของภาพจะพิจารณาจากคุณสมบัติของภาพเช่น Correlation Coefficient, Correlation function หรือ Sum of absolute differences [1-2]

วิธีลงทะเบียนภาพวิธีนี้จำเป็นต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ เช่นการใช้กระบวนการเจเนติก (Genetic Algorithm) [10] ทำให้ใช้เวลาในการประมวลผลมาก

อย่างไรก็ตาม วิธีลงทะเบียนภาพแบบนี้อาจให้ผลลัพธ์ที่ผิดพลาดได้ เนื่องจากคุณสมบัติที่ได้กล่าวไปข้างต้นนั้นมีค่าแปรผันกับค่าความเข้มแสงของภาพ ฉะนั้นวิธีนี้จึงเหมาะที่จะใช้กับภาพที่ถ่ายด้วยเทคนิคเดียวกันเท่านั้น (Same modality)

2.4 **การแปลงเชิงเรขาคณิต** (Geometric transformation)

ในงานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกนั้น บางครั้งจำเป็นต้องมีการเคลื่อนย้ายภาพไปยังตำแหน่งใหม่ ย่อ-ขยายภาพ หรือมีการหมุนภาพให้อยู่ในมุมมองที่เหมาะสม ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้การแปลงเชิงเรขาคณิต

ในการพิจารณาการแปลงนั้นจะพิจารณาได้ว่าเป็นการแปลงจุดในปริภูมิสามมิติ และเพื่อความเข้าใจง่ายจึงมักจะเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ โดยกำหนดให้จุดที่ต้องการแปลงเป็นจุด P มีพิกัดเป็น (x, y, z) ใดๆ เมื่อต้องการย้ายตำแหน่งของจุด P ไปยังพิกัดใหม่คือ P' ซึ่งมีพิกัด (x', y', z') ก็ทำได้โดยการนำพิกัดของจุด P ไปบวกกับเมตริกซ์การแปลงซึ่งก็คือ T สามารถแสดงเมตริกซ์ของการแปลงได้ดังนี้

$$P' = P + T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

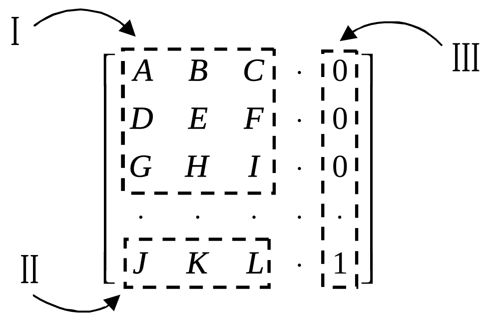
นอกจากนี้เมื่อนำพิกัดของจุด P มาคูณกับเมตริกซ์การแปลง T ให้ได้พิกัดใหม่คือ P' นั้นจะเป็นการสเกล การหมุน การสะท้อน หรืออื่นๆ ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ภายในเมตริกซ์การแปลงนั้นและสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$P' = P \cdot T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

สำหรับการแปลงเชิงเรขาคณิตในทางคอมพิวเตอร์กราฟิก โดยทั่วไปแล้วจะประกอบด้วยการแปลงหลายๆชนิดประกอบกัน และเนื่องจากเป็นการคำนวณในรูปของเมตริกซ์จึงทำให้ยาก ในการคำนวณเมตริกซ์ที่มีรูปแบบแตกต่างกัน จึงได้มีการนำระบบพิกัดโฮโมจีเนียส (Homogeneous Coordinate System) เข้ามาใช้เพื่อแก้ปัญหานี้

ในระบบพิกัดโฮโมจีเนียส จุดในระบบสามมิติ (x, y, z) จะถูกแทนด้วยระบบสี่มิตินั่นคือ (x, y, z, H) โดยจะมี H เป็นค่าแฟกเตอร์ที่มีหน้าที่สเกลซึ่งจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ จุด (x, y, z, H) จะถูกนอร์มอลไลซ์เป็น $(x/H, y/H, z/H, 1)$ โดยทั่วไปแล้วค่า H จะมีค่าเท่ากับ 1 ดังนั้นจุด (x, y, z) ใดๆจะมีค่าในระบบพิกัดโฮโมจีเนียสเป็น $(x, y, z, 1)$

จากรูปที่ 2.4 เมตริกซ์ย่อย I เป็นส่วนที่กำหนดว่าเป็นการแปลงแบบใด เช่น การหมุน การสเกล การสะท้อน เป็นต้น ส่วนเมตริกซ์ย่อย II เป็นส่วนของการย้ายตำแหน่งแบบเชิงเส้น และในส่วนสุดท้ายเมตริกซ์ย่อย III ใช้ในการรวมระหว่างการเคลื่อนย้ายพิกัดและการแปลงที่อยู่ในรูปการคูณ โดยมีรายละเอียดของการแปลงแบบต่างๆดังนี้



รูปที่ 2.4 ส่วนประกอบของระบบพิกัดโฮโมจีเนียส

2.4.1 **การเลื่อนพิกัด** (Translation)

เมตริกซ์การแปลง (T_T) ที่ใช้สำหรับการแปลงที่ต้องการเลื่อนพิกัดมีลักษณะดังนี้

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

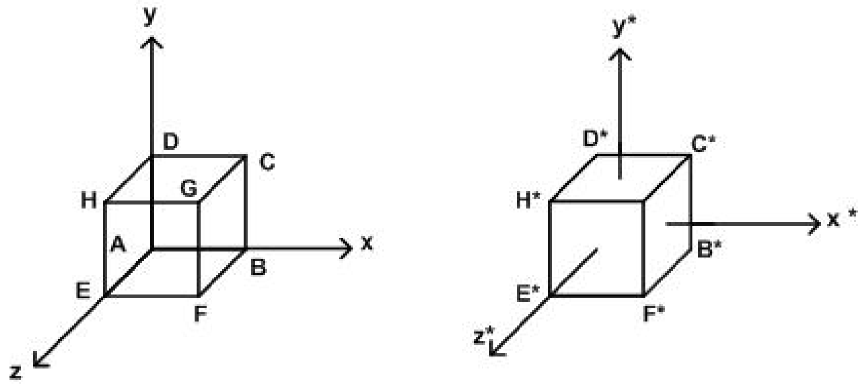
โดยที่ค่า T_x, T_y และ T_z แสดงระยะทางที่ต้องการเคลื่อนย้ายตำแหน่งไปในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ และพิกัดของจุดในระบบโฮโมจีเนียส (x', y', z', h) เป็น

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+T_x & y+T_y & z+T_z & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

การเลื่อนเมตริกซ์เป็นการแปลงที่มีประโยชน์มากในทางคอมพิวเตอร์กราฟิก เนื่องจากข้อมูลภาพต้นฉบับที่นำมาใช้จะมีตำแหน่งอยู่ในด้านบวกเท่านั้น จึงจำเป็นต้องการอาศัยการแปลงแบบนี้เพื่อเลื่อนพิกัดกึ่งกลางของข้อมูลต้นฉบับให้มาอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0,0) เสียก่อน แสดงในรูปที่ 2.5 จึงถือได้ว่าการแปลงแบบเลื่อนพิกัด เป็นพื้นฐานที่สำคัญของการสร้างภาพทางคอมพิวเตอร์กราฟิก



รูปที่ 2.5 การเลื่อนจุดกึ่งกลางของปริมาตรต้นฉบับมายังจุดกำเนิด

2.4.2 **การสเกล** (Scaling)

การสเกลเป็นการแปลงเพื่อปรับเปลี่ยนขนาดของวัตถุที่ต้องการ มีเมตริกซ์การแปลง (S) ดังนี้

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

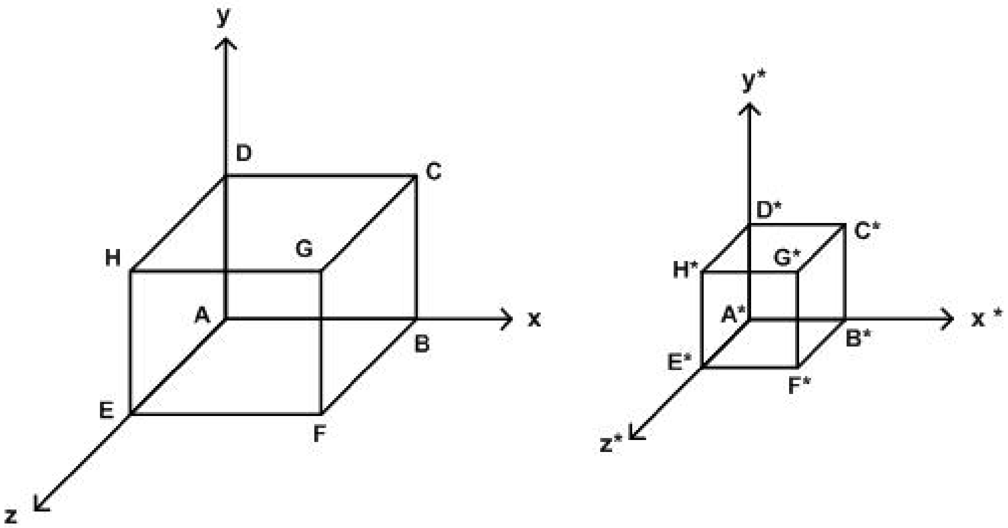
โดยที่ S_x, S_y และ S_z เป็นสัมประสิทธิ์การสเกลสำหรับพิกัด x, y และ z ตามลำดับ และพิกัดของจุดในระบบโฮโมจีเนียส (x', y', z', h) เป็น

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xS_x & yS_y & zS_z & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ค่า S_x, S_y และ S_z จะเป็นตัวกำหนดว่าเป็นการย่อหรือขยายรูป กล่าวคือ ถ้า S มีค่ามากกว่า 1 จะเป็นการขยายภาพและถ้า S มีค่าน้อยกว่า 1 จะเป็นการย่อขนาดภาพ



รูปที่ 2.6 การสเกลวัตถุ

2.4.3 **การหมุนวัตถุ** (Rotation)

การหมุนวัตถุเป็นการหมุนวัตถุรอบแกนต่างๆทั้งสามแกน ซึ่งได้แก่ แกน x, y หรือ z โดยการอ้างอิงการมองในลักษณะมองออกจากจุดกำเนิดไปตามแนวแกน เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกนต่างๆในทิศทางตามเข็มนาฬิกา มีดังนี้

- เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน x ไปเป็นมุม q คือ

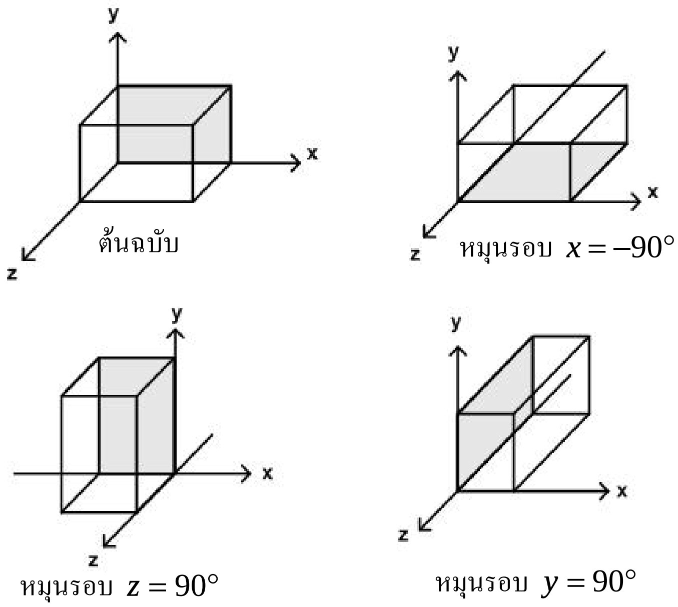
$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & \sin q & 0 \\ 0 & -\sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

- เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน y ไปเป็นมุม f คือ

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos f & 0 & -\sin f & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin f & 0 & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

- เมตริกซ์การแปลงของการหมุนรอบแกน z ไปเป็นมุม j คือ

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos j & \sin j & 0 & 0 \\ -\sin j & \cos j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$



รูปที่ 2.7 การแปลงแบบหมุนรอบแกนทั้งสาม

2.4.4 **การสะท้อน** (Reflection)

การสะท้อนวัตถุเป็นการสะท้อนพิกัดของวัตถุไปยังพิกัดที่อยู่อีกด้านหนึ่งของระนาบการสะท้อน xy, yz หรือ xz เมตริกซ์ของการสะท้อนมีดังต่อไปนี้

- เมตริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ xy คือ

$$Rf_{XY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด z โดย $z' = -z$

- เมตริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ yz คือ

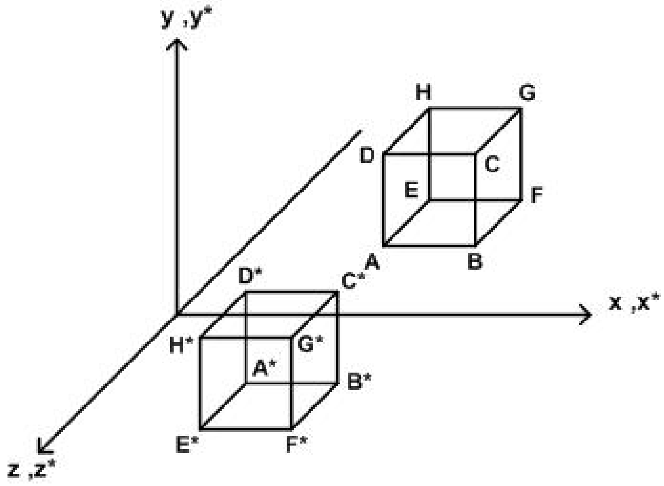
$$Rf_{YZ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด x โดย $x' = -x$

- เมตริกซ์ของการสะท้อนกับระนาบ xz คือ

$$Rf_{XZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

จะเปลี่ยนเฉพาะพิกัด y โดย $y' = -y$



รูปที่ 2.8 การสะท้อนวัตถุกับระนาบ xy

2.4.5 **การเฉือน** (Shearing)

การเฉือนในปริภูมิสามมิติเป็นการแปลงพิกัดตามแกนของสองแกนใดๆ (สมมติว่าเป็น x และ y) โดยสัมพันธ์กับค่าของพิกัดตามแนวแกนที่สาม (z) เป็นผลให้ค่าพิกัดตามแนวแกนของสองแกนแรกเปลี่ยนไป ในขณะที่ค่าพิกัดตามแนวแกนที่สามนั้นมีค่าคงเดิม

- เมตริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน x

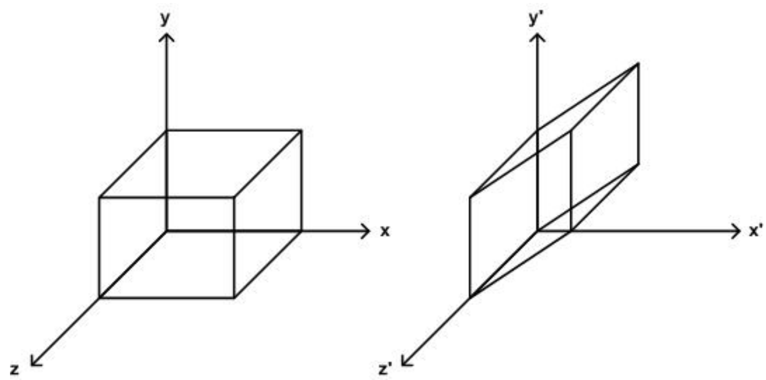
$$Sh_x = \begin{bmatrix} 1 & Sh_{xy} & Sh_{xz} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

- เมตริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน y

$$Sh_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ Sh_{yx} & 1 & Sh_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

- เมตริกซ์ของการเฉือนโดยสัมพันธ์กับแกน z

$$Sh_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ Sh_{zx} & Sh_{zy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$



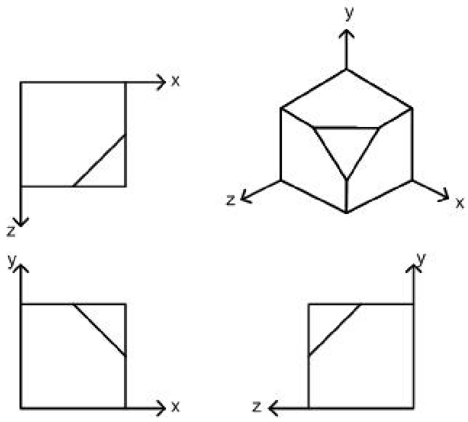
รูปที่ 2.9 การเฉือนโดยสัมพันธ์กับค่า z เมื่อ $Sh_{xz} = 0$ และ $Sh_{xy} = 1$

2.4.6 **การฉายภาพ** (Projection)

การฉายภาพเป็นการแปลงจาก n มิติไปเป็น $n-1$ มิติ การฉายภาพมี 2 ประเภทคือแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สนใจเฉพาะการฉายภาพแบบเชิงเส้นเท่านั้น สำหรับการฉายภาพแบบเชิงเส้นยังสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

2.4.6.1 **การฉายภาพแบบตั้งฉาก** (Orthographic Projections)

การฉายภาพแบบตั้งฉากเป็นวิธีฉายภาพแบบขนานอย่างหนึ่งที่มีรูปแบบอย่างง่ายและถูกใช้ในการวาดภาพทางวิศวกรรม โดยจะแสดงขนาดจริงของวัตถุในแต่ละด้าน เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบต่างๆเป็นดังนี้



รูปที่ 2.10 แสดงการฉายภาพลงบนระนาบ $x=0, y=0$ และ $z=0$

- เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $x=0$

$$P_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

- เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $y=0$

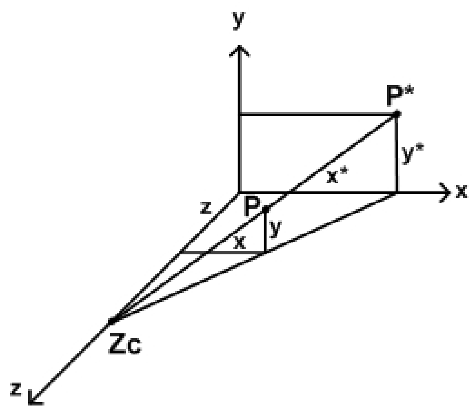
$$P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

- เมตริกซ์ของการฉายภาพลงบนระนาบ $z = 0$

$$P_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.4.6.2 **การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ** (Perspective Projections)

เป็นรูปแบบการแปลงเชิงเรขาคณิตอย่างหนึ่งซึ่งแตกต่างจากการแปลงแบบอื่นๆที่ได้กล่าวมาแล้ว คือการแปลงแบบเลื่อนพิกัด การสเกล การหมุน การสะท้อน และการเฉือนนั้นเป็นการแปลงซึ่งคงคุณสมบัติความขนานกันของเส้น แต่การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟนี้แตกต่างออกไป และการแปลงแบบนี้ยังมีผลให้ขนาดของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปโดยมีความสัมพันธ์แบบผกผันกับระยะห่างระหว่างวัตถุกับจุดศูนย์กลางของการฉายภาพ



รูปที่ 2.11 การฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟ

พิจารณารูปที่ 2.11 เป็นการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟและทำการฉายภาพจากจุด P ไปยังจุด $P*$ บนระนาบ $z = 0$ โดยมี z_C เป็นจุดศูนย์กลางของการฉายภาพ (Center of projection)

จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย ได้ว่า

$$\frac{x^*}{z_C} = \frac{x}{z_c - z}$$

หรือ $$x^{*} = \frac{x}{1-\frac{z}{z_c}}$$

และ $$\frac{y^{*}}{\sqrt{\left(x^{*}\right)^{2} + z_c^{2}}} = \frac{y}{\sqrt{x^{2} + \left(z_c - z\right)^{2}}}$$

หรือ $$y^{*} = \frac{y}{1-\frac{z}{z_c}}$$

จะได้ x^{*}, y^{*} เป็นพิกัดของ $P*$

กำหนดให้ $r = \frac{-1}{z_c}$ จะได้ $x* = \frac{x}{rz+1}$ และ $y* = \frac{y}{rz+1}$ (2.21)

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$[x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad 0 \quad rz+1] \qquad (2.22)$$

เนื่องจาก $h = rz + 1 \neq 1$ ดังนั้นจึงคูณสมการที่ 2.22 ด้วย $\frac{1}{rz+1}$ จะได้

$$[x* \quad y* \quad z* \quad 1] = \begin{bmatrix} \frac{x}{rz+1} & \frac{y}{rz+1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.23)$$

จะเห็นว่าสมการที่ 2.21 มีค่าเท่ากันกับสมการที่ 2.23

จะได้เมตริกซ์ของการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟเมื่อจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน x, y และ z ดังนี้

- กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน x หรือที่พิกัด $[-1/p \quad 0 \quad 0 \quad 1]$

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x \quad y \quad z \quad px+1] \tag{2.24}$$

และ

$$[x* \quad y* \quad z* \quad 1]=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{px+1} & \dfrac{y}{px+1} & \dfrac{z}{px+1} & 1\end{bmatrix} \tag{2.25}$$

- กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน y หรือที่พิกัด $[0 \quad -1/q \quad 0 \quad 1]$

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & q\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x \quad y \quad z \quad qy+1] \tag{2.26}$$

และ

$$[x* \quad y* \quad z* \quad 1]=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{qy+1} & \dfrac{y}{qy+1} & \dfrac{z}{qy+1} & 1\end{bmatrix} \tag{2.27}$$

- กรณีที่มีจุดศูนย์กลางของการฉายภาพอยู่บนแกน z หรือที่พิกัด $[0 \quad 0 \quad -1/r \quad 1]$

$$[x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & r\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[x \quad y \quad z \quad rz+1] \tag{2.28}$$

และ

$$[x* \quad y* \quad z* \quad 1]=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{rz+1} & \dfrac{y}{rz+1} & \dfrac{z}{rz+1} & 1\end{bmatrix} \tag{2.29}$$

2.4.7 **การแปลงแบบผสม** (Multiple Transformations)

โดยทั่วไปในการใช้งานทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกจำเป็นต้องใช้การแปลงหลายแบบร่วมกัน เช่นในการหมุนวัตถุรอบเส้นตรงใดๆ ซึ่งขนานกับแกน z จำเป็นต้องทำการเลื่อนให้จุดศูนย์กลางของวัตถุไปยังจุดกำเนิดก่อน จึงจะทำการหมุนวัตถุรอบแกน z จากนั้นจึงทำการเลื่อนวัตถุกลับไปยังตำแหน่งเดิม

ตัวอย่าง หมุนวัตถุเป็นมุม j รอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน z ซึ่งผ่านจุด $\left(-T_x,-T_y,-T_z\right)$ กำหนดให้เมตริกซ์ M เป็นเมตริกซ์การแปลงแบบผสม จะได้

$$M = T_T \cdot R_Z \cdot T_T^{-1} \tag{2.30}$$

เมื่อ

$$T_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix} \; T_T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & -T_z & 1 \end{bmatrix} \; R_Z = \begin{bmatrix} \cos j & \sin j & 0 & 0 \\ -\sin j & \cos j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเมตริกซ์ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ ดังนั้นลำดับของเมตริกซ์ของการแปลงจึงมีความสำคัญอย่างยิ่ง

2.5 **ค่าที่ไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิต** (Geometric Invariance)

ความไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตเป็นคุณสมบัติเชิงเรขาคณิตของภาพที่ยังคงคุณสมบัตินั้นๆ แม้ว่าภาพนั้นจะถูกทำการแปลงไปก็ตาม

เนื่องจากคุณสมบัติที่ไม่เปลี่ยนแปลงนี้เอง จึงถูกนำไปใช้ในงานวิจัยต่างๆมากมาย [11] และในงานวิจัยนี้ได้นำคุณสมบัติความไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตมาใช้ในการหาจุดสอดคล้องระหว่างภาพสองภาพ จากแลนมาร์คจำนวนหนึ่งบนภาพทั้งสอง

2.5.1 **ประเภทของค่าที่ไม่ผันแปร**

2.5.1.1 **ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์** (Relative Invariance)

จะได้ว่าค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพที่ถูกทำการแปลงจะมีค่าเป็นสัดส่วนกันกับค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพต้นฉบับดังสมการที่ 2.31

$$I(r,a) = \Delta I(r',a) \tag{2.31}$$

เมื่อ I คือค่าไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิต

a คือเซตของพารามิเตอร์สำหรับการแปลง

Δ คืออัตราส่วนค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพต้นฉบับกับภาพที่ถูกแปลง

r, r' คือพิกัดของภาพ

2.5.1.2 **ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์** (Absolute Invariance)

จะได้ว่าค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ของภาพต้นฉบับกับภาพที่ถูกแปลงนั้นจะมีค่าเท่ากัน โดยทั่วไปค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์จะหาได้จากการกำจัดแฟกเตอร์ Δ ของค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์สองค่า เช่น

$$I_1(r,a) = \Delta I_1(r',a) \tag{2.32}$$

$$I_2(r,a) = \Delta I_2(r',a) \tag{2.33}$$

จะได้ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์เป็น

$$\frac{I_2(r,a)}{I_1(r,a)} = \frac{I_2(r',a)}{I_1(r',a)} \tag{2.34}$$

เมื่อ I_1, I_2 คือค่าไม่ผันแปรของภาพเรขาคณิตของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

a คือเซตของพารามิเตอร์สำหรับการแปลง

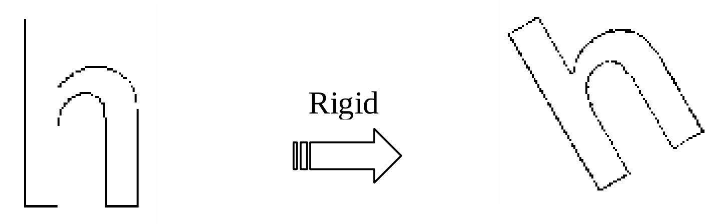
Δ คืออัตราส่วนค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ของภาพต้นฉบับกับภาพที่ถูกแปลง

r, r' คือพิกัดของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

2.5.2 **ค่าที่ไม่ผันแปรเชิงเรขาคณิตสำหรับรูปแบบการแปลงภาพแต่ละชนิด**

2.5.2.1 **การแปลงแบบริจิด** (Rigid Transformation)

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วยการเลื่อนและการหมุนเท่านั้น

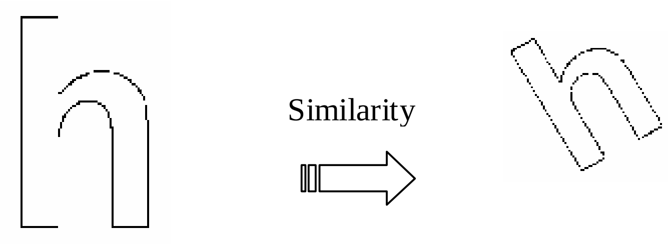


รูปที่ 2.12 ลักษณะการแปลงแบบริจิด

จากรูปที่ 2.12 จะเห็นว่าความยาวของเส้น, พื้นที่และมุมของของภาพที่ถูกแปลงจะยังมีค่าเท่ากับภาพต้นฉบับ นั่นคือ การแปลงแบบริจิดนี้จะมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ คือ ความยาวของเส้น พื้นที่และมุม

2.5.2.2 **การแปลงแบบสิมิลาริตี้** (Similarity Transformation)

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วยการเลื่อน การหมุนและการสเกล (โดย $S_X = S_y$)



รูปที่ 2.13 ลักษณะการแปลงแบบสิมิลาริตี้

จากรูปที่ 2.13 จะเห็นว่ามุมของของภาพที่ถูกแปลงจะยังมีค่าเท่ากับภาพต้นฉบับ และความยาวของเส้น L กับเส้นของภาพที่ถูกแปลง L' และพื้นที่ของภาพ A กับภาพที่ถูกแปลง A' จะมีค่าสัมพันธ์กันด้วยค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ที่ใช้แปลง ดังสมการที่ 2.35 และสมการที่ 2.36

$$L' = \det(T) \cdot L \tag{2.35}$$

และ

$$A' = \det(T) \cdot A \tag{2.36}$$

เมื่อ L, L' คือความยาวของเส้นของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

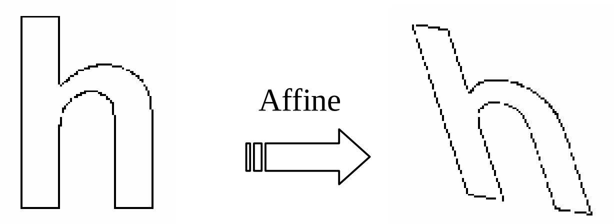
A, A' คือพื้นที่ของภาพต้นฉบับและภาพที่ถูกแปลง

T คือเมตริกซ์ที่ใช้แปลง

นั่นคือการแปลงแบบสิมิลาริตี้ นี้จะมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ คือ มุม ความยาวของเส้นและพื้นที่ และมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ คือ มุม อัตราส่วนของความยาวและอัตราส่วนของพื้นที่

2.5.2.3 **การแปลงแบบแอฟไฟน์** (Affine Transformation)

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นซึ่งประกอบไปด้วย การเลื่อน การหมุน การสเกล และการเฉือน การแปลงแบบแอฟไฟน์ มีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ คือ ความยาวของเส้น พื้นที่และจุดเปลี่ยนโค้ง (Inflection Points) และจุดศูนย์กลางของภาพ (Centroid) และมีค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมพัทธ์ คือ อัตราส่วนของมุม อัตราส่วนของความยาว อัตราส่วนของพื้นที่และความขนานกันของเส้นคู่ขนาน



รูปที่ 2.14 ลักษณะการแปลงแบบแอฟไฟน์

การแปลงแบบแอฟไฟน์มีค่าที่ไม่ผันแปร ดังนี้

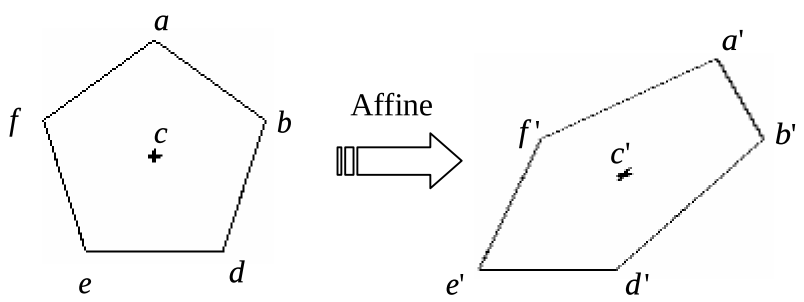
1. เมื่อ c เป็นจุดตัดของเส้นตรง a,b จะได้ว่า $A(c)$ ยังคงเป็นจุดตัดของเส้นตรง $A(a), A(b)$ เมื่อ A เป็นการแปลงแบบแอฟไฟน์

2. เมื่อ c เป็นจุดศูนย์กลางของภาพและ $A(c)$ เป็นจุดศูนย์กลางของภาพที่ถูกทำการแปลง จะได้

$$A(c_x) = \sum_{i=1}^{n} x_i' \ , A(c_y) = \sum_{i=1}^{n} y_i' \qquad (2.37)$$

และ

$$c_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ c_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (2.38)$$



รูปที่ 2.15 อัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยมภายในภาพ

3. ให้ a,b,c,d,e,f เป็นจุดบนภาพต้นฉบับและ a',b',c',d',e',f' เป็นจุดที่ถูกแปลงไปยังภาพผลลัพธ์ตามลำดับ จะได้ความสัมพันธ์ของพื้นที่สามเหลี่ยมดังนี้

$$\frac{\Delta abc}{\Delta bcd} = \frac{\Delta a'b'c'}{\Delta b'c'd'} \tag{2.39}$$

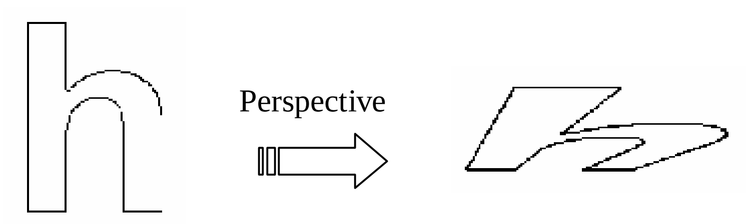
เมื่อ Δabc เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี a,b,c เป็นจุดยอดมุม

Δbcd เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี b,c,d เป็นจุดยอดมุม

$\Delta a'b'c'$ เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี a',b',c' เป็นจุดยอดมุม

$\Delta b'c'd'$ เป็นพื้นที่สามเหลี่ยมที่มี b',c',d' เป็นจุดยอดมุม

2.5.2.4 **การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ** (Perspective Transformation)



รูปที่ 2.16 ลักษณะการแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟ

เป็นการแปลงแบบเชิงเส้นที่ประกอบด้วยการแปลงแบบแอฟไฟน์และการฉายภาพแบบเพอร์สเปกทีฟอีกด้วย

การแปลงแบบเพอร์สเปกทีฟมีค่าที่ไม่ผันแปร ดังนี้

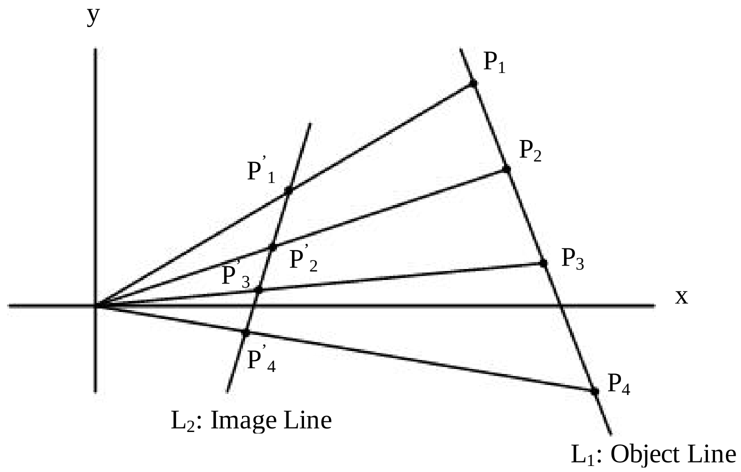
1. อัตราส่วนของจุดบนเส้นตรงเดียวกัน [12]

พิจารณารูปที่ 2.13 กำหนดให้ $P_1,...,P_4$ เป็นจุดบนเส้นตรง L_1 และ $P_1',...,P_4'$ เป็นจุดบนเส้น L_2 ซึ่งจุดที่ได้จากการฉายภาพวัตถุ พิจารณารูปที่ 2.13 จะได้ความสัมพันธ์ดังสมการที่ 2.40

$$\frac{L_{12}' \cdot L_{34}'}{L_{13}' \cdot L_{24}'} = \frac{L_{12} \cdot L_{34}}{L_{13} \cdot L_{24}} \tag{2.40}$$

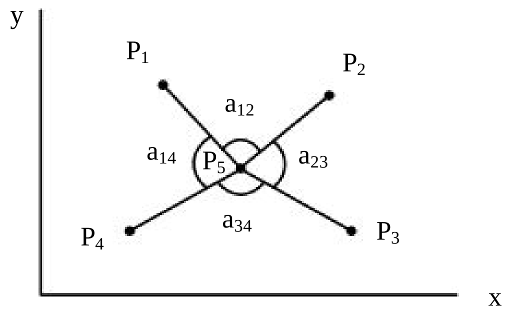
เมื่อ $L_{n,m}$ เป็นเส้นตรงระหว่างจุด P_n, P_m

$L'_{n,m}$ เป็นเส้นตรงระหว่างจุด P'_n, P'_m



รูปที่ 2.17 การฉายภาพจุดบนเส้นตรง L_1มายังเส้นตรง L_2

2. ห้าจุดบนระนาบร่วม (Five-Point Coplanar)



รูปที่ 2.18 จุดบนระนาบทั้งห้า

กำหนดให้ $P_1,\ldots,P_5$ เป็นจุดบนระนาบซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน สามารถสร้างสมการความสัมพันธ์ได้ดังสมการที่ 2.41 [12] และเรียกว่าเป็น “Five-Point Coplanar Invariance”

$$\frac{|m'_{512}||m'_{534}|}{|m'_{514}||m'_{523}|}=\frac{|m_{512}||m_{534}|}{|m_{514}||m_{523}|} \tag{2.41}$$

เมื่อ $m_{ijk}=\left(P_i\ P_j\ P_k\right)$, $P_i=\left(x_i\ y_i\ 1\right)^t$ และ $m'_{ijk}=\left(P'_i\ P'_j\ P'_k\right)$, $P'_i=\left(x'_i\ y'_i\ 1\right)^t$ และ $|m|$ เป็นดีเทอร์มิแนนท์ของ m

พิจารณา $|m_{512}|$ สามารถหาได้จาก 2.42(ก) หรือ 2.42(ข)

$$\begin{vmatrix} x_5 & x_1 & x_2 \\ y_5 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x_5 & x_1-x_5 & x_2-x_5 \\ y_5 & y_1-y_5 & y_2-y_5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.42}$$

(ก) (ข)

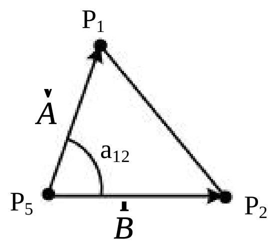
จากสมการ 2.42(ก) พบว่ามีค่าเป็นสองเท่าของพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุด P_1, P_2, P_5 เป็นจุดยอดมุมซึ่งมีพื้นที่ดังสมการ 2.43 เมื่อ $d_{i,j}$ เป็นระยะทางระหว่างจุด P_i และ P_j

$$\begin{aligned} Area &= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\check{A}\times\check{B}\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left|d_{5,1}\right|\left|d_{5,2}\right|\cdot\sin a_{12} \end{aligned} \tag{2.43}$$

เมื่อ $\check{A},\check{B}$ คือค่าเวกเตอร์ระหว่างจุด P_i และ P_j

$d_{i,j}$ คือระยะทางระหว่างจุด P_i และ P_j

$a_{i,j}$ คือมุมระหว่างจุด P_i และ P_j



รูปที่ 2.19 สามเหลี่ยม $P_5P_1P_2$

แทนสมการที่ 2.43 ในสมการที่ 2.41 จะได้ค่าที่ไม่ผันแปรแบบสัมบูรณ์ ในรูปของอัตราส่วนระหว่างมุมดังสมการที่ 2.44 [12]

$$\frac{\sin a'_{12} \sin a'_{34}}{\sin a'_{14} \sin a'_{23}} = \frac{\sin a_{12} \sin a_{34}}{\sin a_{14} \sin a_{23}} \tag{2.44}$$

เมื่อ $a_{i,j}$ คือมุมระหว่างจุด P_i และ P_j ของภาพต้นฉบับ
$a'_{i,j}$ คือมุมระหว่างจุด P_i และ P_j ของภาพที่ถูกแปลง